

อัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลล์อาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไข
การกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

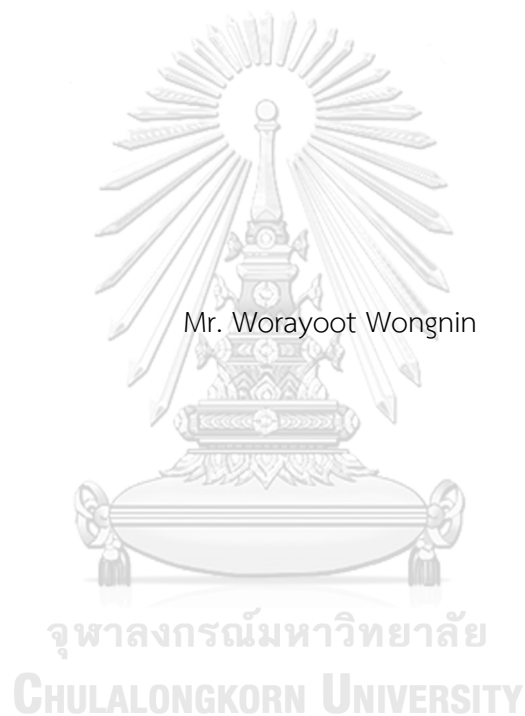


วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ONE-DIMENSIONAL REVERSIBLE CELLULAR AUTOMATA DETERMINATION ALGORITHM
BASED ON SUBSET GRAPH UNDER NULL BOUNDARY CONDITION



A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in Computer Engineering

Department of Computer Engineering

FACULTY OF ENGINEERING

Chulalongkorn University

Academic Year 2020

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลล์ลูอาร์อโตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า
โดย	นายวรยุทธ วงศ์นิล
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อรรณสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

.....	คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์ (ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ประธานกรรมการ (รองศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)
.....	อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก (รองศาสตราจารย์ ดร.อรรณสิทธิ์ สุรฤกษ์)
.....	กรรมการ (รองศาสตราจารย์ ดร.โชติรัตน์ รัตนามหัทธนะ)
.....	กรรมการ (รองศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)
.....	กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัครา ประโยชน์)

วรุฑธ วงศ์นิล : อัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติด้วย
 กราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า. (ONE-DIMENSIONAL
 REVERSIBLE CELLULAR AUTOMATA DETERMINATION ALGORITHM BASED ON
 SUBSET GRAPH UNDER NULL BOUNDARY CONDITION) อ.ที่ปรึกษาหลัก : รศ.
 ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

เซลลูลาร์ออโตมาตาถือเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่สามารถทำงานแบบระบบพลวัต ซึ่ง
 ประกอบไปด้วยสถานะจำกัดที่เรียงตัวกันอย่างเป็นระบบเรียกเซลล์ แต่ละเซลล์จะเปลี่ยนสถานะไป
 ยังสถานะใหม่พร้อมกันด้วยการอาศัยกฎการส่งผ่านที่ขึ้นอยู่กับเซลล์รอบ ๆ ด้วยเวลาแบบเต็ม
 หน่วย แม้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตามีโครงสร้างและนิยามในแบบพื้นฐาน แต่สามารถสร้างระบบที่
 พฤติกรรมมีความซับซ้อนได้ สมบัติในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาถือเป็นสมบัติสำคัญที่
 ได้รับความสนใจในหลายงานวิจัยและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในงานหลาย ๆ ด้านในทาง
 วิทยาศาสตร์ แต่สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า
 ยังถือมีข้อจำกัดของจำนวนกฎที่มีไม่มากที่มีสมบัติดังกล่าว

ในงานวิจัยนี้ศึกษาและเสนออัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่ง
 มิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่านิยามเซลล์เพื่อนบ้านด้วย
 เวกเตอร์ ด้วยการแทนเซลลูลาร์ออโตมาตาด้วยกราฟสับเซตย่อยเราเสนอวิธีในการระบุสมบัติการ
 ผันกลับได้ในกราฟโดยการพิจารณาเส้นเชื่อมและจุดยอดที่เชื่อมถึงกัน นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังเสนอ
 วิธีในการคำนวณสถานะก่อนหน้าสำหรับสถานะใด ๆ ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีสมบัติผัน
 กลับได้ภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า ซึ่งวิธีที่ได้เสนอยู่บนพื้นฐานของการ
 พิจารณาลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านด้วยการคำนวณทางเดินบนกราฟด้วยการดำเนินการของ
 เมตริกซ์

สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
 ปีการศึกษา 2563

ลายมือชื่อนิสิต
 ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก

5871418521 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEYWORD: CELLULAR AUTOMATA, REVERSIBLE CELLULAR AUTOMATA, NULL
BOUNDARY CONDITION, DE BRUIJN GRAPH, SUBSET GRAPH

Worayoot Wongnin : ONE-DIMENSIONAL REVERSIBLE CELLULAR AUTOMATA
DETERMINATION ALGORITHM BASED ON SUBSET GRAPH UNDER NULL
BOUNDARY CONDITION. Advisor: Assoc. Prof. ATHASIT SURARERKS, Ph.D.

Cellular automata (CA) are mathematical dynamical systems that are comprising numerous finite state automata represented by cells. Each cell is updated to the new state simultaneously according to the current states of its neighbors at a discrete time. Although CA has a simple structure and definition, but it can generate a complex behavior. Reversibility of CA is an important property of the CA, which is attracted by many researchers and has been applied to a wide range of fields in science. In the case of a one-dimensional CA under null boundary condition, there are not many rules that emerge with that property.

This dissertation studies and proposes one-dimensional reversible CA determination algorithm based on subset graph under null boundary condition with a vector-defined neighborhood. With the representation of subset graph of CA, we propose a method for determining the reversible property of a graph by considering its connected edges and vertices. The reversible rule can be considered on the path in the graph. In addition, we also introduce a method for calculating the previous state of a given state of a reversible CA under null boundary condition. The proposed method is based on the considering the de Bruijn graph path with the matrix operation.

Field of Study: Computer Engineering

Student's Signature

Academic Year: 2020

Advisor's Signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความอนุเคราะห์และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาผู้ให้คำปรึกษา ข้อเสนอแนะที่เป็น ประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัย ทั้งยังช่วยตรวจแก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่าง ๆ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ออกมาเป็นงานวิจัยที่สมบูรณ์ได้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง รองศาสตราจารย์ ดร. โชติรัตน์ รัตนมัทธนะ รองศาสตราจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัครา ประโยชน์ ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแนวทางในการแก้ไข ปรับปรุงวิทยานิพนธ์ในส่วนที่ยังบกพร่องเพื่อให้งานมีความสมบูรณ์ที่สุด

ขอขอบพระคุณท่านคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ช่วยสอนทั้งความรู้และประสบการณ์อันมีค่ายิ่งต่อตัวข้าพเจ้า ขอขอบพระคุณบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ให้การสนับสนุน “ทุนอุดหนุนการศึกษา ค่าเล่าเรียนประเภท 60/40” ทั้งยังให้โอกาสข้าพเจ้าได้ช่วยเหลือภาควิชาในการทำหน้าที่ผู้ช่วยสอน ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์เรืองวิทย์ บรรจงรัตน์และรองศาสตราจารย์เพ็ญพรรณ ยังคง อนุ สาสทหอพักนิสิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ให้แหล่งพักพิงในหอพัก ให้คำแนะนำและแนวคิดในการ ใช้ชีวิตในการเรียนตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่นี่ อีกทั้งยังให้ไว้วางใจให้ข้าพเจ้าได้ทำงานช่วยงานหอพัก ในตำแหน่งนิสิตบัณฑิตศึกษาช่วยงานหอพัก ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ บุคลากร พี ๆ น้อย ๆ และเพื่อน ชาวหอพักที่ได้ให้กำลังใจและแรงผลักดันในการทำงานวิจัยเสมอมา ขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ที่ได้ให้โอกาสในการมาศึกษาต่อในระดับปริญญาเอกของข้าพเจ้า ขอขอบคุณพี่ ๆ น้อย ๆ สมาชิกห้องปฏิบัติการทางวิศวกรรมระบบนับได้เชิงทฤษฎี (Engineering Laboratory in Theoretical Enumerable System : ELITE) ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ข้อเสนอแนะ และให้คำปรึกษา ในเรื่องต่าง ๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จด้วยดี

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณคนที่สำคัญที่สุดในชีวิตคือ บิดาและมารดาของข้าพเจ้า ที่คอยเป็นกำลังใจและเฝ้าห่วงใยข้าพเจ้าอยู่เสมอมารวมทั้งพี่น้องของข้าพเจ้าด้วย และขอบคุณสำหรับทุกกำลังใจ ความห่วงใยและเอาใจใส่อย่างดีจากคนสำคัญของข้าพเจ้าแม้จะอยู่ห่างไกลก็ตาม

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ค
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ง
กิตติกรรมประกาศ.....	จ
สารบัญ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ช
สารบัญรูปภาพ.....	ฌ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	4
1.2 ขั้นตอนของการทำวิจัย.....	4
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	4
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 เซลลูลาร์ออโตมาตา.....	6
2.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ.....	8
2.3 เซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้.....	12
2.3.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้เชิงเส้น.....	15
2.3.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้เชิงเส้นโดยใช้การส่งผ่านเมตริกซ์.....	17
2.4 กราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์.....	21
บทที่ 3 ความสามารถในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ ด้วยกราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์.....	28
บทที่ 4 การคำนวณโครงสร้างก่อนหน้าของเซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้.....	50

4.1 เมตริกซ์ของโครงสร้างแบบก่อนหน้า	50
4.2 เมตริกซ์ทางเดินสำหรับการคำนวณโครงสร้างแบบก่อนหน้า	53
4.3 โครงสร้างแบบก่อนหน้าของเซลล์สุลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า	57
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ	61
5.1 สรุปผลงานวิจัย	61
5.2 บทวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ	62
บรรณานุกรม	64
ประวัติผู้เขียน	69



สารบัญตาราง

ตารางที่ 1 การส่งผ่านเซลล์สุลาร์อโตนมาตาด้วยกฎ 170	13
ตารางที่ 2 การส่งผ่านเซลล์สุลาร์อโตนมาตาด้วยกฎ 240	14
ตารางที่ 3 การส่งผ่านเซลล์สุลาร์อโตนมาตาชนิดขั้นต้นเชิงเส้น	21
ตารางที่ 4 ตัวอย่างของจุดยอดเริ่มต้นในการสร้างกราฟสับเซตย่อยของเซลล์สุลาร์อโตนมาตา	32
ตารางที่ 5 กฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้จากการพิจารณากราฟสับเซตย่อย (แบบที่ 1.1).....	45
ตารางที่ 6 กฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้จากการพิจารณากราฟสับเซตย่อย (แบบที่ 2.2).....	46



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ 1 ลักษณะของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ.....	7
รูปที่ 2 ลักษณะของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสองมิติ	7
รูปที่ 3 ลักษณะของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสามมิติ.....	7
รูปที่ 4 เซลล์เพื่อนบ้านจำนวน m เซลล์ ของเซลล์ที่ i	8
รูปที่ 5 เซลลูลาร์ออโตมาตาขอบเขตแบบไม่มีค่า.....	9
รูปที่ 6 ลักษณะเซลล์นอกขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตา เมื่อ j และ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ	9
รูปที่ 7 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 53	11
รูปที่ 8 ตัวอย่างการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นด้วยกฎ 53.....	12
รูปที่ 9 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 170 และ 240	14
รูปที่ 10 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 150.....	16
รูปที่ 11 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นของกฎ 90 ด้วยขนาด $n = 4$ ขอบเขตแบบไม่มีค่า.....	19
รูปที่ 12 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นของกฎ 90 ด้วยขนาด $n = 4$ ขอบเขตแบบรอบ	20
รูปที่ 13 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นของกฎ 90 ด้วยขนาด $n = 5$ ขอบเขตแบบไม่มีค่า.....	20
รูปที่ 14 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$	22
รูปที่ 15 กราฟเดอ บราวน์ $B(3, \{0,1\})$	22
รูปที่ 16 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 150 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น	23
รูปที่ 17 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 31 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น.....	25
รูปที่ 18 แสดงกราฟสับเซตย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้นกฎ 31.....	26
รูปที่ 19 ลักษณะของการซ้อนกันของเซลล์เพื่อนบ้านของแต่ละเซลล์ในโครงแบบ.....	29

รูปที่ 20 กราฟเดอ บราวน์ของเซลลูลาร์ออโตมาตากฎ 105.....	30
รูปที่ 21 กราฟสับเซตย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้น กฎ 105	33
รูปที่ 22 กราฟสับเซตย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตากฎ 39321 เมื่อ $N = (-2, -1, 0, 1)$	37
รูปที่ 23 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นผันกลับได้ (แบบที่ 1.1).....	44
รูปที่ 24 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นผันกลับได้ (แบบที่ 2.2).....	46
รูปที่ 25 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (1)	47
รูปที่ 26 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (2)	47
รูปที่ 27 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (3)	48
รูปที่ 28 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0, 1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 102 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น	55
รูปที่ 29 ตัวอย่างทางเดินที่ได้จากเมตริกซ์โครงแบบก่อนหน้า (1.).....	56
รูปที่ 30 ตัวอย่างทางเดินที่ได้จากเมตริกซ์โครงแบบก่อนหน้า (2.).....	57

บทที่ 1

บทนำ

เซลลูลาร์ออโตมาตา (cellular automata) ถือเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ดิสครีต (discrete mathematical) ที่สามารถทำงานแบบเป็นระบบพลวัต (dynamical system) [1] ซึ่งเซลลูลาร์ออโตมาตาประกอบไปด้วยสถานะจำกัด (finite state) ที่เรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบ เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เซลล์ (cell) โดยการเปลี่ยนสถานะของทุกเซลล์ที่ทำงานไปพร้อมกันแบบขนานด้วยการอาศัยกฎการส่งผ่าน (transition rule) ที่ขึ้นอยู่กับเซลล์เพื่อนบ้าน (neighbors) ใกล้เคียงบนเวลาที่เป็นแบบเต็มหน่วย (discrete time step) แม้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาจะเป็นโมเดลที่มีลักษณะและการเปลี่ยนสถานะโดยอาศัยกฎอย่างง่าย แต่สามารถสร้างระบบที่มีความซับซ้อนได้ เซลลูลาร์ออโตมาตาถูกนำไปใช้ในหลายแขนงของวงการคอมพิวเตอร์ เช่น วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) [2-8] การบีบอัดข้อมูล (data compression) [9] การจัดการรูปภาพ (image processing) [3, 10] ตัวสร้างลำดับ (sequence generator) [11-14] และการสร้างแบบจำลองที่มีความซับซ้อน (simulating or modeling complex systems) เช่น การจำลองแบบรูปของโรคทางผิวหนัง [15] การจำลองการเติบโตของเนื้องอก [16] การจำลองการอพยพคนจากการเดินเท้า [17] เป็นต้น

เซลลูลาร์ออโตมาตาที่ถือว่าเป็นชนิดพื้นฐานและได้รับความนิยมอย่างมาก คือ ชนิดขั้นต้น (elementary cellular automata) เสนอขึ้นโดยวูล์ฟราม (Wolfram) [18] ในปี ค.ศ.1986 ซึ่งเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติโดยเซลล์เรียงกันเป็นแบบแถวลำดับ แต่ละเซลล์ที่เป็นสถานะจำกัดมีค่าเป็นไปได้เพียง 0 หรือ 1 เท่านั้น และการพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านจะพิจารณาเพียงสามเซลล์ คือ เซลล์ทางซ้าย เซลล์ตนเอง และเซลล์ทางขวา ทำให้มีกฎที่ใช้ในการส่งผ่านมีทั้งหมด 256 แบบที่เป็นไปได้ แม้ว่าจะเป็นรูปแบบพื้นฐาน แต่ก็ยังสามารถสร้างรูปแบบที่มีความซับซ้อนสูงได้ [19]

สำหรับการประยุกต์ใช้เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติชนิดขั้นต้น ในทางปฏิบัติจำนวนเซลล์มักจะเป็นจำนวนแบบจำกัด (finite) [20] ดังนั้น การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านสำหรับเซลล์แรกสุดและท้ายสุดจึงต้องมีการนิยามเซลล์เพื่อนบ้านที่เป็นขอบเขตสำหรับการใช้กฎในการส่งผ่านไว้ด้วย ซึ่งการกำหนดขอบเขตมีสามแบบ คือ การกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า (null boundary condition) [21] ขอบเขตแบบรอบ (periodic boundary condition) [22, 23] และ ขอบเขตแบบสะท้อนกลับ (reflective boundary condition) [24, 25]

ปัจจุบันมีหลายงานวิจัยสนใจความสามารถในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตา (reversibility of cellular automata) [22, 23, 26-32] นั่นคือ ความสามารถของการที่เซลลูลาร์-

ออโตมาตาส่งผ่านสถานะใด ๆ ให้กลับไปสู่สถานะก่อนหน้าได้ด้วยกฎการส่งผ่านที่มีลักษณะเฉพาะ ซึ่งความสามารถดังกล่าวถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัย เช่น การสร้างแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ (simulation of natural phenomena) ตัวสร้างเลขสุ่มเทียม (pseudo random number generation) การจัดการรูปภาพ (image processing) การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation solving) [28, 29] ตัวสร้างลำดับ (sequence generator) [11-14] เป็นต้น ซึ่งปัญหาในการผันกลับได้แรกเริ่มนั้นได้รับความสนใจในรูปของการศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชัน เช่น ในปี ค.ศ. 1972 อโมโรโซ (Amoroso) [33] ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งงานวิจัยดังกล่าวสามารถตัดสินใจได้ว่าการส่งผ่านโดยรวมนั้นเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ และยังเสนอการมีของเซลลูลาร์ออโตมาตาบนเซตที่สามารถส่งผ่านโครงสร้าง (configuration) ให้ผันกลับไปเป็นแบบก่อนหน้าได้

วูล์ฟราม (Wolfram) เสนองานวิจัย [18] ในปี ค.ศ. 1984 สำหรับการใช้กราฟเดอ บราวน์ (de Bruijn graph) เพื่อหาคำตอบของปัญหาการส่งผ่านโครงสร้างนั้นว่าเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึงหรือเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ ซึ่งเป็นการแปลงปัญหาของการส่งผ่านแบบเซลลูลาร์ออโตมาตาไปเป็นการพิจารณาทางเดิน (path) ในกราฟเดอ บราวน์ โดยต่อมาในปี ค.ศ. 1991 ซูทเนอร์ (Sutner) [34] ได้ศึกษาการใช้กราฟเดอ บราวน์เพิ่มเติมเพื่ออธิบายลักษณะของโครงสร้างของเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีเซลล์เพื่อนบ้านขอบเขตรัศมี (r) โดยมีกฎการส่งผ่าน ได้เสนอว่ากฎจะไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มีทางเดินแตกต่างกันอย่างน้อยสองทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ที่ทำให้เกิดสัญลักษณ์ที่เหมือนกัน

สมบัติในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาได้รับการศึกษาโดยเริ่มจากงานวิจัย [35] ได้พิสูจน์ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาจะมีสมบัติในการผันกลับได้หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนเซลล์ในปริภูมิด้วย ทำให้มีหลายงานวิจัยสนใจในการศึกษาสมบัติดังกล่าวของเซลลูลาร์ออโตมาตา ประกอบกับในปี ค.ศ. 2005 งานวิจัยของแกรี (Kari) [29] ได้อ้างว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบผันกลับได้นั้นเป็นโมเดลสำคัญที่สามารถประยุกต์ในการจำลองปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์จุลภาค (microscopic physics) ซึ่งการจำลองที่สำคัญ เช่น การจำลองกลุ่มก๊าซ (lattice gas simulation) เป็นต้น ทั้งนี้เซลลูลาร์ออโตมาตาถือได้ที่สามารถจำลองได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดเมื่อเทียบกับการจำลองด้วยโมเดลอื่น ๆ นอกจากนี้แกรียังใช้การนิยามเซลล์เพื่อนบ้านด้วยเวกเตอร์ที่มีจำนวนมิติเท่ากับจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านที่ใช้ในการพิจารณาในกฎการส่งผ่าน ซึ่งถือเป็นการนิยามให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ครอบคลุมกว่าการนิยามแบบสมมาตรซึ่งเป็นการกำหนดเซลล์เพื่อนบ้านด้วยขอบเขตรัศมี [18] สำหรับเซลลูลาร์-ออโตมาตาชนิดขั้นต้นนั้น เมื่อพิจารณากฎที่มีความสามารถในการส่งผ่านผันกลับได้นั้น มีเพียงแปดกฎเท่านั้นที่มีสมบัติดังกล่าว [6, 7]

ต่อมามีหลายงานวิจัยที่ศึกษาการแทนเซลลูลาร์อโตมาตาให้เป็นการคำนวณในรูปแบบอื่น เพื่อให้เซลลูลาร์อโตมาตานั้นมีสมบัติในการผันกลับได้ เช่น ในปี ค.ศ. 2007 เอนซินาส (Encinas) [23] ได้เสนอกฎที่ใช้ในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์อโตมาตาเชิงเส้นของ กฎ 150 โดยใช้สมบัติของการคำนวณพีชคณิต (algebraic property) โดยงานวิจัยดังกล่าวได้เสนอการแทนกฎการส่งผ่านด้วยนิพจน์พหุนาม (polynomial expression) ทำให้เซลลูลาร์อโตมาตาที่ใช้กฎดังกล่าวสามารถคำนวณสถานะผันกลับได้ แต่การแทนดังกล่าวมีข้อจำกัดที่สามารถทำได้กับบางกฎเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2011 เดล เรย์ (del Ray) [31] ได้เสนอการแทนกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์อโตมาตาเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะ (characteristic matrix) ซึ่งการทำงานของเซลลูลาร์อโตมาตามีการส่งผ่านเพื่อเปลี่ยนสถานะโดยอาศัยการคำนวณการคูณของเมตริกซ์ ดังนั้น การจำแนกกฎที่สามารถส่งผ่านผันกลับได้สามารถแทนได้ด้วยการคำนวณเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะ ซึ่งกฎที่เดล เรย์ศึกษานั้นจะมีเพียงเฉพาะบางกฎเท่านั้นที่สามารถเขียนอยู่ในรูปการคำนวณเชิงเส้นได้ และเมตริกซ์ผกผันที่คำนวณได้นั้นไม่สามารถอธิบายได้ด้วยกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์อโตมาตา และเมตริกซ์ผกผันบางตัวนั้นไม่อยู่ในเซตของสถานะจำกัดที่สนใจ หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2015 เดล เรย์ [36] ศึกษาความสามารถในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์อโตมาตาที่ใช้กฎ 90 ในการส่งผ่าน ซึ่งกฎ 90 ถือเป็นกฎที่ทำงานได้เหมือนกับการคำนวณการกระทำเอ็กซ์คลูซีฟออร์ (XOR) ของเซลล์ทางด้านซ้ายและเซลล์ทางด้านขวา ซึ่งกฎนี้เคยนำไปใช้ในการเข้ารหัสลับแบบสมมาตรในงานวิจัย [2] แม้ว่ากฎดังกล่าวไม่สามารถผันกลับได้ด้วยการกำหนดขอบเขตแบบรอบ (periodic boundary condition) งานวิจัยได้เสนออัลกอริทึมที่ใช้คำนวณหาฟังก์ชันสำหรับการคำนวณการผันกลับได้ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ประกอบโดยมีลักษณะเป็นเซลลูลาร์อโตมาชนิดไม่สม่ำเสมอ ซึ่งในงานวิจัย [32] ได้ใช้แนวคิดเดียวกันสำหรับกฎ 150

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ศึกษาและเสนออัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลลูลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า โดยเป็นการแทนปัญหาของความสามารถในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์อโตมาตาเชิงเส้นด้วยกราฟมีทิศทาง ซึ่งกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์อโตมาตาที่ศึกษาจะอยู่ในรูปทั่วไปที่ไม่จำกัดรูปแบบของเซลล์เพื่อนบ้าน ซึ่งจะทำการศึกษากฎที่มีสมบัติผันกลับถูกขยายออกไปได้มากขึ้น นอกจากนี้

1.1 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ศึกษาทฤษฎีของความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์ออร์โตมาตาเชิงเส้นด้วยกราฟมีทิศทาง รวมถึงเสนออัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลล์ออร์โตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

1.2 ขั้นตอนของการทำวิจัย

- 1) ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์ออร์โตมาตา
- 2) วิเคราะห์และออกแบบการแทนเซลล์ออร์โตมาตาเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของกราฟมีทิศทางโดยนิยามเซลล์เพื่อนบ้านให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ที่มีจำนวนมิติเท่ากับจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านที่สนใจ
- 3) ออกแบบการทดสอบสมบัติที่จำเป็นของการผันกลับได้ของฟังก์ชันการส่งผ่านด้วยกฎบนกราฟสับเซตย่อยเพื่อจำแนกกฎการส่งผ่านที่ไม่สามารถผันกลับได้
- 4) ออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการระบุการผันกลับของเซลล์ออร์โตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า พิสูจน์ความถูกต้องของอัลกอริทึมการระบุการผันกลับได้
- 5) สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) เซลล์ออร์โตมาตาที่ใช้ในงานวิจัยนี้สนใจเฉพาะชนิดหนึ่งมิติเท่านั้น
- 2) การกำหนดขอบเขตของเซลล์ออร์โตมาตาใช้การกำหนดเงื่อนไขแบบไม่มีค่า
- 3) สถานะของเซลล์อยู่ในเซตของไบนารี นั่นคือสถานะจำกัดเป็นไปได้อย่างศูนย์หรือหนึ่งเท่านั้น
- 4) การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านเป็นแบบต่อเนื่องและประกอบไปด้วยเซตตนเองด้วยเสมอ

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

ได้อัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลล์ออร์โตมาตาหนึ่งมิติด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า ซึ่งจะสามารถนำโมเดลดังกล่าวไปประยุกต์ในปัญหา

การผันกลับของเซลล์อโตมาตาที่มีอยู่ในปัจจุบัน อีกทั้งยังทำให้สามารถเข้าใจถึงความสัมพันธ์ของการผันกลับได้ของเซลล์อโตมาตาแบบหนึ่งมิติที่มีต่อกราฟมีทิศทางได้อีกด้วย อันจะทำให้สามารถเข้าใจลักษณะและพฤติกรรมของการส่งผ่านของเซลล์อโตมาตาได้อย่างดีมากขึ้น



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย 4 ส่วน ส่วนแรกคือทฤษฎีทั่วไปของเซลลูลาร์ออโตมาตา ส่วนถัดไปคือ เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ เซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้ทั้งแบบเชิงเส้นปกติและแบบเชิงเส้นโดยใช้การส่งผ่านเมตริกซ์ และส่วนสุดท้ายกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานของกราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์และกราฟสับเซตย่อย

2.1 เซลลูลาร์ออโตมาตา

เซลลูลาร์ออโตมาตา (cellular automata) ถูกเสนอขึ้นโดยนอยแมนน์ (Neumann) [1] ในช่วงปี ค.ศ. 1940 ซึ่งถือเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะประกอบไปด้วยสถานะจำกัด (finite states) ที่เรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบ เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เซลล์ (cell) โดยการเปลี่ยนสถานะของทุกเซลล์ที่ทำงานไปพร้อมกันแบบขนานด้วยการอาศัยกฎการส่งผ่าน (transition rule) ที่ขึ้นอยู่กับเซลล์เพื่อนบ้าน (neighbors) ซึ่งกฎในการส่งผ่านแต่ละเซลล์เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า กฎเฉพาะที่ (local rule) ทำงานบนเวลาที่เป็นแบบเต็มหน่วย (discrete time) ซึ่งเซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้นในแบบของแคร์รี (Kari) [20] สามารถนิยามได้ดังนิยามที่ 1

นิยามที่ 1 เซลลูลาร์ออโตมาตา

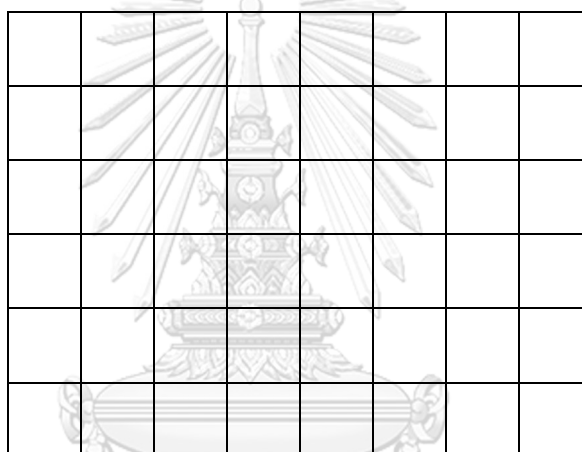
เซลลูลาร์ออโตมาตาประกอบด้วย 4 ส่วน คือ (d, S, N, f) เมื่อ

- $d \in \mathbb{N}$ แทนจำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตาซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น
- $S = \{0, 1, \dots, p-1\}$ แทนเซตของสถานะจำกัด นั่นคือค่าทั้งหมดที่แต่ละเซลล์สามารถเป็นไปได้อาจมีจำนวน p สถานะ และ p เป็นจำนวนเต็มบวก
- $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ แทนเวกเตอร์ดัชนีของเซลล์เพื่อนบ้านขนาด m เซลล์ เมื่อ $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}^d$ และ $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ ดังนั้น จะได้ว่าเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ \vec{i} ใด ๆ คือ $\vec{i} + \vec{v}_k$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots, m$
- $f: S^m \rightarrow S$ คือ กฎเฉพาะที่ (local rule) ซึ่งใช้ในการส่งผ่านสถานะจำกัดปัจจุบันของแต่ละเซลล์ไปเป็นสถานะถัดไปอย่างพร้อมเพรียงกัน

เซลล์าร์อโตมาตาถูกนำไปใช้ในหลายแขนงของวงการคอมพิวเตอร์ เช่น วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) การบีบอัดข้อมูล (data compression) การจัดการรูปภาพ (image processing) และการสร้างแบบจำลองที่มีความซับซ้อน (simulating or modeling complex systems) เป็นต้น ซึ่งเซลล์าร์อโตมาตาสามารถแบ่งตามลักษณะของเซลล์ตามมิติต่าง ๆ ยกตัวอย่างดังรูปที่ 1, รูปที่ 2 และ รูปที่ 3

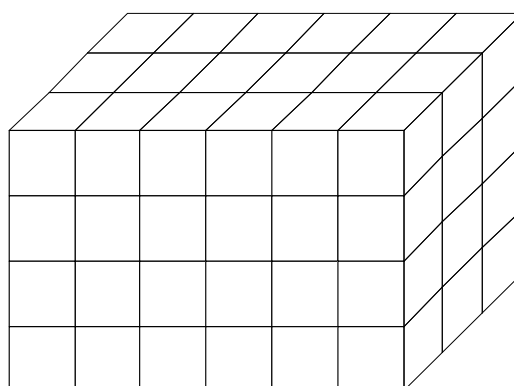


รูปที่ 1 ลักษณะของเซลล์าร์อโตมาตาแบบหนึ่งมิติ



รูปที่ 2 ลักษณะของเซลล์าร์อโตมาตาแบบสองมิติ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY



รูปที่ 3 ลักษณะของเซลล์าร์อโตมาตาแบบสามมิติ

2.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ

ในปริภูมิ (space) ของเซลลูลาร์ออโตมาตา แต่ละเซลล์จะมีค่าเป็นสถานะใดสถานะหนึ่งในเซต S ซึ่งถูกกำหนดค่าด้วยฟังก์ชัน $c: \mathbb{Z}^d \rightarrow S$ และเซตของเซลล์ทั้งหมดในปริภูมิเรียกว่า โครงแบบ (configuration) โดยเซลลูลาร์ออโตมาตาที่ถือว่าเป็นชนิดพื้นฐานที่สุด คือ เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ (one-dimensional cellular automata) ทั้งนี้ สามารถเขียนโครงแบบได้ในรูป

$$C = (c(1), c(2), \dots, c(n))$$

ดังนั้น จะได้ว่า $c(i)$ คือ เซลล์ที่ i และ $c^t(i)$ คือ สถานะของเซลล์ที่เวลา t โดยจะเห็นว่า C^t คือ โครงแบบที่เวลา t เขียนได้เป็น

$$C^t = (c^t(1), c^t(2), \dots, c^t(n))$$

เซลล์เพื่อนบ้าน (neighborhood) หมายถึง เซลล์ที่อยู่โดยรอบของเซลล์ใด ๆ จำนวน m ซึ่งมีตำแหน่งที่ถูกระบุด้วยเวกเตอร์ดัชนีของเซลล์เพื่อนบ้านตามฟังก์ชัน

$\eta: S \rightarrow S^m$ โดยเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ที่ i นิยามโดย

$$\eta(c(i)) = (c(i+\vec{v}_1), c(i+\vec{v}_2), \dots, c(i+\vec{v}_m))$$

แต่ละเซลล์ของเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นสามารถส่งผ่านไปยังสถานะถัดไปที่เวลา $t+1$ ได้ด้วยการพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านของตนเอง โดยฟังก์ชันในการส่งผ่านเรียกว่า ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ (local transition function) หรือบางครั้งเรียกว่า กฎการส่งผ่าน (local rule) นิยามได้ด้วย $f: S^m \rightarrow S$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$c^{t+1}(i) = f(\eta(c^t(i))) = f(c^t(i+\vec{v}_1), c^t(i+\vec{v}_2), \dots, c^t(i+\vec{v}_m))$$

จะได้ว่า เซลล์เพื่อนบ้านแต่ละตัวของเซลล์ที่ i ใด ๆ คือ $i+\vec{v}_k$ เมื่อ $k=1, 2, \dots, m$ ทั้งนี้ สามารถกล่าวได้ว่า $c^t(i+\vec{v}_k)$ คือเซลล์ตนเอง เมื่อ $\vec{v}_k = \mathbf{0}$ แสดงได้ใน

รูปที่ 4

...	$c^t(i+\vec{v}_1)$...	$c^t(i+\vec{v}_2)$...	$c^t(i+\vec{v}_k)$...	$c^t(i+\vec{v}_m)$...
-----	--------------------	-----	--------------------	-----	--------------------	-----	--------------------	-----

รูปที่ 4 เซลล์เพื่อนบ้านจำนวน m เซลล์ ของเซลล์ที่ i

นอกจากนั้น เมื่อมีการส่งผ่านแต่ละเซลล์ของเซลล์ลาร์อโตมาตาไปยังสถานะใหม่ด้วย f ในลักษณะเดียวกันทั้งหมดหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าโครงแบบปัจจุบันสามารถส่งผ่านไปยังโครงแบบใหม่ได้ด้วยฟังก์ชันการส่งผ่านโดยรวม (global transition function) เขียนแทนด้วย $F : S^n \rightarrow S^n$ และสามารถนิยามได้โดย

$$F(C) = (f(\eta(c(1))), f(\eta(c(2))), \dots, f(\eta(c(i))), \dots, f(\eta(c(n))))$$

สำหรับ ทุก $C \in S^n$ และ $1 \leq i \leq n$

เมื่อเซลล์ลาร์อโตมาตาเป็นสถานะแบบจำกัดขนาด n เซลล์ จึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขของเซลล์เพื่อนบ้านสำหรับการอ้างอิงถึงเซลล์ที่เกินขอบเขตของปริภูมิของเซลล์ลาร์อโตมาตา โดยวิธีการที่เป็นที่นิยมมีอยู่สามรูปแบบ นั่นคือ การกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า แบบรอบ และแบบสะท้อนกลับ วิธีแรกคือ การกำหนดให้การพิจารณาเซลล์ที่เกินขอบเขตเป็นค่าคงที่คือศูนย์ คือ $c'(i) = 0$ เมื่อ $i < 1$ หรือ $i > n$ เรียกการกำหนดเงื่อนไขดังกล่าวว่า การกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า (null boundary condition) ดังในรูปที่ 5

0	...	0	0	$c(1)$	$c(2)$...	$c(n)$	0	0	...	0
---	-----	---	---	--------	--------	-----	--------	---	---	-----	---

รูปที่ 5 เซลล์ลาร์อโตมาตาขอบเขตแบบไม่มีค่า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

สำหรับการกำหนดขอบเขตแบบที่ให้ปริภูมิของเซลล์ลาร์อโตมาตามีลักษณะเป็นวงรอบ เรียกว่า การกำหนดขอบเขตแบบรอบ (periodic boundary condition) ซึ่งสามารถนิยามได้โดย

$$c(i) = c(i \pmod n) \text{ เมื่อ } i < 1 \text{ หรือ } i > n$$

รูปที่ 6 จะสังเกตได้ว่า หากกำหนดขอบเขตแบบรอบ จะได้ว่า $c(0) = c(n)$ และ $c(n+1) = c(1)$

$c(-j)$...	$c(0)$	$c(1)$	$c(2)$...	$c(n)$	$c(n+1)$...	$c(n+k)$
---------	-----	--------	--------	--------	-----	--------	----------	-----	----------

รูปที่ 6 ลักษณะเซลล์นอกขอบเขตของเซลล์ลาร์อโตมาตา เมื่อ j และ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ

การกำหนดขอบเขตแบบสะท้อนกลับ (reflective boundary condition) นั้น ถูกนำไปใช้ในงานวิจัย [24, 25] โดยกำหนดให้เซลล์ที่อยู่นอกขอบเขตมีค่าเป็นเซลล์ที่พิจารณาแบบสะท้อนกลับ จากรูปที่ 6 จะได้ว่า $c(0) = c(1), c(-1) = c(2), \dots$ และ

$$c(n+1) = c(n), c(n+2) = c(n-1), \dots$$

ในปี ค.ศ. 1984 วูล์ฟแฟรม (Wolfram) [18] ได้เสนอเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น (elementary cellular automata (ECA)) โดยกำหนดให้สถานะจำกัดเป็น $S = \{0,1\}$ และ กำหนดให้เซลล์เพื่อนบ้านเป็นเซลล์ทางซ้าย เซลล์ตนเอง และเซลล์ทางขวาตามลำดับ

นิยามที่ 2 เซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น (elementary cellular automata)

เซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้นประกอบด้วย n เซลล์ที่มีสถานะแบบจำกัดลักษณะเหมือนกันเรียงกัน เป็นแถวยาว โดยและแต่ละช่วงเวลา t แต่ละเซลล์จะมีสถานะที่เป็นไปได้ คือ $S = \{0,1\}$ ซึ่งเซลล์ที่ i ที่เวลา t สามารถเขียนแทนด้วย $c^t(i) \in S$ แต่ละเซลล์สามารถเปลี่ยนสถานะตามเวลา t พร้อม ๆ กันด้วยกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ด้วยฟังก์ชัน f ของสถานะก่อนหน้าของเซลล์ทางซ้าย ตนเอง และ เซลล์ทางขวา นั่นคือ $f: S^3 \rightarrow S$ โดย

$$f(c^t(i-1), c^t(i), c^t(i+1)) = c^{t+1}(i)$$

เมื่อ $1 \leq i \leq n$ จะเห็นว่า เซลล์เพื่อนบ้านขนาด $m = 3$ บนเซต S สามารถเป็นไปได้ 8 แบบและการกำหนดกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ทั้งหมด $2^8 = 256$ แบบ ที่เป็นไปได้สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น สำหรับกฎ w สามารถคำนวณได้จาก

$$0 \leq w = \sum_{k=0}^7 b_k \cdot 2^{7-k} \leq 255$$

และการส่งผ่านเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f คือ

$$f(1,1,1) = b_0$$

$$f(1,1,0) = b_1$$

$$f(1,0,1) = b_2$$

$$f(1,0,0) = b_3$$

$$f(0,1,1) = b_4$$

$$f(0,1,0) = b_5$$

$$f(0,0,1) = b_6$$

$$f(0,0,0) = b_7$$

การตั้งชื่อกฎของเซลล์ลาร์อโตมาตาชนิดขั้นต้นด้วยจำนวนเต็มสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 7 แสดงตัวอย่างการสร้างกฎเฉพาะที่ (local rule) ซึ่งเมื่อเซลล์เพื่อนบ้านเป็น $(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)$ หรือ $(0,0,1)$ การส่งผ่านไปยังสถานะถัดไปจะได้ '0' และการส่งผ่านสถานะถัดไปจะเป็น '1' เมื่อเซลล์เพื่อนบ้านมีลักษณะเป็น $(1,0,1), (1,1,0), (0,1,0)$ หรือ $(0,0,0)$ ทั้งนี้ การสร้างกฎเกิดจากการนำเหตุการณ์ของการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์เพื่อนบ้านมาเรียงลำดับจากค่ามากที่สุด $(1,1,1)$ ไปจนถึงค่าน้อยที่สุด $(0,0,0)$ ตามลำดับ แล้วทำให้ได้ว่าการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาเขียนได้เป็น

$$(b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7)_2$$

โดยที่ $b_i \in \{0,1\}$ จะเห็นได้ว่าจากรูปที่ 7 เมื่อนำมาเขียนเป็นกฎการส่งผ่านจะได้ $(00110101)_2$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 53 ในเลขฐานสิบ จึงเรียกการส่งผ่านในลักษณะดังกล่าวว่ากฎ 53

$\eta(c_i)$	111	110	101	100	011	010	001	000
output	0	0	1	1	0	1	0	1

รูปที่ 7 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 53

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้สถานะเริ่มต้นของเซลล์ลาร์อโตมาตาเป็น '10100110010' การส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาด้วยกฎ 53 สามารถคำนวณสถานะถัดไปโดยมีการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าได้ ดังนี้

เซลล์ที่ 1 :	$f(0,1,0) = 1$	เซลล์ที่ 7 :	$f(1,1,0) = 0$
เซลล์ที่ 2 :	$f(1,0,1) = 1$	เซลล์ที่ 8 :	$f(1,0,0) = 1$
เซลล์ที่ 3 :	$f(0,1,0) = 1$	เซลล์ที่ 9 :	$f(0,0,1) = 0$
เซลล์ที่ 4 :	$f(1,0,0) = 1$	เซลล์ที่ 10 :	$f(0,1,0) = 1$
เซลล์ที่ 5 :	$f(0,0,1) = 0$	เซลล์ที่ 11 :	$f(1,0,0) = 1$
เซลล์ที่ 6 :	$f(0,1,1) = 0$		

ดังนั้น '10100110010' สามารถส่งผ่านด้วยกฎ 53 ได้ผลลัพธ์เป็น '11110001011' ดังรูปที่ 8

1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
↓										
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1

รูปที่ 8 ตัวอย่างการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาขั้นต้นด้วยกฎ 53

□

ทั้งนี้ จากการสังเกตจะเห็นว่าการนิยามกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ของเซลล์ลาร์อโตมาตาชนิดขั้นต้นนั้นสามารถเขียนเวกเตอร์ดัชนีเซลล์เพื่อนบ้านได้เป็น $N = (-1, 0, 1)$ และแม้จะถือว่าเซลล์ลาร์อโตมาตาในลักษณะดังกล่าวเป็นชนิดอย่างง่ายที่สุด (เซลล์ลาร์อโตมาตาแบบหนึ่งมิติ เซลล์เพื่อนบ้านขนาด 3 เซลล์ และมีสถานะจำกัดเพียง 2 สถานะ) แต่พฤติกรรมที่เกิดขึ้นจากการส่งผ่านโดยรวมสามารถทำให้เกิดความซับซ้อนสูง จึงได้รับความสนใจจากหลายงานวิจัยมาจนถึงปัจจุบัน

2.3 เซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้

เซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้ (reversible cellular automata (RCA)) คือ เซลล์ลาร์อโตมาตาที่มีความสามารถส่งผ่านสถานะของโครงแบบ C' ใด ๆ ให้เปลี่ยนไปเป็นสถานะ C^{t+1} ด้วยฟังก์ชันการส่งผ่าน $F: S^n \rightarrow S^n$ แล้วเซลล์ลาร์อโตมาตาดังกล่าวสามารถทำให้สถานะ C^{t+1} ส่งผ่านให้กลับคืนมาที่สถานะเดิม C' ได้ด้วยฟังก์ชันการส่งผ่าน $F^{-1}: S^n \rightarrow S^n$

นิยามที่ 3 เซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้

กำหนดให้ $Z = (d, S, N, f)$ เป็นเซลล์ลาร์อโตมาตา

1. Z มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันการส่งผ่านโดยรวม F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. Z เรียกว่าผันกลับได้ ก็ต่อเมื่อ มีเซลล์ลาร์อโตมาตา $Z' = (d, S, N', f')$ ที่ทำให้ทุก $\alpha, \beta \in S^n$ ซึ่ง

$$F(\alpha) = \beta \text{ ก็ต่อเมื่อ } F'(\beta) = \alpha$$

โดย F และ F' คือ ฟังก์ชันในการส่งผ่านโดยรวมของ Z และ Z' ตามลำดับ ในที่นี้เรียก Z' ว่าเซลล์ลาร์อโตมาตาผกผันของ Z

3. Z เรียกว่าผันกลับได้ ก็ต่อเมื่อ Z มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

อนึ่ง ได้มีการศึกษาถึงความสมดุลของกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ ซึ่งมีการพิสูจน์แล้วเซลล์ูลาร์ออโตมาตาใดที่มีสมบัติผันกลับได้แล้ว กฎการส่งผ่านจะต้องเป็นกฎสมดุล (balance rule) กล่าวคือ สำหรับเซลล์ูลาร์ออโตมาตาที่มีสมบัติผันกลับได้ แล้ว

$$|f^{-1}(s)| = |S|^{m-1}$$

สำหรับทุก $s \in S$ และ m คือ จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้าน

ทั้งนี้ ความสามารถในการผันกลับได้ดังกล่าวถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัย เช่น วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) สร้างแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ (simulation of natural phenomena) ตัวสร้างเลขสุ่มเทียม (pseudo random number generation) การจัดการรูปภาพ (image processing) เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้สถานะเริ่มต้นของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาเป็น '1001011000011010' ส่งผ่านด้วยกฎ 170 เป็นจำนวน $t = 5$ โดยกำหนดขอบเขตแบบรอบ

เราสามารถเขียนเซลล์ูลาร์ออโตมาตาที่สถานะต่าง ๆ ได้ ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 การส่งผ่านเซลล์ูลาร์ออโตมาตาด้วยกฎ 170

C^0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
C^1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
C^2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
C^3	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
C^4	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
C^5	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

□

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้สถานะเริ่มต้นของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาเป็น '1100001101010010' ส่งผ่านด้วยกฎ 240 เป็นจำนวน $t = 5$ โดยกำหนดขอบเขตแบบรอบ

เราสามารถเขียนเซลล์ูลาร์ออโตมาตาที่สถานะต่าง ๆ ได้ ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 การส่งผ่านเซลล์ลาร์อัตโนมัติด้วยกฎ 240

C^0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
C^1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
C^2	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
C^3	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
C^4	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
C^5	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

□

$\eta(c_i)$	111	110	101	100	011	010	001	000
f_{170}	1	0	1	0	1	0	1	0

$\eta(c_i)$	111	110	101	100	011	010	001	000
f_{240}	1	1	1	1	0	0	0	0

รูปที่ 9 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 170 และ 240

จากตัวอย่างของการส่งผ่านเซลล์ลาร์อัตโนมัติด้วยกฎ 170 และกฎ 240 ดังตัวอย่างที่ 2 และตัวอย่างที่ 3 ซึ่งมีฟังก์ชันในการส่งผ่านดังรูปที่ 9 จะเห็นว่า เมื่อให้สถานะเริ่มต้นใน $t=0$ เป็น '1001011000011010' จะได้ผลลัพธ์หลังจากการส่งผ่านด้วยกฎ 170 จำนวน 5 ครั้ง ($t=5$) คือ '1100001101010010' ดังตารางที่ 1 และเมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ใน $t=5$ มาส่งผ่านด้วยกฎ 240 จำนวน 5 ครั้งเท่ากัน ดังในตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่า กฎ 240 สามารถส่งผ่านให้เซลล์ลาร์อัตโนมัติผ่นกลับไปเป็นสถานะเริ่มต้นได้ ซึ่งไม่ว่าเซลล์ลาร์อัตโนมัติจะมีสถานะเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบใด เมื่อใช้กฎ 240 เป็นกฎที่ใช้ในการส่งผ่าน จะสามารถส่งผ่านผ่นกลับได้ด้วยกฎ 170 ด้วยจำนวนของการส่งผ่านที่เท่ากันได้เสมอ ทั้งนี้กฎการส่งผ่านให้เซลล์ลาร์อัตโนมัติผ่นกลับได้ในลักษณะนี้มีเพียง 6 คู่เท่านั้น [6, 7] ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว นั่นคือกฎ 15 คู่กับ 85, 170 คู่กับ 240, 51 คู่กับ 51, 105 คู่กับ 105, 150 คู่กับ 150 และ 204 คู่กับ 204 จึงทำให้การนำไปประยุกต์ใช้ด้วยลักษณะดังกล่าวยังไม่เป็นที่แพร่หลายนัก

2.3.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาผันกลับได้เชิงเส้น

ในปี ค.ศ. 2011 เดล เรย์ (del Rey) [31] ได้เสนอการศึกษาปัญหาความสามารถในการผันกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้นโดยการแทนกฎการส่งผ่านเป็นเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะ (characteristic matrix) ซึ่งมีลักษณะเป็นวัฏจักร (circulant matrix) โดยสถานะถัดไปของเซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้นสามารถคำนวณได้โดยการคูณแบบเมตริกซ์ สำหรับการระบุว่าการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นสามารถผันกลับได้หรือไม่ สามารถพิจารณาได้จากเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะนั้นว่าสามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้หรือไม่ และกฎที่ใช้ในการส่งผ่านให้ผันกลับได้ก็จะอยู่ในรูปของเมตริกซ์ผกผันจากโครงสร้างหรือสถานะปัจจุบันของเซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$C^t = (c^t(1), c^t(2), \dots, c^t(n))$$

เมื่อ $c^t(i)$ คือ สถานะของเซลล์ที่ i ที่เวลา t และ C^t คือ สถานะของโครงสร้างปัจจุบันทั้งหมด ซึ่งสถานะถัดไปที่เวลา $t+1$ เกิดจากการส่งผ่านเฉพาะที่ของแต่ละเซลล์เพื่อเปลี่ยนไปเป็นสถานะใหม่เขียนได้เป็น

$$c^{t+1} = f(\eta(c^t(i))) = f(c^t(i + \vec{v}_1), c^t(i + \vec{v}_2), \dots, c^t(i + \vec{v}_m))$$

เมื่อ f คือ ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ของแต่ละเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ที่ i และ m คือ จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้าน เมื่อพิจารณาเซลลูลาร์ออโตมาตาโดยการคำนวณฟังก์ชันเชิงเส้น เราจะได้ว่า c^{t+1} สามารถคำนวณได้จาก

$$c^{t+1}(i) = [\lambda_1 c^t(i + \vec{v}_1) + \lambda_2 c^t(i + \vec{v}_2) + \dots + \lambda_m c^t(i + \vec{v}_m)] \pmod{|S|}$$

เมื่อ $\lambda_k \in S$ คือสัมประสิทธิ์ของกฎ (rule coefficient) สำหรับเซลล์เพื่อนบ้าน $i + \vec{v}_k$ และ $k = 1, 2, \dots, m$ ซึ่งเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีการส่งผ่านในลักษณะดังกล่าวเรียกว่า เซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้น (linear cellular automata) ที่มีการส่งผ่านไปสถานะถัดไปด้วยการคำนวณผลรวมเชิงเส้นของเซลล์เพื่อนบ้าน

นิยามที่ 4 เซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้น

สำหรับเซลลูลาร์ที่มี S เป็นสถานะจำกัด $f: S^m \rightarrow S$ เป็นฟังก์ชันในการส่งผ่านเฉพาะที่และมีเซลล์เพื่อนบ้านขนาด m จะเรียกว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้น หากมี $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in S^m$ ซึ่งทำให้ f สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_m \cdot x_m$$

สำหรับทุก $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^m$

ตัวอย่างที่ 4 การเขียนกฎ 150 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้นให้อยู่ในรูปของการคำนวณเชิงเส้น

จากรูปที่ 2.10 จะเห็นได้ว่า กฎ 150 สามารถเขียนกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ให้ได้เป็น

$$\begin{aligned} c^{t+1}(i) &= f(c^t(i-1), c^t(i), c^t(i+1)) \\ &= (c^t(i-1) + c^t(i) + c^t(i+1)) \pmod{2} \end{aligned}$$

□

$\eta(c_i)$	111	110	101	100	011	010	001	000
f_{150}	1	0	0	1	0	1	1	0

รูปที่ 10 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 150

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้เซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีสถานะเริ่มต้นเป็น $C^0 = (c^0(1), c^0(2), \dots, c^0(n))$ เมื่อ $c(i) \in \{0,1\}$ ซึ่ง $1 \leq i \leq n$ และมีการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า (หรือกล่าวได้ว่า $c(i) = 0$ เมื่อ $i < 1$ หรือ $i > n$) ส่งผ่านด้วยเวกเตอร์ดัชนีของเซลล์เพื่อนบ้าน $N = (-1, 0, 1)$ และมีสัมประสิทธิ์ของกฎ $\lambda_i = 1$ สำหรับทุก i จะได้ว่า การคำนวณสถานะถัดไป คือ

$$c^1(1) = [\lambda_1 c^0(1-1) + \lambda_2 c^0(1+0) + \lambda_3 c^0(1+1)] \pmod{2} = (c^0(0) + c^0(1) + c^0(2)) \pmod{2}$$

$$c^1(2) = [\lambda_1 c^0(2-1) + \lambda_2 c^0(2+0) + \lambda_3 c^0(2+1)] \pmod{2} = (c^0(1) + c^0(2) + c^0(3)) \pmod{2}$$

⋮

$$c^1(n) = [\lambda_1 c^0(n-1) + \lambda_2 c^0(n+0) + \lambda_3 c^0(n+1)] \pmod{2} = (c^0(n-1) + c^0(n) + c^0(n+1)) \pmod{2}$$

และ จะได้ว่า

$$c^1 = (c^1(1), c^1(2), \dots, c^1(n))$$

□

จากตัวอย่างที่ 4 และ 5 จะเห็นได้ว่าการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นเป็นแบบขั้นต้น นั่นคือ พิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านคือ เซลล์ทางซ้าย เซลล์ตนเอง และเซลล์ทางขวา สอดคล้องกับกฎ 150 ซึ่งว่าเป็นกฎสำหรับการคำนวณการกระทำเอ็กซ์คลูซีฟออร์ (XOR) ของทั้งสามเซลล์ นั่นคือ

$$c^{t+1}(i) = c^t(i-1) \oplus c^t(i) \oplus c^t(i+1)$$

2.3.2 เซลูลาร์อโตมาตาผันกลับได้เชิงเส้นโดยใช้การส่งผ่านเมตริกซ์

เมตริกซ์การส่งผ่าน (transition matrix) หรือเมตริกซ์กฎ (rule matrix) ได้รับความนิยมน้อยมากในการศึกษาความสามารถในการผันกลับได้ [21, 28, 31-33, 36] ซึ่งเซลูลาร์อโตมาตาที่สามารถคำนวณเชิงเส้นได้นั้น จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของการคำนวณด้วยเมตริกซ์ได้ ดังนั้นการหาสถานะถัดไปบนการทำมอดุโล 2 จะได้ว่า

$$(c^{t+1})^T = M_n \cdot (c^t)^T \pmod{2}$$

โดยที่ M_n คือเมตริกซ์การส่งผ่านเฉพาะที่ (local transition matrix) ที่อยู่ในรูปของเมตริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix)

$$M_n = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{r_R} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{r_R} \\ \lambda_{-r_L} & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{-r_L} & \cdots & \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_{-r_L}, \lambda_{-r_L+1}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r_R-1}, \lambda_{r_R}$ คือ สัมประสิทธิ์ของกฎ ในที่นี้ λ_0 คือสัมประสิทธิ์ของเซลล์ตนเอง โดย r_L และ r_R คือ จำนวนขอบเขตของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายและเซลล์เพื่อนบ้านทางขวาตามลำดับ

ด้วยคุณสมบัติของเมตริกซ์จะเห็นได้ว่า หาก M_n เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ซึ่งไม่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ จะสรุปได้ว่าเซลูลาร์อโตมาตาที่ส่งผ่านด้วย M_n ไม่สามารถส่งผ่านผกผันได้ ในอีกมุมหนึ่ง หาก M_n เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) จะกล่าวได้ว่าเซลูลาร์อโตมาตาสามารถส่งผ่านผันกลับได้ด้วยเมตริกซ์ผกผัน M_n^{-1} ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$(c^t)^T = M_n^{-1} \cdot (c^{t-1})^T \pmod{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้เซลูลาร์อโตมาตาเชิงเส้นสำหรับกฎ 150 ซึ่งมีเวกเตอร์ดัชนีของเซลล์เพื่อนบ้าน $N = (-1, 0, 1)$ และมีสัมประสิทธิ์ของกฎ $\lambda_i = 1$ สำหรับทุก i และให้สถานะเริ่มต้นเป็น $c^0 = (1, 1, 0, 1)$ โดยกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า จะได้ว่า

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

สถานะถัดไป คือ

$$(c^{t+1})^T = M_n \cdot (c^t)^T \pmod{2}$$

$$(c^1)^T = M_4 \cdot (c^0)^T \pmod{2}$$

$$(c^1)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pmod{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$c^1 = (0,0,0,1)$$

□

ตัวอย่างที่ 7 จากตัวอย่างที่ 6 สามารถคำนวณการผกผันของกฎ 150 ได้โดยการหาเมตริกผกผันของ M_n

จาก

$$M_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pmod{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และสถานะก่อนหน้าของ c^1 สามารถคำนวณได้จาก

$$(c^t)^T = M_n^{-1} \cdot (c^{t-1})^T \pmod{2}$$

$$(c^1)^T = M_4^{-1} \cdot (c^0)^T \pmod{2}$$

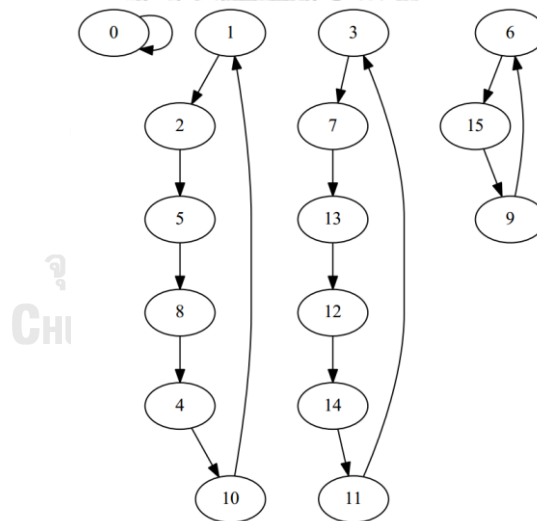
$$(c^0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pmod{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$c^0 = (1,1,0,1)$$

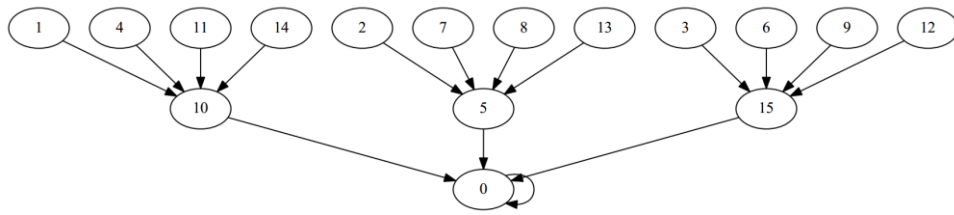
□

การคำนวณการผันกลับได้ของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้นนั้นสามารถทำได้โดยใช้การคำนวณผลรวมเชิงเส้น ซึ่งสามารถเปลี่ยนไปเป็นการคำนวณด้วยเมตริกซ์ได้ ดังนั้น ปัญหาการหาทฤษฎีสำหรับการส่งผ่านผันกลับได้ของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาเชิงเส้นสามารถหาได้จากการคำนวณหาเมตริกซ์ผกผัน และใน [36] เดล เรย์ ยังได้พิสูจน์ไว้ว่าความสามารถในการผันกลับได้นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนของเซลล์ในปริภูมิด้วย เช่น กฎ 90 ของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้นบนการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าจะสามารถผันกลับได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนเซลล์ในปริภูมิเป็นเลขคู่ แต่หากเป็นการกำหนดขอบเขตแบบรอบ จะไม่สามารถผันกลับได้ (ตัวอย่างของการส่งผ่านด้วยกฎ 90 แสดงดังรูปที่ 11 - รูปที่ 13)

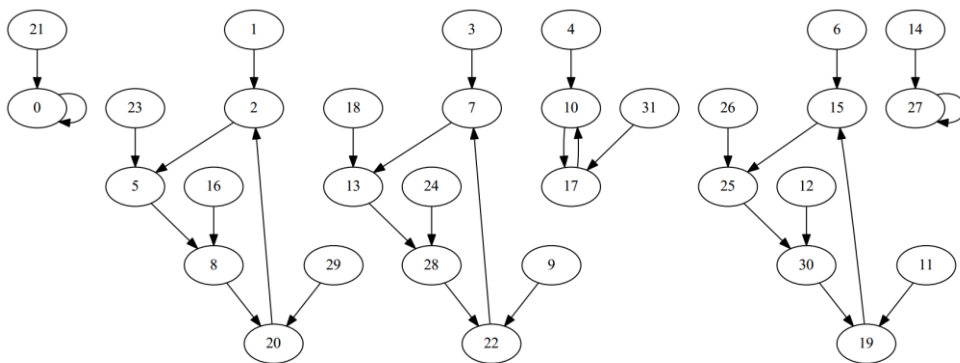


รูปที่ 11 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์ูลาร์ออโตมาขั้นต้นของกฎ 90

ด้วยขนาด $n = 4$ ขอบเขตแบบไม่มีค่า



รูปที่ 12 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์ูลาร์อโตมาเริ่มต้นของกฎ 90
ด้วยขนาด $n = 4$ ขอบเขตแบบรอบ



รูปที่ 13 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์ูลาร์อโตมาเริ่มต้นของกฎ 90
ด้วยขนาด $n = 5$ ขอบเขตแบบไม่มีค่า

จากรูปที่ 11 แสดงการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์ูลาร์อโตมาขนาดความยาว 4 ซึ่งมีโครงสร้างหรือสถานะทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $2^4 = 16$ แบบ และให้ตัวเลขที่ปรากฏในแต่ละโหนดของกราฟแสดงเลขที่แปลงมาจากเลขฐานสองของการส่งผ่านแต่ละตัวนำเข้าไปเป็นเลขในฐานสิบ จะเห็นว่า กราฟมีลักษณะที่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงซึ่งเป็นคุณสมบัติสำคัญสำหรับการผันกลับได้ ต่างจากรูปที่ 12 รูปที่ 13 ที่กราฟของแต่ละสถานะไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจึงไม่สามารถส่งผ่านให้ผันกลับได้

ทั้งนี้ สำหรับเซลล์ูลาร์อโตมาตาชนิดเริ่มต้นที่มีเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์นั้น มีกฎที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นได้เพียงแปดกฎเท่านั้น [36] ดังแสดงในตารางที่ 3 ซึ่งจะเห็นว่าสำหรับกรณีทั่วไปนั้นวิธีดังกล่าวยังไม่สามารถคำนวณได้ นั่นคือ สำหรับกฎอื่นที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้นั้น จะไม่สามารถคำนวณหากฎที่ทำให้เซลล์ูลาร์อโตมาตาผันกลับได้ด้วยวิธีนี้

ตารางที่ 3 การส่งผ่านเซลล์ูลาร์อัตโนมัติตามชนิดขั้นต้นเชิงเส้น

กฎ	ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่	สัมประสิทธิ์ของกฎ
0	$c_i^{t+1} = 0$	$\lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = 0$
60	$c_i^{t+1} = c_{i-1}^t \oplus c_i^t$	$\lambda_{-1} = \lambda_0 = 1,$ $\lambda_1 = 0$
90	$c_i^{t+1} = c_{i-1}^t \oplus c_{i+1}^t$	$\lambda_{-1} = \lambda_1 = 1,$ $\lambda_0 = 0$
102	$c_i^{t+1} = c_i^t \oplus c_{i+1}^t$	$\lambda_0 = \lambda_1 = 1,$ $\lambda_{-1} = 0$
150	$c_i^{t+1} = c_{i-1}^t \oplus c_i^t \oplus c_{i+1}^t$	$\lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = 1$
170	$c_i^{t+1} = c_{i+1}^t$	$\lambda_1 = 1,$ $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$
204	$c_i^{t+1} = c_i^t$	$\lambda_0 = 1,$ $\lambda_{-1} = \lambda_1 = 0$
240	$c_i^{t+1} = c_{i-1}^t$	$\lambda_{-1} = 1,$ $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$

2.4 กราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์

ในปี ค.ศ. 1991 ซูทเนอร์ (Sutner) ได้ศึกษากราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์ (de Bruijn graph) [34] เพื่อแทนสถานะของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติแบบหนึ่งมิติ ซึ่งกราฟเดอ บราวน์ถือเป็นกราฟที่มีแต่ละคู่จุดยอด (vertices) ที่มีเส้นเชื่อม (edge) ถึงกันเมื่อมีจุดยอดทั้งสองมีสัญลักษณ์บนจุดยอดซ้อนทับกันตามเงื่อนไข ซึ่งกราฟเดอ บราวน์เขียนได้เป็น $B(k, S)$ ซึ่งแต่ละจุดยอดเขียนอยู่ในรูปสายอักขระ

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1}$$

ที่มีความยาวเป็น $m-1$ เมื่อ $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ สำหรับคู่ของจุดยอด และ $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1}$ $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_m$ จะมีเส้นเชื่อมแบบมีทิศทางจาก $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1}$ ไป $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_m$ และกำหนดให้เส้นเชื่อมนั้นมีป้ายกำกับ (label) เป็น $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$

นิยามที่ 5 กราฟเดอ บราวน์

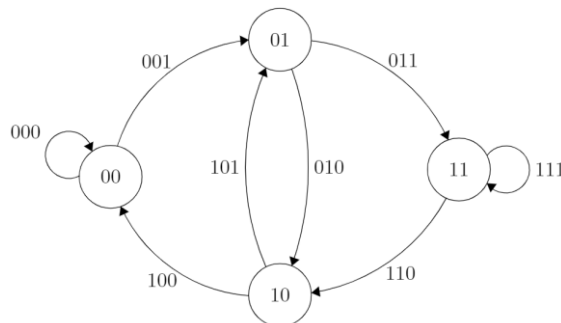
กำหนดให้ S เป็นเซตของสถานะจำกัด และ $k \in \mathbb{Z}^+$ แล้ว จะได้ว่า กราฟเดอ บราวน์ คือ

$B(k, S) = (V, E)$ เมื่อ $V = S^k$ คือ เซตของจุดยอดในกราฟและ

$E = \{(ax, xb) \mid a, b \in S, x \in S^{k-1}\}$ คือ เซตของเส้นเชื่อมในกราฟ ทั้งนี้ ป้ายกำกับของเส้นเชื่อม

$(ax, xb) \in E$ สามารถแทนได้ด้วย axb

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $S = \{0,1\}$ และให้ $m = 3$ จะได้กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่มีลักษณะดังรูปที่ 14



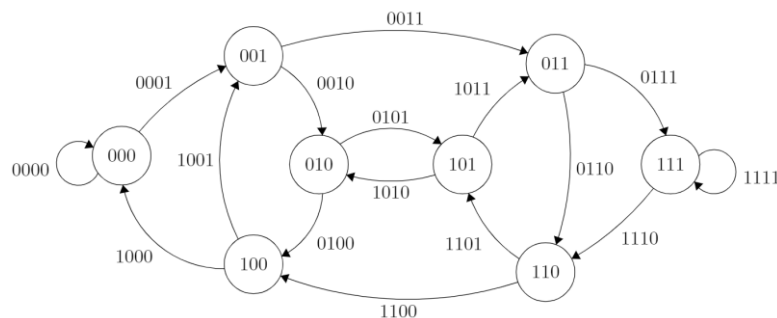
รูปที่ 14 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$

□

จะเห็นว่าเส้นเชื่อม '001' นั้นเกิดจากจุดยอดที่มีต้นทางเป็น '00' และปลายทางเป็น '01' และจะสังเกตเห็นว่าจุดยอด '00' และ '11' ไม่มีเส้นเชื่อมหากันเนื่องจากไม่ส่วนที่ซ้อนทับกันของสายอักขระ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

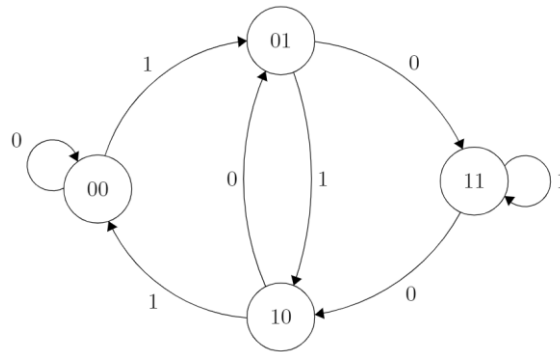
ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $S = \{0,1\}$ และให้ $m = 4$ จะได้กราฟเดอ บราวน์ $B(3, \{0,1\})$ ที่มีลักษณะ



รูปที่ 15 กราฟเดอ บราวน์ $B(3, \{0,1\})$

□

ทั้งนี้ กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่มีเส้นเชื่อมทั้งหมด 2^3 เส้น คือ $\{ '000', '001', '010', '011', '100', '101', '110', '111' \}$ สามารถแทนด้วยกฎเฉพาะที่ทั้งหมดของ เซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้นได้ซึ่งสามารถเขียนกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ของเซลลูลาร์ออโตมาตาได้ ดังรูปที่ 16



รูปที่ 16 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 150 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้สถานะเริ่มต้นเป็น $(1,1,0,1)$ พิจารณาสถานะถัดไปโดยใช้กฎ 150 จาก กราฟเดอ บราวน์ตามรูปที่ 16 โดยใช้ในการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

จะได้ว่า เซลล์ที่ 1 : $f(0,1,1)$ ได้ผลลัพธ์ คือ เส้นเชื่อมของจุดยอด '01' ไป '11' นั่นคือ 0

เซลล์ที่ 2 : $f(1,1,0)$ " " " '11' ไป '10' " 0

เซลล์ที่ 3 : $f(1,0,1)$ " " " '10' ไป '01' " 0

เซลล์ที่ 4 : $f(0,1,0)$ " " " '01' ไป '10' " 1

ดังนั้น $(1,1,0,1) \xrightarrow{f_{150}} (0,0,0,1)$

□

จากตัวอย่างที่ 9 จะเห็นว่ากราฟเดอ บราวน์สามารถทำงานโดยการส่งผ่านด้วยกฎเฉพาะที่ได้ เทียบเท่ากับการทำงานของเซลลูลาร์ออโตมาแบบดั้งเดิมด้วยการแทนกฎการส่งผ่านเป็นกราฟแบบมี ทิศทาง อีกทั้งยังสามารถทำการคำนวณผลลัพธ์ของแต่ละเซลล์ได้แบบขนานเช่นกัน และจากการ สังเกตจะเห็นว่า ไม่ว่าโครงแบบเริ่มต้นจะอยู่ในรูปใด เซลล์ซ้ายสุดจะพิจารณาที่จุดยอด '00' หรือ '01' เสมอ

ในงานวิจัย [21, 34] ได้ใช้กราฟเดอ บราวน์เพื่อการศึกษาการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงได้ซึ่งถือว่าเป็นคุณสมบัติสำคัญของเซตลูธาร์อโตมาตาผันกลับได้ โดยกราฟเดอ บราวน์สามารถระบุกฎที่ไม่สามารถผันกลับได้โดยอาศัยการประยุกต์ใช้วิธีการสร้างกราฟสับเซตย่อย (subset construction graph) เพื่อแปลงกราฟเดอ บราวน์ไปเป็นอโตมาตาเชิงกำหนด (deterministic finite automata) ที่เสนอในงาน [37] โดยอโตมาตาเชิงกำหนดนิยามได้ ดังนิยามที่ 6

นิยามที่ 6 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด ประกอบด้วย 5 ส่วน คือ $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ เมื่อ

- Q คือ เซตจำกัดของสถานะ
- Σ คือ ชุดตัวอักษร (alphabet) ของสัญลักษณ์รับเข้า
- $q_0 \in Q$ คือ สถานะเริ่มต้น (initial state)
- $A \subseteq Q$ คือ เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด (final state) หรือบางครั้งเรียกว่าสถานะยอมรับ (accepted state)
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ คือ ฟังก์ชันในการส่งผ่าน

สำหรับ $q \in Q$ และ $\sigma \in \Sigma$ กล่าวได้ว่า $\delta(q, \sigma)$ หมายถึง การส่งผ่านจากสถานะ q ได้เมื่อได้รับสัญลักษณ์รับเข้าเป็น σ

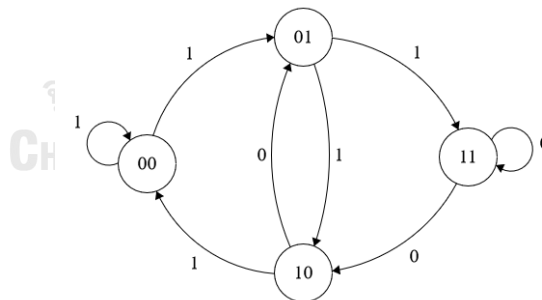
เทคนิคการสร้างสับเซตย่อยในทฤษฎีคำนวณและอโตมาตานั้นทำเพื่อแปลงอโตมาตาเชิงไม่กำหนดให้ อยู่ในรูปของอโตมาตาเชิงกำหนด ซึ่งอโตมาตาที่ได้จะอยู่ในรูปของ $(2^Q, \Sigma, Q_0, A, \delta')$ โดย เซตของสถานะจำกัดอยู่ในรูปของสับเซตของ Q , สถานะเริ่มต้น คือ $Q_0 \subseteq Q$ และ ฟังก์ชันในการส่งผ่าน คือ $\delta': 2^Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ นิยามโดย เมื่อ $X \in 2^Q$ และ $\sigma \in \Sigma$ กล่าวได้ว่า $\delta'(X, \sigma) = Y$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $b \in Y$, มี $a \in X$ ที่ทำให้ $\delta(a, \sigma) = b$

การสร้างสับเซตย่อยสำหรับกราฟเดอ บราวน์ $B(k, S) = (V, E)$ มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 1) กำหนดให้ G เป็นกราฟสับเซตย่อยที่มีจุดยอดอยู่ในรูปของ $V_G = 2^{V_B}$ เมื่อ V_B แทนเซตของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์
- 2) ให้ $s \in S$ เป็นตัวอักษรนำเข้าของอโตมาตาซึ่งสอดคล้องกับป้ายกำกับของเส้นเชื่อมในกราฟเดอ บราวน์ แล้ว $W \subseteq V_B$ แทนสถานะของอโตมาตาเชิงกำหนดของกราฟสับเซตย่อย

- 3) กำหนดสถานะเริ่มต้น (initial state) เรียกว่า $Q_0 \subseteq V_B$ เพิ่ม Q_0 เข้าไปใน V_G
- 4) สำหรับแต่ละ $q \in Q_0$ สร้างการส่งผ่านจาก Q_0 ไปสถานะ $P = \{p \in V_B \mid \exists q \in Q_0 \text{ ซึ่งมีเส้นเชื่อมจาก } q \text{ ไป } p \text{ ด้วยป้ายกำกับ } s \text{ ในกราฟเดอ บราวน์}\}$ แล้วสร้างเส้นเชื่อม $Q_0 \xrightarrow{s} P$ สำหรับ ทุก $s \in S$ เพิ่ม P เข้าไปใน V_G
- 5) ทำเหมือนขั้นตอน 4) สำหรับจุดยอดใหม่ที่เกิดขึ้นใน V_G
- 6) กำหนดให้ทุกสถานะในออโตมาตาเชิงกำหนดเป็นสถานะยอมรับยกเว้นสถานะที่มีค่าเป็นเซตว่าง (เขียนแทนด้วย $\{\}$)
- 7) เซลูลาร์ออโตมาตาไม่มีสมบัติทั่วถึงถ้าออโตมาตาเชิงกำหนดจากกราฟสับเซตย่อย V_G ที่สัมพันธ์กับเซลูลาร์ออโตมาตาดังกล่าวมีการส่งผ่านไปสู่สถานะ $\{\}$ หรือกล่าวได้ว่าคำ (word) ใด ๆ ที่ไม่สามารถยอมรับได้จากออโตมาตาเชิงกำหนด โครงแบบของเซลูลาร์ออโตมาตาที่มีลักษณะดังกล่าวจะไม่มีโครงสร้างก่อนหน้านี้ ทำให้เซลูลาร์ออโตมาตานั้นไม่มีสมบัติของฟังก์ชันทั่วถึง แสดงว่าไม่สามารถหา $F: S^n \rightarrow S^n$ ที่ทำให้ $F(C') = C^{t+1}$ จึงสรุปได้ว่าเซลูลาร์ออโตมาตาไม่สามารถผันกลับได้

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ แทนกฎ 31 ของเซลูลาร์ออโตมาตาชนิดเริ่มต้น ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 31 ของเซลูลาร์ออโตมาตาชนิดเริ่มต้น

การพิจารณาการมีสมบัติทั่วถึงของเซลูลาร์ออโตมาตา สามารถทำได้ ดังนี้

- 1) กำหนดให้ G เป็นกราฟสับเซตย่อยที่มีจุดยอดอยู่ในรูปของ $V_G = 2^{V_B}$
- 2) ให้ $S = \{0,1\}$ และเซตของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์ คือ $V_B = \{ '00', '01', '10', '11' \}$ แล้ว $W \subseteq V_B$ แทนสถานะของออโตมาตาเชิงกำหนด

3) กำหนดให้สถานะเริ่มต้นคือ $Q_0 = \{ '00', '01', '10', '11' \}$

4) พิจารณาการส่งผ่าน โดยเริ่มที่สถานะเริ่มต้น ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของไวยากรณ์ได้ ดังนี้

$$Q_0: \quad \{ '00', '01', '10', '11' \} \rightarrow 0 \{ '01', '10', '11' \}, \\ \{ '00', '01', '10', '11' \} \rightarrow 1 \{ '00', '01', '10', '11' \}$$

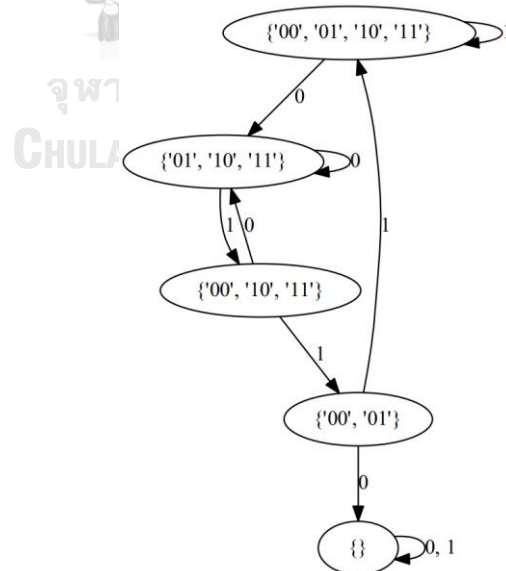
$$Q_1: \quad \{ '01', '10', '11' \} \rightarrow 0 \{ '01', '10', '11' \}, \\ \{ '01', '10', '11' \} \rightarrow 1 \{ '00', '10', '11' \}$$

$$Q_2: \quad \{ '00', '10', '11' \} \rightarrow 0 \{ '00', '10' \}, \\ \{ '00', '10', '11' \} \rightarrow 1 \{ '00', '01', '10' \}$$

$$Q_3: \quad \{ '00', '10' \} \rightarrow 0 \{ '00', '01', '10', '11' \}, \\ \{ '00', '10', '11' \} \rightarrow 1 \{ \}$$

$$Q_4: \quad \{ \} \rightarrow 0 \{ \}, \\ \{ \} \rightarrow 1 \{ \}$$

จาก 4) สามารถเขียนออโตมาตาเชิงกำหนดได้ ดังรูปที่ 18



รูปที่ 18 แสดงกราฟสับเซตย่อยของเซตลู่ออโตมาตาชนิดขั้นต้นกฎ 31

- 5) จากกราฟสับเซตย่อยที่ได้ดังรูปที่ 18 จะเห็นว่าหากให้สถานะเริ่มต้นอยู่ที่ $\{ '00', '01', '10', '11' \}$ ทางเดินในกราฟที่ในรูปแบบ '0110...' จะตกอยู่ในสถานะ $\{ \}$ ซึ่งหมายความว่ากราฟเดอ บราวน์ของกฎ 30 ไม่สามารถสร้างทางเดินขนาดความยาวเกิน 4 ที่อยู่ในรูปแบบ '0110...' ได้ ดังนั้น เซลูลาร์ออโตมาตานิซันตันกฎ 30 ไม่มีสมบัติทั่วถึง จึงสรุปได้ว่าเซลูลาร์ออโตมาตานิซันตันนี้ไม่สามารถผันกลับได้

□

อนึ่ง วิธีการทำสับเซตย่อยที่ได้จากการพิจารณาความเป็นออโตมาตาเชิงกำหนดของกราฟเดอ บราวน์นั้น สามารถระบุได้เพียงกฎของเซลูลาร์ออโตมาตาที่ไม่มีสมบัติผันกลับได้เท่านั้น กล่าวคือ กฎใดที่มีการสร้างสับเซตย่อยแล้วไม่มีจุดยอดของเซตว่าง $\{ \}$ แล้ว ไม่สามารถระบุได้ว่า เซลูลาร์ดังกล่าวมีสมบัติทั่วถึงหรือผันกลับได้หรือไม่ สำหรับเซลูลาร์ออโตมาตานิซันตัน มีทั้งหมด 30 กฎ (15, 30, 45, 51, 60, 75, 85, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 106, 120, 135, 149, 150, 153, 154, 165, 166, 169, 170, 180, 195, 204, 210, 225, 240) ที่ไม่สามารถระบุความสามารถในการผันกลับได้ด้วยวิธีนี้

บทที่ 3

ความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์าร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ

ด้วยกราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์

จากการศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้เราทราบว่า แม้เซลล์าร์ออโตมาตาจะสามารถนิยามได้โดยง่าย แต่ผลของการส่งผ่านนั้นทำให้ได้ปริภูมิที่มีความซับซ้อนได้ ดังนั้น การพิจารณาพฤติกรรมการส่งผ่านที่มีความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์าร์ออโตมาตายังมีข้อจำกัดอยู่มาก ซึ่งในหลายงานวิจัยก็ได้พยายามศึกษาเพื่อหาความสัมพันธ์ของกฎที่มีคุณสมบัติในการผันกลับได้ หรือแม้กระทั่งการอาศัยการคำนวณพีชคณิตและเมตริกซ์มาใช้แทนการนิยามกฎแบบดั้งเดิม ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 1-2 โดยจากการพิจารณาการแทนเซลล์าร์ออโตมาตาด้วยกราฟเดอ บราวน์ซึ่งสามารถนิยามกฎในการส่งผ่านของเซลล์าร์ออโตมาตาได้เทียบเท่ากับการนิยามแบบดั้งเดิมนั้น ทำให้เราทราบถึงความสัมพันธ์ของการผันกลับได้ของกฎการส่งผ่านของเซลล์าร์ออโตมาตากับพฤติกรรมของเส้นทางเดินในกราฟเดอ บราวน์

ในงานวิจัยนี้ เราศึกษาความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์าร์ออโตมาแบบหนึ่งมิติด้วยกราฟมีทิศทางในแบบของเดอ บราวน์ ที่มีการนิยามเซลล์เพื่อนบ้านด้วยเวกเตอร์ดัชนีภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

นิยามที่ 7 จำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายและทางขวาของเซลล์าร์ออโตมาตา

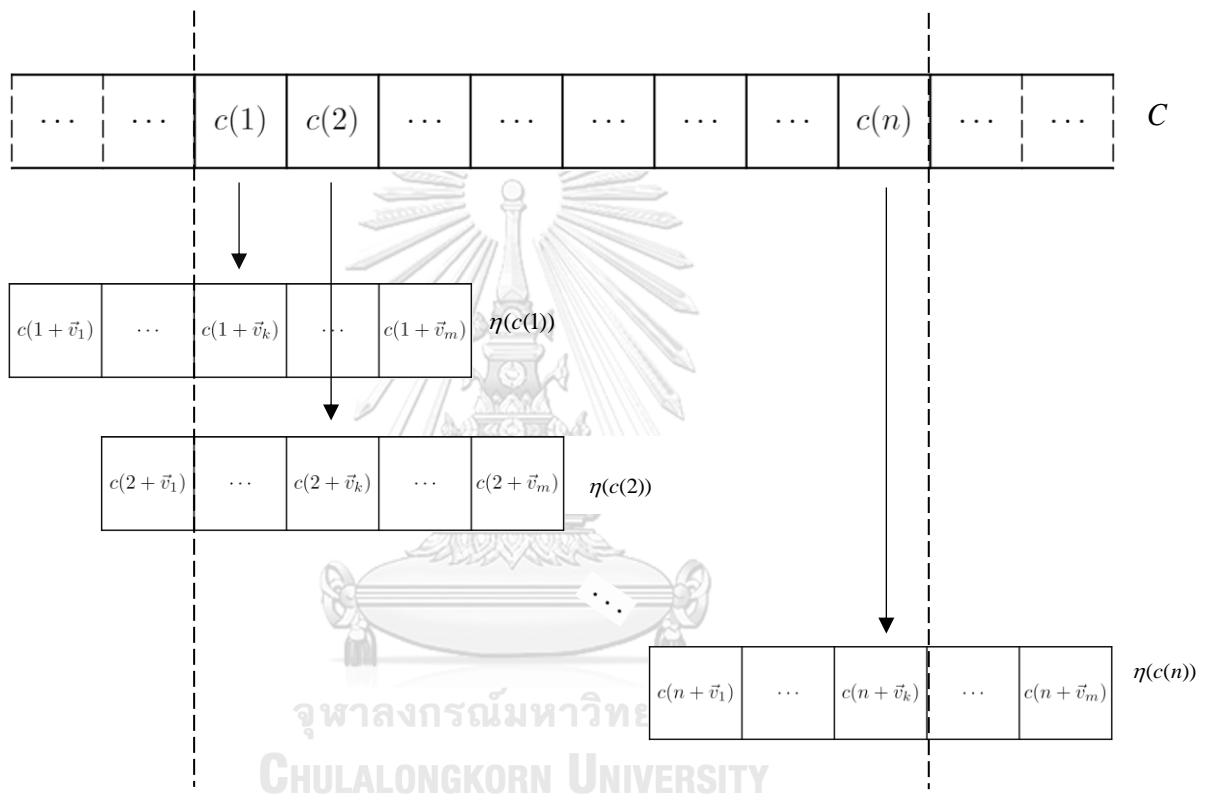
กำหนดให้ $Z = (d, S, N, f)$ เป็นเซลล์าร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ ($d = 1$) เมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq k \leq m$ ถ้า $\vec{v}_k = 0$ แล้ว

1. $l = k - 1$ คือ จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายของ N และ
2. $r = m - k$ คือ จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางขวาของ N

นิยามที่ 8 ทางเดินในกราฟแบบมีทิศทาง

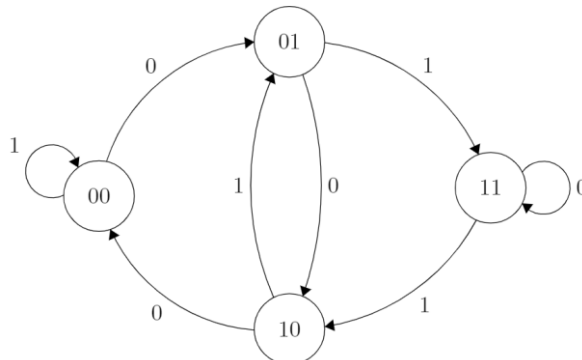
ทางเดิน (path) จากจุดยอด a ไป b ในกราฟแบบมีทิศทาง G คือ ลำดับของเส้นเชื่อม $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ ใน G เมื่อ x_i คือ จุดยอดในกราฟ โดย n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $x_0 = a, x_n = b$ กล่าวได้ว่าทางเดินในกราฟขนาดความยาว n สามารถเขียนได้ด้วยลำดับของเส้นเชื่อมเป็น $e_1 e_2 \cdots e_n$ เมื่อ $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ หรืออาจเขียนได้ด้วยลำดับของจุดยอด คือ $x_0 x_1 \cdots x_n$

จากรูปที่ 19 จะเห็นว่าเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ซ้ายสุดของโครงแบบใด ๆ ของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติ จะมีการอ้างอิงถึงเซลล์ที่อยู่นอกขอบเขตเป็นจำนวน l เซลล์เสมอซึ่ง l สามารถพิจารณาได้จากนิยามที่ 7 และสองเซลล์ใด ๆ ในโครงแบบที่อยู่ติดกันจะมีเซลล์เพื่อนบ้านที่เหมือนกันร่วมกันอยู่จำนวน $m-1$ เซลล์และเซลล์ที่เหมือนกันอยู่ในลักษณะการเลื่อนไปทางขวา 1 ครั้ง สัมพันธ์กับสัญลักษณ์บนเส้นเชื่อมในกราฟเดอ บราวน์ที่เกิดจากการมีสัญลักษณ์ที่ซ้อนทับกันของจุดยอดที่อยู่ติดกัน



รูปที่ 19 ลักษณะของการซ้อนทับกันของเซลล์เพื่อนบ้านของแต่ละเซลล์ในโครงแบบ

ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาทางเดินในกราฟ B ที่แทนเซลล์ลาร์อโตมาตาทากู 105 ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20 กราฟเดอ บราวน์ของเซลล์ลาร์อโตมาตาทากู 105

ทางเดินจากจุดยอด '01' $\xrightarrow{0}$ '10' $\xrightarrow{0}$ '00' $\xrightarrow{1}$ '00' $\xrightarrow{0}$ '01' $\xrightarrow{1}$ '11' $\xrightarrow{1}$ '10'

สามารถเขียนลำดับของเส้นเชื่อมได้เป็น 0,0,1,0,1,1

□

จากตัวอย่างที่ 12 จะเห็นว่าทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ซึ่งเขียนอยู่ในลำดับของจุดยอด $x_0x_1 \cdots x_n$ อธิบายถึงโครงสร้างของเซลล์ลาร์อโตมาตาและลำดับของเส้นเชื่อม $e_1e_2 \cdots e_n$ อธิบายถึงผลลัพธ์จากการส่งผ่านโครงสร้างดังกล่าวไปสถานะถัดไป ดังนั้น การพิจารณาการผันกลับ คือ การหาลำดับของจุดยอด $x_0x_1 \cdots x_n$ ที่สัมพันธ์กับเส้นเชื่อม $e_1e_2 \cdots e_n$ ซึ่งจากที่เราทราบว่า จุดยอดที่อยู่ติดกัน x_i, x_{i+1} อธิบายการซ้อนทับกันของเซลล์เพื่อนบ้าน ทำให้ได้ว่า e_i ที่เกิดจากการส่งผ่านของเซลล์เพื่อนบ้าน x_i, x_{i+1} นั้น ถูกส่งผ่านมาจากเซลล์ที่ในตำแหน่งที่เวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านมีค่าเป็น 0 ในที่นี้จำเป็นต้องนิยามการแปลงจุดยอดที่อยู่ติดกันไปเป็นลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านดังนิยามที่ 9

นิยามที่ 9 การแปลงเส้นเชื่อมของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์เป็นลักษณะเซลล์เพื่อนบ้าน

กำหนดให้ $B(k, S) = (V, E)$ เป็นกราฟเดอ บราวน์ที่สัมพันธ์กับเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติ $Z = (I, S, N, f)$ ซึ่ง $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน จะได้ว่า ลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านที่สอดคล้องกับเส้นเชื่อม $(a, b) \in E$ กำหนดโดย

$$\tau(a, b) = wxu$$

เมื่อ $a = wx$ และ $b = xu$

โดย $w, u \in S$ และ $x \in S^*$

นอกจากนี้ การระบุถึงเซลล์ c ที่มีเซลล์เพื่อนบ้านอยู่ในรูป $\eta(c) = \tau(a, b)$ คือ เซลล์ที่ถือว่าเป็นเซลล์ตนเอง นั่นคือ เซลล์ที่ตำแหน่ง $\vec{v}_j \in N$ ซึ่ง $\vec{v}_j = 0$ กล่าวได้ว่าการหาการผันกลับของ

เซลลูลาร์ออโตมาตาโดยการพิจารณาจากเส้นเชื่อมในกราฟเดอ บราวน์สามารถนิยามผ่านฟังก์ชันการส่งผ่านผันทกลับเฉพาะที่ $f^{-1} : S^m \rightarrow S$ ได้ ดังนิยามที่ 10

นิยามที่ 10 ฟังก์ชันการส่งผ่านผันทกลับเฉพาะที่

กำหนดให้ $Z = (1, S, N, f)$ เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ เมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน สำหรับ $c_i, e_i \in S$ จะได้ว่าฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ $f : S^m \rightarrow S$ สามารถส่งผ่านผันทกลับได้ ก็ต่อเมื่อ มี $f^{-1} : S^m \rightarrow S$ ซึ่ง

$$f^{-1}(\tau(e_i)) = c_i \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(\eta(c_i)) = e_i$$

ซึ่งสามารถหา c_i ได้จาก $c_i = c(i + \vec{v}_k)$ เมื่อ

$$\tau(e_i) = \eta(c_i) = c(i + \vec{v}_1), c(i + \vec{v}_2), \dots, c(i + \vec{v}_k), \dots, c(i + \vec{v}_m)$$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $a = '001'$ และ $b = '011'$ เป็นจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์ $B(3, \{0,1\})$ ที่สัมพันธ์กับเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ $Z = (1, \{0,1\}, (-2, -1, 0, 1), f)$ เมื่อ เส้นเชื่อม (a, b) มีป้ายกำกับเป็น e จะได้ว่า

$$\tau(a, b) = \tau('001', '011') = '0011'$$

และสามารถหาเซลล์ผันทกลับจาก e คือ

$$f^{-1}(\tau(e)) = f^{-1}(\tau(a, b)) = f^{-1}('0011') = 1$$

□

ดังนั้น การพิจารณาทางเดินในกราฟเดอ บราวน์จะทำให้สามารถอธิบายการผันทกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติได้ ซึ่งจากการสังเกตลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ซ้ายสุดของโครงแบบใด ๆ หากมีการอ้างอิงถึงเซลล์ทางซ้ายที่อยู่นอกขอบเขต สามารถสรุปได้ว่าเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ซ้ายสุดจะเริ่มต้นด้วย 0 เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนของเวกเตอร์ของเซลล์เพื่อนบ้านที่เป็นลบ โดยการสร้างกราฟสับเซตย่อยของกราฟเดอ บราวน์จะพิจารณาจุดยอดที่เป็นจุดเริ่มต้นของการสร้างอ้างอิงถึงการกำหนดขอบเขตดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนิยามที่ 11

นิยามที่ 11 กราฟสับเซตย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

กำหนดให้ $Z = (d, S, N, f)$ เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ ($d = 1$) เมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน และ $B(k, S)$ เป็นกราฟเดอ บราวน์ที่สัมพันธ์กับ Z จะได้ว่า การสร้างกราฟสับเซตย่อย $G = (V, E)$ ที่สัมพันธ์กับ Z ภายใต้เงื่อนไขการกำหนด

ขอบเขตแบบไม่มีค่า จุดยอดเริ่มต้นที่ใช้ในการสร้าง คือ $Q_0 \in V$ จะอยู่ในรูป $\{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\}$ เมื่อ l คือ จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายของ N และจะได้ว่า $|Q_0| = |S|^{m-l-1}$ เมื่อ $|Q_0|$ คือ จำนวนของลำดับในจุดยอด Q_0

จากนิยามของการสร้างกราฟสับเซตย่อย $G = (V, E)$ สำหรับเซลล์รูอโตมาตา $Z = (d, S, N, f)$ เริ่มจากการพิจารณาลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านทั้งหมดที่เป็นไปได้ของเซลล์ซ้ายสุดภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า ทำให้ได้ว่าจุดยอดเริ่มต้นจากการสร้าง G ประกอบไปด้วยลำดับที่อยู่รูปของ $0 \dots 0x$ นั่นคือ มี 0 เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายหรือหมายถึงจำนวนของค่าในเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนได้เป็น $Q_0 = \{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\}$ เมื่อ l เป็นจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายของ N ซึ่ง $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ ซึ่งเห็นได้ว่าจำนวนลำดับทั้งหมดใน Q_0 เขียนได้เป็น $|Q_0| = |S|^{m-l-1}$

สำหรับตัวอย่างของจุดยอดเริ่มต้นในการสร้างกราฟสับเซตย่อยของเซลล์รูอโตมาตา เมื่อให้ $S = \{0, 1\}$ แสดงได้ดังตารางที่ 4 ตัวอย่างของจุดยอดเริ่มต้นในการสร้างกราฟสับเซตย่อยของเซลล์รูอโตมาตา

ตารางที่ 4 ตัวอย่างของจุดยอดเริ่มต้นในการสร้างกราฟสับเซตย่อยของเซลล์รูอโตมาตา

N	Q_0
$(-1, 0, 1)$	$\{'00', '01'\}$
$(-2, -1, 0, 1)$	$\{'000', '001'\}$
$(-1, 0, 1, 2)$	$\{'000', '001', '010', '011'\}$
$(-2, -1, 0, 1, 2)$	$\{'0000', '0001', '0010', '0011'\}$

ทฤษฎีบทที่ 1 เซลล์รูอโตมาตาหนึ่งมิติ $Z = (1, S, N, f)$ ภายใต้เงื่อนไขการหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน และ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับ Z โดยมี $Q_0 \in V$ เป็นจุดยอดเริ่มต้นสำหรับทางเดินใด ๆ ในกราฟสับเซตย่อย จะได้ว่า เมื่อ $C \in S^n$ เป็นโครงแบบใด ๆ ขนาดความยาว n แล้วจะได้ว่า การส่งผ่านโดยรวม $F: S^n \rightarrow S^n$ ของ C สามารถหาได้จากทางเดินในกราฟ G นิยามได้ คือ

$$F(C) = e_1 e_2 \dots e_n = (Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

เมื่อ $e_i \in E$ และ $Q_j \in V$

และ $e_i = (Q_{i-1}, Q_i)$ ก็ต่อเมื่อ มี $a \in Q_{i-1}, b \in Q_i$ ซึ่ง $\tau(a, b) = \eta(c_i)$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้เซลล์ูลาร์อัตโนมัติ $Z = (I, S, N, f)$ ภายใต้เงื่อนไขการหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน และ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับ Z สมมติให้ $C \in S^n$ เป็นโครงแบบขนาดความยาว n

จาก

$$F(C) = (f(\eta(c_1)), f(\eta(c_2)), \dots, f(\eta(c_n)))$$

จากที่ทราบว่าสำหรับเส้นเชื่อมใด ๆ ในกราฟสับเซตย่อย $e_i = (Q_{i-1}, Q_i)$ จะมี $a \in Q_{i-1}, b \in Q_i$ ซึ่ง a และ b คือลำดับที่สามารถซ้อนทับกันได้เพื่อแทนลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้าน $\tau(a, b) = \eta(c_i)$ เสมอ ดังนั้น ทางเดินในกราฟสับเซตย่อยขนาดความยาว n ที่เริ่มที่จุดยอด $Q_0 \in V$ แทนได้เป็น

$$(Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

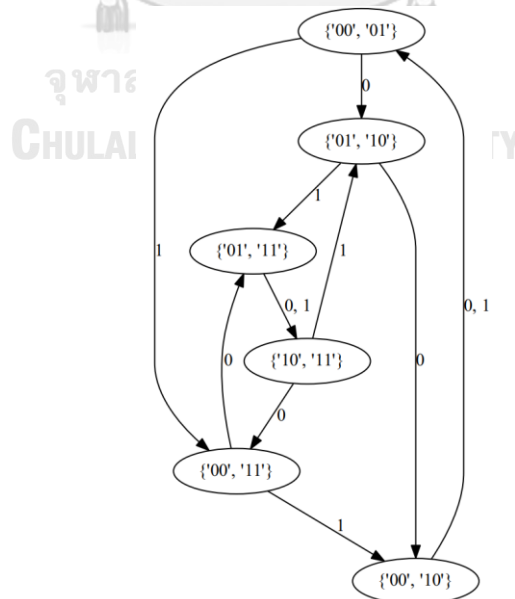
และจากเส้นเชื่อมในกราฟสับเซตย่อยสร้างบนพื้นฐานของเส้นเชื่อมของกราฟเดอ บราวน์ คือ ป้ายกำกับที่สัมพันธ์โดยตรงกับฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ คือ

$$(a, b) = e_i \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(\tau(a, b)) = e_i$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$F(C) = e_1 e_2 \dots e_n = (Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

ตัวอย่างที่ 14 พิจารณากราฟสับเซตย่อย $G(V, E)$ ที่แทนเซลล์ูลาร์อัตโนมัติ n ขั้นต้น 105 ดังรูปที่ 21



รูปที่ 21 กราฟสับเซตย่อยของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติ n ขั้นต้น กฏ 105

กำหนดให้ $C' = '100011'$ เป็นโครงแบบเริ่มต้น การพิจารณาการส่งผ่านไปยังสถานะถัดไปของโครงแบบดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของลำดับของเซลล์เพื่อนบ้าน ดังนี้

$$'010' \longrightarrow '100' \longrightarrow '000' \longrightarrow '001' \longrightarrow '011' \longrightarrow '110'$$

ซึ่งเซลล์เพื่อนบ้านสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของคู่จุดยอดบนกราฟเดอ บราวน์ที่มีเส้นเชื่อมหากัน ดังนี้

$$('01', '10'), ('10', '00'), ('00', '00'), ('00', '01'), ('01', '11'), ('11', '10')$$

ดังนั้น จะได้ว่าทางเดินในกราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับลำดับของคู่จุดยอดข้างต้นเมื่อกำหนดให้ทางเดินเริ่มต้นที่จุดยอด $\{ '00', '01' \}$ คือ

$$\{ '00', '01' \} \xrightarrow{0} \{ '01', '10' \} \xrightarrow{0} \{ '00', '10' \} \xrightarrow{1} \{ '00', '01' \} \xrightarrow{0} \{ '01', '10' \} \xrightarrow{1} \{ '01', '11' \} \xrightarrow{1} \{ '10', '11' \}$$

จะเห็นว่า ทางเดินของ C' คือ $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 = '001011' = C'^{+1}$

□

จากทฤษฎีบทที่ 1 ทำให้เราทราบว่ากราฟสับเซตย่อยที่แปลงมาจากกราฟเดอ บราวน์นั้นสามารถทำการส่งผ่านโครงแบบใด ๆ ได้เช่นเดียวกับกราฟเดอ บราวน์ แต่การพิจารณาการผันกลับของเซลล์รู้ออโตมาตาจากกราฟสับเซตย่อย จำเป็นต้องหาสมบัติเพิ่มเติมของกราฟเพื่อตัดสินใจว่าเซลล์รู้ออโตมาตาดังกล่าวมีสมบัติในการผันกลับได้หรือไม่ ซึ่งสมบัติต่าง ๆ จะอยู่บนพื้นฐานของการสังเกตลำดับของทางเดินในกราฟและลักษณะของลำดับของจุดยอดที่เกิดขึ้น

ทฤษฎีบทที่ 2 เซลล์รู้ออโตมาตาหนึ่งมิติ $Z = (I, S, N, f)$ ภายใต้เงื่อนไขการหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน และ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับ Z จะได้ว่า Z เป็นเซลล์รู้ออโตมาตาผันกลับได้ แล้ว G จะมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ทุก $Q \in V$ มีเส้นเชื่อมออก (out-degree) เป็นจำนวน $|S|$
2. สำหรับ $Q \in V$ จะมี $a \in Q$ ซึ่งอยู่ในรูป $S^{m-r-1}\{0\}'$ เป็นจำนวน 1 ลำดับเสมอ เมื่อ r คือจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2

กำหนดให้ $Z = (I, S, N, f)$ เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีสมบัติผันกลับได้ภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า โดย $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ โดย Z สัมพันธ์กับกราฟสับเซตย่อย $G = (V, E)$ ในที่นี้จะขอแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นข้อ ๆ ตามสมบัติ 1. – 2. ดังนี้

1. จากที่ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อย Z ซึ่งมีวิธีสร้างด้วยการพิจารณาการเป็นออโตมาตาเชิงกำหนด โดยสัญลักษณ์สำหรับการเป็นจุดตัวอักษรที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $s \in S$ ทำให้ได้ว่า ทุกจุดยอดในกราฟ $Q \in V$ มีเส้นเชื่อมออก (out-degree) เป็นจำนวน $|S|$
2. ให้ $(Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n) = e_1 e_2, \dots, e_n$ เป็นทางเดินขนาดความยาว n ในกราฟ G โดย $Q_i \in V$ และ $e_i \in E$ ในที่นี้จะขอพิสูจน์การมีเพียงหนึ่งเดียว ดังนี้

- 1) กรณีการมีอยู่ของลำดับที่เป็นจุดยอดปลายทางของทางเดินใด ๆ

กำหนดให้ $Q \in V$ ซึ่ง a อยู่ในรูป $S^{m-r-1}\{0\}^r$ แต่ $a \notin Q$ เมื่อ r คือจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา และ เมื่อกำหนดให้ทางเดินใด ๆ ขนาดความยาว n ใน G คือ

$$\pi = (Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

เมื่อ $Q_n = Q$ จะได้ว่า Q เป็นจุดยอดสุดท้ายของทางเดิน แต่ไม่มีลำดับใดใน Q ที่สัมพันธ์กับการอ้างถึงเซลล์เพื่อนบ้านที่เกินขอบเขตทางขวา ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า

$$a \in Q$$

- 2) กรณีการมีเพียงหนึ่งเดียวของลำดับที่เป็นจุดยอดปลายทางของทางเดินใด ๆ

กำหนดให้ $Q \in V$ ซึ่ง $a, b \in Q$ อยู่ในรูป $S^{m-r-1}\{0\}^r$ เมื่อ r คือจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา และ เมื่อกำหนดให้ทางเดินใด ๆ ขนาดความยาว n ใน G คือ

$$\pi = (Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

จากนิยามของการสร้างกราฟสับเซตย่อย จะได้ว่า สำหรับเส้นเชื่อมใด ๆ (Q_{i-1}, Q_i)

จะได้ ว่าทุก $q \in Q_i$ จะมี $p \in Q_{i-1}$ ซึ่งในกราฟเดอ บราวน์ p มีเส้นเชื่อมไปหา q

เมื่อ $Q_n = Q$ จะได้ว่า จะมี $a', b' \in Q_{n-1}$ ซึ่ง a' มีเส้นเชื่อมไปหา a และ b' มีเส้นเชื่อมไปหา b ในกราฟเดอ บราวน์

เมื่อพิจารณาในลักษณะเดียวกัน จะได้ว่า ทางเดิน π มีลักษณะของลำดับของเซลล์เพื่อนบ้านที่แตกต่างกัน 2 แบบที่สัมพันธ์กับป้ายกำกับ $e_1 e_2 \dots e_n$ ทำให้การส่งผ่านโดยรวมของเซลลูลาร์ออโตมาไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือเซลลูลาร์ออโตมาไม่มีสมบัติผันกลับได้ ขัดแย้งกับข้อกำหนดของการมีสมบัติผันกลับได้

$$\text{ดังนั้น } a = b$$

จาก การพิสูจน์ 1) และ 2) เราสามารถสรุปได้ว่า สำหรับ $Q \in V$ จะมี $a \in Q$ ซึ่งอยู่ในรูป $S^{m-r-1}\{0\}^r$ เป็นจำนวน 1 ลำดับเสมอ เมื่อ r คือจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา

จากสมบัติที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 2 ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติผันกลับได้ทำให้เราสามารถระบุได้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาใดที่สามารถส่งผ่านผันกลับได้ ดังแสดงได้ในตัวอย่างที่ 15

ตัวอย่างที่ 15 พิจารณากราฟสับเซตย่อยจากตัวอย่างที่ 14

จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่าแต่ละจุดยอดใน G จะต้องมี 1 ลำดับที่อยู่ในรูป $a = S^{m-r-1}\{0\}^r$ นั่นคือ $a = '00'$ หรือ $a = '10'$ โดยจะเห็นว่า มีจุดยอด $\{'01', '11'\} \in V$ ทำให้มีบางทางเดินบนกราฟ G ที่มีจุดสิ้นสุดที่จุดยอดนี้แต่ไม่สามารถหาโครงแบบของเซลลูลาร์ออโตมาตาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตได้ดังทฤษฎีบทที่ 2

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตา กฎ 105 ไม่มีสมบัติผันกลับได้

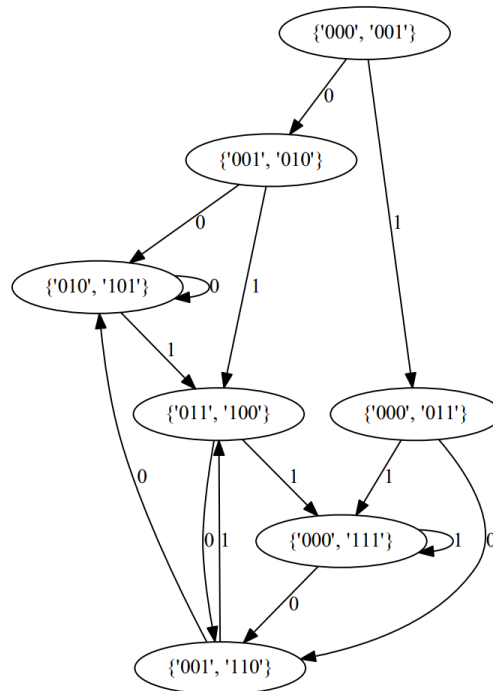
□

จากที่เราทราบแล้วว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาจะมีสมบัติผันกลับได้ ก็ต่อเมื่อ การส่งผ่านโดยรวมเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หากพิจารณาจากกราฟสับเซตย่อยแล้วจะได้ว่า โครงแบบ C' ที่ส่งผ่านไปยังโครงแบบสถานะถัดไป C'^{+1} สามารถพิจารณาได้จากทางเดินในกราฟที่เขียนอยู่ในรูปของลำดับของเส้นเชื่อม ซึ่งลำดับของสองทางเดินใด ๆ ที่แตกต่างกันย่อมให้ลำดับของจุดยอดที่แตกต่างกันด้วย ทั้งนี้ เราสามารถสังเกตลักษณะของทางเดินในกราฟได้ดังตัวอย่างที่ 16

ตัวอย่างที่ 16 พิจารณาเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ โดย $S = \{0,1\}$ และ $N = (-2, -1, 0, 1)$ สำหรับกฎ 39321 สามารถนิยามฟังก์ชันการส่งผ่านได้ ดังนี้

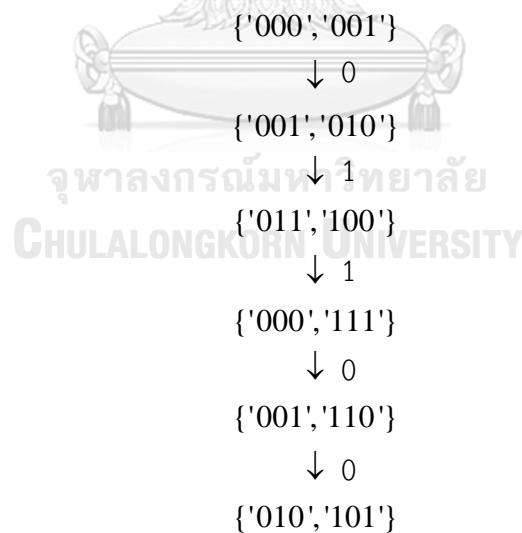
$\eta(c_i)$	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
f	1	0	0	1	1	0	0	1
$\eta(c_i)$	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
f	1	0	0	1	1	0	0	1

จะได้ว่ากราฟสับเซตย่อยที่สอดคล้องกับกฎ 39321 คือ กราฟ G ดังรูปที่ 22

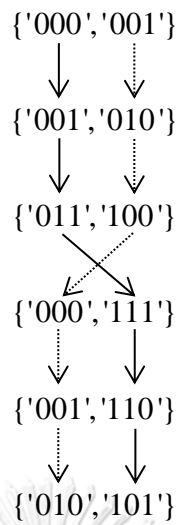


รูปที่ 22 กราฟสับเซตย่อยของเซลล์ูลาร์ออโตมาตาจากกฎ 39321 เมื่อ $N = (-2, -1, 0, 1)$

พิจารณาทางเดินในกราฟที่มีลำดับของเส้นเชื่อมเป็น '01100' เมื่อให้ {'000', '001'} เป็นจุดยอดของทางเดิน ซึ่งสามารถเขียนลำดับของจุดยอดที่สอดคล้องกับลำดับของเส้นเชื่อมได้ ดังนี้



เมื่อพิจารณาทางเดินที่ได้ในลักษณะของลำดับของเซตของจุดยอด ซึ่งอธิบายถึงทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ เมื่อเริ่มที่จุดยอด {'000', '001'} หมายความว่ามีความเป็นไปได้สองแบบถูกอธิบายด้วยทางเดินในกราฟสับเซตย่อย จึงสามารถเขียนลักษณะได้ใหม่เป็น



ดังนั้น ทางเดินที่อยู่ในรูป> สามารถแปลงไปเป็นลำดับของเซลล์เพื่อนบ้านที่ได้จากการ
ซ้อนทับกันของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์ จะได้

'0010'
'0100'
'1000'
'0001'
'0010'

'00100010'

ทั้งนี้ เราสามารถหาลักษณะของโครงแบบที่ได้จากลำดับของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์โดยวิธีการ
ซ้อนเซลล์เพื่อนบ้าน ด้วย

$$p_1 = \tau(\tau(\tau(\tau(\tau('001', '010'), '100'), '000'), '001'), '010') = '00100010'$$

และทางเดินที่อยู่ในรูป → สามารถแปลงไปเป็นลำดับของเซลล์เพื่อนบ้านที่ได้จากการซ้อนทับกัน
ของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์ จะได้

'000'
'001'
'011'
'111'
'110'
'101'

'00011101'

และ

$$p_2 = \tau(\tau(\tau(\tau('000', '001'), '011'), '111'), '110'), '101') = '00011101'$$

□

สำหรับเซลล์ลาร์อโตมาตาที่มีสมบัติในการผันกลับได้ นั่นคือ การส่งผ่านโดยรวมเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ทำให้ได้ว่าโครงสร้างใด ๆ สำหรับเซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้ย่อมมีโครงสร้างก่อนหน้าที่มีเพียงรูปแบบเดียวเสมอ

ทฤษฎีบทที่ 3 โครงแบบก่อนหน้าของเซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้หนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า สามารถหาได้จากทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ที่สัมพันธ์กับโครงสร้างดังกล่าว

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3

กำหนดให้เซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติ $Z = (I, S, N, f)$ ภายใต้เงื่อนไขการหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกัน และ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับ Z จะได้ว่าทางเดินใน G ที่สัมพันธ์กับโครงสร้าง $C = c(1), c(2), \dots, c(n)$ คือ

$$P = (Q_0, Q_1), (Q_1, Q_2), \dots, (Q_{n-1}, Q_n)$$

เมื่อ $Q_0 = \{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\}$ โดย $Q_i \in V$

และค่าบนเส้นเชื่อม

$$(Q_{i-1}, Q_i) = e_i = c(i)$$

ให้ $B(k, S) = (V_B, E_B)$ เป็นกราฟเดอ บราวน์ที่สัมพันธ์กับ G

จะได้ว่า เมื่อ $q_i \in V_B$ และ $q_i \in Q_i$ แล้ว จะมี $q_{i-1} \in Q_{i-1}$ ซึ่ง

$$\tau(q_{i-1}, q_i) \neq \emptyset$$

ดังนั้น เราสามารถเขียน C อยู่ในรูปของทางเดิน

$$p = (q_0, q_1), (q_1, q_2), \dots, (q_{n-1}, q_n)$$

จาก Z มีสมบัติผันกลับได้ ทำให้ได้ฟังก์ชันการส่งผ่านโดยรวมมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือ p จะมีได้เพียงรูปแบบเดียวที่สัมพันธ์กับการเป็นโครงสร้างก่อนหน้า C^{-1} ของ C

และจากทฤษฎีบทที่ 2 กล่าวว่าสำหรับ $Q \in V$ จะมี $a \in Q$ ซึ่งอยู่ในรูป $S^{m-r-1}\{0\}^r$ เป็นจำนวน 1 ลำดับเสมอ เมื่อ r คือจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา

ดังนั้น ให้

$$q_n = S^{m-r-1}\{0\}^r$$

จะได้ p ที่เป็นทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการกำหนดขอบเขต จากที่ทราบว่าลำดับของจุดยอดในกราฟเดอ บราวน์สามารถแปลงไปเป็นลักษณะของโครงแบบได้ด้วย

$$D = \tau(\tau(\tau(\tau(q_1, q_2), q_3), \dots), q_n))$$

ซึ่ง $D \in S^{n+l+r}$

เพื่อให้ D เป็นโครงแบบก่อนหน้าสำหรับ C จำเป็นต้องมีการตัดในส่วนของเซลล์ที่เป็นเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายและทางขวาออกตามจำนวนของ l และ r ตามลำดับ และจะได้ว่า D สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$D = \underbrace{00\dots 0}_l C^{-1} \underbrace{0\dots 0}_r$$

ในที่นี้ $C^{-1} \in S^n$ คือ โครงแบบก่อนหน้าของ C

ตัวอย่างที่ 17 จากตัวอย่างที่ 16 เมื่อ $C = '01100'$ แล้วจะได้ว่า $D = '00100010'$ ทำให้ได้ว่า

$$C^{-1} = '10001'$$

เนื่องจาก $N = (-2, -1, 0, 1)$

□

จากสมบัติที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 2 ถือว่าเป็นสมบัติที่จำเป็นสำหรับการระบุว่าเซลล์ลาร์อโตมาตาผันกลับได้หรือไม่ และเมื่อทราบว่าเซลล์ลาร์อโตมาตาใดที่มีสมบัติผันกลับได้จากทฤษฎีบทที่ 3 จะได้ว่าเราสามารถหาโครงแบบก่อนหน้าของโครงแบบใด ๆ ได้เสมอ ในทางกลับกันในการหาสมบัติที่เพียงพอต่อการระบุว่าเซลล์ลาร์อโตมาตานั้นผันกลับได้ ต้องเป็นสมบัติที่ทำให้มั่นใจได้ว่าการส่งผ่านโดยรวมของเซลล์ลาร์อโตมาตานั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ในที่นี้จะขอเสนออัลกอริทึมในการสร้างกฎการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติผันกลับได้ภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า อัลกอริทึมนี้กำหนดให้เซตของสถานะการจัดของเซลล์ลาร์อโตมาตาเป็นเซตไบนารี ($S = \{0, 1\}$) รายละเอียดขั้นตอนของอัลกอริทึมที่เสนออธิบายได้ในอัลกอริทึมที่ 1

อัลกอริทึมที่ 1 การสร้างกฎการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติผันกลับได้บนเซตไบนารี ภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

Input : d, S, N เมื่อ $d = 1$, $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ และ $S = \{0, 1\}$

Output : เซตของฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ $f : S^m \rightarrow S$

1 ให้ V เป็นเซตสำหรับเก็บจุดยอดในกราฟ G

และ E เป็นเซตสำหรับเก็บเส้นเชื่อมในกราฟ G

2 $l \leftarrow$ จำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้าย

- 3 $r \leftarrow$ จำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา
- 4 สร้างเซตสำหรับเก็บฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ $f: S^m \rightarrow S$ ให้ชื่อว่า F
- 5 $Q \leftarrow \{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\}$ เป็นจุดยอดใน G
- 6 เพิ่ม Q เข้าไปใน V
- 7 เลือก $P_0 \leftarrow \{a_i b_{0_i} \mid a_i \in S^l, b_{0_i} \in S^{m-l-1} \text{ โดยมี } q \in Q, \tau(q, a_i b_{0_i}) \neq \emptyset \text{ และ } 1 \leq i \leq 2^{m-l-1}\}$ เป็นจุดยอดปลายทางของ Q ที่มีป้ายกำกับของเส้นเชื่อม คือ 0 สำหรับ $a_i b_{0_i}, a_j b_{0_j} \in P_0$ จะได้ว่า $a_i b_{0_i} \neq a_j b_{0_j}$ แล้ว $b_{0_i} \neq b_{0_j}$ และเลือก $P_1 \leftarrow \{a_i b_{1_i} \mid a_i \in S^l, b_{1_i} \in S^{m-l-1} \text{ โดยมี } q \in Q, \tau(q, a_i b_{1_i}) \neq \emptyset \text{ และ } 1 \leq i \leq 2^{m-l-1}\}$ เป็นจุดยอดปลายทางของ Q ที่มีป้ายกำกับของเส้นเชื่อม คือ 1 สำหรับ $a_i b_{1_i}, a_j b_{1_j} \in P_1$ จะได้ว่า $a_i b_{1_i} \neq a_j b_{1_j}$ แล้ว $b_{1_i} \neq b_{1_j}$ ทั้งนี้มีเงื่อนไข คือ $\tau(q, a_i b_{0_i}) \neq \emptyset$ หรือ $\tau(q, a_i b_{1_i}) \neq \emptyset$ ต้องไม่ขัดแย้งกับ f ใน F
- 8 สำหรับทุก $q \in Q$ และ $a_i b_{0_i} \in P_0$ หาก $\tau(q, a_i b_{0_i}) \neq \emptyset$ แล้ว ให้ $f(\tau(q, a_i b_{0_i})) = 0$ และสำหรับ $a_i b_{1_i} \in P_1$ หาก $\tau(q, a_i b_{1_i}) \neq \emptyset$ แล้ว ให้ $f(\tau(q, a_i b_{1_i})) = 1$
- 9 เพิ่ม P_0, P_1 ลงใน V หากเป็นจุดยอดใหม่ที่ไม่มีใน V
- 10 เพิ่มเส้นเชื่อม $(Q, P_0) = 0$ และ $(Q, P_1) = 1$ ลงใน E
- 11 ทำซ้ำในขั้นตอน 7 สำหรับจุดยอดใหม่ที่ถูกเพิ่มเข้าไปในกราฟ G จนกว่าจะไม่มีจุดยอดใหม่เกิดขึ้น
- 12 หากได้ f ครบสำหรับ F แล้วให้ทำขั้นตอนที่ 13 แต่ถ้าได้ไม่ครบให้ย้อนขั้นตอน โดยพิจารณาขั้นตอนที่ 7 ใหม่
- 13 คืนค่าผลลัพธ์เป็นเซตของ $f: S^m \rightarrow S$

สำหรับอัลกอริทึมที่ 1 ที่ได้เสนอ คือ อัลกอริทึมในการหาการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าที่มีสมบัติการผันกลับได้ ซึ่งในเบื้องต้นนี้ได้กำหนดให้เซตของสถานะจำกัดเป็นเซตไบนารี นั่นคือ สถานะจำกัดมีเพียงสองค่า คือ 0 และ 1 และเมื่อกำหนดให้เซลล์ลาร์อโตมาตามิเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านเป็น $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ ขั้นตอนในการหาการส่งผ่านที่ผันกลับได้มีพื้นฐานบนกราฟสับเซตย่อยของกราฟเดอ บราวน์ นั่นคือ การหากราฟสับเซตย่อยที่สัมพันธ์กับเซลล์ลาร์อโตมาตามิเวกเตอร์ที่มีสมบัติตามทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทที่ 3 โดยเริ่มจากการกำหนดให้ $G(V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อยที่มีเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมเป็นเซตว่างจากเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายและทางขวามีผลต่อลักษณะของกราฟสับเซตย่อย ดังนั้น เราสามารถหาเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้าย l และทางขวา r ได้จาก N และจากอัลกอริทึมนี้มีผลลัพธ์สุดท้ายเป็นกฎการส่งผ่าน ดังนั้น ในที่นี้ให้ F เป็นเซตสำหรับเก็บกฎการส่งผ่านเฉพาะที่ $f: S^m \rightarrow S$

จากที่ได้พิสูจน์แล้วว่าจุดยอดเริ่มต้นของกราฟสับเซตย่อยจะสัมพันธ์กับลักษณะเซลล์ทางซ้ายของเซลล์ลาร์อโตมาตาซึ่งอยู่ในรูป $\{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\}$ โดยกำหนดให้จุดยอดนี้ชื่อ Q และเพิ่มจุดยอดนี้ลงใน V ดังในขั้นตอน 5 – 6 โดยในขั้นตอนนี้ทำให้เราทราบจำนวนลำดับใน Q แทนด้วย $|Q| = S^{m-l-1} = 2^{m-l-1}$ ซึ่งจะเป็นข้อกำหนดของจุดยอดอื่น ๆ ในกราฟที่จะต้องมียุทธศาสตร์เท่ากันเสมอ

ลักษณะของกราฟสับเซตย่อยอย่างหนึ่งคือ แต่ละจุดยอดในกราฟจะมีเส้นเชื่อมออกเป็นจำนวนเท่ากับขนาดของ S เสมอ ดังนั้น ในขั้นตอนถัดไปสำหรับการสร้างกราฟคือ การหาจุดยอดที่เชื่อมกับ Q ด้วยเส้นเชื่อม 0 และจุดยอดที่เชื่อมด้วย 1 ให้ชื่อว่า P_0 และ P_1 ตามลำดับ โดยการเลือกจุดยอดถัดไปนั้นจะต้องมีลำดับที่แทนการเชื่อมได้ในกราฟเดอ บราวน์ ซึ่งการเชื่อมกันได้นั้นพิจารณาจากฟังก์ชันการแปลงจุดยอดเป็นเซลล์เพื่อนบ้าน $\tau(x, y)$ ไม่เป็นเซตว่าง จากจำนวนของลำดับในแต่ละจุดยอดเป็น 2^{m-l-1} ดังนั้น เมื่อแต่ละลำดับในจุดยอดถัดไปใด ๆ จะต้องสามารถเชื่อมกับลำดับใดลำดับหนึ่งในจุดยอดก่อนหน้าเสมอ จำนวนลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านที่เกิดขึ้นจากเส้นเชื่อม $Q \rightarrow P_0$ และ $Q \rightarrow P_1$ จึงมีจำนวน $2 \times 2^{m-l-1} = 2^{m-l}$ ที่แตกต่างกัน เพราะหากมีลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านที่เหมือนกัน จะทำให้การส่งผ่านไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ในที่นี้เพื่อให้ลำดับในจุดยอดมีลักษณะดังกล่าว ในขั้นตอนที่ 7 จึงเป็นการเลือก P_0 โดยลำดับใด ๆ ใน P_0 เขียนอยู่ในรูป a_0, b_0 ซึ่ง $b_0 \in S^{m-l-1}$ และเพื่อให้ได้ลำดับที่แตกต่างกันจำนวน 2^{m-l-1} จะได้ว่าถ้า $a_0, b_0 \neq a_0, b_0$ แล้ว $b_0 \neq b_0$ จะเห็นได้ว่าการเลือก a_0, b_0 ที่แตกต่างกันทำให้มีลักษณะของจุดยอดในกราฟได้หลายแบบ แต่สิ่งที่จะทำให้จุดยอดใดสามารถเป็นจุดยอดที่เชื่อมกับ Q ได้นั้น คือ การเชื่อมกันของลำดับที่เกิดจาก $Q \rightarrow P_0$ และ $Q \rightarrow P_1$ ต้องสัมพันธ์กับฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ นั่นคือ เมื่อ $q \in Q$ แล้ว $\tau(q, a_0, b_0) \neq \emptyset$ หรือ $\tau(q, a_1, b_1) \neq \emptyset$ ต้องไม่ขัดแย้งกับ $f(\tau(q, a_0, b_0)) = 0$ หรือ $f(\tau(q, a_1, b_1)) = 1$ หากมีกฎดังกล่าวแล้วใน F ในกรณีที่ไม่ขัดแย้งและกฎการส่งผ่านเฉพาะดังกล่าวยังไม่มีใน F ให้เพิ่ม f ที่ได้ลงใน F ตามที่ได้กล่าวไว้ในขั้นตอนที่ 8

ในขั้นตอนที่ 9 – 10 คือการเพิ่ม P_0 และ P_1 ที่ได้จากขั้นตอนที่ 7 ลงใน V และเพิ่มเส้นเชื่อมจาก $Q \rightarrow P_0$ และ $Q \rightarrow P_1$ ลงใน E ด้วยป้ายกำกับ คือ 0 และ 1 ตามลำดับ ขั้นตอนที่ 11 คือการหาเส้นเชื่อมที่ออกจากจุดยอดใหม่ที่ได้เพิ่มลงใน V ในขั้นตอนที่ 9 ซึ่งทำได้โดยการทำซ้ำในขั้นตอนที่ 7 และกำหนดให้จุดยอดใหม่นั้นเป็นจุดยอดสำหรับการพิจารณา

ในกรณีที่ไม่มีจุดยอดใหม่เกิดขึ้นแล้ว จะเป็นการพิจารณาความสมบูรณ์ของกฎการส่งผ่าน นั่นคือ หาก F มีจำนวนของฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ f ครบตามจำนวน 2^m แล้วอัลกอริทึมจะคืนค่าผลลัพธ์ของฟังก์ชันการส่งผ่านที่มีสมบัติผกผันได้ในขั้นตอนนี้ อีกมุมหนึ่ง หากได้ f ไม่ครบตามจำนวนข้างต้นให้ย้อนขั้นตอนที่ได้ทำมาและเริ่มพิจารณาการเลือกลำดับในจุดยอดใหม่ในขั้นตอนที่ 7

การเลือกการเชื่อมของลำดับในจุดยอดตามขั้นตอนที่ 7 อาจทำให้ได้กราฟ G หลายรูปแบบที่แตกต่างกัน อีกทั้งการสลับป้ายกำกับของเส้นเชื่อมของ 0 และ 1 ยังทำให้ได้กราฟที่แตกต่างกันเป็นผลทำให้ได้กฎการส่งผ่านที่แตกต่างกันด้วย ซึ่งในส่วนถัดไป คือ ตัวอย่างของการนำอัลกอริทึมไปใช้เพื่อหารูปแบบของกราฟทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่เป็นกราฟสับเซตย่อยแทนเซลล์ูลาร์อโตมาตาผกผันได้ ดังได้อธิบายในตัวอย่างที่ 18

ตัวอย่างที่ 18 พิจารณาการหากฎในการส่งผ่านผกผันได้สำหรับเซลล์ูลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า เมื่อ $S = \{0,1\}$ และ $N = (-1,0,1)$

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อย

จาก $N = (-1,0,1)$ จะได้ว่า $l = r = 1$

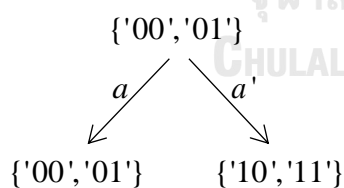
จะได้ว่า G มีจุดยอดเริ่มต้น คือ $Q = \{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\} = \{00', 01'\}$

พิจารณาลำดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่สามารถเชื่อมกับลำดับใน Q ได้มี 4 แบบ นั่นคือ $\{00', 01', 10', 11'\}$ ดังนี้



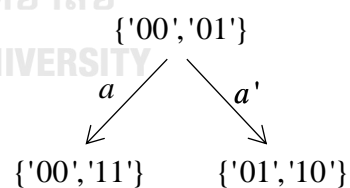
ดังนั้น จุดยอดปลายทางของ $\{00', 01'\}$ สามารถเป็นไปได้ 2 แบบ คือ

แบบที่ 1



เมื่อ $a \in \{0,1\}$ คือ ป้ายกำกับของเส้นเชื่อม

แบบที่ 2



กรณีแบบที่ 1 จะได้ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ คือ

$$f(\tau(00', 00')) = f(000') = a$$

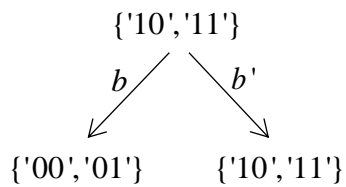
$$f(\tau(00', 01')) = f(001') = a$$

$$f(\tau(01', 10')) = f(010') = a'$$

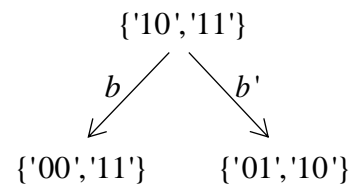
$$f(\tau(01', 11')) = f(011') = a'$$

ในที่นี้เพิ่มจุดยอดใหม่ คือ $\{ '10', '11' \}$ ลงใน V
และพิจารณาเส้นเชื่อมของ $\{ '10', '11' \}$ จะได้

แบบที่ 1.1



แบบที่ 1.2



กรณีแบบที่ 1.1 จะได้ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ คือ

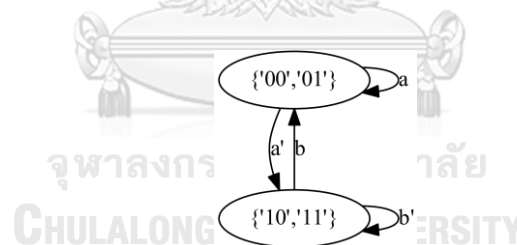
$$f(\tau('10', '00')) = f('100') = b$$

$$f(\tau('10', '01')) = f('101') = b$$

$$f(\tau('11', '10')) = f('110') = b'$$

$$f(\tau('11', '11')) = f('111') = b'$$

จะเห็นได้ว่า ในกรณีแบบที่ 1.1 สามารถสร้างฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ได้ครบ $2^3 = 8$ กฎ และไม่มีจุดยอดใหม่ที่ต้องพิจารณาต่อ ทำให้สามารถเขียน G ได้เป็นดังรูปที่ 23



รูปที่ 23 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลล์ูลาร์ออโตมาตาขั้นต่ำผันกลับได้ (แบบที่ 1.1)

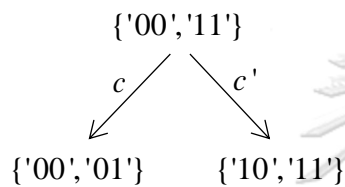
สามารถสรุปได้ว่า กราฟ G ตามแบบที่ 1.1 สามารถสร้างกฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้ทั้งหมด $2 \times 2 = 4$ แบบ (คิดจาก 2 ตัวแปร a, b สามารถเป็นไปได้สองแบบ คือ 0,1) ดังแสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 5 กฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้จากการพิจารณากราฟสับเซตย่อย (แบบที่ 1.1)

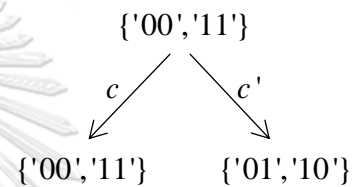
ลำดับที่	111	110	101	100	011	010	001	000	$\eta(c_i)$
	b'	b'	b	b	a'	a'	a	a	f
1.	0	0	1	1	0	0	1	1	51
2.	0	0	1	1	1	1	0	0	60
3.	1	1	0	0	0	0	1	1	195
4.	1	1	0	0	1	1	0	0	204

กรณีแบบที่ 1.2 เมื่อพิจารณาจุดยอดถัดจาก $\{ '00', '11' \}$ จะได้ 2 แบบ คือ

แบบที่ 1.2.1



แบบที่ 1.2.2



เมื่อพิจารณาแบบที่ 1.2.1 และ 1.2.2 แล้ว จะเห็นได้ผลลัพธ์ที่ได้ คือ กฎการส่งผ่านที่ผันกลับได้ เหมือนกับในตารางที่ 5

กรณีแบบที่ 2 จะได้ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ คือ

$$f(\tau('00', '00')) = f('000') = a$$

$$f(\tau('00', '01')) = f('001') = a'$$

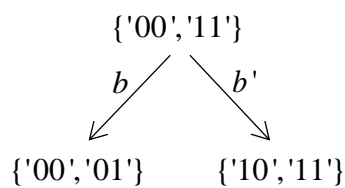
$$f(\tau('01', '10')) = f('010') = a'$$

$$f(\tau('01', '11')) = f('011') = a$$

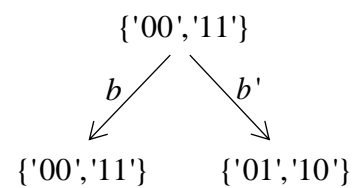
ในที่นี้เพิ่มจุดยอดใหม่ คือ $\{ '00', '11' \}$ และ $\{ '01', '10' \}$ ลงใน V

และพิจารณาเส้นเชื่อมของ $\{ '00', '11' \}$ จะได้

แบบที่ 2.1

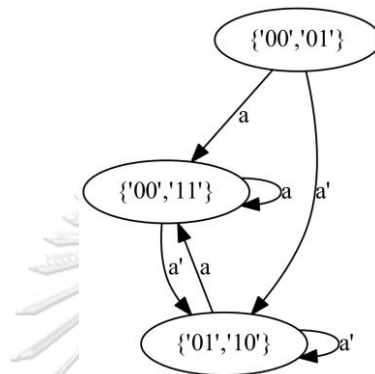


แบบที่ 2.2



กรณีแบบที่ 2.1 จะเห็นว่า ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ $f('000') = f('001') = b$ ที่เกิดขึ้นกับกรณีนี้ขัดแย้งกับ $f('000') = a$ และ $f('001') = a'$ ที่ต้องมีค่าแตกต่างกัน ดังนั้น กราฟสับเซตย่อยจึงไม่สามารถสร้างได้ในกรณีนี้

กรณีแบบที่ 2.2 เมื่อพิจารณาในลักษณะเดียวกันจะได้ผลลัพธ์เป็นกราฟสับเซตย่อยสำหรับกรณีนี้ได้ 1 แบบ ซึ่งอยู่ในรูปดังรูปที่ 24



รูปที่ 24 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลล์ูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นผันกลับได้ (แบบที่ 2.2) ดังนั้น กราฟ G ตามแบบที่ 2.2 สามารถสร้างกฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้ทั้งหมด 2 แบบ (คิดจาก 1 ตัวแปร สามารถเป็นไปได้สองแบบ คือ 0,1)

ตารางที่ 6 กฎการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้จากการพิจารณากราฟสับเซตย่อย (แบบที่ 2.2)

No.	111	110	101	100	011	010	001	000	$\eta(c_i)$
	a	a'	a'	a	a	a'	a'	a	f
1.	0	1	1	0	0	1	1	0	102
2.	1	0	0	1	1	0	0	1	153

□

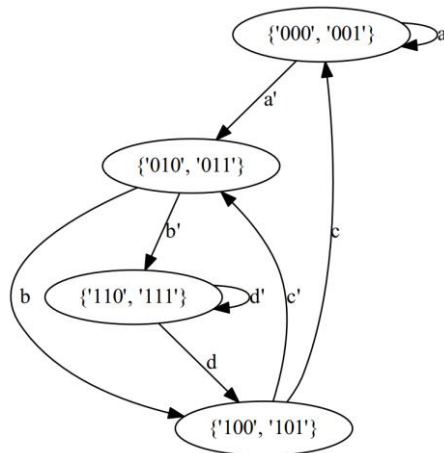
ตัวอย่างที่ 19 พิจารณาการหากฎในการส่งผ่านผันกลับได้สำหรับเซลล์ูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า เมื่อ $S = \{0,1\}$ และ $N = (-2, -1, 0, 1)$

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสับเซตย่อย

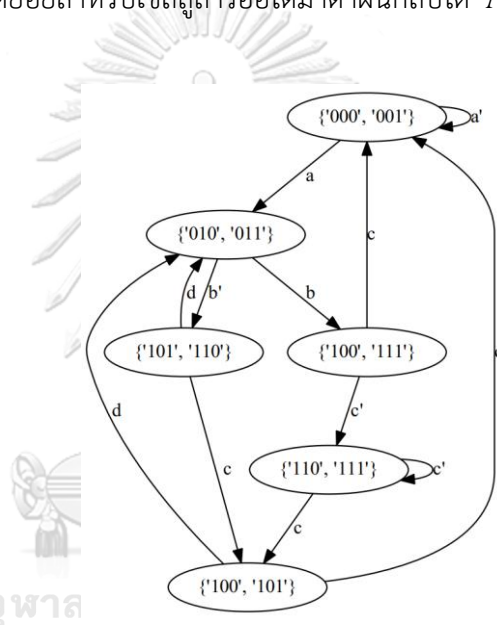
จาก $N = (-2, -1, 0, 1)$ จะได้ว่า $l = 2$ และ $r = 1$

จะได้ว่า G มีจุดยอดเริ่มต้น คือ $Q = \{q \mid q \in \{0\}^l S^{m-l-1}\} = \{'000', '001'\}$

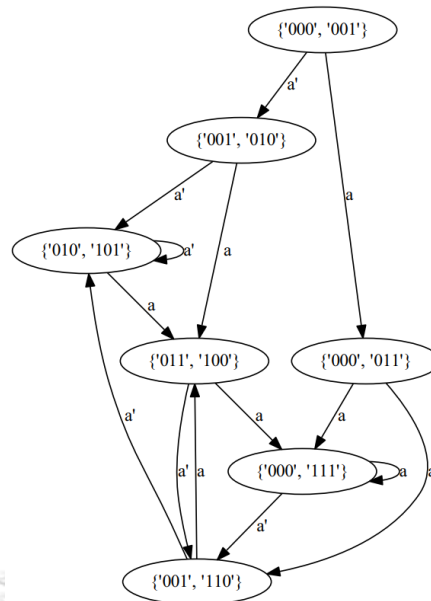
ด้วยวิธีการหารูปแบบของกฎการส่งผ่านที่ผันกลับได้จากอัลกอริทึมที่ 1 ทำให้ได้ว่า มีกราฟสับเซตย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมด 3 แบบ คือ



รูปที่ 25 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลล์ลูคาร์อโตมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (1)



รูปที่ 26 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลล์ลูคาร์อโตมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (2)



รูปที่ 27 กราฟสับเซตย่อยสำหรับเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับได้ $N = (-2, -1, 0, 1)$ (3)

ดังนั้น จะได้ว่าจำนวนกฎการส่งผ่านของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับได้ เมื่อ

$$N = (-2, -1, 0, 1) \text{ มีทั้งหมด } 2^4 + 2^4 + 2 = 34 \text{ กฎ}$$

□

การหากฎในการส่งผ่านที่มีความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาด้วยการสร้างกราฟสับเซตย่อย สามารถสรุปกฎที่มีสมบัติผันกลับได้ในเบื้องต้น ดังนี้

- เมื่อ $S = \{0, 1\}$ และ $N = (-1, 0, 1)$ จะได้ว่า มีทั้งหมด 6 กฎ ได้แก่ 51, 60, 102, 153, 195 และ 204 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- เมื่อ $S = \{0, 1\}$ และ $N = (-2, -1, 0, 1)$ จะได้ว่า มีทั้งหมด 34 กฎ ได้แก่ 13107, 13116, 13155, 13164, 13203, 13212, 13251, 13260, 13875, 14028, 14643, 14796, 15411, 15420, 15555, 15564, 26214, 39321, 49971, 49980, 50115, 50124, 50739, 50892, 51507, 51660, 52275, 52284, 52323, 52332, 52371, 52380, 52419, 52428
- เมื่อ $S = \{0, 1\}$ และ $N = (-1, 0, 1, 2)$ จะได้ว่า มีทั้งหมด 34 กฎ ได้แก่ 3855, 3885, 3915, 4080, 7710, 7770, 11535, 11565, 15420, 19215, 19275, 23070, 23130, 23160, 26985, 30810, 30840, 34695, 34725, 38550, 42375, 42405, 42465, 46260, 46320, 50115, 53970, 54000, 57765, 57825, 61455, 61620, 61650, 61680

สำหรับอัลกอริทึมที่ 1 เป็นการสร้างกราฟสับเซตย่อยที่เริ่มจากการสร้างจุดยอดที่มีรูปแบบตามเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า แม้ว่าจำนวนจุดยอดทั้งหมดที่เป็นไปได้จะเท่ากับ $2^{|V_B|}$ แต่การเลือกจุดยอดเพื่อให้สอดคล้องกับสมบัติการผันกลับได้นั้น จำนวนของลำดับในแต่ละจุดยอดจะมีค่าเท่ากันและสัมพันธ์กับทฤษฎีบทที่ 2 ดังนั้น จำนวนแบบของจุดยอดที่เป็นไปได้ที่ต้องดำเนินการในขั้นตอนที่ 7 ของอัลกอริทึมที่ 1 คือ $\left(\frac{|V_B|}{|Q_0|}\right)^{|Q_0|} = \left(\frac{|S|^{m-1}}{|S|^{m-l-1}}\right)^{|S|^{m-l-1}} = |S|^{|S|^{m-l-1}}$ ซึ่งการสร้างเส้นเชื่อมของแต่ละจุดยอดจะมีการวนซ้ำเป็นจำนวน $|S|$ รอบ ดังนั้นในกรณีใช้เวลาามากสุดในการสร้างกราฟสับเซตย่อยที่สอดคล้องกับการส่งผ่านผันกลับได้ของเซลล์ลาร์อโตมาตาจึงอยู่ในรูป $\mathcal{O}(|S|^{|S|^{m-l-1}+1})$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เวลาที่ใช้ขึ้นอยู่กับขนาดของเซตของสถานะจำกัด S และขนาดของเวกเตอร์ของเซลล์เพื่อนบ้าน



บทที่ 4

การคำนวณโครงสร้างก่อนหน้าของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผ่นกลับได้

การที่เราทราบว่ากราฟสับเซตย่อยสามารถใช้ในการระบุความสามารถในการผ่นกลับของ เซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าได้นั้น ทำให้ได้ว่าเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาที่มีสมบัติผ่นกลับได้จะมีสมบัติการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ โครงแบบใด ๆ ใน เซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาจะมีโครงสร้างก่อนหน้าที่สามารถส่งผ่านมาโครงสร้างปัจจุบันได้เสมอ ดังนั้น ใน บทนี้เราได้เสนอวิธีในการคำนวณโครงสร้างที่เป็นสถานะก่อนหน้าของโครงสร้างใด ๆ ในเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาที่มีสมบัติในการผ่นกลับได้ ซึ่งเทคนิคที่ใช้ในการคำนวณ คือ การสร้างเมตริกซ์ที่ใช้แทนกราฟ เดอ บราวน์แล้วคำนวณการผ่นกลับด้วยการหาทางเดินในกราฟผ่านการทำการดำเนินการทาง เมตริกซ์

4.1 เมตริกซ์ของโครงสร้างก่อนหน้า

เนื่องจากเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาแบบหนึ่งมิติใด ๆ สามารถแทนได้ด้วยกราฟเดอ บราวน์ ดังนั้น เพื่อให้สามารถคำนวณทางเดินในกราฟได้ เราจะแทนกราฟด้วยเมตริกซ์ประชิด (adjacency matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัส มีนิยามดัง

นิยามที่ 12 เมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้า

กำหนดให้ $v_i, v_j \in V$ เป็นสองจุดยอดใด ๆ ของกราฟเดอ บราวน์ $B(k, S) = (V, E)$ เมื่อ $i, j = 1, 2, \dots, |V|$ และ $Z = (1, S, N, f)$ เป็นเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนด ขอบเขตแบบไม่มีค่าที่สัมพันธ์กับ B โดย $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ แล้ว เมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้า (predecessor matrix) ของ $s \in S$ คือ $M(s)_{i,j}$ นิยามด้วย

$$M(s)_{i,j} = \begin{cases} a_{v_k} & \text{ถ้า } f(a_{v_1} a_{v_2} \cdots a_{v_k} \cdots a_{v_{m-1}} a_{v_m}) = s \text{ เมื่อ } (v_i, v_j) \text{ คือเส้นเชื่อมจาก} \\ & v_i \text{ ไป } v_j \text{ โดย } v_i = a_{v_1} a_{v_2} \cdots a_{v_{m-1}} \text{ และ } v_j = a_{v_2} a_{v_2} \cdots a_{v_m} \\ & \text{และ } a_{v_k} \text{ คือ สัญลักษณ์ที่ปรากฏในเซลล์เพื่อนบ้านที่ตำแหน่ง } \vec{v}_k = 0, \\ \emptyset & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

นอกจากนี้ ลำดับของแถวและคอลัมป์ในเมตริกซ์ประชิดเรียงตามสัญลักษณ์ $v_i \in V$ จากความสำคัญทางตัวเลขน้อยไปมาก

ตัวอย่างที่ 20 จากกราฟเดอ บราวน์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นกฎ 150 (จากรูปที่ 16) เราสามารถสร้างเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้า $M(s)_{i,j}$ ขนาด $|V| \times |V| = 4 \times 4$ สำหรับแต่ละ $s \in S$ ได้ดังนี้

$$M(0)_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & '00' & '01' & '10' & '11' \end{array} \\ \begin{array}{c} '00' \\ '01' \\ '10' \\ '11' \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} \end{array}$$

และ

$$M(1)_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & '00' & '01' & '10' & '11' \end{array} \\ \begin{array}{c} '00' \\ '01' \\ '10' \\ '11' \end{array} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

จากตัวอย่างที่ 20 เมื่อ พิจารณา $M(0)_{i,j}$ จะเห็นว่า

$$M(0)_{'00','00'} = 0 \text{ เนื่องจาก } '00' \rightarrow '00' \text{ แทนเซลล์เพื่อนบ้าน } '000' \text{ ซึ่ง } f(0,0,0) = 0$$

$$M(0)_{'01','11'} = 1 \text{ “ } '01' \rightarrow '11' \text{ “ } '011' \text{ “ } f(0,1,1) = 0$$

$$M(0)_{'10','01'} = 0 \text{ “ } '10' \rightarrow '01' \text{ “ } '101' \text{ “ } f(1,0,1) = 0$$

$$M(0)_{'11','10'} = 1 \text{ “ } '11' \rightarrow '10' \text{ “ } '000' \text{ “ } f(1,1,0) = 0$$

และเมื่อพิจารณา $M(1)_{i,j}$ จะเห็นว่า

$$M(1)_{'00','01'} = 0 \text{ เนื่องจาก } '00' \rightarrow '01' \text{ แทนเซลล์เพื่อนบ้าน } '001' \text{ ซึ่ง } f(0,0,1) = 1$$

$$M(1)_{'01','10'} = 1 \text{ “ } '01' \rightarrow '10' \text{ “ } '010' \text{ “ } f(0,1,0) = 1$$

$$M(1)_{'10','00'} = 0 \text{ “ } '10' \rightarrow '00' \text{ “ } '100' \text{ “ } f(1,0,0) = 1$$

$$M(1)_{'11','11'} = 1 \text{ “ } '11' \rightarrow '11' \text{ “ } '111' \text{ “ } f(1,1,1) = 1$$

□

นั่นคือ ผลลัพธ์ของแต่ละตำแหน่งในเมตริกซ์นั้นสัมพันธ์กับป้ายกำกับของกราฟเดอ บราวน์ เมื่อตำแหน่งมีดัชนีสัมพันธ์กับการซ้อนกันของจุดยอดในกราฟที่แทนลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้าน ขนาด m ของเซลล์ลูลาร์อโตมาตา ส่วนในกรณีอื่น ๆ ที่ไม่สัมพันธ์กับลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านให้ กำหนดค่าเป็นเซตว่าง (\emptyset) ทั้งนี้ การเขียน $M(s)_{i,j}$ ในที่นี้สามารถเขียนแทนได้ด้วย $M(s)$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ

เพื่อให้เมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าสามารถคำนวณทางเดินในกราฟได้ เราจำเป็นต้องมีการนิยามการดำเนินการของเมตริกซ์เพื่อให้สัมพันธ์กับพฤติกรรมการส่งผ่านและการหาโครงสร้างแบบก่อนหน้าสำหรับเซลล์ลูลาร์อโตมาตามวิธีการที่ได้เสนอได้

นิยามที่ 13 ตัวดำเนินการของเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า

กำหนดให้ $A=[a_{i,k}]$ และ $B=[b_{k,j}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว จะได้ว่า การดำเนินการเมตริกซ์ของ A และ B เขียนได้เป็น $A \times B$ หรือ AB ซึ่งมีผลลัพธ์เป็นเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าขนาด $n \times n$ ที่เขียนได้เป็น $C=[c_{i,j}]$ เมื่อ

$$c_{i,j} = \bigcup_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j}$$

โดย

$$a_{i,k} \times b_{k,j} = \begin{cases} a_{i,k} b_{k,j} & \text{เมื่อ } a_{i,k} \neq \emptyset \text{ และ } b_{k,j} \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

ตัวอย่างที่ 21 จาก $M(s)$ ในตัวอย่างที่ 20 จากกราฟเดอ บราวน์ของเซลล์ลูลาร์อโตมาตาขั้นต้น กฏ 150 (จากรูปที่ 16) เราสามารถสร้างเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า $M(s)_{i,j}$ ขนาด $|V| \times |V| = 4 \times 4$ สำหรับแต่ละ $s \in S$ ได้ ดังนี้และหาผลลัพธ์ของ $M(0) \times M(1)$ ได้ดังนี้

$$M(0) \times M(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} '00' & '01' & '10' & '11' \end{matrix} & & \begin{matrix} '00' & '01' & '10' & '11' \end{matrix} \\ \begin{matrix} '00' \\ '01' \\ '10' \\ '11' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & '00' & '01' & '10' & '11' \\ '00' & \begin{bmatrix} \emptyset & '00' & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & '11' \\ \emptyset & \emptyset & '01' & \emptyset \\ '10' & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \\ '01' & \\ '10' & \\ '11' & \end{matrix}$$

□

จากตัวอย่างที่ 21 จะเห็นว่า เมตริกซ์ผลลัพธ์ในแต่ละตำแหน่งหมายถึงทางเดินในกราฟเดอ บราวน์ ขนาดความยาว 2 ทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากจุดยอด v_i ไปจุดยอด v_j โดยจะเห็นว่า

$$\begin{array}{ll} \text{ตำแหน่ง '00','01' คือ '00' ซึ่งได้มาจากทางเดิน } '00' \xrightarrow{0} '00' \xrightarrow{0} '01' \\ \text{' ' '01','10' คือ '11' ' ' '01' \xrightarrow{1} '11' \xrightarrow{1} '10' \\ \text{' ' '10','10' คือ '01' ' ' '10' \xrightarrow{0} '01' \xrightarrow{1} '10' \\ \text{' ' '11','00' คือ '10' ' ' '11' \xrightarrow{1} '10' \xrightarrow{0} '00' \end{array}$$

4.2 เมตริกซ์ทางเดินสำหรับการคำนวณโครงสร้างแบบก่อนหน้า

ตามที่ได้ทราบแล้วว่าโครงสร้างแบบใด ๆ ของเซลล์ลาร์อโตมาตาสามารถส่งผ่านไปโครงสร้าง ถัดไป (successor) ด้วยการใช้ฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ซึ่งการส่งผ่านเฉพาะที่ของกราฟเดอ บราวน์ ที่สัมพันธ์กับเซลล์ลาร์อโตมาตานั้นอยู่บนเส้นเชื่อม โดยผลลัพธ์ของการส่งผ่านเฉพาะที่คือป้ายกำกับ ของเส้นเชื่อมในกราฟ อีกทั้งจุดยอดที่อยู่ติดกันในกราฟยังสัมพันธ์กับลักษณะเซลล์เพื่อนบ้านด้วย ทั้งนี้ หลังการแทนกราฟเดอ บราวน์ด้วยเมตริกซ์ประชิดที่แต่ละตำแหน่งในเมตริกซ์บอกถึงการมีเส้น เชื่อมกันของจุดยอดใด ๆ ในกราฟ ดังนั้น การพิจารณาสถานะก่อนหน้าของเซลล์ใด ๆ สามารถทำได้ โดยการพิจารณาทางเดินในกราฟ

นิยามที่ 14 เมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าของทางเดินในกราฟ

กำหนดให้ $B(k,S) = (V,E)$ เป็นกราฟเดอ บราวน์ และให้ $(v_0, v_1)(v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n) = e_1 e_2 \dots e_n$ เป็นทางเดินในกราฟขนาดความยาว n จาก v_0 ไป v_n เมื่อ $v_i \in V$, $e_j \in S$ และ $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ แล้วจะได้ว่า เมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าของทางเดิน $e_1 e_2 \dots e_n$ สามารถแทน ด้วยผลคูณของเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า $M(e_i)$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ ได้ เขียนได้เป็น

$$M(e_1 e_2 \dots e_n) = \prod_{j=1}^n M(e_j)$$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนดให้ $Z = (1, S, N, f)$ เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาทหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า เมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ โดยมี $B(k, S) = (V, E)$ เป็นกราฟเดอ บรวาน์ที่สัมพันธ์กับ Z และให้ $M(e_j)$ เป็นเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าของ B สำหรับ $e_j \in S$ โดยค่าของเมตริกซ์ในตำแหน่งที่ (x, y) คือ ค่าของเซลล์กลางที่สัมพันธ์กับจุดยอด v_x ไป v_y แล้ว จะได้ว่า โครงแบบก่อนหน้าที่ได้จากทางเดินในกราฟ B ขนาดความยาว n ทั้งหมดที่เป็นไปได้จาก v_0 ไป v_n เมื่อทางเดินดังกล่าวมีลำดับของป้ายกำกับเป็น $(v_0, v_1)(v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n) = e_1 e_2 \dots e_n$ สามารถคำนวณได้จาก $M(e_1 e_2 \dots e_n)$

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4 ในการพิสูจน์นี้เราได้ใช้เทคนิคอุปนัยทางคณิตศาสตร์โดย สมมติให้ $Z = (1, S, N, f)$ เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาทหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า เมื่อ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ โดยมี $B(k, S) = (V, E)$ เป็นกราฟเดอ บรวาน์ที่สัมพันธ์กับ Z และให้ $M(e_j)$ เป็นเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าของ B สำหรับ $e_j \in S$ โดยค่าของโครงสร้างแบบก่อนหน้าใน ตำแหน่งที่ (x, y) ของเมตริกซ์ คือ ค่าของเซลล์กลางที่สัมพันธ์กับจุดยอด v_x ไป v_y

ขั้นที่ 1 : ลักษณะของโครงสร้างแบบก่อนหน้าขนาดความยาว 1 ที่สอดคล้องกับป้ายกำกับ $e_1 \in S$ สามารถพิจารณาจากเซลล์กลางของรูปแบบเซลล์เพื่อนบ้านจากจุดยอด v_x ไป v_y ซึ่งได้มาจากค่าที่ตำแหน่งที่ (x, y) ของเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า $M(e_1)$

ขั้นที่ 2 : สมมติให้ค่าที่ตำแหน่งที่ (x, y) ของเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า $M(e_1 e_2 \dots e_n)$ เป็นโครงสร้างแบบก่อนหน้าขนาดความยาว n ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากจุดยอด v_x ไป v_y ซึ่งสอดคล้องกับป้ายกำกับ $e_1 e_2 \dots e_n$ โครงแบบก่อนหน้าที่ได้สามารถเขียนได้เป็น $w_1 w_2 \dots w_n$ เนื่องจาก

$$M(e_1 e_2 \dots e_{n+1}) = M(e_1 e_2 \dots e_n) M(e_{n+1})$$

จะได้ว่า ค่าของโครงสร้างแบบก่อนหน้าในตำแหน่งที่ (x, y) ของเมตริกซ์ $M(e_1 e_2 \dots e_{n+1})$ คือ

$$c_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} \cup a_{i,2} b_{2,j} \cup a_{i,3} b_{3,j} \cup \dots \cup a_{i,n} b_{n,j}$$

เมื่อ $a_{i,k}$ คือ ค่าของโครงสร้างแบบก่อนหน้าในตำแหน่งที่ (i, k) ของเมตริกซ์ $M(e_1 e_2 \dots e_n)$ และ $b_{k,j}$ คือ ค่าของโครงสร้างแบบก่อนหน้าในตำแหน่งที่ (k, j) ของเมตริกซ์ $M(e_{n+1})$

จาก $a_{i,k}$ ผลลัพธ์ของโครงสร้างแบบก่อนหน้าขนาดความยาว n จากจุดยอด v_i ไป v_k

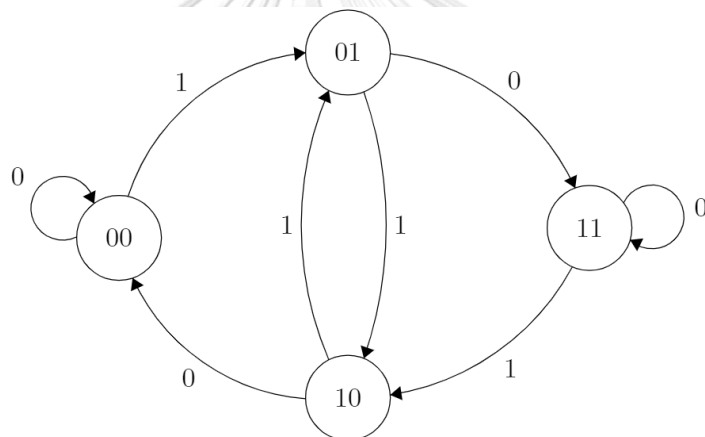
ดังนั้น โครงแบบก่อนหน้าที่มีขนาดความยาว $n+1$ จากจุดยอด v_i ไป v_j สามารถพิจารณาได้จากทางเดินขนาดความยาว n จากจุดยอด v_i ไปจุดยอดสิ้นสุดที่จุดยอด v_k ซึ่งเมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จาก

ทางเดินดังกล่าวมาดำเนินการเพื่อให้ได้ทางเดินจากอีกหนึ่งก้าวจากจุดยอด v_k ไป v_j ทำให้เราสามารถเขียนผลลัพธ์ของโครงแบบก่อนหน้าได้เป็น $c_{i,j} = a_{i,k} b_{k,j}$

ตัวอย่างที่ 22 พิจารณาเซลูลาร์ออโตมาตาขั้นต้นกฎ 102 ที่มีสมบัติผันกลับได้ เมื่อมีสถานะจำกัด $S = \{0,1\}$ และเซลล์เพื่อนบ้านอยู่ในรูป $N = (-1,0,1)$ โดยฟังก์ชันการส่งผ่านเฉพาะที่ $f : S^3 \rightarrow S$ นิยามโดย

$\eta(c_i)$	111	110	101	100	011	010	001	000
f_{102}	0	1	1	0	0	1	1	0

กราฟเดอ บราวน์ $B(k,S)$ ที่สอดคล้องกับ $Z = (1,S,N,f)$ มีลักษณะตามรูปที่ 28



รูปที่ 28 กราฟเดอ บราวน์ $B(2, \{0,1\})$ ที่ใช้แทนกฎ 102 ของเซลูลาร์ออโตมาตาชนิดขั้นต้น

จะได้ว่า เมตริกซ์โครงแบบก่อนหน้าสำหรับกฎ 102 สามารถเขียนได้เป็น

$$M(0) = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$M(1) = \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $C' = '01101'$ เราจะได้ว่าเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้าของ C' คือ

$$M(01101) = M(0)M(1)M(1)M(0)M(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \emptyset & '00100' & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & '11011' & \emptyset \\ \emptyset & '00100' & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & '11011' & \emptyset \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า โครงแบบก่อนหน้าทั้งหมดที่สอดคล้องกับป้ายกำกับ $'01101'$ มีทั้งหมด 4 ทางเดิน คือ

1. จากจุดยอด $'00' \rightarrow '01'$ ได้ผลลัพธ์เป็น $'00100'$
2. “ $'01' \rightarrow '10'$ “ $'11011'$
3. “ $'10' \rightarrow '01'$ “ $'00100'$
4. “ $'11' \rightarrow '10'$ “ $'11011'$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความหมายของทางเดินที่ได้จากเมตริกซ์ก่อนหน้าสามารถพิจารณาได้จาก 1. ดังนี้

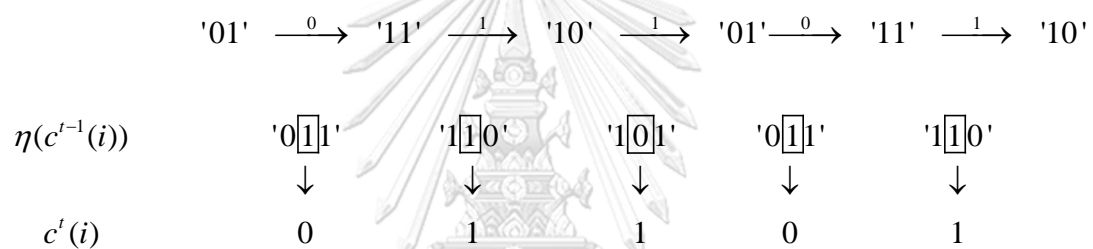
$$\begin{array}{ccccccccc} '00' & \xrightarrow{0} & '00' & \xrightarrow{1} & '01' & \xrightarrow{1} & '10' & \xrightarrow{0} & '00' & \xrightarrow{1} & '01' \\ \eta(c^{t-1}(i)) & & '0\boxed{0}0' & & '0\boxed{0}1' & & '0\boxed{1}0' & & '1\boxed{0}0' & & '0\boxed{0}1' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c'(i) & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \end{array}$$

รูปที่ 29 ตัวอย่างทางเดินที่ได้จากเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้า (1.)

นั่นคือ ทางเดินที่มีป้ายกำกับเป็น '01101' มีหนึ่งรูปแบบที่สามารถเป็นไปได้ดังรูปที่ 29 ซึ่งจะเห็นว่าที่เซลล์ซ้ายสุด มีลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านตรงตามเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า (จำนวนเซลล์ทางซ้ายของเซลล์เพื่อนบ้านจะตรงเป็น 0 ทั้งหมด) และที่ตำแหน่งเซลล์ขวาสุดจะเห็นว่าเซลล์เพื่อนบ้านทางขวาต้องเป็น 0 จากเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเช่นเดียวกับการพิจารณาเซลล์ซ้ายสุด แต่ลักษณะของเซลล์ทางขวาของเซลล์เพื่อนบ้านที่ได้จากเซลล์ขวาสุด คือ 1 ทำให้กล่าวได้ว่าการส่งผ่านจากข้อ 1. ไม่สามารถเป็นไปได้

เมื่อพิจารณาลักษณะโครงสร้างแบบก่อนหน้าทั้งหมดจาก 1.- 4. จะได้ว่า โครงแบบที่ได้จาก 2. เท่านั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการกำหนดขอบเขต (ดังแสดงในรูปที่ 30) ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เมื่อ $C' = '01101'$ แล้วเราสามารถคำนวณโครงสร้างแบบก่อนหน้าได้เป็น $C'^{-1} = '11011'$

□



รูปที่ 30 ตัวอย่างทางเดินที่ได้จากเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้า (2.)

4.3 โครงแบบก่อนหน้าของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า

โครงสร้างแบบก่อนหน้า C'^{-1} ของโครงสร้างแบบ C' ที่เวลา t ใด ๆ คือ โครงแบบที่เป็นสถานะก่อนหน้าที่จะถูกส่งผ่านมายังสถานะปัจจุบันด้วยฟังก์ชันการส่งผ่านโดยรวมของเซลล์ลาร์อโตมาตา ซึ่งฟังก์ชันในการส่งผ่าน $F^{-1}: S^n \rightarrow S^n$ ให้โครงสร้างขนาดความยาว n ย้อนกลับได้นั้นสามารถนิยามได้โดย

$$F^{-1}(C') = \{C'^{-1} \in S^n \mid F(C'^{-1}) = C'\}$$

จากที่เราทราบแล้วนั้นว่าการหา C'^{-1} สามารถพิจารณาได้จากการหาทางเดินทั้งหมดที่เป็นไปได้ด้วยวิธีการดำเนินของเมตริกซ์โครงสร้างแบบก่อนหน้าของ C' นั่นคือ

$$M(C') = M(C'(1))M(C'(2)) \cdots M(C'(n))$$

เมื่อ ค่าในเมตริกซ์ผลลัพธ์ที่ตำแหน่ง (x, y) ของ $M(C')$ แสดงถึงทางเดินในกราฟเดอ บราวน์จากจุดยอด v_x ไปจุดยอด v_y เมื่อค่าในตำแหน่งนั้นไม่เป็นเซตว่าง ซึ่งการมีเส้นเชื่อมในกราฟของสองจุดยอดที่อยู่ติดกันแสดงถึงลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์สตาร์อโตมาตาที่แทนด้วยกราฟดังกล่าว ดังนั้นจะเห็นว่า $M(C'(1))$ สัมพันธ์โดยตรงกับลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ซ้ายสุดของโครงแบบ C' เช่นเดียวกับ $M(C'(n))$ สัมพันธ์โดยตรงกับลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ขวา เพื่อให้ทั้งสองเซลล์ที่กล่าวข้างต้นสามารถควบคุมเงื่อนไขของการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าของเซลล์สตาร์อโตมาตาได้นั้น จำเป็นต้องมีการนิยามสมบัติของเซลล์ที่เป็นขอบซ้ายสุดกับขวาสุดซึ่งจะสัมพันธ์กับลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านขนาด m โดยกำหนดให้ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ จะได้ว่า $m = l + r + 1$ เมื่อ l คือ จำนวนตำแหน่งในเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีค่าเป็นลบ และ r คือ จำนวนตำแหน่งในเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีค่าเป็นบวก ดังนั้น v_x ต้องอยู่ในรูปของเซลล์ทางซ้ายเป็น 0 ตามจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้าย เขียนได้เป็น $\{0\}^l S^{m-l-1}$ และ v_y จะอยู่ในรูปของเซลล์ทางขวาเป็นศูนย์ตามจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา เขียนได้เป็น $S^{m-r-1} \{0\}^r$ หนึ่ง เราสามารถนิยามเมตริกซ์โครงแบบก่อนหน้าสำหรับเซลล์ซ้ายสุดของโครงแบบเพื่อเพิ่มเงื่อนไขของการกำหนดขอบเขตได้เป็น $M_L(s)_{i,j}$ และ $M_R(s)_{i,j}$ สำหรับเซลล์ขวาสุด ดังนี้

$$M_L(s)_{i,j} = \begin{cases} a_{\vec{v}_k} & \text{ถ้า } f(a_{\vec{v}_1} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_k} \cdots a_{\vec{v}_{m-1}} a_{\vec{v}_m}) = s \text{ เมื่อ } (v_i, v_j) \text{ คือเส้นเชื่อมจาก} \\ & v_i \text{ ไป } v_j \text{ โดย } v_i = a_{\vec{v}_1} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_{m-1}} \text{ และ } v_j = a_{\vec{v}_2} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_m} \\ & \text{และ } a_{\vec{v}_k} \text{ คือ สัญลักษณ์ที่ปรากฏในเซลล์เพื่อนบ้านที่ตำแหน่ง } \vec{v}_k = 0 \\ & \text{โดย } a_{\vec{v}_1} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_l} \in \{0\}^l, \\ \emptyset & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$M_R(s)_{i,j} = \begin{cases} a_{\vec{v}_k} & \text{ถ้า } f(a_{\vec{v}_1} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_k} \cdots a_{\vec{v}_{m-1}} a_{\vec{v}_m}) = s \text{ เมื่อ } (v_i, v_j) \text{ คือเส้นเชื่อมจาก} \\ & v_i \text{ ไป } v_j \text{ โดย } v_i = a_{\vec{v}_1} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_{m-1}} \text{ และ } v_j = a_{\vec{v}_2} a_{\vec{v}_2} \cdots a_{\vec{v}_m} \\ & \text{และ } a_{\vec{v}_k} \text{ คือ สัญลักษณ์ที่ปรากฏในเซลล์เพื่อนบ้านที่ตำแหน่ง } \vec{v}_k = 0 \\ & \text{โดย } a_{\vec{v}_{m-r+1}} \cdots a_{\vec{v}_{m-1}} a_{\vec{v}_m} \in \{0\}^r, \\ \emptyset & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ทฤษฎีบทที่ 5 เมตริกซ์ผลลัพธ์โครงสร้างก่อนหน้าของโครงสร้าง C ของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับได้เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าในตำแหน่ง i, j เป็น $D \neq \emptyset$ และค่าที่ตำแหน่ง $(x, y) \neq (i, j)$ มีค่าเป็น \emptyset ในที่นี้เรียก D ว่าโครงสร้างก่อนหน้าของ C

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนดให้ C เป็นโครงสร้างขนาดความยาว n ของเซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับได้และ $M(C)$ เป็นเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้าของ C ในที่นี้จะขอแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

1. กรณีไม่มี $D \neq \emptyset$ ปรากฏในตำแหน่งใดเลยของ $M(C)$

กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $M(C)$ มีค่าในทุกตำแหน่งที่ i, j เป็น \emptyset หมายความว่าไม่มีทางเดินใดเลยจากจุดยอด i ไปจุดยอด j ที่สัมพันธ์กับโครงสร้าง C นั่นคือ C ไม่มีโครงสร้างก่อนหน้า C^{-1} เซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับไม่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือผันกลับได้

2. กรณีมี $D \neq \emptyset$ ปรากฏใน $M(C)$ มากกว่าหนึ่งตำแหน่ง

ด้วยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบไม่มีค่าด้วยการแทนเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้าของเซลล์ูลาร์สุดท้ายและขวาสุดด้วย M_L, M_R ทำให้ได้ว่า $M(C)$ จะมีค่าเฉพาะตำแหน่งสัมพันธ์กับเงื่อนไขขอบเขตด้วย ถ้ามี $D_1, D_2 \neq \emptyset$ ปรากฏใน $M(C)$ หมายความว่ามีการเดินทางมากกว่าหนึ่งแบบที่สัมพันธ์กับ C ทำให้ได้ว่าโครงสร้างก่อนหน้า C^{-1} ของ C มีค่ามากกว่าหนึ่งแบบ ทำให้เซลล์ูลาร์อัตโนมัติมาตาผันกลับไม่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือผันกลับได้

ตัวอย่างที่ 23 จากตัวอย่างที่ 22 เมื่อกำหนดให้ $C' = '01101'$ เราจะได้ว่าการคำนวณโครงสร้างก่อนหน้าของ C' สามารถปรับปรุงได้โดยการคำนวณเมตริกซ์โครงสร้างก่อนหน้าด้วยการใช้เมตริกซ์ที่ใช้สำหรับพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตสำหรับเซลล์ูลาร์สุดท้ายและขวาสุด นั่นคือ

$$M(01101) = M_L(0)M(1)M(1)M(0)M_R(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & '11011' & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เมื่อ $C' = '01101'$ แล้วเราสามารถคำนวณโครงแบบก่อนหน้าได้เป็น

$$C'^{-1} = '11011'$$

□

สำหรับวิธีในการคำนวณโครงแบบที่เป็นสถานะก่อนหน้าของโครงแบบใด ๆ ในเซลล์ูลาร์ออโตมาตาที่มีสมบัติในการผันกลับได้ เราได้เสนอเทคนิคที่ใช้ในการคำนวณ คือ การสร้างเมตริกซ์ที่ใช้แทนกราฟเดอ บราวน์แล้วคำนวณการผันกลับด้วยการหาทางเดินในกราฟผ่านการดำเนินการทางเมตริกซ์ ทั้งนี้ ปัจจัยที่มีผลต่อความซับซ้อนในการคำนวณของวิธีที่ได้เสนอนั้นขึ้นอยู่กับขนาดความยาวของโครงแบบของเซลล์ูลาร์ออโตมาตา (n) และขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน (m) นั่นคือ เมตริกซ์โครงแบบที่ใช้คำนวณของแต่ละเซลล์มีขนาดเป็น $(m-1) \times (m-1)$ และการดำเนินการทางเมตริกซ์ในแต่ละครั้งใช้เวลาเป็น $O(m^2)$ ทำให้การดำเนินการเพื่อหาโครงแบบก่อนหน้ามีความซับซ้อนของเวลาในการคำนวณ คือ $O(nm^2)$



บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาและเสนออัลกอริทึมการระบุการผันกลับของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติ ด้วยกราฟสับเซตย่อยภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าโดยมีการนิยามลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านด้วยเวกเตอร์ ทำให้การนิยามเซลล์เพื่อนบ้านไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปสมมาตร ซึ่งการศึกษาความสามารถดังกล่าว ในงานนี้ได้เสนอวิธีในการสร้างเซลล์ลาร์อโตมาตาที่มีสมบัติผันกลับได้ด้วยการแทนเซลล์ลาร์อโตมาตาด้วยกราฟเดอ บราวน์ โดยสมบัติการผันกลับได้ของเซลล์ลาร์อโตมาตาหมายถึง การมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งของการส่งผ่านโดยรวมของเซลล์ลาร์อโตมาตา และไม่ว่าโครงแบบจะอยู่ในรูปแบบใด จะมีโครงแบบก่อนหน้าที่สามารถส่งผ่านมาหาโครงแบบปัจจุบันได้เสมอ ซึ่งฟังก์ชันในการส่งผ่านของเซลล์ลาร์อโตมาตาสามารถพิจารณาได้จากเส้นเชื่อมบนกราฟเดอ บราวน์ อีกทั้งลักษณะของจุดยอดที่เชื่อมถึงกันยังสัมพันธ์กับลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้าน ดังนั้น การระบุการผันกลับได้ของเซลล์ลาร์อโตมาตาสามารถทำได้โดยการวิเคราะห์ทางเดินบนกราฟดังกล่าว ในงานวิจัยนี้เราได้ใช้เทคนิคการสร้างกราฟสับเซตย่อยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าเพื่อพิจารณาทางเดินที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้จากกราฟเดอ บราวน์ ทำให้ทราบถึงลักษณะของกราฟที่เป็นตัวระบุความสามารถในการผันกลับได้ของเซลล์ลาร์อโตมาตา ซึ่งได้มีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จำเป็นสำหรับการพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าวในงานวิจัยนี้แล้ว ทั้งนี้เราได้เสนออัลกอริทึมสำหรับการหาการส่งผ่านที่มีสมบัติผันกลับได้โดยอาศัยการพิจารณาสมบัติของกราฟสับเซตย่อย เมื่อได้ทดสอบหาเซลล์ลาร์อโตมาตาที่มีสมบัติผันกลับได้ในเซลล์ลาร์อโตมาตาขั้นต้นที่มีจำนวนเซลล์เพื่อนบ้าน $m = 3$ ทำให้ทราบว่าเมื่อมีเพียง 6 กฎการส่งผ่านเท่านั้นที่มีสมบัติดังกล่าว แต่เมื่อได้เพิ่มขนาดของเซลล์เพื่อนบ้านเป็น $m = 4$ จะเห็นว่าจำนวนกฎที่สามารถผันกลับได้มีทั้งหมด 34 กฎสำหรับเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้าน $N = (-2, -1, 0, 1)$ และอีกจำนวน 34 กฎสำหรับ $N = (-1, 0, 1, 2)$ และด้วยวิธีการเดียวกัน เราสามารถหากฎที่สามารถผันกลับได้ของลักษณะเซลล์เพื่อนบ้านที่มีการนิยามด้วย $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ เมื่อ N เป็นเวกเตอร์เซลล์เพื่อนบ้านที่มีลำดับต่อเนื่องกันได้

นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังเสนอวิธีในการคำนวณโครงแบบก่อนหน้าสำหรับโครงแบบใด ๆ ของเซลล์ลาร์อโตมาตาหนึ่งมิติที่มีสมบัติผันกลับได้ภายใต้เงื่อนไขการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า ซึ่งวิธีที่ได้เสนออยู่บนพื้นฐานของการแทนเซลล์ลาร์อโตมาตาด้วยกราฟเดอ บราวน์และพิจารณาลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านด้วยการคำนวณทางเดินบนกราฟ โดยการคำนวณทางเดินบนกราฟในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการหาทางเดินด้วยการคำนวณการดำเนินการของเมตริกซ์ที่เป็นตัวแทนของกราฟ ด้วยการ

ดำเนินการของเมตริกซ์ทำให้ได้โครงแบบก่อนหน้าที่สามารถส่งผ่านไปหาสถานะของโครงแบบปัจจุบันได้ หนึ่งในงานวิจัยได้พิสูจน์การมีอยู่ของโครงแบบก่อนหน้าสำหรับโครงแบบใด ๆ ด้วย

5.2 บทวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ

สำหรับการแทนเซลล์ลาร์อโตมาตาด้วยกราฟเดอ บรวาน์นั้นมีข้อดีที่ทำให้เราทราบถึงลักษณะของการซ้อนทับกันของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ที่อยู่ติดกันของโครงแบบใด ๆ ซึ่งกราฟเดอ บรวาน์จะมีลักษณะของเส้นเชื่อมและจุดยอดที่เชื่อมถึงกันสัมพันธ์กับลักษณะดังกล่าว นั่นคือ เมื่อเซลล์เพื่อนบ้านขนาด m นิยามด้วยเวกเตอร์ $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ และจากลักษณะของกราฟเดอ บรวาน์ จุดยอดที่มีเส้นเชื่อมถึงกันจาก v_i ไป v_j ก็ต่อเมื่อ v_i มีสัญลักษณ์ที่สามารถซ้อนทับกับ v_j ได้ในลักษณะการเลื่อนไปทางขวาหนึ่งช่อง ทั้งนี้ ลำดับของ N จำเป็นต้องเป็นลำดับของจำนวนเต็มที่ไม่ต่อเนื่องกันเพื่อให้มีพฤติกรรมที่สอดคล้องกับสมบัติข้างต้นของกราฟเดอ บรวาน์ ซึ่งหาก N เป็นเวกเตอร์ที่เป็นลำดับของจำนวนเต็มที่ไม่ต่อเนื่องกัน เช่น $(-2, 0, -2)$ จะทำให้มีโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์เซลล์ที่อยู่ติดกันในโครงแบบไม่มีเซลล์เพื่อนบ้านร่วมกันเลย ทำให้ไม่สามารถสร้างกราฟเดอ บรวาน์ที่สัมพันธ์กับเซลล์ลาร์อโตมาตาดังกล่าวได้

เนื่องจากอัลกอริทึมการระบุการผันกลับได้ของเซลล์ลาร์อโตมาตาที่ได้เสนอในงานวิจัยนี้เป็นการสร้างกราฟสับเซตย่อยตามเงื่อนไขที่ได้กำหนด ปัจจัยที่เกี่ยวข้องที่มีผลต่อความซับซ้อนของการสร้างกราฟสับเซตย่อย คือ ขนาดของเซตของสถานะ (S) และขนาดของเวกเตอร์ของเซลล์เพื่อนบ้าน (m) โดยตัวแปรที่ถือว่ามีผลมากที่สุด คือ m ทั้งนี้ ความซับซ้อนของอัลกอริทึมเป็นฟังก์ชันเลขยกกำลังของ m เนื่องจากการสร้างเส้นเชื่อมของแต่ละจุดยอดมีการวนซ้ำเพื่อหาเส้นเชื่อมที่มีสมบัติตรงตามเงื่อนไขของการผันกลับได้

สำหรับวิธีในการคำนวณโครงแบบที่เป็นสถานะก่อนหน้าของโครงแบบใด ๆ ในเซลล์ลาร์อโตมาตาที่มีสมบัติในการผันกลับได้ ปัจจัยที่มีผลต่อความซับซ้อนในการคำนวณของวิธีที่ได้เสนอขึ้นอยู่กับขนาดความยาวของโครงแบบของเซลล์ลาร์อโตมาตา (n) และขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน (m) ในส่วนของการเปรียบเทียบการคำนวณหาโครงแบบก่อนหน้าระหว่าง คือ วิธีคำนวณโครงแบบโดยใช้เมตริกซ์โครงแบบที่เราได้เสนอ กับวิธีของการคำนวณเมตริกซ์จากเซลล์ลาร์อโตมาตาเชิงเส้น (เมื่อ $m = 3$) ด้านความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณ วิธีที่เสนอมีความซับซ้อนเป็น $O(nm^6)$ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับแบบเชิงเส้นที่มีการกำหนดขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน $m = 3$ จะได้ว่าเป็น $O(n)$ ในขณะที่วิธีแบบเชิงเส้น ขนาดของเมตริกซ์การส่งผ่านเฉพาะแปรผันตาม n ทำให้การคำนวณความซับซ้อนเป็น $O(n^2)$

จากที่ทราบแล้วว่าเซลล์ลาร์อโตมาตามีจุดเด่นสำคัญ คือ ความสามารถในการทำงานแบบขนานซึ่งแต่ละเซลล์ในโครงแบบสามารถส่งผ่านไปยังสถานะถัดไปได้พร้อม ๆ กัน โดยปัญหาของ

ความสามารถในการผันกลับได้ถือเป็นปัญหาสำคัญที่ได้รับความสนใจในหลายงานวิจัยที่ผ่านมา แม้ว่างานวิจัยนี้จะเสนอวิธีการพิจารณาการผันกลับได้จากการแทนด้วยกราฟสับเซตย่อยที่มีการทำงานแบบลำดับ แต่ผลลัพธ์ที่ได้ถือว่าเป็นวิธีหนึ่งที่สามารถทำงานได้สอดคล้องกับการกระทำบนเซลล์ลูลาร์อัตโนมัติ ทั้งนี้ หากต้องการให้เซลล์ลูลาร์อัตโนมัติที่มีสมบัติในการผันกลับได้บนกราฟสับเซตย่อยสามารถคำนวณได้แบบขนาน อาจต้องพิสูจน์เพื่อหาโมเดลการแทนกราฟสับเซตย่อยไปเป็นอัตโนมัติซึ่งอาจพิจารณาจุดยอดใด ๆ บนกราฟเป็นสถานะจำกัดที่มีการนิยามเพิ่มเติมได้ นอกจากนี้การศึกษาเพื่อหาการแทนเซลล์เพื่อนบ้านในรูปแบบอื่นอาจทำให้สามารถรับมือกับข้อจำกัดของเวกเตอร์ของเซลล์เพื่อนบ้านที่จำเป็นต้องเป็นลำดับของจำนวนเต็มต่อเนื่องได้อีกด้วย



บรรณานุกรม

- [1] A. W. Burks, "Essays on cellular automata. von neumann's self-reproducing automata," *Essays on Cellular Automata, Self-reproducing Automata*, pp. 3-64, 1970.
- [2] A. Fúster-Sabater, and P. Caballero-Gil, "On the use of cellular automata in symmetric cryptography," *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 93, no. 1-3, pp. 215-236, 2006.
- [3] A. R. Khan, "Image encryption using cellular automata," *Information (Japan)*, vol. 16, no. 8 A, pp. 5581-5590, 2013.
- [4] D. Parashar, S. Roy, N. Dey, V. Jain, and U. S. Rawat, "Symmetric key encryption technique: A cellular automata based approach," 2018, pp. 59-67.
- [5] D. Parashar, S. Roy, and V. Jain, "A novel symmetric key encryption technique using Cellular Automata." pp. 174-178.
- [6] M. Seredynski, and P. Bouvry, "Block cipher based on reversible cellular automata," *New Generation Computing*, vol. 23, no. 3, pp. 245-258, 2005.
- [7] M. Seredynski, K. Pienkosz, and P. Bouvry, "Reversible cellular automata based encryption," *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2004, pp. 411-418.
- [8] C. Zhang, Q. Peng, and Y. Li, "Encryption based on reversible cellular automata." pp. 1223-1226.
- [9] S. Milani, "Fast point cloud compression via reversible cellular automata block transform." pp. 4013-4017.
- [10] S. Amrogowicz, Y. Zhao, and Y. Zhao, "An edge detection method using outer Totalistic Cellular Automata," *Neurocomputing*, vol. 214, pp. 643-653, 2016/11/19/, 2016.
- [11] N. Kamikawa, and H. Umeo, "A construction of five-state real-time Fibonacci sequence generator," *Artificial Life and Robotics*, vol. 21, no. 4, pp. 531-539, 2016.

- [12] N. Kamikawa, and H. Umeo, "A design of algorithms for real-time generation of linear-recursive sequences on cellular automata." pp. 281-286.
- [13] N. Kamikawa, and H. Umeo, "A note on sequence generation power of communication-restricted cellular automata with small number of states." pp. 764-770.
- [14] N. Kamikawa, and H. Umeo, "A note on sequence generation power of two-states cellular automata." pp. 3315-3320.
- [15] S. Kippenberger, A. Bernd, D. Thaçi, R. Kaufmann, and M. Meissner, "Modeling pattern formation in skin diseases by a cellular automaton," *Journal of Investigative Dermatology*, vol. 133, no. 2, pp. 567-571, 2013.
- [16] N. Kazmi, M. A. Hossain, and R. M. Phillips, "A hybrid cellular automaton model of solid tumor growth and bioreductive drug transport," *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, vol. 9, no. 6, pp. 1595-1606, 2012.
- [17] Y. Wang, L. Zhang, J. Ma, L. Liu, D. You, and L. Zhang, "Combining Building and Behavior Models for Evacuation Planning," *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 31, no. 3, pp. 42-55, 2011.
- [18] S. Wolfram, "Computation theory of cellular automata," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 96, no. 1, pp. 15-57, 1984.
- [19] S. Wolfram, *A new kind of science*: Wolfram media Champaign, IL, 2002.
- [20] J. Kari, "Theory of cellular automata: A survey," *Theoretical Computer Science*, vol. 334, no. 1-3, pp. 3-33, 2005.
- [21] B. Yang, C. Wang, and A. Xiang, "Reversibility of general 1D linear cellular automata over the binary field \mathbb{Z}_2 ; under null boundary conditions," *Information Sciences*, vol. 324, pp. 23-31, 2015.
- [22] A. M. Del Rey, "A note on the reversibility of elementary cellular automaton 150 with periodic boundary conditions," *Romanian Journal of Information Science and Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 365-372, 2013.
- [23] L. H. Encinas, and A. M. del Rey, "Inverse rules of ECA with rule number 150," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 189, no. 2, pp. 1782-1786, 2007.

- [24] H. Akin, F. Sah, and I. Siap, "On 1D reversible cellular automata with reflective boundary over the prime field of order p ," *International Journal of Modern Physics C*, vol. 23, no. 1, 2012.
- [25] H. Akin, I. Siap, and S. Uguz, "One-dimensional cellular automata with reflective boundary conditions and radius three," *Acta Physica Polonica A*, vol. 125, no. 2, pp. 405-407, 2014.
- [26] C. H. Chang, and J. Y. Su, "Reversibility of linear cellular automata on cayley trees with periodic boundary condition," *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 21, no. 6, pp. 1335-1353, 2017.
- [27] C. H. Chang, J. Y. Su, H. Akin, and F. Şah, "Reversibility Problem of Multidimensional Finite Cellular Automata," *Journal of Statistical Physics*, vol. 168, no. 1, pp. 208-231, 2017.
- [28] Z. Cinkir, H. Akin, and I. Siap, "Reversibility of 1D Cellular Automata with Periodic Boundary over Finite Fields Z_p ," *Journal of Statistical Physics*, vol. 143, no. 4, pp. 807-823, 2011.
- [29] J. Kari, "Reversible cellular automata." pp. 57-68.
- [30] J. Kari, "Reversibility of 2D cellular automata is undecidable," *Physica D*, vol. 45, pp. 379-385, 1990.
- [31] A. Martín del Rey, and G. Rodríguez Sánchez, "Reversibility of linear cellular automata," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 21, pp. 8360-8366, 2011/07/01/, 2011.
- [32] A. Martín Del Rey, and G. Rodríguez Sánchez, "Reversible elementary cellular automaton with rule number 150 and periodic boundary conditions over F_p ," *International Journal of Modern Physics C*, vol. 26, no. 11, 2015.
- [33] S. Amoroso, and Y. N. Patt, "Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 6, no. 5, pp. 448-464, 1972.
- [34] K. Sutner, "De Bruijn graphs and linear cellular automata," *Complex Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 19-30, 1991.
- [35] P. P. Chaudhuri, D. R. Chowdhury, S. Nandi, and S. Chattopadhyay, *Additive*

cellular automata: theory and applications: John Wiley & Sons, 1997.

- [36] A. Martín Del Rey, “A note on the reversibility of the elementary cellular automaton with rule number 90,” *Revista de la Union Matematica Argentina*, vol. 56, no. 1, pp. 107-125, 2015.
- [37] M. O. Rabin, and D. Scott, *Finite Automata and Their Decision Problems*, vol. 3, pp. 114-125, 1959.





จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	วรยุทธ วงศ์นิล
วัน เดือน ปี เกิด	16 กันยายน 2527
สถานที่เกิด	อ.วารินชำราบ จ.อุบลราชธานี
วุฒิการศึกษา	- สำเร็จการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2550 - สำเร็จการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2555
ที่อยู่ปัจจุบัน	58/2 ถ.เทศบาล 9 ต.วารินชำราบ อ.วารินชำราบ จ.อุบลราชธานี