บทที่ 3
ทฤษฎีพื้นฐาน

การสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการอธิบายพฤติกรรมการเติบโตของต้นข้าวนั้น ผู้วิจัยจะต้องมีความรู้พื้นฐานและเข้าใจถึงปัจจัยต่างๆ ที่ส่งผลต่อการเติบโตของต้นข้าว เพื่อนำมาวิเคราะห์ข้อมูลและสามารถสร้างแบบจำลองได้ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงสรีรวิทยาและข้อมูลจำเพาะของข้าวเช่นลักษณะทางสัณฐานวิทยาของต้นข้าว และระยะการเจริญเติบโตของต้นข้าว จากนั้นจะกล่าวถึงผลของไนโตรเจนต่อการเติบโตของข้าวเช่น ความสำคัญของไนโตรเจนต่อการเติบโตของต้นข้าว และระยะเวลาที่เหมาะสมในการใส่ปุ๋ยไนโตรเจนให้แก่ต้นข้าว เป็นต้น สุดท้ายจะกล่าวถึงแบบจำลองการเติบโตแบบโลจิสติกส์ และการหาค่าพารามิเตอร์จากแบบจำลองโดยใช้วิธีวิเคราะห์เชิงถดถอย

3.1 สรีรวิทยาและข้อมูลจำเพาะของต้นข้าว (Rice Physiology and Specification)

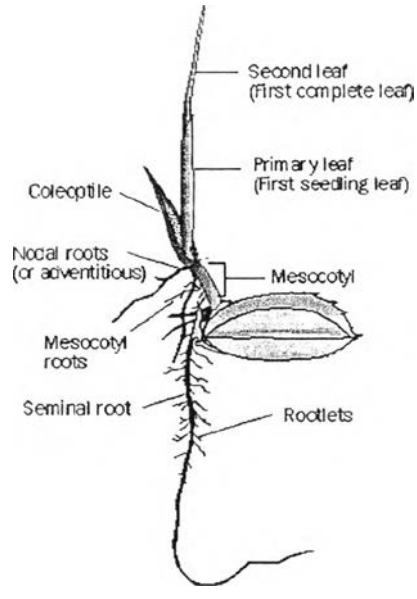
ข้าวเป็นธัญพืชที่คนไทยรับประทานเป็นอาหารหลักและเป็นพืชเศรษฐกิจที่สำคัญของไทย ข้าวมีชื่อวิทยาศาสตร์ว่า *Oryza sativa* ซึ่งเป็นพืชใบเลี้ยงเดี่ยวตระกูลเดียวกับหญ้า [11]

3.1.1 ลักษณะทางสัณฐานวิทยาของต้นข้าว

3.1.1.1 ราก (Root)

ข้าวมีรากเป็นระบบรากฝอย (Fibrous root system) ซึ่งประกอบด้วยราก 2 ชนิด คือ รากปฐมภูมิ (Primary root) ซึ่งรากนี้จะเจริญมาจากส่วนของเรดิเคิล (Radicle) ที่มีชื่อเรียกว่า รากแรกเกิด (Seminal root) รากนี้จะทำหน้าที่เป็นรากชั่วคราว และจะเน่าเปื่อยไป ซึ่งจะถูกแทนที่ด้วยรากชนิดที่ 2 คือรากทุติยภูมิ (Secondary root) ที่มีชื่อเรียกว่า รากเสริม (Adventitious root) ซึ่งเกิดจากส่วนของข้อลำต้นที่อยู่ใต้ดิน

ลักษณะพิเศษของรากข้าวคือ การที่มีช่องอากาศขนาดใหญ่ (Lysigenous intercellular space) ในรากที่เติบโตเต็มที่แล้ว โดยช่องอากาศนี้จะเชื่อมต่อกับช่องอากาศในลำต้นและใบ ทำให้อากาศส่งผ่านจากส่วนยอดมาสู่ส่วนราก รากข้าวจึงสามารถแช่อยู่ในน้ำขังได้



รูปที่ 3.1 แสดงรากและส่วนของต้นกล้าของข้าวที่งอก

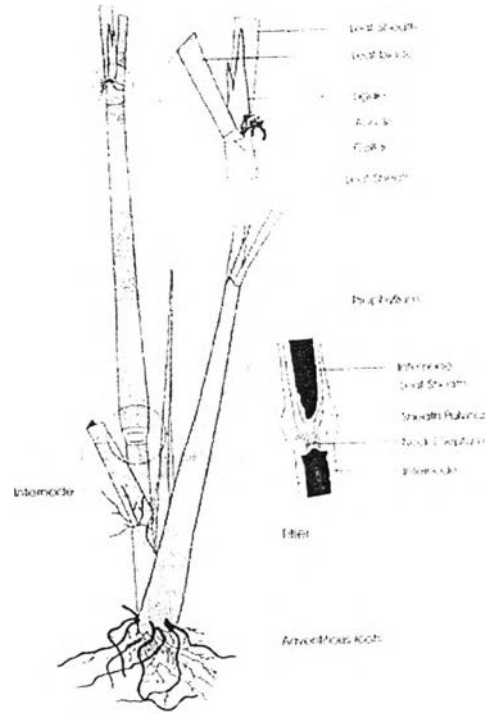
แหล่งที่มา http://agri.kps.ku.ac.th/agron/main.php?pg=chapter&et_id=3&e_id=1

3.1.1.2 ลำต้น (Stem หรือ Culm)

ลำต้นของข้าวประกอบด้วยส่วนของข้อ (Node) และปล้อง (Internode) ตรงส่วนของข้อจะเป็นที่เกิดของใบและตา ตาอาจจะเจริญขึ้นเป็นหน่อ (Tiller) ภายในข้อมีผนังกั้นข้อ (Nodal septum) ซึ่งจะแบ่งปล้องออกจากกัน ปล้องของลำต้นที่เจริญเติบโตเต็มที่แล้วจะมีลักษณะกลวง ความยาวของปล้องจะแตกต่างกันโดยปล้องที่อยู่ด้านบนจะยาวกว่าปล้องที่อยู่ด้านล่าง

หน่อจะแตกออกจากลำต้นหลัก (Main culm) โดยจะแตกในลักษณะสลับข้างกัน (Alternate pattern) หน่อที่แตกจากลำต้นหลักเรียกว่า หน่อลำดับที่ 1 (Primary tiller) ซึ่งเริ่มเกิดจากข้อที่อยู่ล่างสุดก่อน และ หน่อลำดับที่1จะแตกแขนงออกเป็นหน่อลำดับที่ 2 (Secondary tiller) และหน่อที่แตกออกจาก หน่อลำดับที่ 2 เรียกว่า หน่อลำดับที่ 3 (Tertiary tiller)

ระหว่างหน่อกับต้นจะมีใบข้าวแรกเกิด (Prophyllum) ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายๆกาบใบแต่มีสีขาวค่อนข้างใส การแตกกอจะเริ่มประมาณต้นข้าวอายุ 10 วันหลังปักดำ และจะถึงจุดสูงสุดเมื่ออายุ 50-60 วันหลังปักดำ



รูป 3.2 แสดงส่วนต่างๆของลำต้นข้าว และการแตกหน่อลำดับที่ 1

แหล่งที่มา http://agricoop.nic.in/seedtestguide/rice.htm

3.1.1.3 ใบ (Leaf)

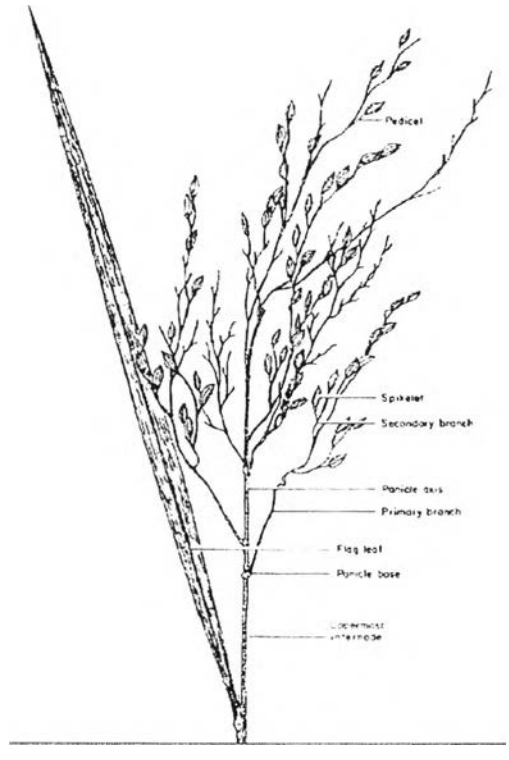
ใบข้าวจัดเป็นใบเดี่ยว (Simple leaf) ที่เป็นใบแท้ มีลักษณะเป็นแผ่นแบนบางค่อนข้างยาว ใบจะประกอบด้วยกาบใบ (Sheath) และแผ่นใบ (Blade) กาบใบจะหุ้มส่วนของลำต้นไว้ แผ่นใบจะอยู่ต่อจากกาบใบ มีความยาว ความกว้าง รูปร่าง สี และขนบนใบแตกต่างกันไปตามพันธุ์ตรงผิวบนของใบจะมีสันเล็กๆจำนวนมาก ซึ่งเป็นส่วนของเส้นใบที่ขนานกัน (Parallel veins) และสันที่ใหญ่ที่สุดที่อยู่ตรงแนวกลางของผิวใบด้านล่างเป็นส่วนของเส้นกลางใบ (Midrib) หูใบ หรือเขี้ยวใบ (Auricles) เป็นระยางค์มีขนลักษณะรูปเคียว จะติดอยู่กับฐานของแผ่นใบทั้ง 2 ขอบ รอยต่อระหว่างแผ่นใบและกาบใบจะเป็นแถบสีขาวเรียกว่า ข้อต่อใบ (Collar) และที่รอยต่อนี้จะมีเยื่อบางๆ ผิวเกลี้ยงเรียบ หรือมีขนตอนปลายเยื่ออยู่เรียกว่า เยื่อกันน้ำฝน (Ligule)

ใบข้าวที่อยู่บนสุดที่อยู่ถัดลงมาจากรวงเรียกว่า ใบธง (Flag leaf) ซึ่งมีขนาดสั้นและอยู่ในตำแหน่งที่ตั้งตรงกว่าใบอื่นๆ ของต้นข้าว ใบธงมีความสำคัญมากในการปรุงอาหารในระยะที่ข้าวสร้างรวง เนื่องจากใบอื่นๆเริ่มแก่และขาดประสิทธิภาพในการปรุงอาหารแล้ว

522155760

3.1.1.4 ช่อดอก (Inflorescence หรือ panicle)

ช่อดอกข้าวจะเกิดอยู่เหนือปล้องสุดท้ายของลำต้น (Uppermost internode) เมื่อมีการผสมพันธุ์ในดอกข้าวระหว่างเซลล์สืบพันธุ์เพศผู้และเมีย ก็จะมีการพัฒนาเกิดขึ้นเป็นเมล็ดภายในแต่ละดอก จึงเรียกช่อดอกที่พัฒนาไปเป็นช่อเมล็ดว่ารวงข้าว



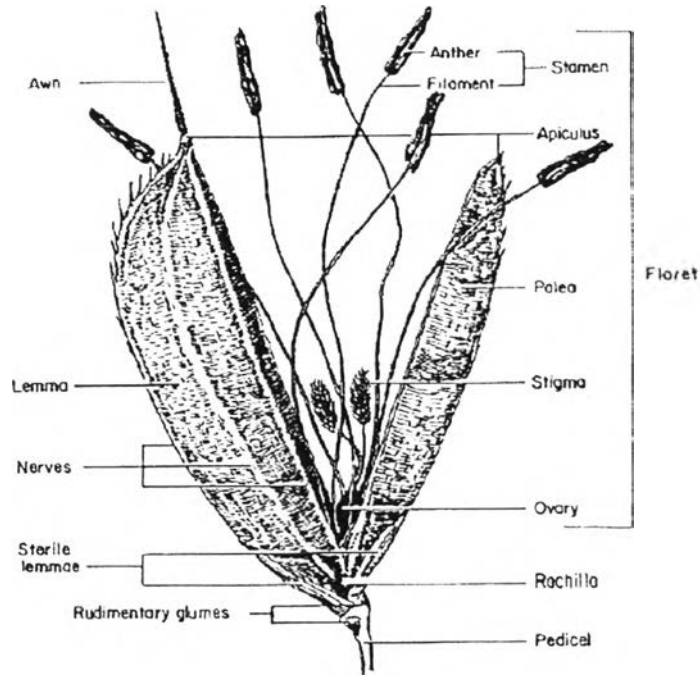
รูปที่ 3.3 แสดงส่วนต่างๆของช่อดอกข้าว

แหล่งที่มา http://agriwork.blogspot.com/2010/12/rice-structure-of-rice-grain-rice-fruit.html

3.1.1.5 ดอกข้าว (Spikelet)

ดอกข้าวจะมีทั้งเกสรตัวผู้และตัวเมียอยู่ในดอกเดียวกัน จึงจัดเป็นดอกสมบูรณ์เพศ (Perfect flower) ที่มีการผสมตัวเอง (Self-pollination) เป็นส่วนใหญ่ และมีการผสมข้าม (Cross pollination) ตามธรรมชาติน้อยมากประมาณ 0.5% - 5% การผสมตัวเองมักจะเกิดในตอนเช้าและดอกทุกดอกจะมีการผสมเกสรและบานหมดภายในเวลาประมาณ 7 วัน หลังจากดอกได้รับการผสมเกสรแล้วจะพัฒนาเป็นเมล็ดที่สมบูรณ์ภายในเวลาประมาณ 30 วัน

522155760



รูปที่ 3.4 แสดงส่วนต่างๆของดอกข้าว

แหล่งที่มา http://agriwork.blogspot.com/2010/12/rice-structure-of-rice-grain-rice-fruit.html

3.1.1.6 เมล็ด (Seed)

เมล็ดข้าวประกอบด้วยส่วนที่เป็นเอนโดสเปิร์ม (Endosperm) และคัพภะ (Embryo) ซึ่งถูกหุ้มไว้ด้วยเยื่อหุ้มชั้นนอก (Pericarp) เยื่อหุ้มชั้นกลาง (Seed coat and nucellus) และเยื่อหุ้มชั้นใน (Aleurone layer) เมล็ดข้าวจะถูกพัฒนาหลังจากการผสมพันธุ์ระหว่างเซลล์สืบพันธุ์เพศผู้และเพศเมีย โดยที่รังไข่จะกลายไปเป็นเอนโดสเปิร์ม และส่วนของไข่ก็จะกลายไปเป็นคัพภะ โดยเรียกส่วนเมล็ดข้าวที่ถูกหุ้มนี้ว่า เมล็ดข้าวเปลือก (Paddy)

เอนโดสเปิร์มจะประกอบด้วยแป้งเป็นส่วนใหญ่อยู่ปะปนกับโปรตีน คัพภะเป็นส่วนที่อยู่ทางด้านล่างของเมล็ด ซึ่งจะประกอบด้วยส่วนที่จะเจริญไปเป็นต้นเรียกว่า ยอดแรกเกิด (plumule) และส่วนที่จะเจริญไปเป็นรากเรียกว่า เรดิคอล (Radicle)

3.1.2 ระยะการเติบโตของข้าว

ระยะการเติบโตและพัฒนาการของข้าวสามารถแบ่งออกเป็น 3 ระยะคือ

3.1.2.1 การเติบโตและพัฒนาการทางลำต้น จะเริ่มตั้งแต่เมล็ดงอกจากคัพภะจนถึงการให้กำเนิดช่อดอก

3.1.2.1.1 ระยะต้นกล้า ระยะนี้เริ่มตั้งแต่ต้นข้าวงอกจนถึงต้นข้าวอายุประมาณ 30 วัน เมื่อต้นข้าวเริ่มงอกจะมีรากแรกเกิดแทงออกมาเป็นรากชุดแรก และต่อมาจะมีรากชุดที่ 2 ที่เรียกว่ารากแขนง แตกออกมาเพื่อทดแทนรากชุดแรกที่จะสลายตัวไป ต้นข้าวระยะนี้จะมีการพัฒนาใบขึ้นมาจนถึงใบที่ 5 และใช้สารอาหารจากส่วนแป้งของเมล็ดในการเจริญเติบโต

3.1.2.1.2 ระยะแตกกอ เป็นระยะที่ต้นข้าวเริ่มมีการแตกหน่อใหม่หน่อแรกออกมาจากตาข้างลำต้นที่นำไปปักดำ จนถึงระยะการแตกกอสูงสุดของต้นข้าว โดยปกติหน่อแรกของต้นข้าวจะแตกออกมาหลังจากปักดำประมาณ 10 วัน หรือเมื่อต้นข้าวที่นำไปปักดำเริ่มมีใบที่ 5 และต้นข้าวจะแตกกอมีจำนวนต้นสูงสุดเมื่อเริ่มให้กำเนิดช่อดอก

3.1.2.2 การเติบโตและพัฒนาการทางการสืบพันธุ์ จะเริ่มตั้งแต่ระยะให้กำเนิดช่อดอก จนถึงระยะข้าวออกดอก ซึ่งใช้เวลาประมาณ 30 วัน

3.1.2.2.1 ระยะกำเนิดช่อดอก (Panicle initiation stage) เป็นระยะเวลาที่ต้นข้าวมีลักษณะกลมอย่างชัดเจนและที่ปลายชุดของลำต้นข้าวจะมีปุ่มของปุยขนขนาดเล็ก (1 - 2 มล.) เกิดขึ้น การให้กำเนิดช่อดอกนี้ โดยปกติจะอยู่ในช่วงระยะประมาณ 30 วัน ก่อนข้าวออกรวง

3.1.2.2.2 ระยะตั้งท้อง (Booting stage) เป็นระยะเวลาที่ต้นข้าวมีการพัฒนาจากช่อดอกไปเป็นรวงอ่อนภายใต้กาบใบธงที่หุ้มไว้ ต้นข้าวในระยะนี้จะมีการยืดปล้องอย่างเห็นได้ชัดพร้อมกับมีการนูนโปนขึ้นของกาบใบธง ระยะตั้งท้องนี้จะอยู่ในช่วงเวลา 5 - 6 วัน ก่อนการออกรวง

3.1.2.2.3 ระยะออกรวง (Heading stage) เป็นระยะที่ช่อดอกหรือรวงข้าวโผล่พ้นออกมาจากกาบใบธงซึ่งจะเกิดขึ้นในระยะเวลาประมาณ 30 วัน ก่อนการเก็บเกี่ยว ในระยะนี้ต้นข้าวจะมีการยืดปล้องรองสุดท้ายจากปลายสุดของลำต้นอย่างสมบูรณ์ก่อน หลังจากนั้นปล้องสุดท้ายจะมีการยืดตัวอย่างรวดเร็วเพื่อดันให้รวงข้าวโผล่พ้นจากกาบใบธง

3.1.2.2.4 ระยะดอกบาน (Flowering stage) เป็นระยะที่มีการปิดและเปิดของดอกข้าว โดยปกติการออกดอกและการผสมพันธุ์ของข้าวจะเกิดขึ้นในช่วงเวลา 1 - 3 วัน หลังจากออกรวง รวงข้าวแต่ละรวงจะออกดอกครบสมบูรณ์ทุกดอกภายใน 7 - 10 วัน

3.1.2.3 การเติบโตและพัฒนาการของเมล็ด (Seed growth and development) เป็นระยะเวลาที่ข้าวออกดอกและมีการผสมพันธุ์จนถึงช่วงเมล็ดสุกแก่เต็มที่พร้อมจะเก็บเกี่ยวได้ ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้เวลาประมาณ 30 วัน ในช่วงนี้เมล็ดจะเริ่มมีน้ำหนักเพิ่มขึ้น สีเปลือกของเมล็ดจะเปลี่ยนจากสีเขียวเป็นสีฟางข้าว

522155760

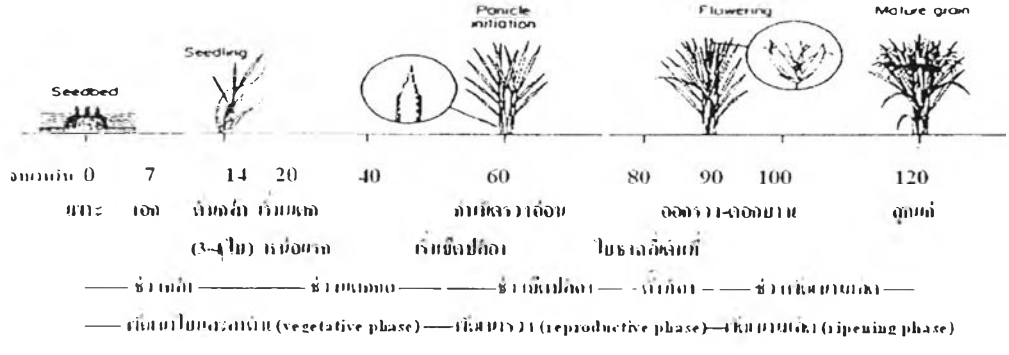
หรือน้ำตาล และในขณะเดียวกันใบข้าวจะเปลี่ยนเป็นสีเหลืองและแห้งไป ซึ่งก่อนเมล็ดจะสุกแก่เต็มที่ จะมีขั้นตอนพัฒนา 3 ระยะ คือ

3.1.2.3.1 ระยะน้ำนม (Milky stage) ระยะนี้จะเกิดขึ้นหลังจากออกดอกประมาณ 8 - 13 วัน เมล็ดในระยะนี้จะมีลักษณะเป็นแป้งใสเหลว (Watery) และต่อมาจะเพิ่มความข้นมากขึ้น

3.1.2.3.2 ระยะแป้ง (Dough stage) เกิดในช่วง 14-25 วัน หลังออกดอก ในระยะนี้น้ำแป้งในเมล็ดจะค่อยๆ ระเหยไป ทำให้เมล็ดประกอบด้วยเนื้อแป้งเป็นส่วนใหญ่แต่ยังไม่แข็งตัวเต็มที่

3.1.2.3.3 ระยะเมล็ดสุกแก่ (Maturity stage) เกิดในช่วง 25-35 วัน หลังออกดอก เมล็ดในระยะนี้จะมีความแข็งใสและมีเนื้อแกร่งพร้อมที่จะทำการเก็บเกี่ยวได้

522155760



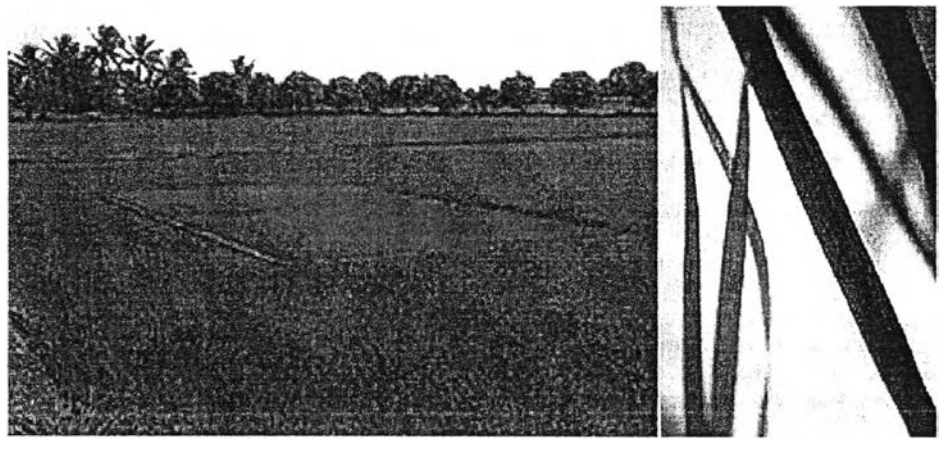
รูปที่ 3.5 แสดงระยะเวลาและพัฒนาการการเจริญเติบโตของข้าว

3.2 ความสำคัญของไนโตรเจนต่อการเติบโตของข้าว

ไนโตรเจน (N) เป็นธาตุอาหารหลักที่ข้าวมีความต้องการอย่างมาก (Macronutrient element) เนื่องจากเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของโปรตีน (Proteins) กรดอะมิโน (Amino acid) กรดนิวคลีอิก (Nucleic acid) และคลอโรฟิลล์ (Chlorophyll) ซึ่งรากพืชสามารถดูดใช้ได้ในรูปของไนเตรตและแอมโมเนียมไอออน ไนโตรเจนมีผลทำให้ต้นข้าวมีสีเขียวเข้ม มีการเพิ่มการเติบโตทางความสูง เพิ่มจำนวนกอ เพิ่มขนาดของใบและเมล็ด เพิ่มจำนวนเมล็ดต่อรวง และเพิ่มโปรตีนในเมล็ดข้าว ([3], [12])

3.2.1 อาการผิดปกติของต้นข้าวเมื่อขาดธาตุไนโตรเจน

ต้นข้าวที่ขาดไนโตรเจนจะมีการเติบโตที่ช้าลง ใบมีสีเหลืองซีดจากการขาดคลอโรฟิลล์โดยอาการจะเห็นได้ชัดในใบแก่เนื่องจากไนโตรเจนเป็นธาตุอาหารที่เคลื่อนย้ายได้ ไนโตรเจนจะเคลื่อนย้ายจากใบแก่ไปยังใบอ่อน และยังส่งผลให้ใบแก่ร่วงหล่นเร็ว ถ้าขาดไนโตรเจนมากๆข้าวจะมีลำต้นแคระแกรน แตกกอน้อย ใบแคบสั้นและตั้งตรง เมื่อขาดมากขึ้นใบจะเป็นสีเหลืองและแห้งตายในที่สุด



รูปที่ 3.6 ก. รูปที่ 3.6 ข.

รูปที่ 3.6 แสดงอาการขาดธาตุไนโตรเจนในนาข้าว

ก. แปลงที่ไม่ได้ใส่ไนโตรเจน ซึ่งข้าวมีสีเขียวอ่อน

ข. ลักษณะใบข้าวที่ขาดไนโตรเจน ซึ่งใบจะเล็กกว่าและสีอ่อนกว่าใบข้าวที่ได้รับไนโตรเจนเพียงพอ

แหล่งที่มา http://www.brrd.in.th/rkb/management/index.php-file=content.php&id=28.htm

3.2.2 อาการผิดปกติของต้นข้าวเมื่อได้รับปริมาณไนโตรเจนมากเกินไป

ต้นข้าวที่ได้รับไนโตรเจนมากเกินไปตั้งแต่ระยะแรกนั้นส่วนเหนือดินเติบโตเร็วแต่รากเติบโตช้า ทำให้รากดูดน้ำและธาตุอาหารได้น้อยกว่าปริมาณที่ต้องการ นอกจากนี้ยังส่งผลต่อลักษณะสัณฐานวิทยาของข้าว กล่าวคือ ข้าวจะมีใบยาวและกว้างกว่าปกติ แต่ใบบางลงอ่อนโค้ง เป็นสาเหตุให้ใบบนบังแสงใบล่างซึ่งส่งผลต่อการสังเคราะห์แสงของข้าว ใบมีขนาดใหญ่และเขียวมากเรียกว่า ภาวะเฝือใบ ลำต้นมักจะยืดสูง ไม่แข็งแรงและล้มได้ง่าย นอกจากนี้ลำต้นจะอ่อนแอต่อการทำลายของโรคและแมลง

3.3 ระยะเวลาที่เหมาะสมในการใส่ปุ๋ยไนโตรเจนให้แก่ข้าว

เนื่องจากไนโตรเจนเป็นธาตุอาหารที่ช่วยในการเติบโตและผลผลิตของข้าว โดยในแต่ละระยะการเติบโตของต้นข้าวมีความต้องการไนโตรเจนในปริมาณที่เพิ่มขึ้นใน 2 ระยะ คือ ระยะแตกกอ ซึ่ง

ต้นข้าวต้องการไนโตรเจนเพื่อช่วยสร้างหน่อใหม่ และ ระยะกำเนิดช่อดอก ซึ่งต้นข้าวต้องการไนโตรเจนเพื่อช่วยสร้างเมล็ดต่อรวง ดังนั้นการใส่ปุ๋ยจึงกระทำเป็นสองระยะในช่วงของการเติบโตดังที่ได้กล่าว ([7], [9])

3.4 แบบจำลองการเติบโตแบบโลจิสติกส์

จากข้อมูลที่ได้จากการทดลองวิเคราะห์ได้ว่า ข้าวมีการเติบโตแบบโลจิสติกส์ ซึ่งเป็นการเติบโตที่มีลักษณะกราฟเป็นรูปตัว S โดยมีความหมายว่า อัตราการเติบโตจะเพิ่มขึ้นแบบค่อยเป็นค่อยไปในระยะแรก จากนั้นอัตราการเติบโตจะเพิ่มอย่างรวดเร็วในระยะต่อมา และอัตราการเติบโตจะค่อยๆลดลงจนคงตัวในระยะสุดท้าย ซึ่งแบบจำลองจากข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ในรูป

$$\frac{dG(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{G(t)}{G_{max}}\right)G(t) \qquad (3.1)$$

โดยที่ $G(t)$ คือการเติบโต ณ เวลาใดๆ

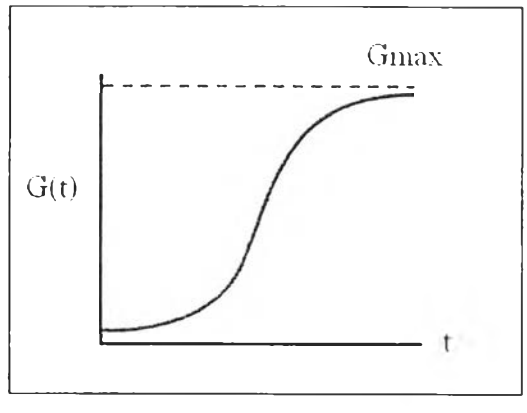
r คือ อัตราการเพิ่มของการเติบโต

G_{max} คือ การเติบโตที่มากที่สุดที่จะเป็นไปได้ของต้นข้าว

เมื่ออินทิเกรตจะได้ว่าผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$G(t) = \frac{G_{max}}{1+(\frac{G_{max}}{G_0}-1)e^{-r(t-t_0)}} \qquad (3.2)$$

โดยที่ t_0 คือ วันแรกที่เก็บข้อมูล และ G_0 คือ การเติบโต ณ วันที่ t_0



รูปที่ 3.7 กราฟแสดงลักษณะการเติบโตแบบโลจิสติกส์

แหล่งที่มา http://cnx.org/content/m45553/latest/

522155760

3.5 การวิเคราะห์การถดถอย (Regression analysis)

การวิเคราะห์การถดถอยเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ประเภท คือ ตัวแปรอิสระ (independent variable) กับตัวแปรตาม (dependent variable) โดยที่ความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองดังกล่าวอาจจะอยู่ในลักษณะของสมการอย่างง่าย หรืออยู่ในลักษณะที่ซับซ้อน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาและสมมติฐานที่ตั้งไว้ ซึ่งลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระนั้นสามารถนำไปใช้ในการประมาณค่าของตัวแปรตามเมื่อทราบค่าของตัวแปรอิสระได้

3.5.1 การวิเคราะห์การถดถอยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear regression analysis)

ลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลในงานวิจัยด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเกษตรศาสตร์ มักจะมีความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามสามารถเขียนในรูปแบบของสมการถดถอยได้ดังนี้

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}; \vec{a}) \qquad (3.3)$$

โดยที่ $\vec{y}$ คือ ตัวแปรตามของสมการถดถอย

$\vec{x}$ คือ ตัวแปรอิสระของสมการถดถอย

$\vec{a}$ คือ พารามิเตอร์ของสมการถดถอย

522155760

3.5.2 การหาค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอย

ในการวิเคราะห์การถดถอย ผู้วิจัยจะต้องกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระให้ถูกต้องตามความเป็นจริง จากนั้นทำการประมาณค่าคงตัวของความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสอง โดยที่เรียกค่าคงตัวนี้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยหรือค่าพารามิเตอร์การถดถอย ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้วิธี Levenberg-Marquart ในการหาค่าพารามิเตอร์การถดถอย

3.5.3 Levenberg-Marquart method

[4] Levenberg-Marquart เป็นวิธีที่ใช้หาค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยแบบไม่เชิงเส้น โดยหาสมการที่แทนข้อมูล n ตัว $(x_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, n$ และมีพารามิเตอร์ที่ต้องการหา m ตัว คือ $a_j;\ j = 1, 2, \ldots, m$ เพื่อหาสมการถดถอยที่แทนความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ $\vec{x}$ และตัวแปรตาม $\vec{y}$ สังเกตว่าเมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T$ ใน (3.3) แล้วนำค่าที่ได้มาเปรียบเทียบกับข้อมูล y_i จะเกิดความคลาดเคลื่อน d ที่ x_i ดังนี้

$$d(x_i) = y_i - \hat{y}_i(x_i, \vec{a})$$

จากนั้นหาสมการถดถอยจากการหาค่าความคลาดเคลื่อน E ที่เกิดจากข้อมูล n ตัว ตามรูปแบบดังนี้

$$E(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} [d(x_i)]^2$$

$$E(\vec{a}) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_i(x_i, \vec{a})]^2 \qquad (3.4)$$

โดยที่ y_i คือ ตัวแปรตามที่ได้จากข้อมูลตัวที่ i

x_i คือ ตัวแปรอิสระได้จากข้อมูลตัวที่ i

$\hat{y}_i$ คือ ตัวแปรตามที่ได้จากสมการถดถอย โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\vec{a}$

กำหนดฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน $E(\vec{a}^k)$ และเขียนในรูปการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง ดังนี้

$$E(\vec{a}^{k+1}) = E(\vec{a}^k) + \nabla E(\vec{a}^k)^T \cdot (\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k) + \tfrac{1}{2}(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k)^T \nabla^2 \mathrm{E}(\vec{a}^k)(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k) \qquad (3.5)$$

โดยที่ $\nabla E(\vec{a}^k)^T = \left[\frac{\partial E(\vec{a}^k)}{\partial a_1} \quad \frac{\partial E(\vec{a}^k)}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial E(\vec{a}^k)}{\partial a_m}\right]^T$

$$\nabla^2 E(\vec{a}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_1 \partial a_m} \\ \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_2 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_2 \partial a_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_n \partial a_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_n \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{a}^k)}{\partial a_n \partial a_m} \end{bmatrix}$$

สมการ (3.5) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเกรเดียนต์เวกเตอร์ (Gradient vector) g และเฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix) H ดังนี้

$$E(\vec{a}^{k+1}) = E(\vec{a}^k) + g \cdot (\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k) + \tfrac{1}{2}(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k)^T H(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k) \qquad (3.6)$$

โดยที่ $g = \nabla E(\vec{a}^k)^T$

$H = \nabla^2 E(\vec{a}^k)$

การหาค่าพารามิเตอร์ $\vec{a}$ ที่ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน $E(\vec{a}^k)$ น้อยที่สุด สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ $\vec{a}^k$ ดังนี้

$$\frac{\partial E(\vec{a}^{k+1})}{\partial \vec{a}^k} = \frac{\partial}{\partial \vec{a}^k}\left(E(\vec{a}^k) + g \cdot (\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k) + \frac{1}{2}(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k)^T H(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k)\right)$$

นั่นคือ

$$0 = \frac{\partial E(\vec{a}^k)}{\partial \vec{a}^k} - g - H(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^k)$$

จากนั้นหาค่าต่ำสุด โดยให้ $\frac{\partial E(\vec{a}^k)}{\partial \vec{a}^k} = 0$ จะได้

522155760

$$0 = g + H(\vec{a}^{k+1} - \vec{a}^{k})$$

ดังนั้น $$\vec{a}^{k+1} = \vec{a}^{k} - H^{-1}g \qquad (3.7)$$

เมื่อพิจารณา $H^{-1}g$ ในสมการ (3.7) พบว่า $H^{-1}g$ คือ ขนาดของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ a ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ (increment) ซึ่งวิธีของ Levenberg-Marquart จะเปลี่ยนพจน์ของ $H^{-1}g$ เป็น $(H + \lambda I)^{-1}g$ เพื่อลดจำนวนรอบในการทำซ้ำ ซึ่งค่า λ ขึ้นอยู่กับค่าความคลาดเคลื่อน $E(\vec{a}^{k})$ โดยที่เมื่อค่า λ มาก จะทำให้ขนาดการเปลี่ยนแปลงน้อย และเมื่อค่า λ น้อย จะทำให้ขนาดการเปลี่ยนแปลงมาก ทำให้ (3.7) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{a}^{k+1} = \vec{a}^{k} - (H + \lambda I)^{-1}g \qquad (3.8)$$

โดยที่ $\vec{a}^{k+1}$ คือ ค่าพารามิเตอร์ในรอบการทำซ้ำที่ $k+1$

$\vec{a}^{k}$ คือ ค่าพารามิเตอร์ในรอบการทำซ้ำที่ k

ขั้นตอนวิธีของ Levenberg-Marquart

1. กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น $\vec{a}^{0}$
2. คำนวณค่าความคลาดเคลื่อน $E(\vec{a}^{0})$ ตามสมการ (3.4)
3. กำหนดค่า λ
4. คำนวณ $\vec{a}^{k+1}$ ตามสมการ (3.8)
5. ถ้า $E(\vec{a}^{k+1}) < E(\vec{a}^{k})$ แล้ว ลดค่า λ ลง 10 เท่า และ $\vec{a}^{k} = \vec{a}^{k+1}$ แล้วกลับไปทำข้อ 4
6. ถ้า $E(\vec{a}^{k+1}) \geq E(\vec{a}^{k})$ แล้ว เพิ่มค่า λ ขึ้น 10 เท่า แล้วกลับไปทำข้อ 4
7. ถ้า $E(\vec{a}^{k+1}) \leq TOL$ แล้ว ให้จบการทำงาน

ในกรณีที่ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอรีที่มีส่วนประกอบเดียว จะเขียน $\vec{a}$ แทนด้วย a H และ g จะเป็นเพียงปริมาณสเกลาร์ ทำให้ (3.8) อยู่ในรูป

$$a^{k+1} = a^{k} - \frac{1}{H+\lambda}g \qquad (3.9)$$

522155760

3.6 การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง

ความแม่นยำของแบบจำลองการสะสมไนโตรเจนจะพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$error = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|}{n} \times 100$$

เมื่อ y_i คือ ค่าที่เก็บได้จากการทดลอง

$\hat{y}_i$ คือ ค่าที่ได้จากแบบจำลอง

n คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

522155760