



บทที่ ๒

การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

สมมติฐานทั่วไป

สมมติฐานต่อไปนี้จะใช้ได้ทั้งการดัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่นและเกินขอบเขตความยืดหยุ่น (5)(6)(8) คือ

๑. เมื่อคานถูกดัดโค้ง ระนาบของหน้าตัดที่เคยตั้งฉากกับแกนของคานจะยังคงเป็นระนาบที่ตั้งฉากกับแนวแกนของคานอยู่เช่นเดิม ซึ่งหมายความว่าความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุ เมื่อถูกดัดโค้งจะแปรผันโดยตรงกับระยะทางที่วัดตั้งฉากออกจากแกนสะเทิน (neutral axis) และไม่พิจารณาผลของแรงเฉือน (shearing force)

๒. คานเป็นวัสดุที่มีเนื้อวัสดุเป็นแบบเดียวกันโดยตลอด (homogeneous) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropy)

๓. เนื้อวัสดุสามารถพิจารณาแบ่งเป็นชั้น (fiber) ที่ขนานกับแนวแกนของคานหลาย ๆ ชั้นได้ และเนื้อวัสดุทุกชั้นสามารถยึดตัวหรือหดตัวได้อย่างอิสระ

๔. ไม่มีแรงลัพธ์ (resultant force) ในแนวแกนของคาน

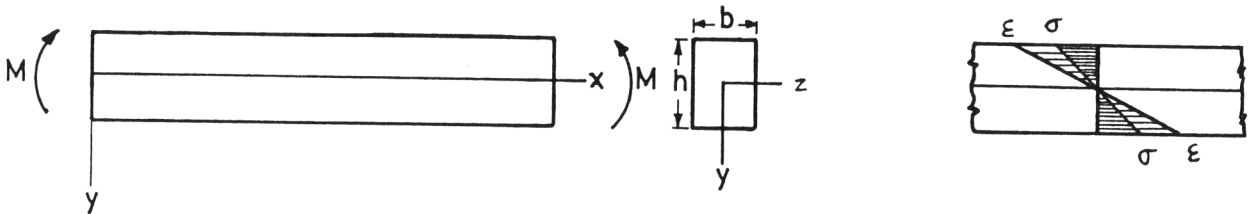
๕. คานมีลักษณะเป็นคานตรงและไม่มี ความเค้นดัดเดิม (initial stress)

การดัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่ไม่มีรอยบาก

พิจารณาคานที่มีหน้าตัดคงที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดคงที่แสดงไว้ในรูปที่ ๑ (ก) สำหรับคานเช่นนี้เมื่อถูกดัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่น ความเครียดที่เกิดขึ้นภายในเนื้อวัสดุของคานตรงตำแหน่ง y ใด ๆ ที่วัดออกมาจากแกนสะเทินจะมีค่าเป็น

$$\epsilon = \frac{y}{R} \quad (1)$$

เมื่อ ϵ คือความเครียดที่เกิดขึ้นตรงตำแหน่ง y และ R คือรัศมีของความโค้ง (radius of curvature) ของคานเมื่อถูกตัดด้วยโมเมนต์ M และความเค้นที่เกิดขึ้นตรงตำแหน่งเดียวกันนี้จะสามารถหาได้จากกฎของ Hooke คือ



(ก) ลักษณะของคาน

(ข) การแผ่กระจายความเค้น
และความเครียด

รูปที่ ๑. การตัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่ไม่มีรอยบาก

$$\sigma = E\epsilon \quad (2)$$

เมื่อ E คือโมดูลัสความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุ เนื่องจากความโค้งของคานสามารถหาได้จากสมการ

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของพื้นที่หน้าตัด ดังนั้นความเค้นตรงตำแหน่ง y จะมีค่าเป็น

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (4)$$

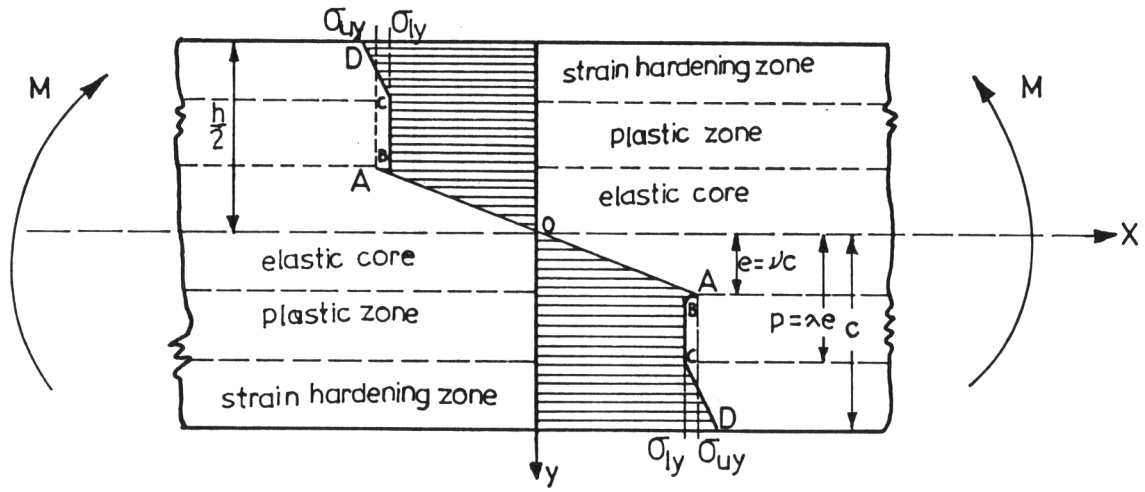
จากสมการ (1) และสมการ (4) จะเห็นว่าความเครียดและความเค้นที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุจะเป็นปริมาณโดยตรงกับระยะ y ที่วัดออกมาจากแกนสะเทิน ดังแสดงไว้ในรูปที่ ๑ (ข) ในกรณีที่เป็นคานที่มีความกว้างเป็น b และมีความลึกเป็น h จะหาความเค้นสูงสุดตรงสันคาน และท้องคานจากสมการ (4) ได้เป็น

$$\sigma = \frac{M}{bh^2/6} \quad \text{หรือ} \quad M = \sigma \frac{bh^2}{6} \quad (5)$$

แผนภาพความเค้นกับความเครียดที่ได้จากการทดสอบการดึง (tensile test) ของ structural steel ได้แสดงไว้ในรูปที่ ๒ (ก) เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณแผนภาพความเค้นกับความเครียดนี้จึงถูกแทนด้วย ideal stress-strain diagram ในรูปที่ ๒(ข) ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ideal stress-strain diagram นี้จะสามารถแบ่งออกได้เป็นเส้นตรง ๓ เส้น และเส้นตรงแต่ละเส้นมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดดังนี้

- เส้นตรง OA: $\sigma = E \epsilon$
- เส้นตรง BC: $\sigma = \sigma_{ly}$
- เส้นตรง CD: $\sigma = F \epsilon$

ในรูปที่ ๒ σ_{uy} คือจุดคดากบน (upper yield point) σ_{ly} คือจุดคดากล่าง (lower yield point), η คืออัตราส่วนระหว่างจุดคดากบนกับจุดคดากล่าง F คือ strain hardening modulus, μ คืออัตราส่วนระหว่าง strain hardening modulus กับโมดูลัสความยืดหยุ่น และ λ คืออัตราส่วนระหว่างความเครียดตรงจุดที่เริ่มเกิด strain hardening (ϵ_p) กับความเครียดตรงจุดคดาก (ϵ_y)



รูปที่ ๓. การแบ่งกระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีวัสดุมีแผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๒ (ข)

ถ้าคานในรูปที่ ๑(ก) เป็นวัสดุที่มีแผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๒(ข) เมื่อคานถูกค้ำโค้งจนกระทั่งชั้นของเนื้อวัสดุตรงด้นคานและท้องคานเกิดความเค้นเท่ากับจุดคดากบนของวัสดุ ค่าของโมเมนต์จะหาได้จากสมการ (5) เป็น

$$M_y = \sigma_{uy} \cdot \frac{bh^2}{6} \quad (7)$$

ถ้าคานถูกค้ำโค้งด้วยโมเมนต์ที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งมีการแบ่งกระจายความเค้นตามความลึกของคาน ดังในรูปที่ ๑ ค่าของโมเมนต์ที่กระทำกับคานจะหาได้จากสมการการสมดุล โมเมนต์ภายนอกกับโมเมนต์ที่เกิดจากแรงภายในเนื้อวัสดุ คือ

$$M = 2 \int_0^e \sigma_{by} dy + 2 \int_e^p \sigma_{by} dy + 2 \int_p^c \sigma_{by} dy \quad (8)$$

แทนค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดในแต่ละช่วงลงไปนสมการ (8) คือ

$$\text{เส้นตรง OA: } \sigma = E \epsilon = \sigma_{uy} \frac{y}{e}; \quad 0 \leq y \leq e$$

$$\text{เส้นตรง BC: } \sigma = \sigma_{ly}; \quad e \leq y \leq p$$

$$\text{เส้นตรง CD: } \sigma = F \epsilon = \sigma_{ly} (1 - \mu \lambda + \mu \frac{y}{e})^{(3)}; \quad p \leq y \leq e$$

จะได้

$$M = 2 \sigma_{uy} \frac{b}{e} \int_0^e y^2 dy + 2 \sigma_{ly} b \int_e^p y dy + 2 \sigma_{ly} b \int_p^c (1 - \mu \lambda + \mu \frac{y}{e}) y dy \quad (9)$$

อินทิเกรตสมการ (9) แล้วแทนค่า $\sigma_{uy} = \eta \sigma_{ly}$, $p = \lambda e$, $e = \nu c$ และ $c = \frac{h}{2}$ ลงไปจะได้

$$M = \sigma_{ly} \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[3(1 - \mu \lambda) + 2 \frac{\mu}{\nu} + \nu^2 (2\eta + \mu \lambda^3 - 3) \right] \quad (10)$$

สมการ (10) นี้เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ค้ำกับความเค้นที่สามารถนำไปตัดแปลงใช้กับ ideal stress-strain diagram ที่ไม่เป็นเส้นโค้งได้ทุกแบบ ดังจะพิจารณาเป็นกรณีเฉพาะต่อไปนี้

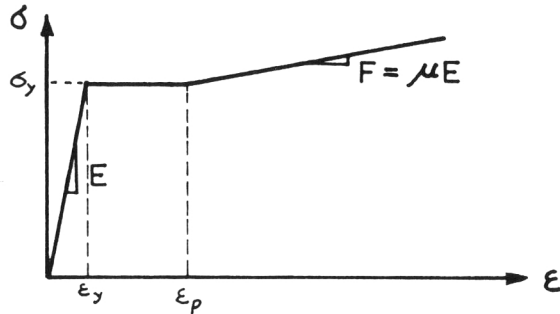
Elastic-perfectly plastic-linear strain hardening

แผนภาพความเค้นกับความเครียดในรูปที่ ๔ ถูกเสนอขึ้นโดย Tee Wian ในปีค.ศ. 1961⁽³⁾

จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบรูปที่ ๒(ข) แล้วจะได้ $\sigma_{uy} = \sigma_{ly} = \sigma_y$ หรือ $\eta = 1$

โมเมนต์ค้ำในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นจะหาได้จากสมการ (10) คือ

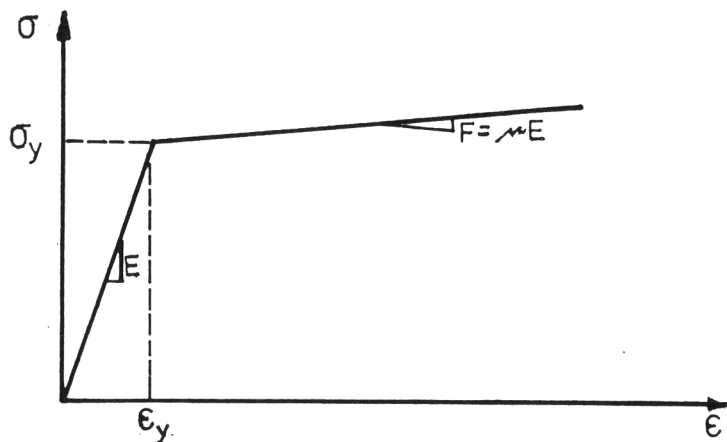
$$M = \sigma_y \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[3(1-\mu\lambda) + 2\frac{\mu}{\nu} + \nu^2(\mu\lambda^3 - 1) \right] \quad (11)$$



รูปที่ ๕. ideal stress-strain diagram แบบ elastic-perfectly plastic-linear strain hardening.

Elastic-linear strain hardening. Seely และ Smith⁽¹²⁾ ได้ทำการวิเคราะห์การค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นโดยใช้แผนภาพความเค้นกับความเครียดที่แสดงไว้ในรูปที่ ๕ ซึ่งในกรณีนี้ $\sigma_{uy} = \sigma_{ly} = \sigma_y$ หรือ $\eta = 1$ และ $\lambda = 1$ โมเมนต์ค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นจะหาได้จากสมการ (10) เป็น

$$M = \sigma_y \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[(1-\mu)(3-\nu^2) + 2\frac{\mu}{\nu} \right] \quad (12)$$

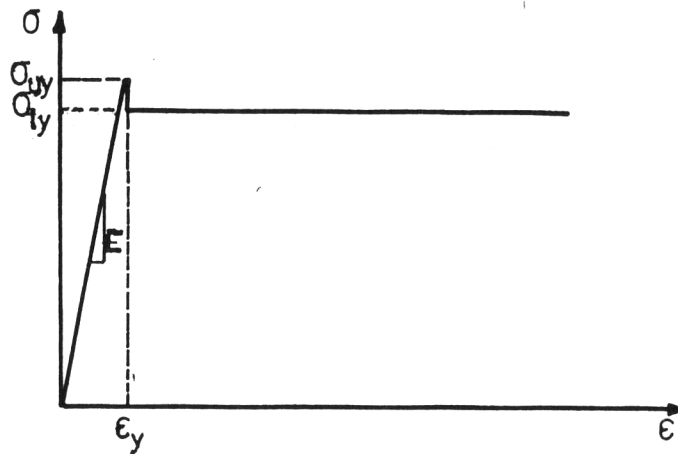


รูปที่ ๕. Ideal stress-strain diagram แบบ elastic-linear strain hardening.

Elastic-perfectly plastic ที่มีจุดคานบนและจุดคานกลาง

Baker, Horne และ Heyman⁽⁵⁾ ได้เสนอทฤษฎีการค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่น โดยใช้แผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๖ ซึ่งในกรณีนี้ $\mu = 0$ ดังนั้นโมเมนต์ค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นจะมีค่าเป็น

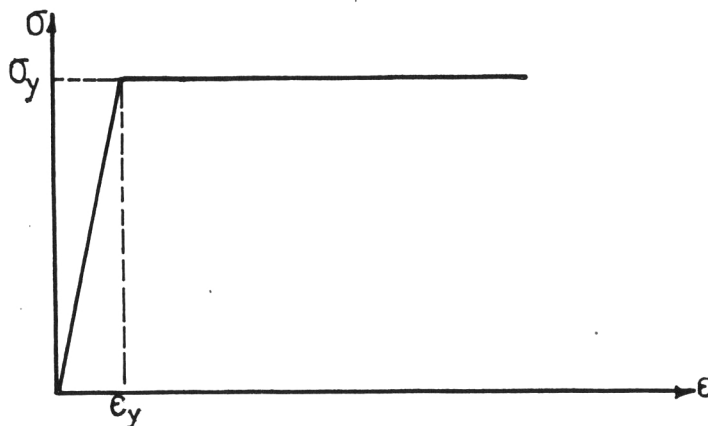
$$M = \sigma_{ly} b \left[\frac{h^2}{4} + \frac{e^2}{3} (2\eta - 3) \right] \quad (13)$$



รูปที่ ๖. Ideal stress-strain diagram แบบ elastic-perfectly plastic ที่มีจุดคานบนและจุดคานกลาง.

Elastic-perfectly plastic, simple plastic theory

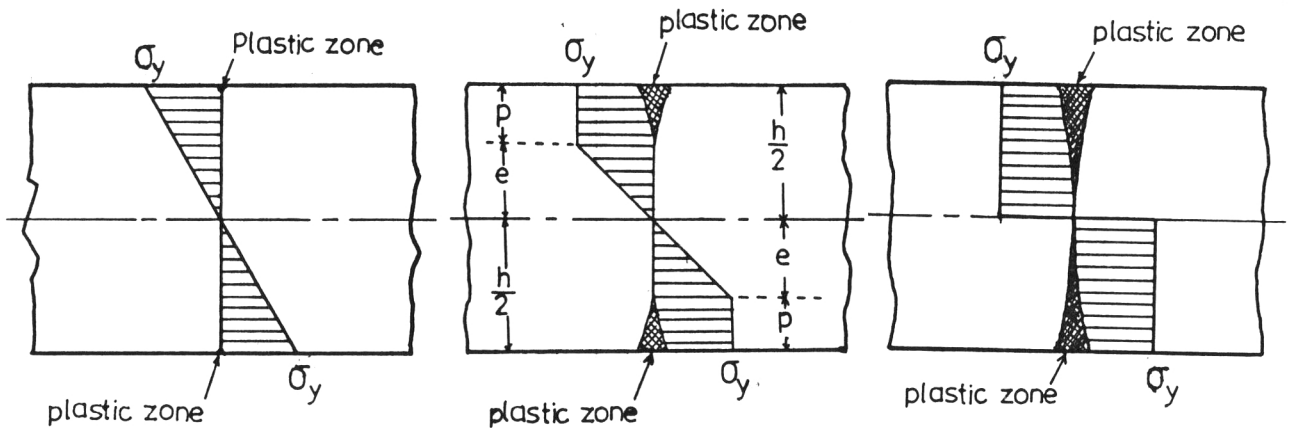
แผนภาพความเค้นกับความเครียดในรูปที่ ๗ เสนอไว้โดย Ewing ในปีค.ศ. 1899⁽⁵⁾ เมื่อคานถูกค้ำโค้งด้วยโมเมนต์ค้ำจนกระทั่งชั้นของเนื้อวัสดุตรงสันคานและท้องคานเกิดความเค้นเท่ากับ



รูปที่ ๗. Ideal stress-strain diagram แบบ elastic-perfectly plastic สำหรับ simple plastic theory

จุดกลางของวัสดุ ดังในรูปที่ ๘ (ก) ค่าของโมเมนต์คัตจะหาได้จากสมการ (6) คือ

$$M_y = \sigma_y \frac{bh^2}{6} \quad (14)$$



(ก) เริ่มเกิด plastic zone (ข) plastic zone แผ่เข้าหาแกนสะเทิน (ค) เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด

รูปที่ ๘. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานในช่วงเกิน

ขอบเขตความยืดหยุ่นตาม simple plastic theory.

เมื่อโมเมนต์คัตมีค่าเพิ่มมากขึ้นอีก เนื้อวัสดุส่วนที่คัตเข้ามาจะเริ่มเกิดความเค้นเท่ากับจุดกลางของวัสดุดังแสดงไว้ในรูปที่ ๘(ข) และ plastic zone ที่เริ่มเกิดขึ้นของเนื้อวัสดุชั้นนอกสุดจะแผ่เข้าหาแกนสะเทินดังในรูป ในกรณีนี้โมเมนต์คัตจะหาได้จากสมการ (10)

โดยแทนค่า $\sigma_{uy} = \sigma_{ly} = \sigma_y$ หรือ $\eta = 1$ และ $\mu = 0$ คือ

$$M = \sigma_y b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{e^2}{3} \right)$$

ในขณะที่คานถูกกระทำด้วยโมเมนต์คัตตามสมการ (15) ความโค้งของคานจะหาได้จากสมการ (1) โดยแทนค่า $\epsilon = \sigma_y/E$ และ $y = e$ ซึ่งจะได้เป็น

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{k E I}$$

$$\text{เมื่อ } k = \frac{e}{h} \left(3 - 4 \frac{e^2}{h^2} \right) \quad (17)$$

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความเค้นและความโค้งโมเมนต์
ตัด สามารถแสดงในรูปของความลึกของ plastic zone ได้คือ (4)

$$M = \sigma_y \frac{bh^2}{6} \left[1 + \frac{2p}{h} \left(1 - \frac{p}{h} \right) \right] \quad (18)$$

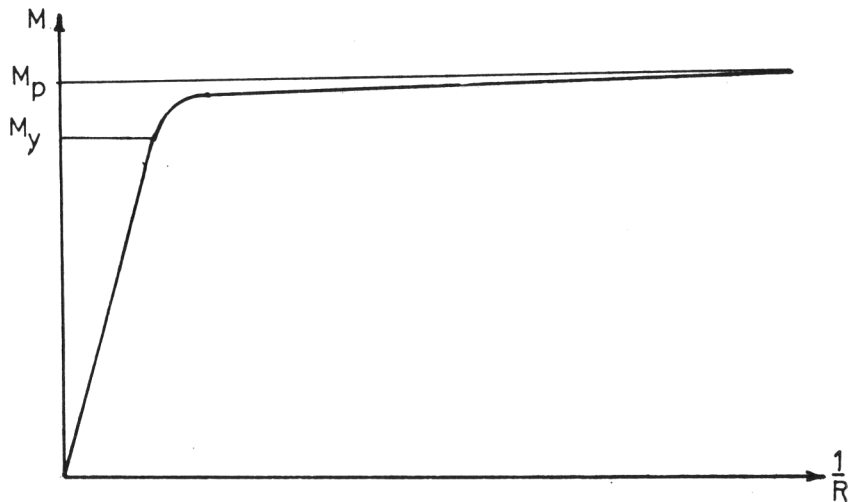
และ $\frac{1}{R} = \frac{\sigma_y}{E \left(\frac{h}{2} - p \right)} \quad (19)$

หรือ $\frac{1}{R} = \frac{M}{k'E I} \quad (20)$

เมื่อ $k' = \left(1 - \frac{2p}{h} \right) \left[1 + \frac{2p}{h} \left(1 - \frac{p}{h} \right) \right] \quad (21)$

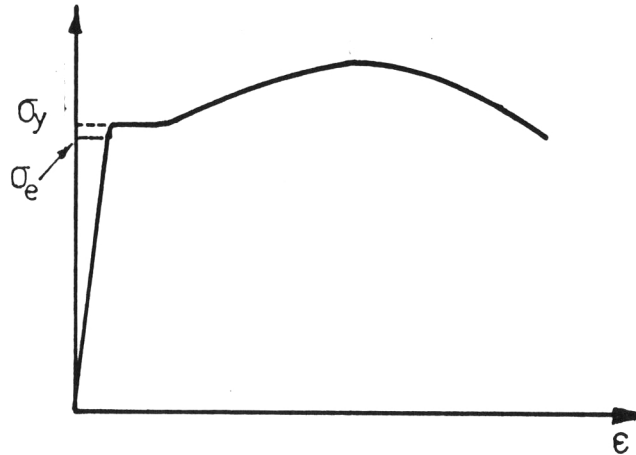
ถ้าโมเมนต์ที่ค่าเริ่มมากขึ้นอีกจนกระทั่งความลึกของ plastic zone มีค่า
เป็น $p = \frac{h}{2}$ หรือความลึกของ elastic core มีค่าเป็น $e = 0$ ดังในรูปที่ ๘ (ค)
โมเมนต์ตัดในขณะที่เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัดนี้จะหาได้จากสมการ (15) หรือ
สมการ (18) มีค่าเป็น

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad (22)$$



รูปที่ ๘. แผนภาพโมเมนต์ตัดกับความโค้งของคานตาม simple
plastic theory.

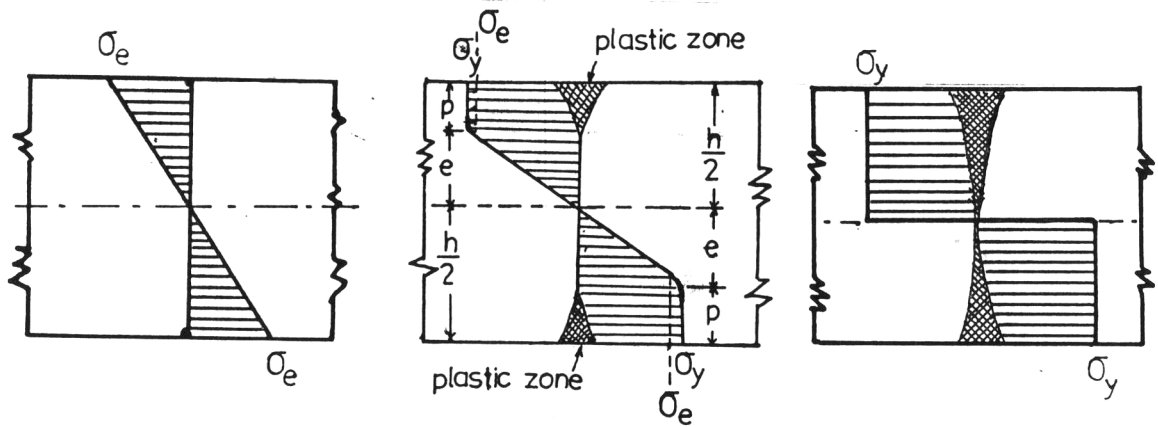
ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ค้ำกับความโค้งของคานได้แสดงไว้ในรูปที่ ๔ ในรูปนี้ M_y คือจุดสุดท้ายที่เส้นกราฟซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ค้ำกับความโค้งเป็นเส้นตรง M_p เป็นค่าของโมเมนต์ตรงตำแหน่งที่เส้นกราฟไปพบกับเส้น asymptote และค่าของ M_p นี้จะเป็นค่าของโมเมนต์ที่ทำให้คานเกิดการเสียหายอย่างสมบูรณ์ (4)



รูปที่ ๑๐. แผนภาพความเค้นกับความเครียดของเหล็กเหนียว

สำหรับเหล็กเหนียวที่มีแผนภาพความเค้นกับความเครียดดังในรูปที่ ๑๐ นั้น จะมีการแบ่งกระจายความเค้นตามความลึกของคานแตกต่างกับการแบ่งกระจายความเค้นตาม simple plastic theory เล็กน้อย การแบ่งกระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีแผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๑๐ ได้แสดงไว้ในรูปที่ ๑๑ การแบ่งกระจายความเค้นตามความลึกของคานที่เป็นเหล็กเหนียวเป็นเช่นนี้เนื่องจาก ductility ของวัสดุ สำหรับวัสดุที่มี ductility สูง จะไม่เกิด strain hardening ขึ้นใน stress distribution curve เนื่องจากความแตกต่างของ stress distribution curves ในรูปที่ ๔ กับรูปที่ ๑๑ มีค่าน้อย ดังนั้นจึงสามารถใช้ simple plastic theory กับคานที่เป็นเหล็กเหนียวได้

สิ่งที่มีอิทธิพลต่อการค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นอย่างมากคือ ductility และ strain hardening จากสมการที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าตัวประกอบที่สำคัญอย่างมากคือ λ, μ, η และ F Roderick และ Heyman ค้นพบว่าอัตราส่วนทั้งสามนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนคาร์บอน



- (ก) สันของเนื้อวัสดุชั้นนอกสุด เกิดความเค้นเท่ากับขอบเขตความยืดหยุ่นของวัสดุ
- (ข) เกิด plastic zone ตรงบริเวณสันคานและท้องคาน
- (ค) เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด

รูปที่ ๑๑. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานตามความเป็นจริง.

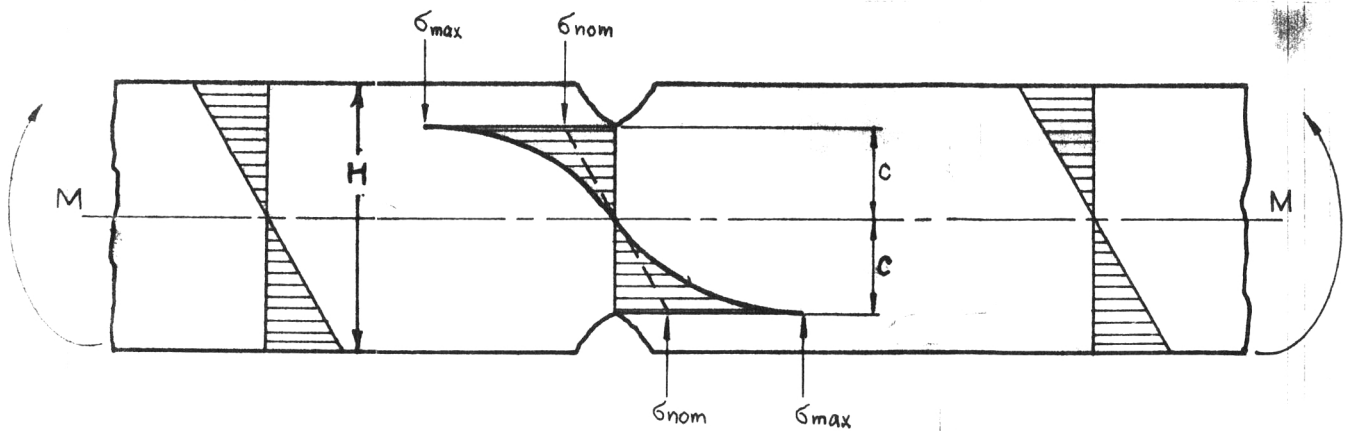
ที่ผสมอยู่ในเนื้อเหล็กกล้า (16) ถ้าเพิ่มจำนวนคาร์บอนในเนื้อเหล็กกล้าจะทำให้ค่าของจุดคานกลางเพิ่มมากขึ้น, ductility ลดน้อยลง และความชันของช่วง strain hardening น้อยลง ได้มีผู้ทำการทดลองหาค่าของ λ, μ, η และ F สำหรับ structural steel และนำมาใช้ดังนี้ คือ

Roderick และ Heyman: (16)	$\lambda = 10$
	$\mu = 0.04$
Hrennikoff: (16)	$\lambda = 16.4$
	$\mu = 1/48$
Baker, Horne และ Heyman : (5)	$\lambda = 10$
	$\mu = 1/65$
	$\eta = 1.3$
Beedle: (1)	$\lambda = 12$
	F = 700,000 psi

สำหรับ structural steel ทั่วไป λ มีค่าตั้งแต่ 8 ถึง 15⁽¹⁾ ในกรณีที่ λ มีค่า
น้อยกว่า 8 จะใช้ simple plastic theory ไม่ได้⁽⁵⁾

การค้ำโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่มีรอยบากสองข้าง

สำหรับคานที่มีรอยบากสองข้างเมื่อถูกค้ำโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่น โครงหน้า-
ค้ำที่มีรอยบากจะมีการแผ่กระจายความเค้นแตกต่างจากหน้าค้ำที่อยู่ห่างจากรอยบากออกไป



รูปที่ ๑๒. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบาก
สองข้างเมื่อถูกค้ำโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่น

ดังแสดงไว้ในรูปที่ ๑๒. การแผ่กระจายความเค้นตรงหน้าค้ำที่มีรอยบากจะไม่เป็นเส้นตรง
เพราะมีผลของ stress concentration เข้ามาเกี่ยวข้อง ความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้น
ตรงราก (root) ของรอยบากสามารถหาได้จาก⁽¹⁷⁾

$$\sigma_{max} = K \sigma_{nom} = K \frac{Mc}{I} \quad (23)$$

เมื่อ K คือ stress concentration factor ซึ่งมีค่าแตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับ
ลักษณะของรอยบากและ σ_{nom} คือความเค้นที่คำนวณจากสมการ (4) โดยใช้หน้าค้ำสุทธิ
(net section) ของรอยบากเป็นหลัก

ค่าของความเค้นสูงสุดตามสมการ (23) จะมีค่าสูงสุดได้ไม่เกินขอบเขตความยืด-
หยุ่นของวัสดุ ในกรณีที่ความเค้นสูงสุดตรงรากของรอยบากมีค่าเท่ากับขอบเขตความยืดหยุ่นของ
วัสดุ สมการ (23) จะกลายเป็น

$$\sigma_e = k \frac{M_e c}{I} \quad (24)$$

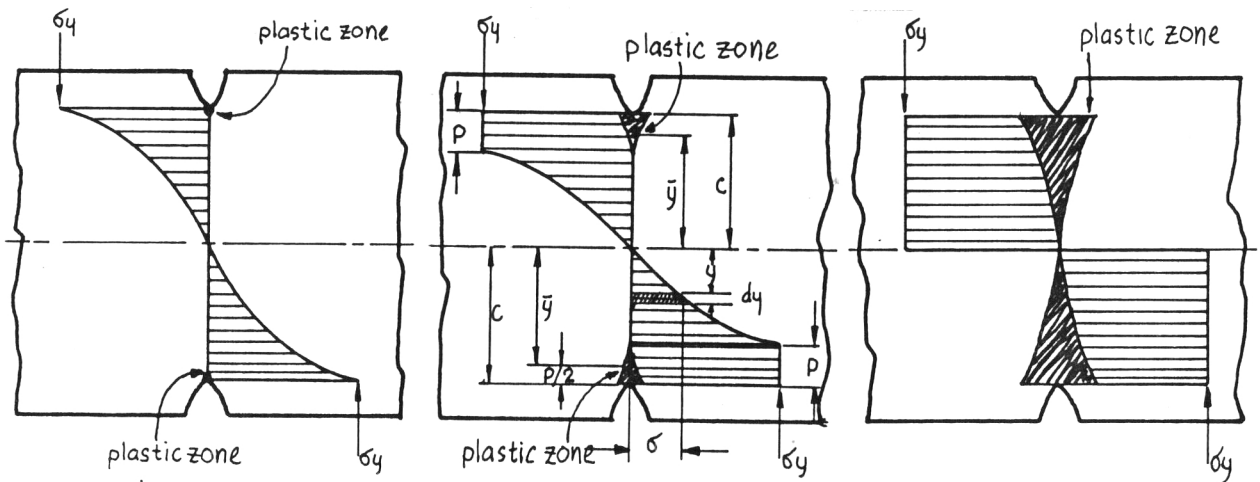
การค้ดโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่มีรอยบากสองข้าง

ถ้าคานในรูปที่ ๑๒ เป็นวัสดุแบบ **elastic-perfectly plastic** เมื่อคานถูกค้ดโค้งด้วยโมเมนต์ M_y จนกระทั่งตรงรากของรอยบากเกิดความเค้นเท่ากับจุดกลางของวัสดุ สมการ (24) จะเปลี่ยนเป็น

$$\sigma_y = k \frac{M_y c}{I} \quad (25)$$

ซึ่งกรณีนี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ ๑๓(ก) ถ้าโมเมนต์ค้ดมีค่าเพิ่มมากขึ้น **plastic zone** ก็จะเริ่มแผ่ลึกเข้าไปหาแกนสะเทินมากยิ่งขึ้นดังแสดงไว้ในรูปที่ ๑๓(ข) ในช่วงนี้ **plastic zone** จะมีความเค้นเกิดขึ้นมีค่าเท่ากับจุดกลางของวัสดุทั้งหมด (2)(18)(19) ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ค้ดกับความเค้นจะหาได้จากสมการการสมดุลย์โมเมนต์คือ

$$M = 2 \sigma_y \cdot b p \bar{y} + 2 \int_0^{c-p} \sigma \cdot b y dy \quad (26)$$



(ก) เริ่มเกิด plastic zone (ข) plastic zone (ค) เกิด plastic zone
ตรงรากของรอยบาก แผ่เข้าหาแกนสะเทิน เต็มทั้งหน้าตัด

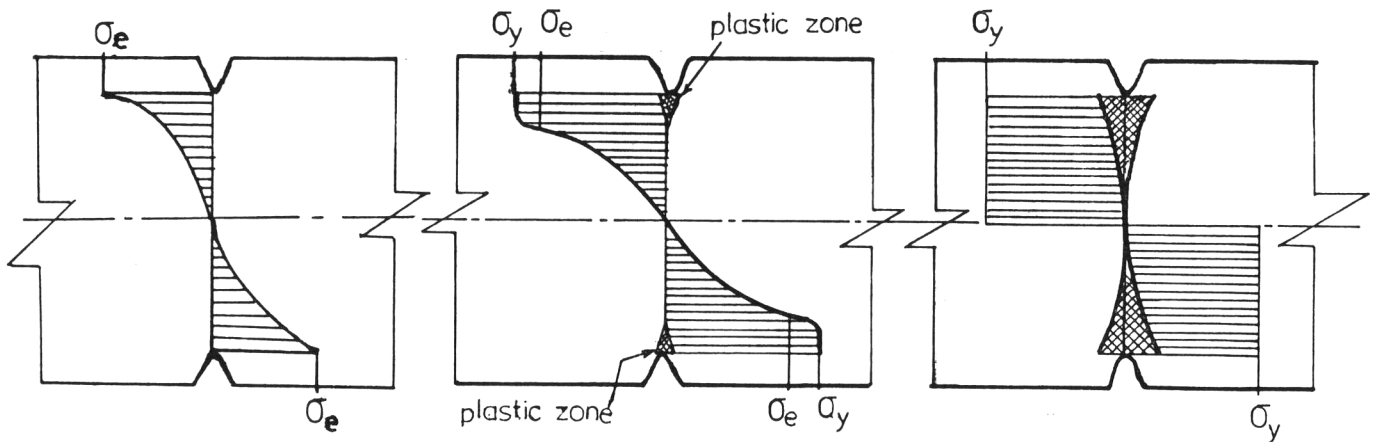
รูปที่ ๑๓. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบากสองข้างเมื่อถูกค้ดโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นของวัสดุแบบ **elastic-perfectly plastic**.

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ค้ำกับความเค้นที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุในช่วงพลาสติกตามสมการ (26) จะหาได้ถ้ารู้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นที่เกิดขึ้นกับความลึกของ elastic core ถ้าโมเมนต์ค้ำมีค่าเพิ่มมากขึ้นอีก plastic zone ก็จะแผ่ลึกเข้ามาเรื่อยๆ จนกระทั่งเกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ ๑๓(ค). ในกรณีนี้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์พลาสติกสูงสุดกับความเค้นจะกลายเป็น (18)

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4}$$

หน้าตัดที่เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัดโดยที่หน้าตัดอื่น ๆ ยังไม่เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด เรียกว่า plastic hinge จะเห็นว่า stress concentration จะไม่มีผลต่อโมเมนต์พลาสติกสูงสุดเลย ผลของ stress concentration มีอยู่อย่างเดียวคือเป็นหัวบอกใหญ่กว่า plastic hinge จะเกิดขึ้นตรงไหนเป็นแห่งแรกเท่านั้นเอง (18)

ในกรณีที่เป็วัสดุซึ่งมีแผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๑๐ การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานในรูปที่ ๑๓ จะเปลี่ยนไปเป็นรูปที่ ๑๔



- (ก) ชั้นของเนื้อวัสดุชั้นนอก เกิดความเค้นเท่ากับขอบเขตความยืดหยุ่น
- (ข) plastic zone แผ่เข้าหาแกนสะเทิน
- (ค) เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด

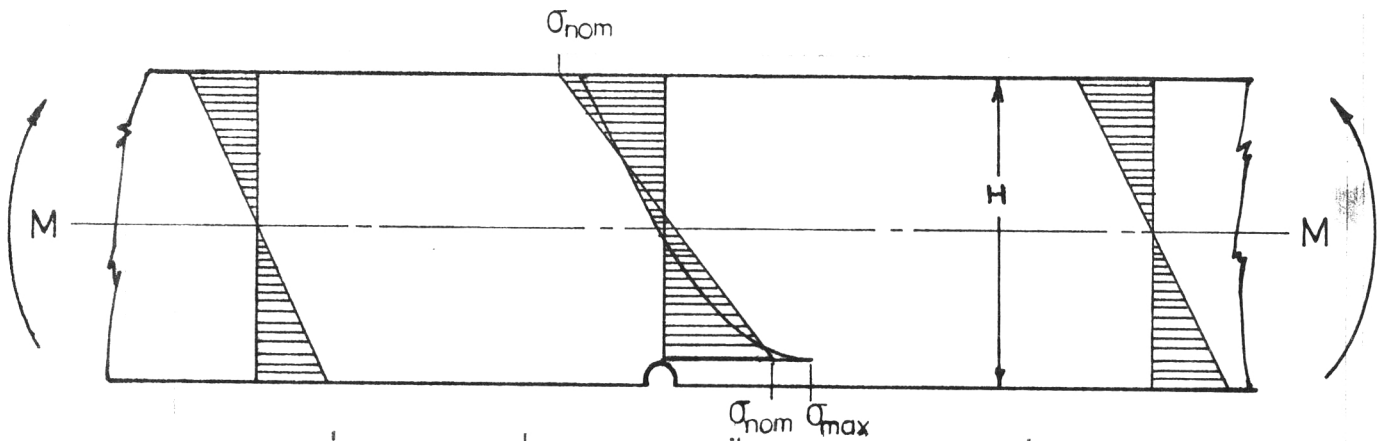
รูปที่ ๑๔. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบากสองข้างเมื่อถูกค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นตามความเป็นจริง

การตัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่มีรอยบากข้างเดียว

ในกรณีที่ เป็นคานวงมีรอยบากข้างเดียว การกระจายความเค้นจะแตกต่างกับคานที่มีรอยบากสองข้าง เพราะจะมีผลของ **stress concentration** เกิดขึ้นเฉพาะตรงรอยบากเท่านั้น คานส่วนที่ไม่มีรอยบากจะยังคงมีการกระจายความเค้นเป็นเส้นตรงอยู่ กรณีเช่นนี้ความเค้นสูงสุดตรงรากของรอยบากจะยังคงหาได้จากสมการ (23) คือ (17)

$$\sigma_{\max} = K \sigma_{\text{nom}} = K \frac{Mc}{I}$$

ค่าของ **stress concentration factor** จะแตกต่างกับคานที่มีรอยบากสองข้าง



รูปที่ ๑๘. การกระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบากข้างเดียว เมื่อถูกตัดโค้งภายในขอบเขตความยืดหยุ่น

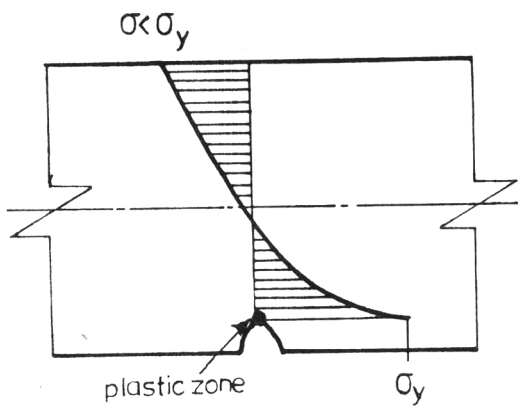
การกระจายความเค้นของคานที่มีรอยบากข้างเดียวได้แสดงไว้ในรูปที่ ๑๘ จากรูปที่ ๑๘ จะเห็นได้ว่า σ_{nom} ทางด้านที่เกิดการอัดจะมากกว่าความเค้นอัด (compressive stress) ที่เกิดขึ้นจริง ส่วนทางด้านที่เกิดการดึงนั้น σ_{nom} จะมีค่าน้อยกว่าความเค้นสูงสุดและพื้นที่ของ **stress distribution curve** ทางด้านที่เกิดการอัดและทางด้านที่เกิดการดึงจะต้องมีค่าเท่ากันไม่ว่าจะพิจารณาจาก **stress distribution curve** ของ σ_{nom} หรือความเค้นที่เกิดขึ้นจริงก็ตาม ถ้าโมเมนต์คัตมีค่าเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งความเค้นสูงสุดตรงรากของรอยบากมีค่าเท่ากับขอบเขตความยืดหยุ่น ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับโมเมนต์คัตจะเป็นไปตามสมการ (24) คือ

$$\sigma_e = K \frac{Me_c}{I}$$

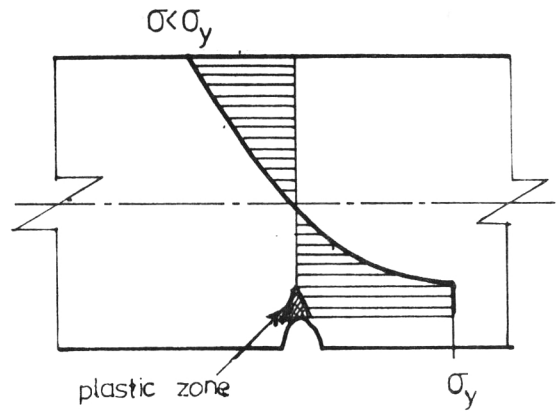
การหักโค้งในทรงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นของคานที่มีรอยบากข้างเดียว

ถ้าคานในรูปที่ ๑๕ เป็นวัสดุแบบ **elastic-perfectly plastic** และถูกค้ำโค้งจนกระทั่งเกิดความเค้นตรงรากข้อรอยบากมีค่าเท่ากับจุดคลากของวัสดุ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับโมเมนต์ค้ำจะนำไปตามสมการ (25) คือ

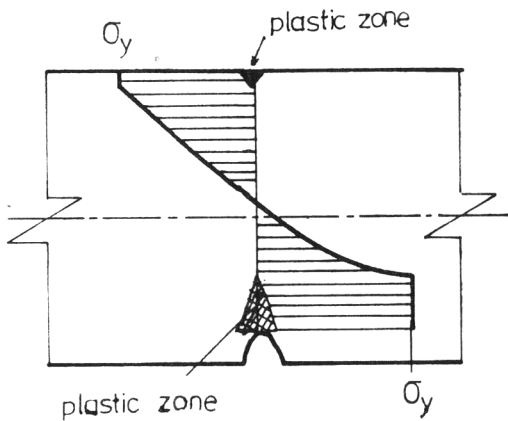
$$\sigma_y = k \frac{My^c}{I}$$



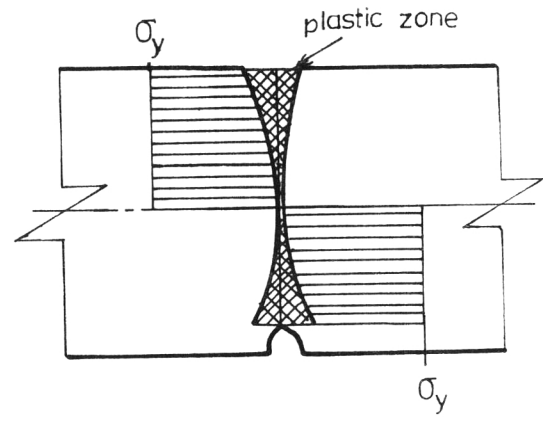
(ก) เริ่มเกิด plastic zone
ตรงรากของรอยบาก



(ข) plastic zone เริ่มแผ่
ออกจากรากของรอยบาก



(ค) เกิด plastic zone
แห่งที่สองขึ้นตรงคานที่ไม่มีรอยบาก



(ง) เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด

รูปที่ ๑๖. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบากข้างเดียว เมื่อถูกค้ำโค้งในทรงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นของวัสดุแบบ **elastic-perfectly plastic**.

การแพร่กระจายความเค้นในกรณีนี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ ๑๖(ก) ถ้าโมเมนต์คัตมีค่าเพิ่มมากขึ้น **plastic zone** จะเริ่มแผ่ออกจากรากของรอยบากลึกเข้าไปเรื่อย ๆ โดยคานที่ไม่มีรอยบากจะยังไม่เกิด **plastic zone** ดังแสดงในรูปที่ ๑๖(ข) จนกระทั่งโมเมนต์คัตสูงถึงค่าหนึ่ง คานที่ไม่มีรอยบากจึงจะเริ่มเกิด **plastic zone** ขึ้นดังในรูปที่ ๑๖(ค) ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์คัตกับความเค้นจะหาได้จากสมการการสมดุลโมเมนต์ในท่อนองเดียวกับการ (26) ถ้าโมเมนต์คัตมีค่าเพิ่มมากขึ้นอีก **plastic zone** ทั้งสองก็จะแผ่ลึกเข้าไปหากันจนกระทั่งเกิด **plastic zone** ขึ้นเต็มทั้งหน้าตัดดังแสดงไว้ในรูปที่ ๑๖(ง) ในขณะที่เกิด **plastic zone** ขึ้นเต็มทั้งหน้าตัด ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์คัตกับความเค้นจะยังคงเป็นไปตามสมการ (22) คือ

$$M_p = \sigma_y \cdot \frac{bh^2}{4}$$

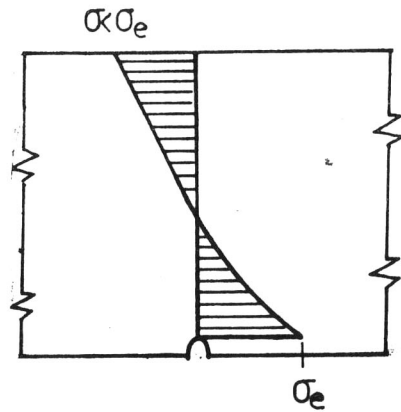
จะสังเกตได้ว่าในขณะที่เกิด **plastic zone** ขึ้นตรงหน้าคัตที่มีรอยบากไม่ว่าจะเป็นคานที่มีรอยบากข้างเดียวหรือสองข้างก็ตาม โมเมนต์พลาสติกสูงสุดจะมีค่าเท่ากันและเท่ากับคานที่ไม่มีรอยบากซึ่งมีหน้าตัดเท่ากับหน้าตัดสุทธิตรงรอยบากของคานที่มีรอยบากเสมอ

ในกรณีที่เป็นวัสดุซึ่งมีแผนภาพความเค้นกับความเครียดตามรูปที่ ๑๐ การแพร่จากความเค้นและความลึกของคานในรูปที่ ๑๖ จะเปลี่ยนไปเป็นรูปที่ ๑๗

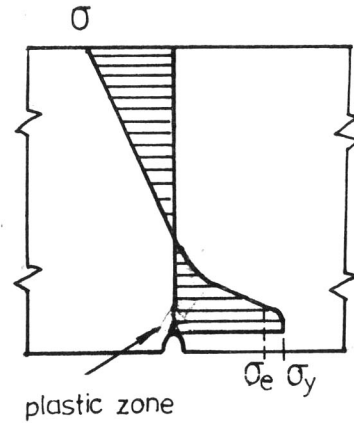
ทฤษฎีและแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยและทฤษฎีเกี่ยวกับคานที่มีรอยบากซึ่งถูกคัตโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นที่มีอยู่แล้วส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาแบบ **plane strain** คืออัตราส่วนระหว่างความกว้างกับความลึกของคานมีค่าเท่ากับหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งขึ้นไป โดยใช้การวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีของ **slip-line field**, (20)(21)(22)(23)(24) วิธี **finite elements** (25) และทฤษฎีของ **fracture mechanics** (26)(27) แต่ในการวิจัยนี้ใช้คานที่มีอัตราส่วนระหว่างความกว้างกับความลึกของคานมีค่าน้อยกว่าหนึ่งจึงไม่สามารถนำเอา **solution** ดัง ๆ เหล่านั้นมาใช้ในการวิจัยนี้ได้

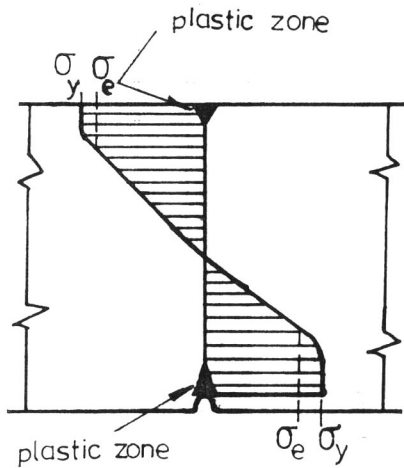
เนื่องจากการวิจัยนี้เป็นการศึกษาคุณลักษณะของคานที่มีรอยบากด้วยการทดลอง ดังนั้นข้อมูลต่าง ๆ เช่นโมเมนต์คัต, ความเค้นและความเครียดจึงใช้ค่าที่วัดได้จากการทดลองทั้งสิ้น



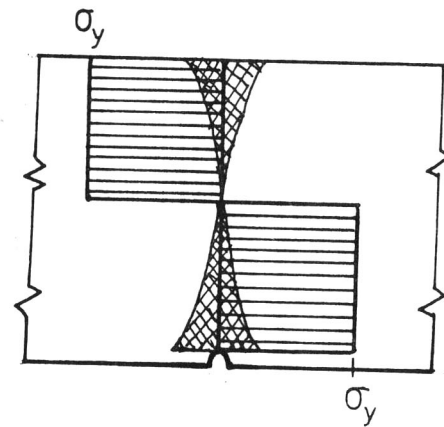
(ก) ชั้นของเนื้อวัสดุตรงรากของรอยบาก
เกิดความเค้นเท่ากับขอบเขตความยืดหยุ่น



(ข) plastic zone แผลออกจาก
รากของรอยบาก



(ค) เกิด plastic zone แห่งที่สอง
ขึ้นตรงคานที่ไม่มีรอยบาก



(ง) เกิด plastic zone เต็มทั้งหน้าตัด

รูปที่ ๑๓. การแผ่กระจายความเค้นตามความลึกของคานที่มีรอยบากข้างเดียว
เมื่อถูกค้ำโค้งในช่วงเกินขอบเขตความยืดหยุ่นตามความเป็นจริง

โดยจะนำเอาข้อมูลเหล่านี้มาทำการคำนวณโดยใช้สูตรการคำนวณที่อยู่ในบทที่ ๒ นี้และใช้คุณสมบัติ
เชิงกลของวัสดุซึ่งนำมาทำเป็นคานที่ไต่จากการทดสอบการดึง (tensile test) โดยถือว่า
คุณสมบัติในการดึงและการอัดเหมือนกัน

การหาความเค้นที่เกิดขึ้นตามความลึกของคานจะเอาหลักการของ experimental
stress analysis มาใช้ คือทำการวัดหาความเค้นที่เกิดขึ้นตรงจุดต่าง ๆ ตามความลึก

ของคานโดยใช้ **variable resistance strain gage** แล้วนำเอาค่าของความ
เครียดที่วัดได้ตรงจุดต่าง ๆ ไปเปลี่ยนเป็นความเค้นโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น
กับความเครียดที่ได้จากการทดสอบหาคณะสมบัติเชิงกลของวัสดุที่นำมาทำเป็นคาน โดยตั้ง
สมมติฐานว่า วัสดุเป็นแบบ **elastic-perfectly plastic-linear strain
hardening.**