บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา

การศึกษางานวิจัยด้านต่างๆ โดยทั่วไปจะอาศัยระเบียบวิธีทางสถิติเพื่อที่จะหาข้อสรุปสำหรับการอนุมานประชากร เช่น การทดสอบสมมติฐาน ในการทดสอบสมมติฐาน โดยทั่วไปผู้ทำการวิจัยจะใช้วิธีเลือกหน่วยตัวอย่างขึ้นมาจำนวนหนึ่งเป็นตัวแทนของประชากรที่สนใจ และใช้ข้อมูลจากตัวอย่างนี้ตัดสินว่าควรปฏิเสธหรือไม่ปฏิเสธสมมติฐานนั้น โดยเลือกตัวสถิติที่สอดคล้องกับเรื่องที่สนใจทำการศึกษาและเหมาะสมกับข้อมูลที่ต้องการวิเคราะห์ เพื่อให้ผลสรุปของการวิจัยมีความถูกต้องและมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มเดียว เป็นการตรวจสอบว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะที่สนใจศึกษาในประชากรนั้นๆ เป็นไปตามที่ผู้วิจัยคาดไว้หรือไม่ ซึ่งตัวสถิติที่มีความแกร่งสำหรับการทดสอบค่าเฉลี่ยคือ Z เมื่อทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร และตัวสถิติทดสอบ t เมื่อไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการใช้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบคือ ข้อมูลของประชากรที่นำมาใช้ในการทดสอบมีการแจกแจงแบบปกติ แต่ในทางปฏิบัติ บางครั้งข้อมูลของประชากรที่นำมาทดสอบอาจไม่มีการแจกแจงแบบปกติ และผู้วิจัยยังคงใช้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบดังกล่าว ผลสรุปที่ได้อาจผิดพลาด

ในปี ค.ศ. 1928 Sophister, Neyman และPearson ได้พบว่า ความเบ้ (Skewness) ของการแจกแจงมีผลกระทบต่อการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบ t มากกว่าความโด่ง(Kurtosis) และผลการศึกษายังแสดงให้เห็นว่าเมื่อข้อมูลของประชากรมีความเบ้แบบบวก (Positively skewed distribution) หรือเบ้ขวา จะทำให้การแจกแจงของตัวสถิติ t มีความเบ้เป็นลบ ซึ่งได้ทำการศึกษาโดยใช้ $|t|$ ในรูปช่วงความเชื่อมั่นของ μ เพื่อลดผลกระทบที่เกิดจากความเบ้ การศึกษานี้จะให้ผลถูกต้องเมื่อประชากรมีความเบ้เพียงเล็กน้อย

เนื่องจากข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบค่าเฉลี่ยด้วยตัวสถิติทดสอบ t คือ ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งในทางปฏิบัติอาจไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น นักสถิติหลายท่านจึงได้เสนอตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย เมื่อประชากรไม่ได้อยู่ภายใต้การแจกแจงแบบปกติ เช่น Box และ Anderson (1955 : 1-26) Hartigau (1969 : 1303-1317) หลีกเลี่ยงปัญหาที่เกิดจากการแจกแจงของประชากรโดยอาศัยเทคนิคทางด้านนอนพาราเมตริก(Nonparametric)

Tukey(1964) Andrews(1972) และ Yuen (1974 : 165-170) ได้ศึกษาโดยใช้เทคนิคการตัดปลาย(trimming)สำหรับข้อมูลที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบสมมาตรชนิดหางยาว (long-tailed symmetric distribution) Johnson (1978 : 536-544) ได้เสนอตัวสถิติเพื่อการทดสอบค่าเฉลี่ยเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบไม่สมมาตร โดยอาศัยหลักการกระจายของ Cornish – Fisher

นอกจากนี้ Sutton (1993 : 802-810) ได้ทดสอบสมมติฐานทางด้านมากกว่าเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของตัวสถิติทดสอบทีและสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบไม่สมมาตร พบว่าตัวสถิติทดสอบทีของจอห์นสันจะมีความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ต่ำกว่าสถิติทดสอบทีและมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบทีในสถานการณ์ต่างๆ แต่ถ้าประชากรมีความเบ้มากและกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กจะทำให้สถิติทดสอบทีของจอห์นสันขาดความเที่ยงตรง Suttonจึงได้เสนอวิธีการทดสอบโดยอาศัยหลักการสุ่มตัวอย่างซ้ำของบูตสแตรป(bootstrap resampling) ซึ่งวิธีนี้จะให้ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 ต่ำกว่าสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน

และในปี ค.ศ.1995 Ling Chen ได้เสนอตัวสถิติเพื่อการทดสอบโดยอาศัยเทคนิคการกระจายของ Edgeworth (Edgeworth expansion) สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางด้านมากกว่า และเปรียบเทียบสถิติทดสอบทีของลิงเชนกับสถิติทดสอบแบบผสมของซัตตัน เมื่อประชากรมีการแจกแจงเลขชี้กำลังที่ความเบ้เท่ากับ 2.00 การแจกแจงไวบูลย์ที่ความเบ้เท่ากับ 2.18 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 และ 20 พบว่า สถิติทดสอบทีของลิงเชนมีความแม่นยำและมีอำนาจการทดสอบมากกว่าสถิติทดสอบแบบผสมของซัตตัน เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

มีหลายกรณีที่พบว่า ข้อมูลจะมีการแจกแจงแบบเบ้ขวาซึ่งมักจะพบมากกว่าข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเบ้ซ้าย เช่น งานด้านบริการลูกค้า ได้แก่ ระยะเวลาที่พนักงานให้บริการลูกค้าต่อคน ระยะเวลาที่ลูกค้ารอคอยจนกระทั่งได้รับบริการ งานด้านอุตสาหกรรม ได้แก่ อายุการใช้งานของเครื่องจักร อุปกรณ์หรือเครื่องใช้ และงานด้านประกันภัย ได้แก่ ค่าสินไหมทดแทน ความยาวนานของชีวิต เป็นต้น ข้อมูลที่กล่าวมาข้างต้นโดยทั่วไปจะมีลักษณะการแจกแจงแบบเบ้ขวา เช่น การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential distribution) การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-square distribution) การแจกแจงไวบูลย์ (Weibull distribtion) และการแจกแจงลอกนอร์มอล (Log-normal distribution) เป็นต้น ดังนั้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มเดียว ที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวา ที่ระดับความเบ้ต่างกันในการแจกแจงหนึ่งๆ จำแนกตามขนาดตัวอย่างและระดับนัยสำคัญ โดยพิจารณาตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี คือ (1) สถิติทดสอบที (Student's *t* test) (2) สถิติทดสอบทีของ

จอห์นสัน (Johnson's t test) (3) สถิติทดสอบแบบผสมของซัตตัน(Sutton's composite test) และ (4) สถิติทดสอบทีของลิงเชน(Ling Chen's t test)

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ต้องการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ (power of the test) ของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย โดยมีตัวสถิติทดสอบคือ

1. ตัวสถิติทดสอบที (Student's t test)
2. ตัวสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน (Johnson's t test)
3. ตัวสถิติทดสอบแบบผสมของซัตตัน (Sutton's composite test)
4. ตัวสถิติทดสอบทีของลิงเชน (Ling Chen's t test)

ภายใต้การแจกแจงแบบเบ้ขวาของประชากร ได้แก่

1. การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution)
2. การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull distribution)
3. การแจกแจงลอกนอร์มอล (Log-normal distribution)

1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

สำหรับขั้นตอนในการหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติ จะคำนวณหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติเฉพาะสถานการณ์การทดสอบสมมติฐานทางด้านมากกว่า และตัวสถิติทดสอบอยู่ภายใต้ระดับนัยสำคัญ(level of significance) α ที่กำหนด

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 การแจกแจงของประชากรที่ใช้ในการศึกษาแบ่งออกเป็น 3 การแจกแจง คือ

1.4.1.1 <u>การแจกแจงแกมมา</u> (Gamma distribution) เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right) \qquad ; \; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

เมื่อ α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่างของการแจกแจง(Shape parameter)
และ β เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาดของการแจกแจง (Scale parameter)

1.4.1.2 <u>การแจกแจงไวบูลล์</u> (Weibull distribution) เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงไวบูลย์ ด้วยพารามิเตอร์ α และ β ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}} \alpha x^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right)^{\alpha} \qquad ; \; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

เมื่อ α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่างของการแจกแจง(Shape parameter)

และ β เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาดของการแจกแจง (Scale parameter)

1.4.1.3 <u>การแจกแจงลอกนอร์มอล</u> (Log-normal distribution) เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ด้วยพารามิเตอร์ μ_b และ σ^2 ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(\ln x - \mu_b\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad ; \; x > 0, \sigma^2 > 0, -\infty < \mu_b < \infty$$

เมื่อ μ_b และ σ^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ Y

ซึ่ง $Y = \ln X$ และ Y มีการแจกแจงแบบปกติ

โดยมี $\exp(\mu_b)$ เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาดของการแจกแจงของ X (Scale parameter)

และ σ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่างของการแจกแจงของ X (Shape parameter)

พารามิเตอร์ของการแจกแจงต่างๆจะกำหนด โดยพิจารณาจากเกณฑ์สัมประสิทธิ์ความเบ้ ซึ่งรายละเอียดจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 2

1.4.2. กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 15 20 30 50 และ 70

1.4.3. กำหนดระดับนัยสำคัญ α เท่ากับ 0.01 0.05 และ 0.1

1.4.4 สมมติฐานของการทดสอบ

-กรณีควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ทดสอบสมมติฐานข้างเดียว

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

และ

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

ทดสอบสมมติฐานสองข้าง

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

-กรณีอำนาจการทดสอบของตัวสถิติ

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu = \mu_1$$

เมื่อ

$$\mu_1 = \mu_0 + k\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

เมื่อ $\mu = \mu_0$ = ค่าเฉลี่ยของประชากร

σ = ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

n = ขนาดตัวอย่าง

k = ผลต่างของค่าเฉลี่ยจริงกับค่าเฉลี่ยในสมมติฐานว่าง เท่ากับ 0.5,1.5 และ2.5

1.4.5 การวิจัยครั้งนี้จำลองการทดลองตามสถานการณ์ต่างๆ โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo Technique)กระทำซ้ำ 5,000 ครั้ง ($n^{\#}$) ในแต่ละสถานการณ์ของการทดลอง ด้วยโปรแกรมภาษาฟอร์แทรน 77

1.5 สมมติฐานของการวิจัย

ในการทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวา เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ตัวสถิติทดสอบทีของลิงเชนจะมีอำนาจการทดสอบมากกว่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบตัวอื่นเมื่อความเบ้ของประชากรมากขึ้น

1.6 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนในการวิจัยมีดังนี้

1.6.1 สร้างข้อมูลให้มีลักษณะตามที่กำหนดในแผนการทดลอง

1.6.2 คำนวณหาค่าสถิติของแต่ละวิธี

1.6.3 หาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

1.6.4 เมื่อสามารถควบคุมค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1ได้แล้ว เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบแต่ละวิธี

1.7 คำจำกัดความ

1. ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (type I error) คือ ความผิดพลาดที่เกิดจากการปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง

2. ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 (type II error) คือ ความผิดพลาดที่เกิดจากการยอมรับสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นเท็จ

3. อำนาจการทดสอบ (power of test) หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (Null hypothesis) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นเท็จ มีค่าเท่ากับ $1-\beta$ เมื่อ β คือ ความน่าจะเป็นที่เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2

1.8 เกณฑ์การตัดสินใจ

ในการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มเดียวที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวา ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาจาก

1. ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ซึ่งจะวัดจากสัดส่วนของเหตุการณ์ที่ปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง ในขั้นแรกของการทดสอบเปรียบเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนด

ในการพิจารณาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จะพิจารณาจากค่าประมาณของระดับนัยสำคัญที่ได้จากการทดลอง $(\hat{\alpha})$ ซึ่งควรมีค่าไม่มากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด โดยมีวิธีที่ใช้ในการทดสอบ คือ การทดสอบทวินาม (binomial test) ในการวิจัยนี้กำหนดให้ระดับนัยสำคัญของการทดสอบทวินาม $\alpha^* = 0.05$ ดังมีรูปแบบต่อไปนี้

$$H_0 : \alpha \le \alpha_0$$
$$H_1 : \alpha > \alpha_0$$

โดยทฤษฎีบทลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) ได้ว่า

$$P\left(0 < \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^\#}}} < Z_{\alpha^*}\right) = 1 - \alpha^*$$

หรือ
$$P\left(0 < \hat{\alpha} < \alpha_0 + Z_{\alpha^*}\sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^\#}}\right) = 1 - \alpha^*$$

ดังนั้น ช่วงของการยอมรับความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1(α) คือ

$$\left(0, \alpha_0 + Z_{\alpha^*}\sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^\#}}\right)$$

เมื่อ α^* = ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ

α = ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดสอบ

$\hat{\alpha}$ = ค่าประมาณความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดสอบ

α_0 = ระดับนัยสำคัญที่ต้องการทดสอบ

$n^\#$ = จำนวนรอบของการทดลอง

- ถ้าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.01$ บริเวณของการยอมรับ คือ (0, 0.0123)
- ถ้าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.05$ บริเวณของการยอมรับ คือ (0, 0.0551)
- ถ้าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.10$ บริเวณของการยอมรับ คือ (0, 0.1070)

ถ้าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ หรือ ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดลองอยู่ในช่วงของการยอมรับ กล่าวได้ว่า ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ มีค่าไม่เกิน α_0

เมื่อผ่านเกณฑ์การควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดลองได้แล้ว จะทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยเป็นลำดับต่อไป

2. อำนาจการทดสอบ(power of the test) จะวัดจากสัดส่วนของเหตุการณ์ที่ปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อสมมติฐานว่างเป็นเท็จ

1.9 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.จากผลการวิจัยนี้จะเป็นแนวทางในการศึกษาและสามารถเลือกใช้ตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวา ในสถานการณ์ต่างๆได้อย่างเหมาะสม

2. เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย เพื่อค้นหาสถิติทดสอบใหม่ต่อไป