โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3 \square P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

Super (a, d)-edge antimagic total labeling of graphs $C_3 \square P_n$ where $n \geq 2$ and $C_n \square P_2$ where n is odd such that $n \geq 3$

ชื่อนิสิต นางสาวบุญณิตา สุวรรณชาตรี **เลขประจำตัว** 5933528823

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3 \square P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

นางสาวบุญญิตา สุวรรณชาตรี

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

Super (a, d)-edge antimagic total labeling of graphs $C_3 \square P_n$ where $n \geq 2$ and $C_n \square P_2$ where n is odd such that $n \geq 3$

Miss Bunnita Suwanchatree

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3 \square P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$
โดย	นางสาวบุญณิตา สุวรรณชาตรี
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

บุญณิตา สุวรรณชาตรี : การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3 \square P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ (Super (a, d)-edge antimagic total labeling of graphs $C_3 \square P_n$ where $n \geq 2$ and $C_n \square P_2$ where n is odd such that $n \geq 3$) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 21 หน้า

ให้กราฟ $G = (V(G), E(G))$ มี $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = q$ นิยามการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์แบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ G เป็นฟังก์ชัน f ที่ส่งจาก $V(G) \cup E(G)$ ไปยัง $\{1,2,3, \dots, p+q\}$ แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งมีสมบัติว่า เซตของน้ำหนักเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ G ในรูป $\{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ จะเท่ากับเซตของลำดับเลขคณิต $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$ เมื่อ $a > 0$ และ $d \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้ถ้า $f\big(V(G)\big) = \{1,2,3, \dots, p\}$ แล้วจะเรียก f ว่าการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ G โครงงานนี้สร้างการกำกับทั้งหมดบน $C_3 \square P_n$ และ $C_n \square P_2$ แล้วพิสูจน์ว่าการกำกับทั้งหมดนี้เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(3n+4, 2)$ บนเส้นเชื่อมของ $C_3 \square P_n$ เมื่อ $n \geq 2$ และเป็นการกำกับทั้งหมดนี้เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $\left(5\left(\frac{n+1}{2}\right), 2\right)$ บนเส้นเชื่อมของ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต บุญณิตา สุวรรณชาตรี

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน

ปีการศึกษา 2562

5933528823 : MAJOR MATHEMATIC

KEYWORDS : (a,d)-edge antimagic total labeling, super (a,d)-edge antimagic total labeling, Cartesian product of graphs

BUNNITA SUWANCHATREE : Super (a,d)-edge antimagic total labeling of graphs $C_3 \square P_n$ where $n \geq 2$ and $C_n \square P_2$ where n is odd such that $n \geq 3$. ADVISOR : ASSOC. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 21 pp.

Let a graph $G = (V(G), E(G))$ having $|V(G)| = p$ and $|E(G)| = q$. Define an (a,d)-edge antimagic total labeling of a graph G to be a bijective function f mapping from $V(G) \cup E(G)$ to $\{1,2,3,\dots,p+q\}$ such that the set of weights of all edges in G, $\{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$, equals to the set of arithmetic progression $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$, where $a > 0$ and $d \geq 0$ are two integers. Furthermore, f is called a super (a,d)-edge antimagic total labeling of G if $f\big(V(G)\big) = \{1,2,3,\dots,p\}$. This project constructs total labelings for $C_3 \square P_n$ and $C_n \square P_2$. Then, prove that it is a super $(3n+4, 2)$-edge antimagic total labeling for $C_3 \square P_n$ where $n \geq 2$ and a super $\left(5\left(\frac{n+1}{2}\right), 2\right)$-edge antimagic total labeling for $C_n \square P_2$ where n is an odd integer such that $n \geq 3$.

Department : Mathematic and Computer Science Student's Signature Bunnita Suwanchatree

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

ในการดำเนินงานครั้งนี้ได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่านด้วยกัน จึงขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน พร้อมทั้งให้ความรู้ คำปรึกษาแนะนำ สละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้า ดูแลเอาใจใส่ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ และให้ความช่วยเหลือหลายสิ่งหลายอย่างตั้งแต่การเริ่มต้นทำโครงงานจนกระทั่งทำโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ตลอดจนขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ และอาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน และได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขปรับปรุงโครงงานนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัว รวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคน ที่คอยให้กำลังใจ คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่าง ๆ มาตลอดการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

สารบัญภาพ

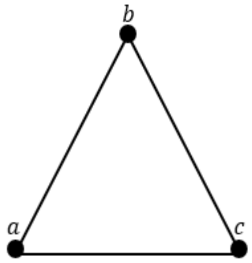
หน้า

บทที่ 1

บทนำและความรู้พื้นฐาน

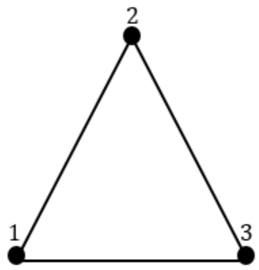
ในโครงงานนี้ กราฟทั้งหมดที่พิจารณาเป็นกราฟจำกัด ไม่ระบุทิศทาง และเป็นกราฟอย่างง่าย สำหรับกราฟ G ให้ $V(G)$ เป็น เซตของจุดยอดของ G และ $E(G)$ คือ เซตของเส้นเชื่อมของ G ซึ่ง $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = q$

ตัวอย่างที่ 1.1 กราฟ $G = (V(G), E(G))$ ที่มี $V(G) = \{a, b, c\}$ และ $E(G) = \{ab, bc, ac\}$

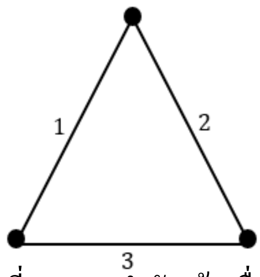


ภาพที่ 1.1 กราฟ G

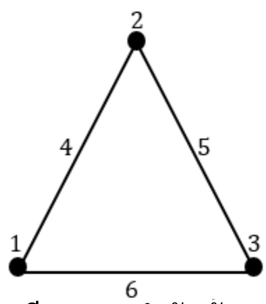
การกำกับของกราฟ G คือ การสร้างฟังก์ชันที่ส่งจากส่วนประกอบของกราฟไปยังเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่มีสมบัติพิเศษบางประการ ซึ่งถ้าโดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจุดยอดของกราฟ จะเรียกว่า การกำกับจุดยอด และถ้าโดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของเส้นเชื่อมของกราฟ จะเรียกว่า การกำกับเส้นเชื่อม ยิ่งไปกว่านั้นถ้าโดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจุดยอดและเส้นเชื่อม หรือ $V(G) \cup E(G)$ จะเรียกว่า การกำกับทั้งหมด



ภาพที่ 1.2 การกำกับจุดยอด



ภาพที่ 1.3 การกำกับเส้นเชื่อม



ภาพที 1.4 การกำกับทังหมด

ซึ่งในโครงงานนี้สนใจศึกษาการกำกับทั้งหมดที่มีสมบัติพิเศษ ซึ่งเรียกว่า การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์แบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 [6] *การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์แบบ* (a, d) *บนเส้นเชื่อมของกราฟ* G ((a, d)*-edge antimagic total labeling of graphs* G) คือ ฟังก์ชัน f ที่ส่งจาก $V(G) \cup E(G)$ ไปยัง $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ แบบสมนัยต่อหนึ่ง ซึ่งมีสมบัติว่า เซตของน้ำหนักเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ G ในรูป $\{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ จะเท่ากับเซตของลำดับเลขคณิต $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ เมื่อ $a > 0$ และ $d \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม

นอกจากนี้ ถ้า $f(V(G)) = \{1,2,3,\dots,p\}$ แล้ว f คือ *การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ* (a,d) *บนเส้นเชื่อมของกราฟ* G (*super* (a,d)*-edge antimagic total labeling of graphs* G)

การกำกับนี้ศึกษาครั้งแรกโดย Simanjuntak และคณะ [6] ซึ่งเป็นส่วนขยายของการกำกับอย่างมหัศจรรย์บนเส้นเชื่อมที่นิยามโดย Kotzig และ Roza [4] และแนวคิดของการกำกับอย่างมหัศจรรย์แบบยวดยิ่งบนเส้นเชื่อมที่นิยามโดย Enomoto และคณะ [3]

ใน ค.ศ. 2008 Dafik และคณะ [2] ได้ศึกษาการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a,d) บนเส้นเชื่อมของกราฟไม่เชื่อมโยงบางชนิด และได้ผลว่า กราฟ mC_n มีการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a,d) บนเส้นเชื่อม ก็ต่อเมื่อ

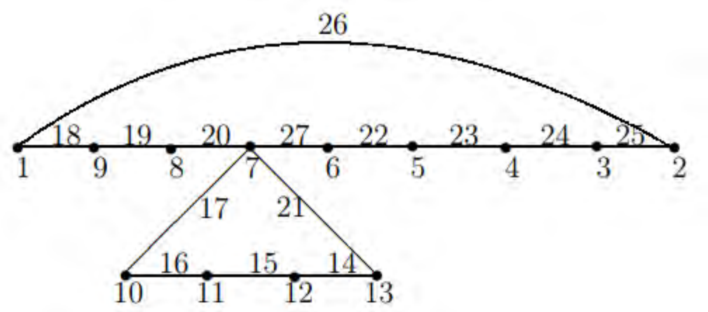
(1) $d \in \{0,2\}$ และ m,n เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $m,n \geq 3$ หรือ

(2) $d = 1$ สำหรับ $m \geq 2$ และ $n \geq 3$

อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

นอกจากนี้ [2] ยังได้สร้างการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(2mn+2,1)$ และ $(mn+m+3,3)$ บนเส้นเชื่อมของกราฟ mP_n สำหรับ $m \geq 2$ และ $n \geq 2$ อีกด้วย

ใน ค.ศ 2012 Arumugam และ Nalliah [1] ได้ศึกษาการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a,d) บนเส้นเชื่อมของกราฟมิตรภาพ $\mathcal{F}_n$ และ กราฟมิตรภาพแบบทั่วไป $\mathcal{F}_{2,p}$ เมื่อ $p \geq 5$ โดยตัวอย่างในภาพที่ 1.5 เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(28,1)$ บนเส้นเชื่อมของ $\mathcal{F}_{2,13}$



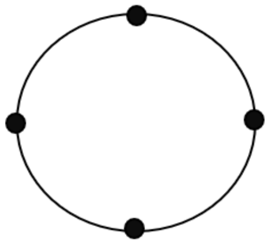
ภาพที่ 1.5 การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(28,1)$ บนเส้นเชื่อมของ $\mathcal{F}_{2,13}$

ในโครงงานนี้ จะศึกษาการกำกับดังกล่าวบนกราฟที่นิยามจากวงและวิถี ซึ่งบทนิยามเกี่ยวกับกราฟที่จะใช้ในโครงงานนี้ได้รวบรวมอยู่ในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1.2 [5] กราฟวิถี P_n คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด และสามารถวาดแผนภาพแสดงกราฟนี้ได้โดยการวาดจุดยอดเรียงกันในลักษณะที่จุดยอดสองจุดเป็นจุดยอดประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทั้งสองวางติดกัน

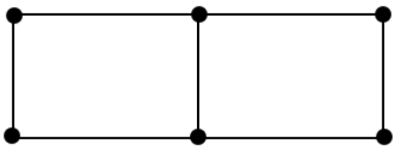
ภาพที่ 1.6 กราฟเส้น P_4

บทนิยามที่ 1.3 [5] กราฟวง C_n คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด คือ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ และมีเส้นเชื่อม n เส้น ซึ่งในการวาดแผนภาพแสดงกราฟนี้ ทำได้โดยวางจุดยอดรอบวงกลมในลักษณะที่จุดยอดสองจุดเป็นจุดยอดที่ประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทั้งสองวางติดกันบนวงกลม ในโครงงานนี้เราจะเขียน C_n เป็น $v_1 v_2 v_3 \cdots v_n$ เรียงลำดับตามจุดยอดที่เรียงติดกันบนวงกลม และตั้งชื่อจุดยอดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

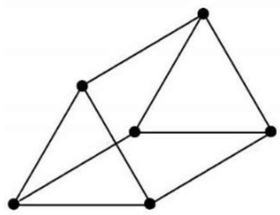


ภาพที่ 1.7 กราฟวง C_4

บทนิยามที่ 1.4 [5] ผลคูณคาร์ทีเซียนของ $G = (V(G), E(G))$ และ $H = (V(H), E(H))$ เขียนแทนด้วย $G \square H$ คือ กราฟที่มีเซตของจุดเป็น $V(G) \times V(H)$ โดยที่จุดยอด (u, v) และ (u', v') จะเป็นจุดยอดที่ประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ (1) $u = u'$ และ $vv' \in E(H)$ หรือ (2) $v = v'$ และ $uu' \in E(G)$

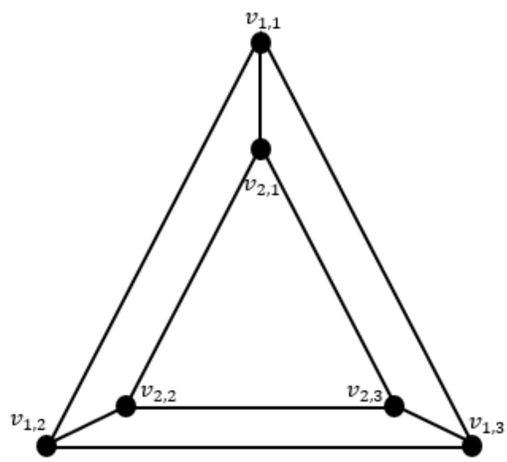


ภาพที่ 1.8 $P_2 \square P_3$



ภาพที่ 1.9 $C_3 \square P_2$

ในโครงงานนี้ สนใจศึกษา $C_3 \square P_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 2$ โดยอาจพิจารณาได้ว่า $C_3 \square P_n$ เกิดจากวง C_3 จำนวน n วง คือ วง $v_{1,1}v_{1,2}v_{1,3}$ เป็นวงนอกสุด และวง $v_{2,1}v_{2,2}v_{2,3}$, $v_{3,1}v_{3,2}v_{3,3}$, $v_{4,1}v_{4,2}v_{4,3}$, ... เป็นวงซ้อน ๆ กันจนถึงวง $v_{n,1}v_{n,2}v_{n,3}$ เป็นวงใน และสำหรับ $i \in \{1,2,3, \dots, n-1\}$ มีเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับจุดยอด $v_{i,1}$, $v_{i,2}$ และ $v_{i,3}$ กับจุดยอด $v_{i+1,1}$, $v_{i+1,2}$ และ $v_{i+1,3}$ ตามลำดับ และสนใจศึกษา $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ โดยอาจพิจารณาได้ว่า $C_n \square P_2$ เกิดจากวง C_n จำนวน 2 วง คือ วง $v_{1,1}v_{1,2}v_{1,3} \dots v_{1,n}$ เป็นวงนอก และวง $v_{2,1}v_{2,2}v_{2,3} \dots v_{2,n}$ เป็นวงใน และสำหรับ $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ มีเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับจุดยอด $v_{1,i}$ กับจุดยอด $v_{2,i}$



ภาพที่ 1.10 $C_3 \square P_2$

บทที่ 2

$C_3\Box P_n$

ในบทนี้จะสร้างการกำกับทั้งหมดของกราฟ $C_3\Box P_n$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 แล้วพิสูจน์ว่าการกำกับนี้เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(3n+4,2)$ บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3\Box P_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \geq 2$

ขั้นตอนวิธีที่ 2.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \geq 2$ ดังนั้น $|V(C_3\Box P_n)| = 3n$ และ $|E(C_3\Box P_n)| = 6n-3$ นิยาม $f: V(C_3\Box P_n) \cup E(C_3\Box P_n) \to \{1,2,3,\ldots,9n-3\}$ ดังนี้

(1) $f(v_{i,1}) = \begin{cases} 3i-1; & i \in \left\{2,4,6,\ldots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\} \\ 3i; & i \in \left\{1,3,5,7,\ldots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\} \end{cases}$

(2) $f(v_{i,2}) = \begin{cases} 3i; & i \in \left\{2,4,6,\ldots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\} \\ 3i-2; & i \in \left\{1,3,5,7,\ldots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\} \end{cases}$

(3) $f(v_{i,3}) = \begin{cases} 3i-2; & i \in \left\{2,4,6,\ldots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\} \\ 3i-1; & i \in \left\{1,3,5,7,\ldots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\} \end{cases}$

(4) $f(v_{2i,1}v_{2i,3}) = 3n+7+12(i-1);\ i \in \left\{1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$

(5) $f(v_{2i,2}v_{2i,3}) = 3n+7+12(i-1)+1;\ i \in \left\{1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$

(6) $f(v_{2i,1}v_{2i,2}) = 3n+7+12(i-1)+2;\ i \in \left\{1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$

(7) $f(v_{2i+1,2}v_{2i+1,3}) = 3n+13+12(i-1);\ i \in \left\{0,1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}$

(8) $f(v_{2i+1,1}v_{2i+1,2}) = 3n+13+12(i-1)+1;\ i \in \left\{0,1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}$

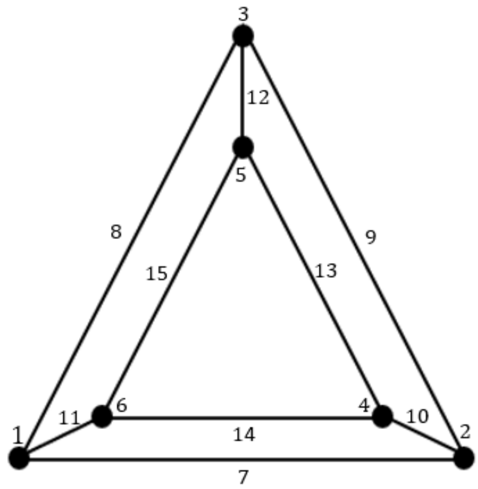
(9) $f(v_{2i+1,1}v_{2i+1,3}) = 3n+13+12(i-1)+2;\ i \in \left\{0,1,2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right\}$

(10) $f(v_{i+1,3}v_{i+2,3}) = 3n+10+6(i-1);\ i \in \{0,1,2,3,\ldots,n-2\}$

(11) $f(v_{i+1,2}v_{i+2,2}) = 3n+10+6(i-1)+1;\ i \in \{0,1,2,3,\ldots,n-2\}$

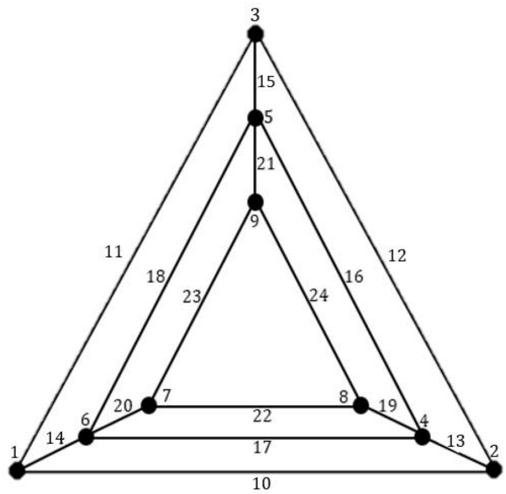
(12) $f(v_{i+1,1}v_{i+2,1}) = 3n+10+6(i-1)+2;\ i \in \{0,1,2,3,\ldots,n-2\}$

ตัวอย่างที่ 2.1 จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 จะสามารถกำกับจุดและเส้นของ $C_3\Box P_2$ ได้ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 การกำกับจุดยอดและเส้นเชื่อมของ $C_3 \square P_2$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ 2.1

ตัวอย่างที่ 2.2 จากขั้นตอนวิธีที่ 2.1 จะสามารถกำกับจุดและเส้นของ $C_3 \square P_3$ ได้ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 การกำกับจุดยอดและเส้นเชื่อมของ $C_3 \square P_3$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ 2.1

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับ $n \geq 2$ การกำกับทั้งหมดของ $C_3 \square P_n$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 2.1 เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของ $C_3 \square P_n$ โดยที่ $a = 3n + 4$ และ $d = 2$

บทพิสูจน์ จะแบ่งการพิสูจน์เป็นสามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(C_3 \square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3, \dots, 3n\}$

สำหรับจำนวนเต็ม n ที่ $n \geq 2$ ให้ $y \in \{1,2,3, \dots, 3n\}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $n \geq 2$

<u>กรณีที่ 1</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i-5$ เลือก $v = v_{i-1,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,2}\right) = 3(i-1)-2 = 3i-5$

<u>กรณีที่ 2</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i-4$ เลือก $v = v_{i-1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,3}\right) = 3(i-1)-1 = 3i-4$

<u>กรณีที่ 3</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i-3$ เลือก $v = v_{i-1,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,1}\right) = 3(i-1) = 3i-3$

<u>กรณีที่ 4</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i-2$ เลือก $v = v_{i,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,3}\right) = 3i-2$

<u>กรณีที่ 5</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i-1$ เลือก $v = v_{i,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,1}\right) = 3i-1$

<u>กรณีที่ 6</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{2,4,6,\dots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ และ $y = 3i$ เลือก $v = v_{i,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,2}\right) = 3i$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $V(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3,\dots,3n\}$ และเนื่องจาก $|V(C_3\square P_n)| = 3n$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3,\dots,3n\}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

<u>กรณีที่ 1</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{3,5,7,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i-5$ เลือก $v = v_{i-1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,3}\right) = 3(i-1)-2 = 3i-5$

<u>กรณีที่ 2</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{3,5,7,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i-4$ เลือก $v = v_{i-1,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,1}\right) = 3(i-1)-1 = 3i-4$

<u>กรณีที่ 3</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{3,5,7,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i-3$ เลือก $v = v_{i-1,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i-1,2}\right) = 3(i-1) = 3i-3$

<u>กรณีที่ 4</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,3,5,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i-2$ เลือก $v = v_{i,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,2}\right) = 3i-2$

<u>กรณีที่ 5</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,3,5,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i-1$ เลือก $v = v_{i,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,3}\right) = 3i-1$

<u>กรณีที่ 6</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,3,5,\dots,2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right\}$ และ $y = 3i$ เลือก $v = v_{i,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{i,1}\right) = 3i$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $V(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3,\dots,3n\}$ และเนื่องจาก $|V(C_3\square P_n)| = 3n$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3,\dots,3n\}$

ขั้นที่ 2 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n+1, 3n+2, 3n+3,\dots,9n-3\}$

ให้ $y \in \{3n+1, 3n+2, 3n+3 \dots, 9n-3\}$

<u>กรณีที่ 1</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+7+12(k-1)$ เลือก $u = v_{2k,1}$ และ $v = v_{2k,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (4) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k,1}v_{2k,3}) = 3n+7+12(k-1)$

<u>กรณีที่ 2</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+7+12(k-1)+1$ เลือก $u = v_{2k,2}$ และ $v = v_{2k,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (5) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k,2}v_{2k,3}) = 3n+7+12(k-1)+1$

<u>กรณีที่ 3</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+7+12(k-1)+2$ เลือก $u = v_{2k,1}$ และ $v = v_{2k,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (6) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k,1}v_{2k,2}) = 3n+7+12(k-1)+2$

<u>กรณีที่ 4</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+13+12(k-1)$ เลือก $u = v_{2k+1,2}$ และ $v = v_{2k+1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (7) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k+1,2}v_{2k+1,3}) = 3n+13+12(k-1)$

<u>กรณีที่ 5</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+13+12(k-1)+1$ เลือก $u = v_{2k+1,1}$ และ $v = v_{2k+1,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (8) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k+1,1}v_{2k+1,2}) = 3n+13+12(k-1)+1$

<u>กรณีที่ 6</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n+13+12(k-1)+2$ เลือก $u = v_{2k+1,1}$ และ $v = v_{2k+1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (9) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{2k+1,1}v_{2k+1,3}) = 3n+13+12(k-1)+2$

<u>กรณีที่ 7</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le n-2$ และ $y = 3n+10+6(k-1)$ เลือก $u = v_{k+1,3}$ และ $v = v_{k+2,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (10) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{k+1,3}v_{k+2,3}) = 3n+10+6(k-1)$

<u>กรณีที่ 8</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le n-2$ และ $y = 3n+10+6(k-1)+1$ เลือก $u = v_{k+1,2}$ และ $v = v_{k+2,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (11) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{k+1,2}v_{k+2,2}) = 3n+10+6(k-1)+1$

<u>กรณีที่ 9</u> มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \le k \le n-2$ และ $y = 3n+10+6(k-1)+2$ เลือก $u = v_{k+1,1}$ และ $v = v_{k+2,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (12) จะได้ว่า $f(uv) = f(v_{k+1,1}v_{k+2,1}) = 3n+10+6(k-1)+2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $E(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n+1, 3n+2, 3n+3,\dots,9n-3\}$ และเนื่องจาก $|E(C_3\square P_n)| = 6n-3$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n+1, 3n+2, 3n+3,\dots,9n-3\}$

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า w เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_3\square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n+4+2(m-1)|\ 1\le m\le 6n-3\}$

ให้ $y\in\{3n+4+2(m-1)|\ 1\le m\le 6n-3\}$

<u>กรณีที่ 1</u> $m\equiv 0 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1\le k\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2(12k-1)$ เลือก $u=v_{2k,1}$ และ $v=v_{2k+1,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) และ (12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k,1})+f(v_{2k+1,1})+f(v_{2k,1}v_{2k+1,1}) \\ &= (3(2k)-1)+3(2k+1)+(3n+10+6(2k-1-1)+2) \\ &= 3n+4+2(12k-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 2</u> $m\equiv 1 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+1)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,2}$ และ $v=v_{2k+1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2), (3) และ (7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,2})+f(v_{2k+1,3})+f(v_{2k+1,2}v_{2k+1,3}) \\ &= (3(2k+1)-2)+(3(2k+1)-1)+(3n+13+12(k-1)) \\ &= 3n+4+2((12k+1)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 3</u> $m\equiv 2 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+2)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,1}$ และ $v=v_{2k+1,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1), (2) และ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,1})+f(v_{2k+1,2})+f(v_{2k+1,1}v_{2k+1,2}) \\ &= 3(2k+1)+(3(2k+1)-2)+(3n+13+12(k-1)+1) \\ &= 3n+4+2((12k+2)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 4</u> $m\equiv 3 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+3)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,1}$ และ $v=v_{2k+1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1), (3) และ (9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,1})+f(v_{2k+1,3})+f(v_{2k+1,1}v_{2k+1,3}) \\ &= 3(2k+1)+(3(2k+1)-1)+(3n+13+12(k-1)+2) \\ &= 3n+4+2((12k+3)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 5</u> $m\equiv 4 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+4)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,3}$ และ $v=v_{2k+2,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) และ (10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,3})+f(v_{2k+2,3})+f(v_{2k+1,3}v_{2k+2,3}) \\ &= (3(2k+1)-1)+(3(2k+1)-2)+\big(3n+10+6(2k-1)\big) \\ &= 3n+4+2((12k+4)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 6</u> $m\equiv 5 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+5)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,2}$ และ $v=v_{2k+2,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) และ (11) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,2})+f(v_{2k+2,2})+f(v_{2k+1,2}v_{2k+2,2}) \\ &= (3(2k+1)-2)+3(2k+2)+(3n+10+6(2k-1)+1) \\ &= 3n+4+2((12k+5)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 7</u> $m\equiv 6 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0\le k\le\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor$ และ $y=3n+4+2((12k+6)-1)$ เลือก $u=v_{2k+1,1}$ และ $v=v_{2k+2,1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1) และ (12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{2k+1,1})+f(v_{2k+2,1})+f(v_{2k+1,1}v_{2k+2,1}) \\ &= 3(2k+1)+(3(2k+2)-1)+(3n+10+6(2k-1)+2) \end{aligned}$$

$= 3n + 4 + 2((12k + 6) - 1)$

<u>กรณีที่ 8</u> $m \equiv 7 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n + 4 + 2((12k - 5) - 1)$ เลือก $u = v_{2k,1}$ และ $v = v_{2k,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1), (3) และ (4) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2k,1}) + f(v_{2k,3}) + f(v_{2k,1}v_{2k,3}) \\
&= (3(2k) - 1) + (3(2k) - 2) + \big(3n + 7 + 12(k - 1)\big) \\
&= 3n + 4 + 2((12k - 5) - 1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 9</u> $m \equiv 8 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n + 4 + 2((12k - 4) - 1)$ เลือก $u = v_{2k,2}$ และ $v = v_{2k,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2), (3) และ (5) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2k,2}) + f(v_{2k,3}) + f(v_{2k,2}v_{2k,3}) \\
&= 3(2k) + (3(2k) - 2) + (3n + 7 + 12(k - 1) + 1) \\
&= 3n + 4 + 2((12k - 4) - 1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 10</u> $m \equiv 9 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n + 4 + 2((12k - 3) - 1)$ เลือก $u = v_{2k,1}$ และ $v = v_{2k,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (1), (2) และ (6) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2k,1}) + f(v_{2k,2}) + f(v_{2k,1}v_{2k,2}) \\
&= (3(2k) - 1) + 3(2k) + (3n + 7 + 12(k - 1) + 2) \\
&= 3n + 4 + 2((12k - 3) - 1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 11</u> $m \equiv 10 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n + 4 + 2((12k - 2) - 1)$ เลือก $u = v_{2k,3}$ และ $v = v_{2k+1,3}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (3) และ (10) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2k,3}) + f(v_{2k+1,3}) + f(v_{2k,3}v_{2k+1,3}) \\
&= (3(2k) - 2) + (3(2k + 1) - 1) + (3n + 10 + 6(2k - 1 - 1)) \\
&= 3n + 4 + 2((12k - 2) - 1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 12</u> $m \equiv 11 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ และ $y = 3n + 4 + 2((12k - 1) - 1)$ เลือก $u = v_{2k,2}$ และ $v = v_{2k+1,2}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1 (2) และ (11) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2k,2}) + f(v_{2k+1,2}) + f(v_{2k,2}v_{2k+1,2}) \\
&= 3(2k) + (3(2k + 1) - 2) + (3n + 10 + 6(2k - 1 - 1) + 1) \\
&= 3n + 4 + 2((12k - 2) - 1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น w เป็นฟังก์ชันจาก $E(C_3 \square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n + 4 + 2(m - 1) \mid 1 \leq m \leq 6n - 3\}$ และเนื่องจาก $|E(C_3 \square P_n)| = 6n - 3 = |\{3n + 4 + 2(m - 1) \mid 1 \leq m \leq 6n - 3\}|$ จึงได้ว่า w เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_3 \square P_n)$ ไปทั่วถึง $\{3n + 4 + 2(m - 1) \mid 1 \leq m \leq 6n - 3\}$ $\square$

บทที่ 3

$C_n \square P_2$

ในบทนี้จะสร้างการกำกับทั้งหมดของกราฟ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 แล้วพิสูจน์ว่าการกำกับนี้ เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $\left(5\left(\frac{n+1}{2}\right), 2\right)$ บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

ขั้นตอนวิธีที่ 3.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ ดังนั้น $|V(C_n \square P_2)| = 2n$ และ $|E(C_n \square P_2)| = 3n$ นิยาม $f: V(C_n \square P_2) \cup E(C_n \square P_2) \to \{1,2,3, \dots, 5n\}$ ดังนี้

(1) $f(v_{1,2i-1}) = i \,;\, i \in \left\{1,2,3, \dots, \frac{n+1}{2}\right\}$

(2) $f(v_{1,2i}) = \frac{n+1}{2} + i \,;\, i \in \left\{1,2,3, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$

(3) $f(v_{2,2i}) = n + i \,;\, i \in \left\{1,2,3, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$

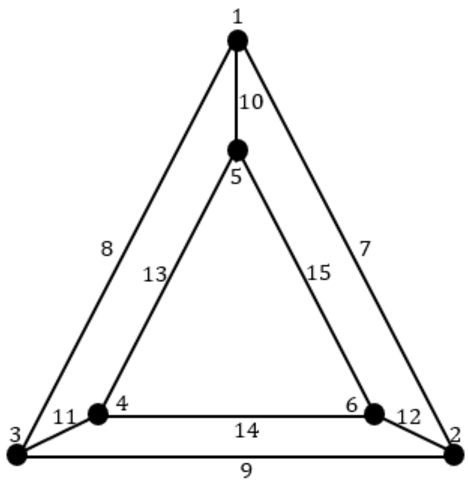
(4) $f(v_{2,2i-1}) = \frac{3n-1}{2} + i \,;\, i \in \left\{1,2,3, \dots, \frac{n+1}{2}\right\}$

(5) $f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = 2n + 1 + i \,;\, i \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$ โดยที่ $v_{1,0} = v_{1,n}$

(6) $f(v_{1,i}v_{2,i}) = 3n + i \,;\, i \in \{1,2,3, \dots, n\}$

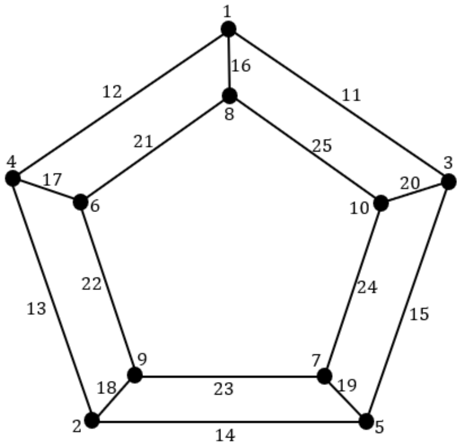
(7) $f(v_{2,i}v_{2,i+1}) = 4n + i \,;\, i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ โดยที่ $v_{2,n+1} = v_{2,1}$

ตัวอย่างที่ 3.1 จากขั้นตอนวิธีที่ 3.1 จะสามารถกำกับจุดและเส้นของ $C_3 \square P_2$ ได้ดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 การกำกับจุดยอดและเส้นเชื่อมของ $C_3 \square P_2$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ 3.1

ตัวอย่างที่ 3.2 จากขั้นตอนวิธีที่ 3.1 จะสามารถกำกับจุดและเส้นของ $C_5 \square P_2$ ได้ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 การกำกับจุดยอดและเส้นเชื่อมของ $C_5 \square P_2$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ 3.1

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ การกำกับทั้งหมดของ $C_n \square P_2$ ที่สร้างโดยขั้นตอนวิธี 3.1 เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของ $C_n \square P_2$ โดยที่ $a = 5\left(\frac{n+1}{2}\right)$ และ $d = 2$

บทพิสูจน์ ให้ n ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ จะแบ่งการพิสูจน์เป็นสามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3, \dots ,2n\}$

ให้ $y \in \{1,2,3, \dots ,2n\}$

<u>กรณีที่ 1</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,2,3, \dots , \frac{n+1}{2}\right\}$ และ $y = i$ เลือก $v = v_{1,2i-1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (1) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{1,2i-1}\right) = i$

<u>กรณีที่ 2</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,2,3, \dots , \frac{n-1}{2}\right\}$ และ $y = \frac{n+1}{2} + i$ เลือก $v = v_{1,2i}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (2) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{1,2i}\right) = \frac{n+1}{2} + i$

<u>กรณีที่ 3</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,2,3, \dots , \frac{n-1}{2}\right\}$ และ $y = n + i$ เลือก $v = v_{2,2i}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (3) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{2,2i}\right) = n + i$

<u>กรณีที่ 4</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \left\{1,2,3, \dots , \frac{n+1}{2}\right\}$ และ $y = \frac{3n-1}{2} + i$ เลือก $v = v_{2,2i-1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (4) จะได้ว่า $f(v) = f\left(v_{2,2i-1}\right) = \frac{3n-1}{2} + i$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $V(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3, \dots ,2n\}$ และเนื่องจาก $|V(C_n \square P_2)| = 2n$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $V(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{1,2,3, \dots ,2n\}$

ขั้นที่ 2 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 5n\}$

ให้ $y \in \{2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 5n\}$

<u>กรณีที่ 1</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ และ $y = 2n+1+i$ เลือก $u = v_{1,i}$ และ $v = v_{1,i+1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (5) จะได้ว่า $f(uv) = f\left(v_{1,i}v_{1,i+1}\right) = 2n+1+i$

<u>กรณีที่ 2</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ และ $y = 3n+i$ เลือก $u = v_{1,i}$ และ $v = v_{2,i}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (6) จะได้ว่า $f(uv) = f\left(v_{1,i}v_{2,i}\right) = 3n+i$

<u>กรณีที่ 3</u> มีจำนวนเต็ม i ที่ $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ และ $y = 4n+i$ เลือก $u = v_{2,i}$ และ $v = v_{2,i+1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (7) จะได้ว่า $f(uv) = f\left(v_{2,i}v_{2,i+1}\right) = 4n+i$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 5n\}$ และเนื่องจาก $|E(C_n \square P_2)| = 3n$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\{2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 5n\}$

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า w เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\left\{5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(m-1) \mid 1 \leq m \leq 3n\right\}$

ให้ $y \in \left\{5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(m-1) \mid 1 \leq m \leq 3n\right\}$

<u>กรณีที่ 1</u> m เป็นจำนวนเต็มคี่

<u>กรณีที่ 1.1</u> $1 \leq m \leq n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+1)-1)$ เลือก $u = v_{1,2k}$ และ $v = v_{1,2k+1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (1), (2) และ (5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{1,2k}) + f(v_{1,2k+1}) + f(v_{1,2k}v_{1,2k+1}) \\ &= \left(\frac{n+1}{2} + k\right) + (k+1) + (2n+1+2k) \\ &= 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+1)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 1.2</u> $n < m \leq 2n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+n)-1)$ เลือก $u = v_{1,2k}$ และ $v = v_{2,2k}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (2), (3) และ (6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w(uv) &= f(v_{1,2k}) + f(v_{2,2k}) + f(v_{1,2k}v_{2,2k}) \\ &= \left(\frac{n+1}{2} + k\right) + (n+k) + (3n+2k) \\ &= 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+n)-1) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 1.3</u> $2n < m \leq 3n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+2n-1)-1)$ เลือก $u = v_{2,2k-1}$ และ $v = v_{2,2k}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (3), (4) และ (7) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2,2k-1}) + f(v_{2,2k}) + f(v_{2,2k-1}v_{2,2k}) \\
&= \left(\tfrac{3n-1}{2} + k\right) + (n+k) + (4n+2k-1) \\
&= 5\left(\tfrac{n+1}{2}\right) + 2((2k+2n-1)-1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 2</u> m เป็นจำนวนเต็มคู่

<u>กรณีที่ 2.1</u> $1 \le m \le n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(2k-1)$ เลือก $u = v_{1,2k-1}$ และ $v = v_{1,2k}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (1), (2) และ (5) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{1,2k-1}) + f(v_{1,2k}) + f(v_{1,2k-1}v_{1,2k}) \\
&= k + \left(\tfrac{n+1}{2} + k\right) + (2n+1+2k-1) \\
&= 5\left(\tfrac{n+1}{2}\right) + 2(2k-1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 2.2</u> $n < m \le 2n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \frac{n+1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+n-1)-1)$ เลือก $u = v_{1,2k-1}$ และ $v = v_{2,2k-1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (1), (4) และ (6) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{1,2k-1}) + f(v_{2,2k-1}) + f(v_{1,2k-1}v_{2,2k-1}) \\
&= k + \left(\tfrac{3n-1}{2} + k\right) + (3n+2k-1) \\
&= 5\left(\tfrac{n+1}{2}\right) + 2((2k+n-1)-1)
\end{aligned}
$$

<u>กรณีที่ 2.3</u> $2n < m \le 3n$ เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k ที่ $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$ และ $y = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2((2k+2n)-1)$ เลือก $u = v_{2,2k}$ และ $v = v_{2,2k+1}$ โดยขั้นตอนวิธีที่ 3.1 (3), (4) และ (7) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(uv) &= f(v_{2,2k}) + f(v_{2,2k+1}) + f(v_{2,2k}v_{2,2k+1}) \\
&= (n+k) + \left(\tfrac{3n-1}{2} + k + 1\right) + (4n+2k) \\
&= 5\left(\tfrac{n+1}{2}\right) + 2((2k+2n)-1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น w เป็นฟังก์ชันจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\left\{5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(m-1) \mid 1 \le m \le 3n\right\}$ และเนื่องจาก $|E(C_n \square P_2)| = 3n = \left|\left\{5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(m-1) \mid 1 \le m \le 3n\right\}\right|$ จึงได้ว่า w เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก $E(C_n \square P_2)$ ไปทั่วถึง $\left\{5\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2(m-1) \mid 1 \le m \le 3n\right\}$ □

บทที่ 4

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ในโครงงานนี้ได้สร้างการกำกับทั้งหมดของกราฟ $C_3 \square P_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนบวกที่ $n \geq 2$ และพิสูจน์ว่าการกำกับทั้งหมดนี้เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $(3n+4, 2)$ บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_3 \square P_n$ นอกจากนี้ยังได้สร้างการกำกับทั้งหมดของกราฟ $C_n \square P_2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$ และพิสูจน์ว่าการกำกับทั้งหมดนี้เป็นการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ $\left(5\left(\frac{n+1}{2}\right), 2\right)$บนเส้นเชื่อมของกราฟ $C_n \square P_2$

ผู้ที่สนใจอาจพยายามพิจารณาการมีอยู่ของการกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟในลักษณะคล้ายคลึงกับโครงงานนี้ เช่น กราฟ $C_n \square P_m$ เมื่อ $n \geq 3$ และ $m \geq 2$

เอกสารอ้างอิง

[1] S. Arumugam, M. Nalliah, Super (a, d)-edge antimagic total labeling of friendship graphs, Australasian Journal of Combinatorics. 53 (2012) 237-243.

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan, M. Bača, Super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, Discrete Math. 309 (2009) 4909-4915.

[3] H. Enomoto, A.S. Lladó, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super edgemagic graphs, SUT J. Math. 34 (1998) 105–109.

[4] A. Kotzig, A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, Canad. Math. Bull. 13 (1970) 451–461.

[5] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, McGarw-Hill International Editional, Fourth Edition, 1999.

[6] R. Simanjuntak, F. Bertault, M. Miller, Two new (a, d)-EAT graph labelings, in: Proc. of Eleventh Austrailian Workshop of Combinatorial Algorithm, 2000, pp. 179–189.

ภาคผนวก

The Project Proposal of Course 2301399 Project Proposal

Academic Year 2019

Project Title (Thai)	การกำกับทั้งหมดอย่างปฏิมหัศจรรย์ยวดยิ่งแบบ (a, d) บนเส้นเชื่อมของกราฟบางชนิด
Project Title (English)	Super (a, d)-edge antimagic total labeling of some graphs
Project Advisor	Associate Professor Ratinan Boonklurb, Ph.D.
By	Miss Bunnita Suwanchatree ID 5933528823
	Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science
	Faculty of Science, Chulalongkorn University

Background and Rationale

All graphs considred in this project are finite, undirected and simple. For a graph G, let $V(G)$ and $E(G)$ denote the vertex set and the edge set of G, respectively such that $|V(G)| = p$ and $|E(G)| = q$.

A labeling of graph G is any mapping that sends some set of graph elements to a set of non-negative integers. If the domain is the vertex set or the edge set, the labelings are called vertex or edge labelings, respectively. Moreover, if the domain is $V(G) \cup E(G)$ then the labling is called a total labeling.

An (a,d)-edge antimagic total labeling of a graph G is a bijective function $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, p+q\}$ such that the set of edge weights of all edges in G, $\{w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v), uv \in E(G)\}$, forms an arithmetic progression $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$, where $a \geq 0$ and $d > 0$ are two fixed integers. Furthermore, f is a super (a, d)-edge antimagic total labeling of G if $f(V(G)) = \{1,2,3, \dots, p\}$. This labeling was first introduced by Simanjuntak et al. in [5] as a natural extension of edge-magic labeling defined by Kotzig and Roza [4] and the notion of super edgemagic labeling which was defined by Enomoto et al. in [3].

Many other researchers investigated different forms of super (a, d)-edge antimagic total labeling graphs, for examples, friendship, wheel, fan, complete graph, complete bipartite graph in [1] and disconnected graph in [2].

In this project, we study super (a, d)-edge antimagic total labeling of some graphs such as the Cartesian product of path and cycle.

Objectives

Construct super (a, d)-edge antimagic total labeling for some graphs such as the Cartesian product of path and cycle.

Scope

We study only super (a, d)-edge antimagic total labeling of graph.

Project Activities

1. Study super (a, d)-edge antimagic labeling.
2. Construct total labeling of some graphs such as the Cartesian product of path and cycle.
3. Prove that the total labeling constructed is super (a, d)-edge antimagic total labeling.
4. Conclude results and write a report.

Research Plan

Project Activities	Month, 2019					Month, 2020			
	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.
1. Study super (a, d)-edge antimagic labeling.									
2. Construct total labeling of some graphs such as the Cartesian product of path and cycle.									
3. Prove that the total labeling constructed is super (a, d)-edge antimagic total labeling.									
4. Conclude results and write a report.									

Benefits

Obtain super (a, d)-edge antimagic total labeling of some graphs such as the Cartesian product of path and cycle.

Equipment

1. Computer
2. Paper
3. Printer
4. Microsoft Word

Budget

1.	Paper A4	1,000	Bath
2.	Battery Notebook	1,500	Bath
3.	Wireless mouse	600	Bath
4.	Stationery	900	Bath
5.	Storage device	1,000	Bath

References

[1] M. Bača, Y. Lin, M. Miller, M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, Discrete Math. 307 (2007) 1231-1244.

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan, M. Bača, Super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, Discrete Math. 309 (2009) 4909-4915.

[3] H. Enomoto, A.S. Llad´o, T. Nakamigawa, G. Ringel, Super edgemagic graphs, SUT J. Math. 34 (1998) 105–109.

[4] A. Kotzig, A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, Canad. Math. Bull. 13 (1970) 451–461.

[5] R. Simanjuntak, F. Bertault, M. Miller, Two new (a, d)-EAT graph labelings, in: Proc. of Eleventh Austrailian Workshop of Combinatorial Algorithm, 2000, pp. 179–189.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวบุญณิตา สุวรรณชาตรี

รหัสนิสิต 5933528823

สาขาวิชา คณิตาศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย