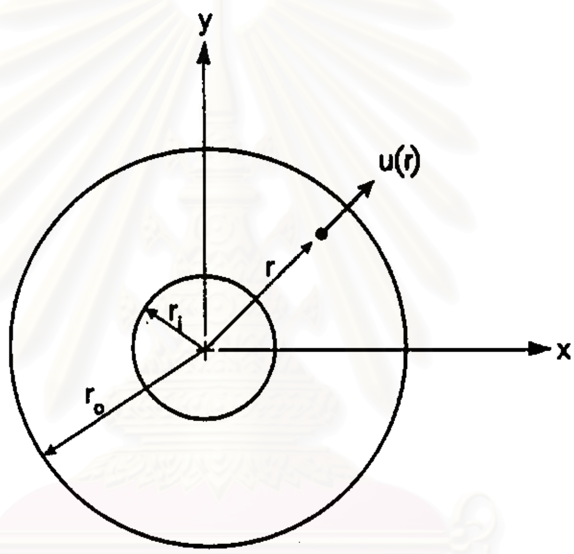
บทที่ 3
การวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นวงแหวนบาง ที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี

ในบทนี้ จะเป็นการวิเคราะห์หาค่าการเสียรูปของแผ่นวงแหวนบางดังแสดงในรูปที่ 3.1 ซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี (Circular disk with radial temperature variation) โดยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเป็นการศึกษาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปแบบต่าง ๆกันที่สามารถปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงมากขึ้น



รูปที่ 3.1 แผ่นวงแหวนบางซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

การวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี สามารถวิเคราะห์ได้เป็นปัญหาในหนึ่งมิติ ภายใต้ระบบพิกัดทรงกระบอก โดยลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลในระบบพิกัดทรงกระบอก ซึ่งจะขอยกมากล่าวในบทนี้อีกครั้งเพื่อความต่อเนื่อง จากสมการ (2.8)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta + r f_r &= 0 \\
\frac{\partial(r\,\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + r\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{r\theta} + r f_\theta &= 0 \qquad (2.8) \\
\frac{\partial(r\,\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + r f_z &= 0
\end{aligned}
$$

เนื่องจากเป็นแผ่นบางที่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในแนวรัศมีเท่านั้น และหากไม่คำนึงถึงแรงวัตถุด้วยแล้ว สมการความสมดุล (2.8) ลดรูปไปเป็น

$$\frac{d\left(r\,\sigma_r\right)}{dr} - \sigma_\theta = 0 \qquad (3.1ก)$$

ซึ่งสามารถแปลงรูปได้เป็น

$$\frac{d\left(\sigma_r\right)}{dr} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0 \qquad (3.1ข)$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัวลดรูปจากสมการ (2.14) เพื่อใช้กับปัญหานี้ ได้แก่

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ซึ่งลดรูปจากสมการ (2.10) ซึ่งสอดคล้องกับปัญหานี้ คือ

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\,\alpha T\right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\,\alpha T\right] \end{aligned} \qquad (3.3)$$

แทนสมการ (3.2) และ (3.3) ลงในสมการ (3.1) และเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี u ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีอุณหภูมิกระจายในแนวรัศมี ดังนี้

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right] - (1+\nu)\,\alpha\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (3.4)$$

3.2 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาหนึ่งมิติในบทนี้ ประกอบด้วย

3.2.1 การกำหนดค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี u(r) และ

3.2.2 การกำหนดค่าความเค้นที่ผิว ซึ่งคือ

$$T_r = \sigma_r n_r = \sigma_r \quad \text{โดย} \quad n_r = 1 \qquad (3.5)$$

ส่วนลักษณะของอุณหภูมิซึ่งแปรผันตามรัศมี สามารถประดิษฐ์ได้จากสมการของการถ่ายเทความร้อน [Incropera, F. P. and Dewitt, D. P, 1985] ซึ่งคือ

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right) = 0 \qquad (3.6)$$

หากทำการอินทิเกรตสองครั้ง จะได้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบดังนี้

$$T(r) = a + b\ln(r) \qquad (3.7)$$

โดย a และ b คือ ค่าคงที่จากการอินทิเกรต

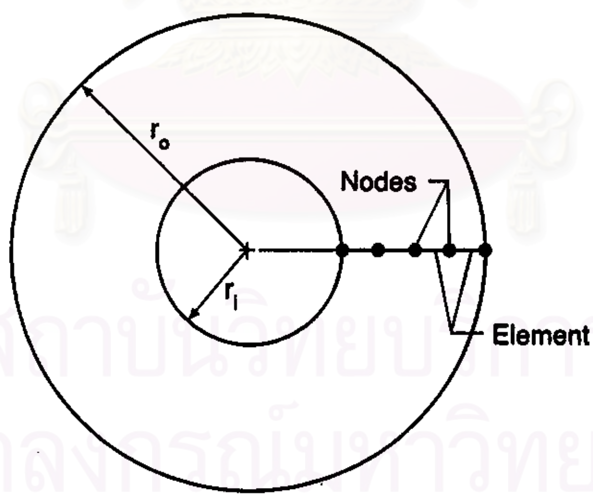
3.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเป็นขั้นเป็นตอน แล้วจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์เพื่อความสะดวกในการนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป โดยจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

3.3.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นตรง

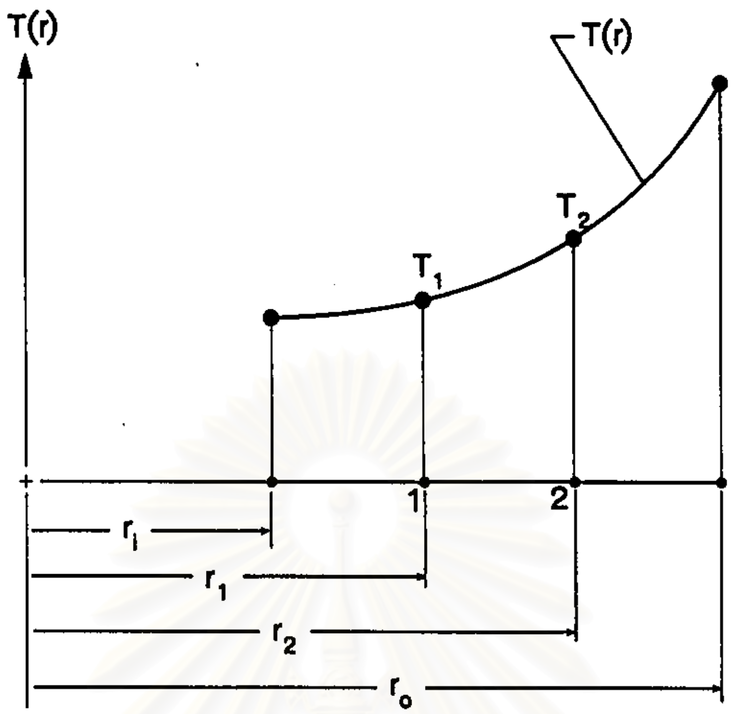
3.3.1ก) การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี เพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นตรง

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูป 3.2



รูปที่ 3.2 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สมมติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัว โดยต้องการให้ได้ผลเฉลยตรงกับผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น (3.4) ซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิที่ถูกต้องดังสมการ (3.7) รูปแบบของการกระจายอุณหภูมิดังกล่าวของแต่ละเอลิเมนต์ ได้แสดงในรูป 3.3



รูปที่ 3.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิ
เป็นฟังก์ชัน $T = a + b\ln(r)$

การประดิษฐ์ฟังก์ชันการกระจายภายในที่มีผลเฉลยแม่นตรง สามารถเริ่มได้จากสมการ (3.7)

$$T = a + b\ln r$$

โดยใส่ขอบเขตของอุณหภูมิดังเช่นรูป 3.3 ที่ $r=r_1$ จะมีค่า $T=T_1$ และที่ $r=r_2$ จะมีค่า $T=T_2$ แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงในสมการ (3.7) เพื่อหาค่าคงที่ a, b แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$T(r) = \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}T_1 + \frac{\ln(r_1/r)}{\ln(r_1/r_2)}T_2 \tag{3.8}$$

จากนั้นแทนค่า T(r) จากสมการ (3.8) นี้ ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (3.4) แล้วแก้สมการเพื่อหาคำตอบโดยทั่วไปจะได้

$$u(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{\alpha c(1+\nu)}{2} r\ln(r) \tag{3.9}$$

โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ และกำหนดให้ $c = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}$ (3.10)

จากนั้น ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนตัว โดย

$$u(r=r_1) = u_1,\quad u(r=r_2) = u_2 \tag{3.11}$$

แทนสมการ (3.10), (3.11) ลงในสมการ (3.9) เพื่อหาค่าคงที่ c_1, c_2 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$u(r) = \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\frac{r_1}{r}u_1 + \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\frac{r_2}{r}u_2 + \frac{\alpha(1+\nu)c}{2(r_2^2 - r_1^2)}\left[r\,r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + r\,r_2^2 \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right] \tag{3.12}$$

ซึ่ง $u(r)$ จากสมการ (3.12) ที่ได้นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประมาณภายในได้ ดังนี้

$$u(r) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 \tag{3.13}$$

โดย

$$N_1 = \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\frac{r_1}{r} \qquad N_2 = \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\frac{r_2}{r}$$

$$N_3 = \frac{\alpha(1+\nu)c}{2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\left[r\,r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + r\,r_2^2 \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right]$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกัลเลอร์คิน โดยเริ่มจากการใช้ค่าเศษตกค้าง R,

$$R = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right] - (1+\nu)\,\alpha\frac{dT}{dr} \tag{3.14}$$

จากนั้นคูณด้วยค่าน้ำหนัก W_i แล้วอินทิเกตรตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_{r_1}^{r_2} W_i\,R\,dr = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.15}$$

แทนค่า R จาก (3.14) ลงใน (3.15) แล้วอินทิเกรตทีละส่วน (Integrate by parts) จะได้

$$\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{r}\frac{dW_i}{dr}\frac{d(ru)}{dr}\right]dr = W_i\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\bigg|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} W_i\,(1+\nu)\,\alpha\frac{dT}{dr}\,dr \tag{3.16}$$

ด้วยการใช้ $W_i = N_i$ (Bubnov-Galerkin) แล้วแทนค่า N_i จาก (3.13) ลงใน (3.16) และจัดให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ จะได้

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dr} \\ \frac{dN_2}{dr} \\ \frac{dN_3}{dr} \end{Bmatrix} \left\lfloor \frac{d(rN_1)}{dr} \quad \frac{d(rN_2)}{dr} \quad \frac{d(rN_3)}{dr} \right\rfloor dr \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} dr \qquad (3.17ก)$$

ซึ่งสามารถเขียน (3.17ก) ให้อยู่ในรูปแบบสั้นๆได้ดังนี้

$$[K]_e \ \{u\} = \{B\}_e + \{C\}_e \qquad (3.17ข)$$

3.3.1ข) รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีเพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นตรง จากสมการ (3.17) เมื่อแยกพิจารณาแต่ละเมตริกซ์ จะได้ดังนี้

เมตริกซ์ $[K]_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทนค่า N_i จาก (3.13) แล้วอินทิเกรตจะได้

$$[K]_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{-2r_2}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{-\alpha c(1+\nu)}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(-4r_1r_2 + 3r_2^2 + 2r_2^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_1^2 \right) \\ \frac{-2r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{2r_2}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{\alpha c(1+\nu)}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(4r_1r_2 - 3r_1^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - r_2^2 \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\nu)^2 \alpha^2 \frac{c^2}{(r_1 + r_2)} \left(r_2^2 + 2r_1r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - r_1^2 \right) \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

ในทำนองเดียวกัน เมตริกซ์ $\{B\}_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทนค่า N_i จาก (3.13) จะได้

$$\{B\}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-u_1}{r_1} - \frac{du_1}{dr} \\ \frac{u_2}{r_2} + \frac{du_2}{dr} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.19)$$

และเมตริกซ์ $\{C\}_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทน T(r) จาก (3.8) และ N_i จาก (3.13) จะได้

$$\{C\}_e = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (r_1 - r_2)\, c\alpha \dfrac{(1+\nu)}{(r_1 + r_2)} \\ (r_1 - r_2)\, c\alpha \dfrac{(1+\nu)}{(r_1 + r_2)} \\ K_{33} \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

แทนสมการ (3.18), (3.19), (3.20) ลงใน (3.17)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

แล้วจัดรูปแบบเมตริกซ์ใหม่ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

โดย

$$\begin{aligned} D_1 &= C_1 - K_{13} = \frac{\alpha(1+\nu)c}{2\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \left(2r_2^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2\right) \\ D_2 &= C_2 - K_{23} = \frac{-\alpha(1+\nu)c}{2\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \left(2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

จากสมการ (3.22), (3.23) แปลงเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปสำหรับการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต โดยแปลงพจน์ทางขวาให้อยู่ในรูปของ σ_r หรือความดันที่ผิว จะได้

$$\frac{1}{\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \dfrac{2r_1}{r_2^2 - r_1^2} + \dfrac{(1-\nu)}{r_1} & \dfrac{-2r_2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \dfrac{-2r_1}{r_2^2 - r_1^2} & \dfrac{2r_2}{r_2^2 - r_1^2} - \dfrac{(1-\nu)}{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} -\sigma_{r_1} \\ \sigma_{r_2} \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} -T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha\, c}{2\,E\,(1-\nu)\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \begin{Bmatrix} 2r_2^2 \ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2 \\ -2r_1^2 \ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) - \left(r_2^2 - r_1^2\right) \end{Bmatrix}$$

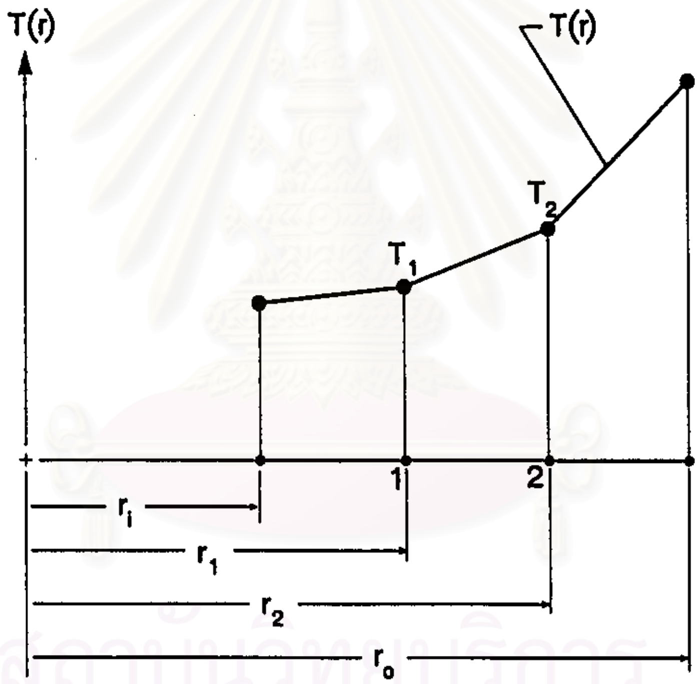
(3.24)

3.3.2 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิ

3.3.2ก) การประดิษฐ์สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีโดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ที่ต่างเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 3.2 เช่นเดียวกับในหัวข้อ 3.3.1

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สมมติการกระจายของการเคลื่อนตัวและการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีของแต่ละเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเชิงเส้นตรง รูปแบบการกระจายของอุณหภูมิของแต่ละเอลิเมนต์ ได้แสดงในรูป 3.4



รูปที่ 3.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

เริ่มจากการกำหนดการเคลื่อนตัวให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเส้นตรง ดังนี้

$$u(r) = c_1 + c_2 r \tag{3.25}$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต $u(r = r_1) = u_1$ และ $u(r = r_2) = u_2$ โดยแทนลงใน (3.25) เพื่อหาค่าคงที่ c_1, c_2 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$u(r) = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\right) u_1 + \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right) u_2 \tag{3.26}$$

ซึ่ง u(r) จากสมการ (3.26) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประมาณภายในได้ดังนี้

$$u(r) = N_1u_1 + N_2u_2$$

โดย $$N_1 = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\right) \qquad N_2 = \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right) \qquad (3.27)$$

ในขณะเดียวกัน หากสมมุติการกระจายของอุณหภูมิให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเส้นตรง

$$T(r) = a + b\,r \qquad (3.28)$$

แล้วทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในรูปที่ 3.4 โดยที่ $r = r_1$ มีค่า $T = T_1$ และที่ $r = r_2$ จะมีค่า $T = T_2$ แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงใน (3.28) เพื่อหาค่าคงที่ a, b แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$T(r) = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}\right)T_1 + \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)T_2 = N_1T_1 + N_2T_2 \qquad (3.29)$$

โดย N_1, N_2 อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการ (3.27)

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ โดยประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกัลเลอร์คินเช่นเดียวกันกับสมการ (3.14) และ (3.15) จากนั้นทำการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้สมการที่มีรูปแบบในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.16) ดังนี้

$$\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{r}\frac{dW_i}{dr}\frac{d(ru)}{dr}\right]dr = W_i\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\bigg|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} W_i(1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr}\,dr \qquad (3.30)$$

จากนั้นใช้ $W_i = N_i$ (Bubnov-Galerkin) แล้วแทนค่า ฟังก์ชันประมาณภายใน N_i จาก (3.27) ลงใน (3.30) และจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์จะได้

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\begin{Bmatrix}\frac{dN_1}{dr}\\ \frac{dN_2}{dr}\end{Bmatrix}\left\lfloor \frac{d(rN_1)}{dr} \quad \frac{d(rN_2)}{dr}\right\rfloor dr\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right)\bigg|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2}\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\end{Bmatrix}(1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr}\,dr \qquad (3.31ก)$$

สมการ (3.31ก) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสั้นๆได้ดังนี้

$$[K]_e\,\{u\} = \{B\}_e + \{C\}_e \qquad (3.31ข)$$

3.3.2ข) รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ที่เป็นฟังก์ชันเส้นตรง

จากสมการ (3.31) เมื่อแยกพิจารณาแต่ละเมตริกซ์ จะได้ดังนี้

$$[K]_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(r_2 - r_1)^2}\begin{bmatrix} 2(r_2 - r_1) + r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) & -2(r_2 - r_1) - r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\ -2(r_2 - r_1) - r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) & 2(r_2 - r_1) + r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \end{bmatrix}$$

(3.32)

การประดิษฐ์เมตริกซ์ $\{B\}_e$ จากสมการ (3.31) ทำได้โดยแทนค่า N_1, N_2 จาก (3.27) จะได้

$$\{B\}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-u_1}{r_1} - \frac{du_1}{dr} \\ \frac{u_2}{r_2} + \frac{du_2}{dr} \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

และเมตริกซ์ $\{C\}_e$ จากสมการ (3.31) โดยแทนค่า N_1, N_2 จาก (3.27) และ $T(r)$ จาก (3.29) จะได้

$$\{C\}_e = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = (1+\nu)\alpha\,\frac{(T_1 - T_2)}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

แทนสมการ (3.32), (3.33), (3.34) ลงใน สมการ (3.31) แล้วแปลงเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต โดยแปลงพจน์ทางขวาให้อยู่ในรูป σ_r หรือความดันที่ผิว จะได้

$$\frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} \frac{2(r_2 - r_1) + r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{(1-\nu)}{r_1} & \frac{-2(r_2 - r_1) - r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} \\ \frac{-2(r_2 - r_1) - r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} & \frac{2(r_2 - r_1) + r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} - \frac{(1-\nu)}{r_2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{E}\begin{Bmatrix} -\sigma_{r_1} \\ \sigma_{r_2} \end{Bmatrix} + \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2(1-\nu)}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

3.4 ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 3.3 ซึ่งได้แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน 2 โปรแกรม ได้แก่

ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของแผ่นวงแหวนที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นฟังก์ชันแม่นตรง เพื่อก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นตรง โดยโปรแกรมนี้มีชื่อว่า DISEXACT

ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของแผ่นวงแหวนที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณภายในของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิที่ต่างเป็นฟังก์ชันเส้นตรง โดยโปรแกรมนี้มีชื่อว่า DISLNEAR

โปรแกรมทั้งสองที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมานี้มีลักษณะการทำงานของโปรแกรมที่คล้ายคลึงกัน ความแตกต่างของทั้งสองโปรแกรมอยู่ที่การสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ภายในโปรแกรมย่อย ELE เพื่อให้สอดคล้องกับสมการของแต่ละชนิดของเอลิเมนต์ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 3.3 นั้น โดยแต่ละโปรแกรมจะประกอบไปด้วย โปรแกรมหลัก (Main program) และอีกหกโปรแกรมย่อย (Subroutine program) ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานดังต่อไปนี้

3.4.1 การทำงานเริ่มต้นจากโดยอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆของเนื้อโลหะ และตำแหน่งต่างๆของจุดต่อ ฯลฯ ซึ่งการอ่านข้อมูลของปัญหาจะอยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

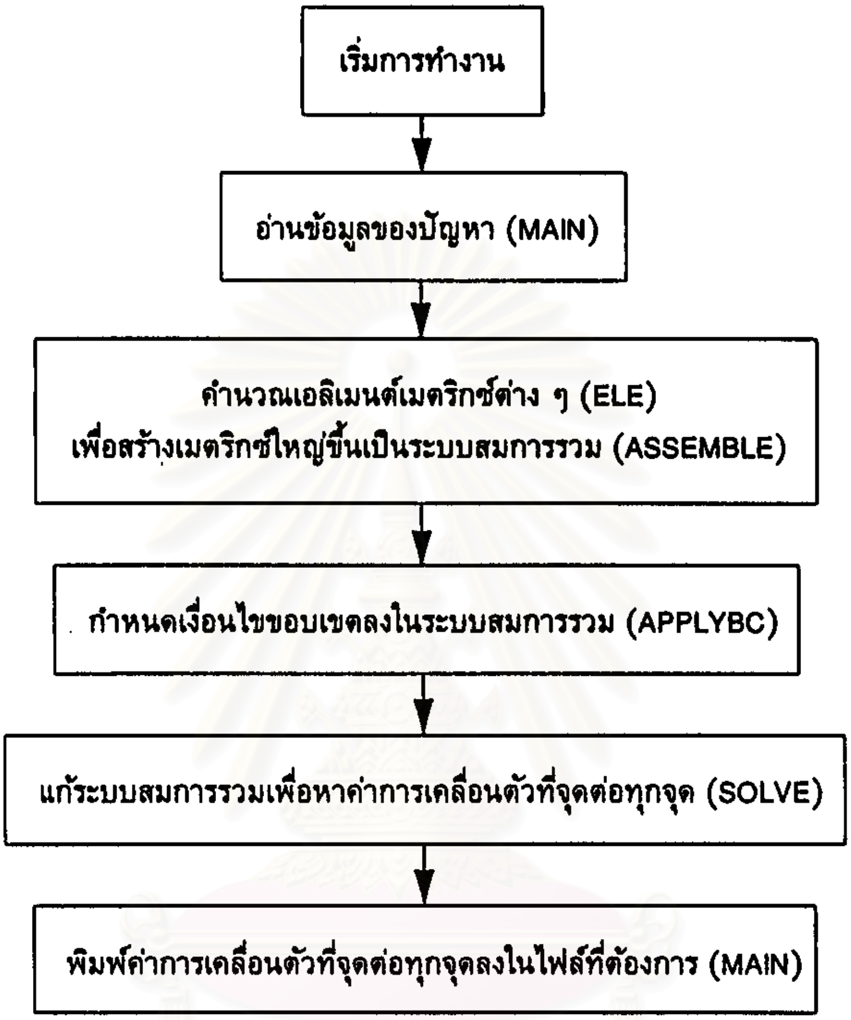
3.4.2 คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆทีละเอลิเมนต์ สำหรับโปรแกรม DISEXACT ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จะถูกสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.24) ส่วนโปรแกรม DISLNEAR ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จะถูกสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับสมการ (3.35) โดยเรียกโปรแกรมย่อย ELE [SUBROUTINE ELE] และส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่คำนวณได้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมด้วยการเรียกโปรแกรมย่อย ASSMBLE [SUBROUTINE ASSEMBLE]

3.4.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น บางจุดต่อถูกตรึงแน่นเคลื่อนที่ไม่ได้และบางจุดต่อมีความดันในแนวรัศมีมากระทำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC [SUBROUTINE APPLYBC]

3.4.4 แก้ระบบสมการรวม เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่ทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย SOLVE [SUBROUTINE SOLVE]

3.4.5 พิมพ์ค่าของการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อที่คำนวณได้ลงในไฟล์ที่ต้องการ ซึ่งอยู่ในช่วงท้ายของโปรแกรมหลัก [MAIN PRGORAM]

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแผนภูมิการทำงาน ดังแสดงในรูป 3.5



รูปที่ 3.5 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DISEXACT และ DISLNEAR

3.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรม DISEXACT และ DISLNEAR ซึ่งเขียนด้วยภาษาฟอร์แทน ได้แสดงในภาคผนวก ก

3.6 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม DISEXACT และ DISLNEAR ต้องการ

ลักษณะข้อมูลที่ทั้งสองโปรแกรมต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 5 ส่วนย่อย ดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษรอธิบายลักษณะของไฟล์

บรรทัดต่อไป ประโยคอธิบายลักษณะของไฟล์ ซึ่งมีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น 3

FINITE ELEMENT ANALYSIS

FOR 1-D CIRCULAR DISC WITH RADIAL

TEMPERATURE VARIATION

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนเอลิเมนต์ จุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึง

บรรทัดที่ 2 ตัวเลขจำนวนเอลิเมนต์ จุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึง

ตัวอย่างเช่น

NELEM	NPOIN	NODALCONSTRAINT
9	10	2

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ

บรรทัดที่ 2 ตัวเลขแสดงค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น ความดันในแนวรัศมีด้านในของวงแหวน ความดันในแนวรัศมีด้านนอกของวงแหวน อุณหภูมิที่ผิวด้านในของวงแหวน และ อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของวงแหวน

ตัวอย่างเช่น

ALPHA	E	PR	TREF	PI	PO	TI	TO
11.7E-6	200E9	0.25	0.	0.	0.	10	200

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ค่าระยะรัศมีของจุดต่อนั้น

ตัวอย่างเช่น

NODE	R
1	.30
2	.35
.	.
.	.
.	.
10	.75

ส่วนที่ 5 จุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

บรรทัดต่อๆไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

ตัวอย่างเช่น NODAL CONSTRAINTS

1

10

3.7 ตัวอย่าง

แผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีจากสมการ (3.7) คือ $T(r) = a + b\ln(r)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.6) ในขณะเดียวกันผลเฉลยแม่นตรงของการเคลื่อนตัวนั้นสามารถหาได้ [Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1960] โดยทำการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ (3.4) ดังนี้

จากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น (3.4)

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right] - (1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr} = 0$$

อินทิเกรต:

$$\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr} = (1+\nu)\alpha T + c_1^*$$

$$\frac{d(ru)}{dr} = (1+\nu)\alpha Tr + c_1^* r$$

อินทิเกรต:

$$ru = (1+\nu)\alpha\int_{r_1}^{r} Trdr + \frac{c_1^*}{2}r^2 + c_2$$

จัดรูปใหม่:

$$u(r) = \frac{(1+\nu)}{r}\alpha\int_{r_1}^{r} Trdr + c_1 r + \frac{c_2}{r} \qquad (3.36)$$

โดย $c_1 = c_1^*/2$, c_2 เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัวในสมการ (3.2) และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในสมการ (3.3) เมื่อแทนค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ จาก (3.36) จะได้

$$\sigma_r = \frac{-E\alpha}{r^2}\int_{r_1}^{r} Trdr + \frac{E}{(1-\nu)}c_1 - \frac{E}{(1+\nu)}\frac{c_2}{r^2} \qquad (3.37)$$

ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต:

เพื่อให้สอดคล้องกับตัวอย่างในการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่จะกล่าวถึงต่อไป เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้ คือ

$$\sigma_r \left(r = r_i\right) = 0 \tag{3.38}$$

$$\sigma_r \left(r = r_o\right) = 0 \tag{3.39}$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขต (3.38) และ (3.39) ลงในสมการ (3.37) สามารถหาค่าคงที่จากการอินทิเกรต c_1, c_2 ได้ เมื่อนำค่าคงที่ c_1, c_2 ที่คำนวณได้ และนำอุณหภูมิที่ถูกต้อง $T(r)$ จากสมการที่ (3.8) ไปแทนลงในสมการ (3.36) แล้วทำการอินทิเกรตและจัดรูปใหม่ จะได้ผลเฉลยแม่นตรงของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี เมื่อความดันภายในและภายนอกต่างเป็นศูนย์ ดังนี้

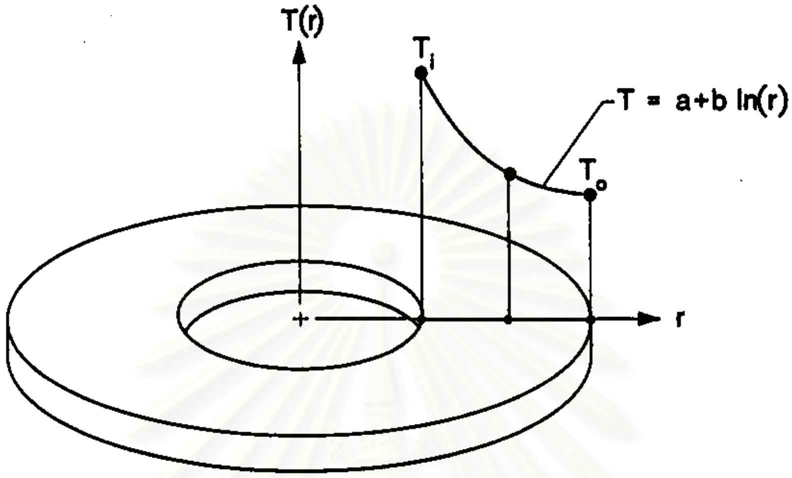
$$u(r) = \frac{\alpha}{r}\left[\frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_o}\left[\frac{\ln(r_i)\,T_o - \ln(r_o)\,T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \frac{\left(T_i - T_o\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)}\ln(r)\right] r\,dr \right.$$

$$\left. + (1+\nu)\int_{r_i}^{r}\left[\frac{\ln(r_i)\,T_o - \ln(r_o)\,T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \frac{\left(T_i - T_o\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)}\ln(r)\right] r\,dr\right] \tag{3.40}$$

รายละเอียดต่อไปนี้จะแสดงการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างโดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งคือ โปรแกรม DISEXACT และโปรแกรม DISLNEAR เพื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรง โดยปัญหาตัวอย่างจะเป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแผ่นวงแหวนบาง ซึ่งมีคุณสมบัติต่าง ๆของวัสดุดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน	(α)	=	11.7×10^{-6} /°C
ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง	(ν)	=	0.25
อุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น	(T_{ref})	=	0°C
อุณหภูมิที่ผิวด้านในของวงแหวน	(T_i)	=	10°C
อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของวงแหวน	(T_o)	=	200°C
ความดันที่ผิวด้านในของวงแหวน	(p_i)	=	0 N/m^2
ความดันที่ผิวด้านนอกของวงแหวน	(p_o)	=	0 N/m^2
รัศมีภายในของแผ่นวงแหวน	(r_i)	=	0.30 m
รัศมีภายนอกของแผ่นวงแหวน	(r_o)	=	1 m

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> เป็นการใช้โปรแกรม DISEXACT ทำการคำนวณปัญหาตัวอย่างข้างต้น โดยจัดแบ่งแนวรัศมีเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ รูปที่ 3.6 แสดงแนวคิดในการจัดแบ่งเอลิ เมนต์และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISEXACT



รูปที่ 3.6 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISEXACT

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม DISEXACT ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ได้ตั้งชื่อว่า DISK1.DAT ซึ่งจะประกอบด้วยรายละเอียดดังรูปที่ 3.7

```
1
1-D ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
NELEM    NPOIN      NODALCONSTRAINT
   7        8         0
ALPHA       E          PR       TREF    PI    PO    TI    TO
11.7e-6     200e9     0.25        0.     0.    0.   10    200
NODE     R
   1    .3
   2    .4
   3    .5
   4    .6
   5    .7
   6    .8
   7    .9
   8   1.0
```

รูปที่ 3.7 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK1.DAT

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISEXACT โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล เมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้ว โปรแกรมจะเริ่มทำการคำนวณเป็นขั้นเป็นตอนดังอธิบายในหัวข้อ 3.4 เมื่อโปรแกรมทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลที่จะบรรจุผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่างๆ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

```
*FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISK WITH RADIAL TEMP VARIATION PROBLEM*
 WITH T(r) = a+b*ln(r)

 PLASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA
 DISK1.DAT <ENTER>

*THE MODEL CONSISTS OF 8 NODES 7 ELEMENTS**

*ESTABLISHING ELEMENT MATRICS AND
 ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**

*APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL
 AND FORMING SET OF NEW MATRICS TO BE SOLVES**

*SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS**
 TOTAL OF 8 EQUATIONS TO BE SOLVED

PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:
EXACT1.OUT <ENTER>

Stop - Program terminated
```

หลังจากทำการคำนวณเสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 1 มีชื่อว่า EXACT1.OUT ได้แสดงรายละเอียดดังรูปที่ 3.8

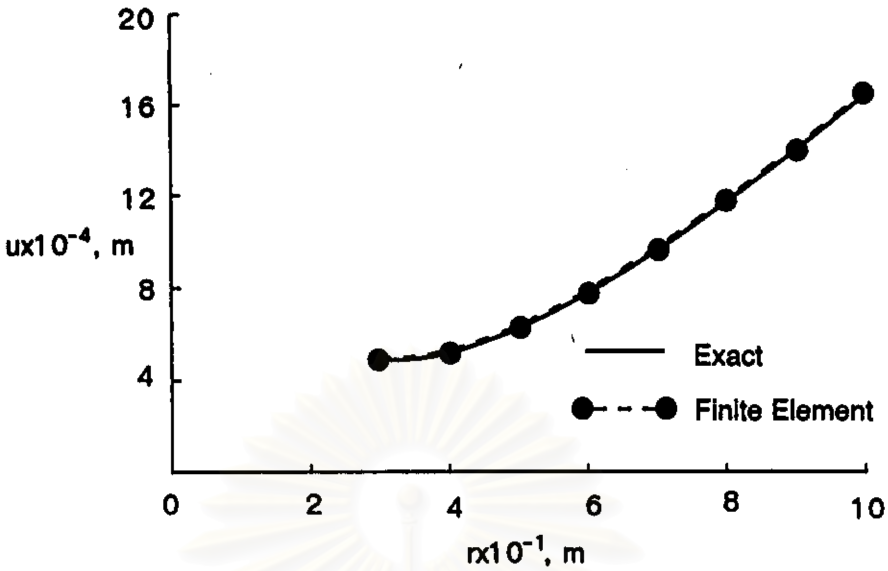
```
NODAL SOLUTION[     8]

 NODE          U

    1  0.490999E-03
    2  0.520271E-03
    3  0.624505E-03
    4  0.774876E-03
    5  0.957658E-03
    6  0.116516E-02
    7  0.139258E-02
    8  0.163666E-02
```

รูปที่ 3.8 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ EXACT1.OUT

ไฟล์ของผลลัพธ์ที่ได้ประกอบด้วย ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อที่ตำแหน่งต่างๆตามแนวรัศมี ซึ่งเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT นี้มีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> เป็นการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างเดิม โดยใช้โปรแกรม DISEXACT เพื่อการคำนวณ แต่จะจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ 2 จุดต่อเท่านั้น โดยลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม DISEXACT ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 2 ได้ตั้งชื่อว่า DISK2.DAT มีรายละเอียดดังรูปที่ 3.10

```
1
1-D ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
NELEM   NPOIN     NODALCONSTRAINT
   1      2         0
ALPHA          E         PR      TREF    PI    PO    TI    TO
11.7e-6     200e9      0.25        0.     0.    0.    10    200
NODE    R
   1    .3
   2   1.0
```


รูปที่ 3.10 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK2.DAT

เมื่อทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISEXACT เสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 2 มีชื่อว่า EXACT2.OUT ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.11

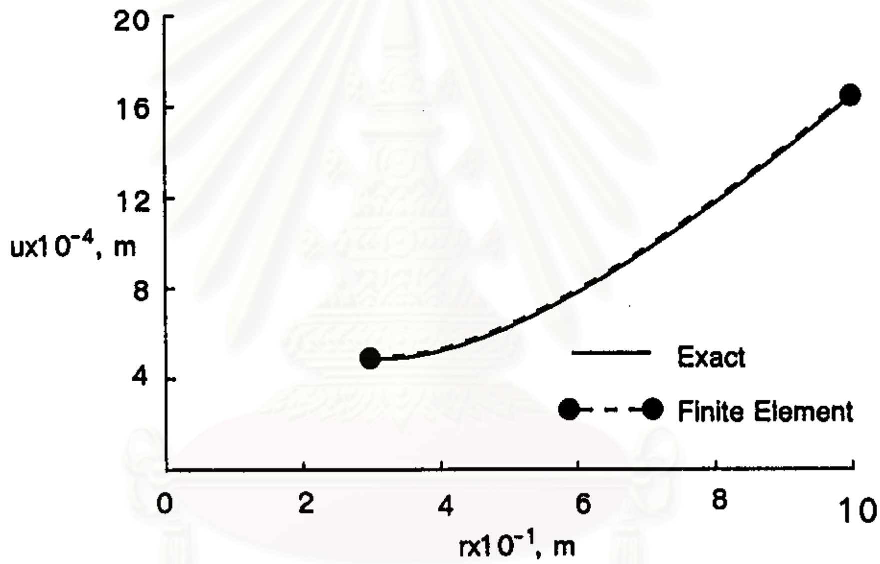
```
NODAL SOLUTION[     2]

NODE          U

        1  0.490999E-03
        2  0.163666E-02
```

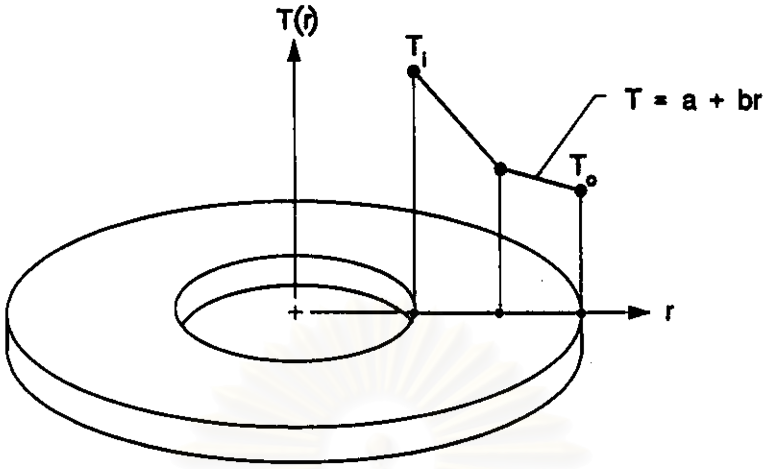
รูปที่ 3.11 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ EXACT2.OUT

ค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแต่ละจุดต่อในไฟล์ผลลัพธ์ EXACT2.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT ยังคงมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง ดังแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม โดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายใน (3.13) ได้แสดงในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> เป็นการวิเคราะห์ปัญหาเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 คือจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ เช่นเดียวกัน แต่ในตัวอย่างนี้จะทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม DISLNEAR ซึ่งใช้การประมาณภายในของอุณหภูมิและการเคลื่อนตัวที่ต่างเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรง เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 1 ซึ่งใช้โปรแกรม DISEXACT ที่มีฟังก์ชันประมาณภายในที่อยู่ในรูปแบบของผลเฉลยแม่นตรง โดยแนวคิดในการจัดแบ่งเอลิเมนต์และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISLNEAR แสดงได้ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ ของโปรแกรม DISLNEAR

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม DISLNEAR ต้องการเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 3 นี้ ใช้ไฟล์ข้อมูล DISK1.DAT ในรูปที่ 3.7 เช่นเดียวกับโปรแกรม DISEXACT ในตัวอย่างที่ 1

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISLNEAR โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล เมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้ว โปรแกรมจะเริ่มการคำนวณเป็นขั้นเป็นตอนเช่นเดียวกับโปรแกรม DISEXACT ดังอธิบายในหัวข้อ 3.4 เมื่อโปรแกรมทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลที่จะบรรจุผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่างๆ โดยขั้นตอนต่างๆดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

```
*FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMP VARIATION PROBLEM**
 WITH LINEAR TEMP AND DISP INERPOLATION

 PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA:
 DISK1.DAT  <ENTER>

*THE MODEL CONDSISTS OF 8 NODES 7 ELEMENTS**

*ESTABLISHING ELEMENT MATRICS AND
 ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**

*APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL
 AND FORMING OF NEW MATRICS TO BE SOLVED**

*SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS**

 PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:

 LINEAR1.OUT
 Stop - Program terminated
```

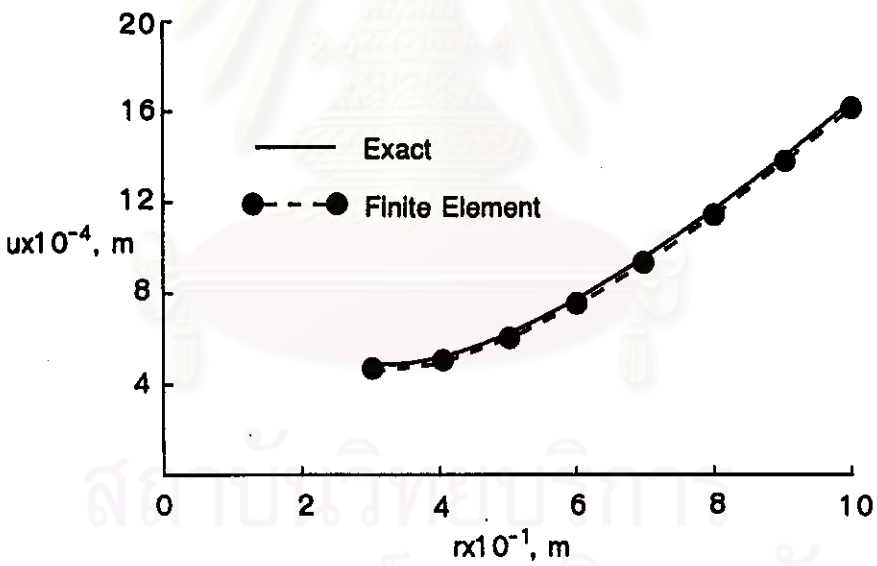
หลังจากโปรแกรม DISLNEAR ทำการคำนวณเสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 3 ให้ชื่อว่า LINEAR1.OUT ประกอบด้วยรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 3.14

NODAL SOLUTION[8]

NODE	U
1	0.488556E-03
2	0.514426E-03
3	0.617476E-03
4	0.767350E-03
5	0.949885E-03
6	0.115724E-02
7	0.138454E-02
8	0.162852E-02

รูปที่ 3.14 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR1.OUT

ซึ่งค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแต่ละจุดต่อในไฟล์ผลลัพธ์ LINEAR1.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยได้มีความผิดพลาดเฉลี่ย 0.7% การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISNEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 2 คือจัดแบ่งแนวรัศมีตัวอย่างออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อเท่านั้น แต่ในตัวอย่างที่ 4 นี้ จะทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม DISLNEAR แทน เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วย

โปรแกรมนี้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้ในตัวอย่างที่ 2 ซึ่งใช้โปรแกรม DISEXACT ที่ให้ผลเฉลยแม่นตรง

สำหรับลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม DISLNEAR ต้องการ เพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 4 นี้ จะใช้ไฟล์ข้อมูล DISK2.DAT ดังแสดงในรูปที่ 3.10 เช่นเดียวกับที่โปรแกรม DISEXACT ในตัวอย่างที่ 2 ต้องการ

โดยเมื่อทำการคำนวณปัญหาในตัวอย่างที่ 4 โดยใช้โปรแกรม DISLNEAR เสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างนี้ได้ตั้งชื่อให้ว่า LINEAR2.OUT ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 3.16

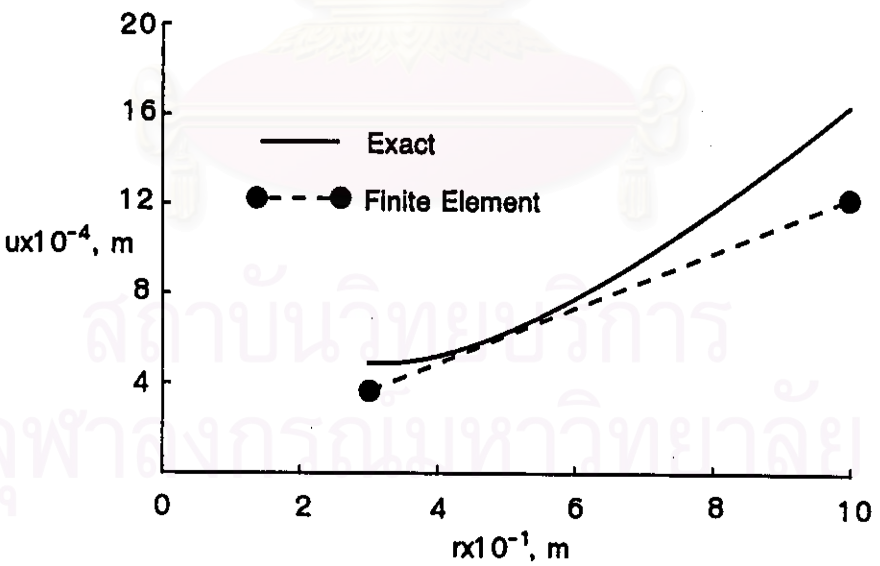
```
NODAL SOLUTION[     2]

 NODE          U

    1  0.368550E-03
    2  0.122850E-02
```

รูปที่ 3.16 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR2.OUT

ลักษณะการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่ได้จากไฟล์ผลลัพธ์ LINEAR2.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากสมการ (3.40) พบว่ามีความผิดพลาดถึง 25% การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISLNEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ

ตัวอย่างที่ 1 จนถึงตัวอย่างที่ 4 ได้แสดงให้เห็นว่า การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในที่เหมาะสมสามารถช่วยลดขนาดของหน่วยความจำอันเนื่องมาจากการแบ่งเอลิเมนต์ได้ โดยเฉพาะตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ซึ่งใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นผลเฉลยแม่นตรง สามารถให้ผลลัพธ์เท่ากับผลเฉลยแม่นตรงได้แม้จะแบ่งปัญหาเป็นเพียง 1 เอลิเมนต์ก็ตาม ส่วนปัญหาในตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4 นั้นเป็นการใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นฟังก์ชันเส้นตรง ซึ่งการวิเคราะห์โดยส่วนใหญ่จะนิยมใช้ฟังก์ชันประมาณภายในเช่นนี้ เนื่องจากหากมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มากขึ้นเพียงพอแล้ว ก็สามารถให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงได้ และในทางปฏิบัติเนื่องจากการวิเคราะห์ในบทนี้ เป็นปัญหาในหนึ่งมิติ ซึ่งสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ จึงเลือกฟังก์ชันประมาณภายในจากผลเฉลยแม่นตรงได้ แต่ปัญหาโดยทั่วไปหรือปัญหาที่จะกล่าวถึงในบทต่อไป จะเป็นปัญหาในสองมิติ ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้หรืออาจหาได้เพียงเฉพาะบางปัญหาเท่านั้น และหากรูปร่างชิ้นงานมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นแล้วก็จะไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้เลย ดังนั้นปัญหาของแข็งโดยทั่วไปจึงนิยมใช้ฟังก์ชันประมาณภายในให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเส้นตรงแล้วแบ่งเอลิเมนต์ให้มากเพียงพอ ก็สามารถให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำอยู่ในระดับที่สามารถยอมรับได้ ผลการวิเคราะห์ดังอธิบายในบทนี้แสดงให้เห็นว่าการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ จะช่วยทุ่นเวลาในการคำนวณ และในขณะเดียวกัน สามารถเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงขึ้นไปได้