ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

นายนพคุณ ศรีมโนธรรม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

INTERVAL REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM

Mr.Nophakhun Srimanotham

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
โดย	นายนพคุณ ศรีมโนธรรม
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

นายนพคุณ ศรีมโนธรรม : ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง (INTERVAL REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 59 หน้า

ในวงการเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์ การคำนวณต้องการความถูกต้องสูงและมีความซับซ้อนมาก อีกทั้งเรายังต้องการความแม่นยำในการคำนวณเพิ่มมากขึ้นอีกด้วย ซึ่งเราสามารถเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณได้โดยการเพิ่มจำนวนของเลขทศนิยม สำหรับปัญหาที่เกิดจากความผิดพลาดของข้อมูลขาเข้าและปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษ เราสามารถแก้ไขได้โดยการคำนวณเลขแบบช่วงแทนการคำนวณจากตัวเลขนั้นโดยตรง เพราะระบบแทนจำนวนแบบช่วงนั้นมีความสามารถในการควบคุมปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษได้ ยิ่งไปกว่านั้น เรายังสนใจการทำงานของระบบจำนวนบนการทำงานของระบบแอนะล็อกเพราะว่าการคำนวณบนระบบจำนวนแบบแอนะล็อกนั้นเวลาในการคำนวณจะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของข้อมูล แต่ว่าข้อเสียที่สำคัญของระบบจำนวนแอนะล็อกนั้น คือ สัญญาณรบกวนในวงจรอาจส่งผลกระทบต่อระบบการคำนวณได้ซึ่งจะอยู่ในรูปของค่าความผิดพลาด ในปี 2547 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนได้ถูกนำเสนอขึ้น เพื่อลดค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดให้เป็นค่าคงที่

ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง โดยผลลัพธ์ทางทฤษฎีแสดงให้เห็นว่าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบนั้นสามารถกู้ได้ภายใต้ขอบเขตที่กำหนด ซึ่งใช้สามสัญญาณแอนะล็อกในการนำเสนอจำนวนแต่ละจำนวน สองสัญญาณสำหรับการแทนจำนวนแบบช่วงและอีกหนึ่งสัญญาณสำหรับดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน รวมถึงการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานเช่น การบวก ลบ คูณ และหารได้ถูกนำเสนอในงานวิจัยนี้ด้วย

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต นพคุณ ศรีมโนธรรม
สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Athasit Surarerks
ปีการศึกษา 2549

4770315021 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEY WORD : INTERVAL REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM / ANALOG NUMBER SYSTEM / ANALOG ARITHMETIC / ERROR RECOVERY / INTERVAL ARITHMETIC

NOPHAKHUN SRIMANOTHAM : INTERVAL REDUNDANT ANALOG NUMBER SYSTEM. THESIS ADVISOR : ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 59 pp.

In computer arithmetic domain, high complexity and accuracy operations are needed. More accuracy numerical computation becomes an important problem. In fact, additional digits can increase the precision of number. For the problem that inputs are probably non exact data and round off error problem, interval arithmetic can be applied in order to represent such inputs. Interval arithmetic provides the ability to solve the problems because it enable to control and monitor round off error problem. In addition, we are interested in analog number system because computational time does not depend on size of the inputs. But one major problem in analog computing is an error which comes from system noise in the circuit. In 2004, a redundant analog number system was proposed to reduce an error recovery time complexity which is a constant time.

This thesis proposes an interval redundant analog number system. Theoretical results show that the error from noise can be recovered under the condition of error bound. Interval number is represented by three signals, two are interval number signals and another one is redundant signal. Fundamental arithmetic operations such as addition, subtraction, multiplication and division are also introduced in this work.

Department ....Computer Engineering.... Student's signature ....นพคุณ ศรีมโนธรรม....

Field of study ....Computer Engineering.... Advisor's signature ....Athasit Surarerks....

Academic year ....2006....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างยิ่งจาก อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง และคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ให้ความเมตตา ช่วยเหลือ รวมทั้งโอกาสและสิ่งที่ดีแก่ผู้วิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

ท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจสำคัญ และขอขอบคุณ เพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ทุกคน ที่เปรียบเสมือนแรงผลักดันและให้ความช่วยเหลือในทุกๆ ด้านจนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ .... ฉ

สารบัญ .... ช

สารบัญตาราง .... ฌ

สารบัญภาพ .... ฎ

บทที่

1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย 3

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย 3

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย 3

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์ 4

2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 5

2.1 เลขคณิตแบบช่วง 5

2.2 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของเลขคณิตแบบช่วง 5

2.3 ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง 6

2.4 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน 9

3 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 12

3.1 บทกล่าวนำ 12

3.2 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 13

3.3 การกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 16

3.4 ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับ
ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 19

3.5 การประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากันของ
ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 20

3.6 การแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่ไม่เท่ากันของ
ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 24

บทที่ หน้า

3.7 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของ
ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....26
3.7.1 ตัวดำเนินการบวกของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....27
3.7.2 ตัวดำเนินการลบของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....30
3.7.3 ตัวดำเนินการคูณของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....33
3.7.4 ตัวดำเนินการหารของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....38
3.8 สรุป....41

4 บทวิเคราะห์ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....43
4.1 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อผลลัพธ์หลังจากการ
กู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....43
4.2 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อระบบในการแปลงดิจิตเซต
ด้วยค่าฐานที่มีค่าไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....47
4.3 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อช่วงของผลลัพธ์หลังจากการ
กู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง....49

5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ....53
5.1 สรุปผลงานวิจัย....53
5.2 ข้อเสนอแนะ....54

อภิธานศัพท์....55
รายการอ้างอิง....57
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์....59

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 แสดงถึงการทำงานของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องและการกู้ค่าความผิดพลาด โดยที่ระบบมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 4% 9
2.2 แสดงถึงการทำงานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนและการกู้ค่าความผิดพลาดโดยที่ระบบมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 25% 11
3.1 แสดงรูปแบบการแทนจำนวนของ X = [11.73, 14.86] บนระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 15
3.2 แสดงผลลัพธ์ของจำนวนจริงแบบช่วง X หลังได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดในแต่ละดิจิตเป็น 25% เท่ากันทั้งระบบ 16
3.3 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในระบบที่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 3% เท่ากันทั้งระบบ 19
3.4 แสดงผลลัพธ์จากการประมาณช่วงใกล้เคียงของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าความผิดพลาดเป็น 3% 4% และ 5% ตามลำดับ 24
3.5 แสดงการแปลงค่าฐานของ X = [43.61, 45.18] บนฐาน 10 ไปยังฐานอื่นๆ 26
3.6 แสดงการดำเนินการบวกของ X = [13.39, 16.84] และ Y = [-4.16, 5.29] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 30
3.7 แสดงการดำเนินการลบของ X = [-5.29, -4.16] และ Y = [-13.39, 16.84] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 33
3.8 แสดงการดำเนินการคูณของ X = [2.11, 3.76] และ Y = [5.38, 7.49] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 37
3.9 แสดงการดำเนินการหารของ X = [2.11, 3.76] และ Y = [5.38, 7.49] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 41
4.1 แสดงความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์จริงสำหรับระบบที่มีค่าความผิดพลาดไม่เท่ากัน 47
4.2 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดหลังจากการแปลงค่าฐานโดยไม่ผ่านการกู้ค่าความผิดพลาดมาก่อน 49
4.3 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ 51
4.4 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ 51
4.5 แสดงช่วงผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียงเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีศึกษาที่ 1 52

ตารางที่ หน้า

4.6 แสดงช่วงผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียงเปรียบเทียบกับ
ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีศึกษาที่ 2 52

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

3.1 แบบจำลองการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบ
จำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง 27

4.1 แสดงเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ
กับผลลัพธ์จริงเปรียบเทียบกับค่าฐาน 46

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากในปัจจุบันโปรแกรมประยุกต์คอมพิวเตอร์มีความซับซ้อนเพิ่มมากขึ้น ทำให้การประมวลผลหาผลลัพธ์ที่ถูกต้องแม่นยำเป็นปัญหาที่สำคัญในการคำนวณ โดยทั่วไปปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการเพิ่มจำนวนหลักของเลขทศนิยมที่ใช้ในการคำนวณ แต่ว่าวิธีนี้จะทำให้คอมพิวเตอร์ต้องประมวลผลมากขึ้น ทำให้ในบางครั้งต้องมีการปัดเศษทศนิยมทิ้งเพื่อลดภาระงานและเวลาที่ใช้ในการทำงาน ซึ่งตรงจุดนี้อาจทำให้เกิดปัญหาในการคำนวณขึ้นได้ เพราะการปัดเศษทศนิยมอาจทำให้ค่าตัวเลขมีความผิดเพี้ยนไปและเมื่อนำค่าดังกล่าวไปคำนวณต่อ อาจเป็นสาเหตุให้ผลลัพธ์จากการคำนวณมีความผิดเพี้ยนไปได้ [1] โดยปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการใช้เลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic) เพราะเลขคณิตแบบช่วงจะแสดงตัวเลขเป็นช่วงด้วยจำนวนสองจำนวนนั่นคือ ขอบเขตล่าง (lower endpoint) และขอบเขตบน (upper endpoint) [2] ทำให้การคำนวณแบบช่วงมีความสามารถในการควบคุมและตรวจสอบปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษ (round-off error) ได้ อีกทั้งยังสามารถรับประกันได้ว่าคำตอบที่ถูกต้องจะอยู่ในช่วงคำตอบที่คำนวณได้อย่างแน่นอน [3] โดยประสิทธิภาพของการคำนวณแบบช่วงจะวัดจากระยะห่างระหว่างขอบเขตล่างกับขอบเขตบน ซึ่งอัลกอริทึมการคำนวณแบบช่วงที่มีประสิทธิภาพจะสามารถทำให้ระยะห่างระหว่างขอบเขตล่างกับขอบเขตบนลดลงได้ แต่ในทางตรงกันข้ามอัลกอริทึมการคำนวณแบบช่วงที่ไม่มีประสิทธิภาพจะทำให้ระยะห่างระหว่างขอบเขตบนกับขอบเขตล่างขยายออกไป [4] โดยสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [5]

การเพิ่มความเร็วในการทำงานของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถทำได้หลายวิธี ยกตัวอย่างเช่น การเพิ่มความเร็วของสัญญาณนาฬิกา หรือการเร่งการทำงานของฮาร์ดแวร์ เป็นต้น แต่จริงๆ แล้วการเพิ่มความเร็วในการทำงานยังสามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง คือ การพัฒนาอัลกอริทึมที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งงานวิจัยในด้านนี้ส่วนใหญ่จะมุ่งเน้นไปที่การพัฒนาอัลกอริทึมการคำนวณบนระบบดิจิทัล (digital) และแอนะล็อก (analog) สำหรับงานวิจัยนี้ได้มุ่งเน้นไปที่การพัฒนาอัลกอริทึมการคำนวณบนระบบแอนะล็อก โดยข้อดีของการทำงานบนระบบแอนะล็อก คือ การคำนวณบนระบบแอนะล็อกสามารถกระทำได้แบบทันกาล (real-time) ด้วยความสามารถในระดับวงจรของระบบแอนะล็อกเอง [6, 7] ซึ่งคุณสมบัตินี้สามารถเปรียบเทียบได้กับระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (Signed digit number system) ของการทำงานบนระบบดิจิทัล [8, 9, 10] แต่ปัญหาที่สำคัญของการทำงานบนระบบแอนะล็อก คือ สัญญาณรบกวน (noise) ที่เกิดขึ้นภายในวงจรอาจจะกลายมาเป็นค่าความผิดพลาด (error) ในระบบ

จำนวนได้ [11] ทำให้ในปี 1997 ซาเอ็ด (Saed) อาห์มาดี (Ahmadi) จูเลียน (Jullien) และ มิลเลอร์ (Miller) ได้นำเสนอระบบจำนวนค่าซ้อนทับ (Overlap resolution number system) ขึ้นมา [11, 12] และหลังจากนั้นในปี 2002 ระบบจำนวนค่าซ้อนทับได้ถูกเปลี่ยนชื่อเป็น ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง (Continuous valued number system) [13, 14] โดยระบบจำนวนนี้อาศัยหลักการในการเพิ่มสัญญาณซ้ำซ้อนเพิ่มเข้าไปเพื่อการแทนค่าจำนวนเพียงจำนวนเดียว โดยที่สัญญาณที่ได้เพิ่มขึ้นไปเหล่านี้จะเรียกว่า ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (redundancy analog digit) และดิจิตแรกเท่านั้นที่มีหน้าที่ในการแทนค่าแอนะล็อกที่เราต้องการจะแสดงทั้งหมด ส่วนในดิจิตอื่นๆ จะบอกค่าในส่วนของรายละเอียดที่ลดลงไปเรื่อยๆ หน้าที่ของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่เพิ่มเข้ามาคือ การปรับปรุงค่า (refine) ของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกัน โดยวิธีการลดค่าความผิดพลาด (ในที่นี้จะเรียกแทนว่า วิธีการกู้ค่าความผิดพลาด) (error recovery) นั้นจะเริ่มจากดิจิตที่นัยสำคัญน้อยที่สุด ทำการปรับปรุงค่าของดิจิตที่อยู่ติดกันไปเรื่อยๆ จนถึงการปรับปรุงค่าของดิจิตที่นัยสำคัญมากที่สุด ทำให้ค่าความซับซ้อนของเวลา (time complexity) ในการลดค่าความผิดพลาดเป็นเชิงเส้นตรง $\Theta(n)$ ซึ่ง n คือ จำนวนของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน ถัดมาในปี 2004 สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ได้นำเสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน (Redundant analog number system) ขึ้นมา [15] เป็นระบบที่พัฒนาขึ้นมาจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง [16] โดยที่ระบบนี้จะใช้เพียงสองสัญญาณในการนำเสนอจำนวนแต่ละจำนวน อีกทั้งระบบนี้ยังสามารถกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างสมบูรณ์และค่าความซับซ้อนของการกู้ค่าความผิดพลาดยังเป็นค่าคงที่อีกด้วย แต่ว่าระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนดังกล่าวจะสามารถทำงานได้จริงภายใต้ข้อกำหนดที่ว่า สัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในแต่ละดิจิตต้องมีความสัมพันธ์กันในเชิงของการส่งผลต่อค่าความผิดพลาดที่เท่ากัน (equal error factor) [15, 17, 18] นั่นคือ ในแต่ละสัญญาณต้องมีค่าความผิดพลาดเท่ากัน ซึ่งในความเป็นจริงเราไม่สามารถกำหนดให้ค่าความผิดพลาดเท่ากันได้ จึงยังคงเป็นปัญหาที่น่าสนใจอยู่

งานวิจัยนี้นำเสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่ โดยมุ่งเน้นไปที่การปรับปรุงและพัฒนาระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบเดิมให้มีคุณภาพที่ดีขึ้น โดยการนำข้อดีของเลขคณิตแบบช่วงและความสามารถในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนมาปรับปรุงให้สามารถทำงานร่วมกันได้ พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมสำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน ซึ่งประกอบด้วยการบวก ลบ คูณ และหาร สำหรับระบบจำนวนที่ได้ออกแบบมานี้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ออกแบบระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีความสามารถในการควบคุมและตรวจสอบปัญหาที่เกิดจากความผิดพลาดจากข้อมูลขาเข้าหรือค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษ และออกแบบอัลกอริทึมการประมาณช่วงใกล้เคียง พร้อมทั้งออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการ

คำนวณของตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน คือ การบวก ลบ คูณ และหาร ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนี้ด้วย

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) เสนออัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่ เฉพาะการบวก ลบ คูณ และหารเท่านั้น
2) ค่าความผิดพลาดในระบบจะอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบต้องอยู่ในขอบเขตที่ระบบจำนวนสามารถจะทนได้เท่านั้นจึงจะสามารถทำการกู้ค่าออกมาได้
3) ตัวถูกดำเนินการที่จะทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์จะต้องถูกกู้ค่าความผิดพลาดก่อน เพื่อให้เป็นค่าที่ถูกต้องปราศจากค่าความผิดพลาดก่อนที่จะทำเริ่มการคำนวณผลลัพธ์
4) ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะไม่เกิดระหว่างดำเนินการกู้ค่าความผิดพลาด และดำเนินการทางคณิตศาสตร์อีก
5) การกู้ค่าความผิดพลาดเป็นการทำงานบนระบบจำนวน ไม่ได้เป็นการขจัดสัญญาณรบกวนในวงจรแต่อย่างใด
6) ทำการออกแบบระบบจำนวน อัลกอริทึมการประมาณช่วงใกล้เคียง อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน และเสนอวิธีการพิสูจน์อัลกอริทึมเหล่านี้เท่านั้นไม่ได้มีการสร้างออกมาเป็นวงจร

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษางานวิจัยเลขคณิตแบบช่วง ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง และระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน
2) วิเคราะห์ปัญหาที่มีความสอดคล้องกันจากงานวิจัยเหล่านั้น
3) ออกแบบระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่
4) ออกแบบอัลกอริทึมการประมาณช่วงใกล้เคียงและอัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน
5) พิสูจน์อัลกอริทึมที่ได้ออกแบบไว้
6) จัดทำรายงานวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1) ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่ที่รองรับการทำงานแบบช่วงได้ เพื่อการตรวจสอบและควบคุมปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษ อีกทั้งยังสามารถประมาณช่วงใกล้เคียงได้ในกรณีที่ไม่ทราบค่าความผิดพลาด

2) อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานซึ่งประกอบด้วยการบวก ลบ คูณ และหาร สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1) "On-Line multiplication in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม สิร ศรีวนาสณฑ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)
2) "On-Line Arithmetic in Compressed Signed Digit Representation" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 9th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE9)
3) "Interval Number Representation in Analog System" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ The 3rd Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2005)
4) "Interval Redundant Analog Number System" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม และ อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ IADIS International Conference Applied Computing 2006 (IADIS2006)
5) "Interval Arithmetic for Analog Computing" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 10th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE10)
6) "A Redundant Analog Interval System" โดย นพคุณ ศรีมโนธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ The 4th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2007)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 เลขคณิตแบบช่วง

ในการคำนวณเลขทศนิยม (floating point number) แบบทั่วไปที่มีจำนวนเลขทศนิยมหลายตำแหน่ง ทำให้คอมพิวเตอร์ต้องมีภาระในการประมวลผลมากตามไปด้วย ซึ่งจะทำให้สูญเสียเวลาไปโดยเปล่าประโยชน์และในบางครั้งระบบของเราไม่สามารถแสดงเลขทศนิยมได้ครบทุกตำแหน่ง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการปัดเศษทิ้งในบางตำแหน่งเพื่อให้ระบบทำงานต่อไปได้และลดเวลาที่ใช้ในการทำงานของคอมพิวเตอร์ลง แต่ทว่าการกระทำเช่นนี้อาจจะได้รับผลกระทบจากปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษได้ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความความคลาดเคลื่อนไป ซึ่งแนวทางการแก้ไขปัญหาสามารถทำได้โดยการนำเสนอจำนวนแบบช่วงให้ครอบคลุมตัวเลขนั้น [1] โดยจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณปรากฏอยู่ในช่วงที่เราครอบคลุมไว้นั้นอย่างแน่นอน

การทำงานของเลขคณิตแบบช่วงจะแสดงตัวเลขด้วยจำนวนสองจำนวน นั่นคือ ขอบเขตล่าง (x_l) และขอบเขตบน (x_u) แต่บางครั้งในระหว่างการคำนวณอาจทำให้ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง หรือทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างไม่สามารถแสดงค่าได้ ซึ่งปัญหานี้อาจเกิดจากการแทนค่าขอบเขตล่างกับขอบเขตบนผิดตำแหน่ง โดยเป็นที่ทราบกันว่าค่าที่ถูกต้องต้องอยู่ระหว่างขอบเขตทั้งสอง ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องกำหนดขอบเขตที่ใหญ่ขึ้นและครอบคลุมคำตอบที่ถูกต้องได้ จึงอาจทำให้ช่วงที่เป็นคำตอบใหญ่กว่าความเป็นจริงที่คำนวณได้

กำหนดให้ X เป็นค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ใดๆ ในเลขคณิตแบบช่วง รูปแบบการแทนช่วงของ X ในเลขคณิตแบบช่วงเป็นดังสมการด้านล่างนี้

$$X = [x_l, x_u] \tag{2.1}$$

2.2 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของเลขคณิตแบบช่วง

กำหนดให้ $X = [x_l, x_u]$ และ $Y = [y_l, y_u]$ เป็นช่วงจำนวนสองช่วงจำนวนในเลขคณิตแบบช่วง โดยที่ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของเลขคณิตแบบช่วงเป็นการคำนวณที่เกิดจากการบวก ลบ คูณ และหารกันของขอบเขตล่างและขอบเขตบน โดยที่ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของเลขคณิตแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังนี้

$$X + Y = \left[x_l + y_l, x_u + y_u\right] \tag{2.2}$$

$$X - Y = \left[x_l - y_u, x_u - y_l\right] \tag{2.3}$$

$$X \times Y = \left[\min\left(x_l y_l, x_l y_u, x_u y_l, x_u y_u\right), \max\left(x_l y_l, x_l y_u, x_u y_l, x_u y_u\right)\right] \tag{2.4}$$

$$X \div Y = \left[\min\left(\frac{x_l}{y_l}, \frac{x_l}{y_u}, \frac{x_u}{y_l}, \frac{x_u}{y_u}\right), \max\left(\frac{x_l}{y_l}, \frac{x_l}{y_u}, \frac{x_u}{y_l}, \frac{x_u}{y_u}\right)\right] \text{ โดยที่ } y_l, y_u > 0 \tag{2.5}$$

ตัวอย่างที่ 2.1 *กำหนดให้ $X = [4.85, 5.15]$, $Y = [6.9, 7.1]$ การคำนวณพื้นฐานของตัวดำเนินการบวก ลบ คูณ และหารของเลขคณิตแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังนี้*

$$X + Y = [11.25, 12.75]$$

$$X - Y = [-2.25, -1.75]$$

$$\begin{aligned} X \times Y &= [\min(33.465, 34.435, 35.535, 36.565), \\ &\quad \max(33.465, 34.435, 35.535, 36.565)] \\ &= [33.465, 36.565] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \div Y &= [\min(0.7029, 0.6831, 0.7464, 0.7254), \\ &\quad \max(0.7029, 0.6831, 0.7464, 0.7254)] \\ &= [0.6831, 0.7464] \end{aligned}$$

□

2.3 ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง

ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องถูกคิดค้นขึ้นในปี 1997 โดยในตอนแรกระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นมีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนค่าซ้อนทับ (Overlap resolution number system) ซึ่งในภายหลังถูกเปลี่ยนชื่อเป็น ระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง (Continuous valued number system) ในปี 2002 โดยกลุ่มผู้วิจัยได้นำเสนอระบบจำนวนที่ทำงานบนระบบแอนะล็อกและกล่าวถึงข้อดีและข้อเสียของระบบจำนวนแอนะล็อก ซึ่งข้อดี คือ ความสามารถในการคำนวณแบบปราศจากตัวทด (carry-free) ของระบบจำนวนแอนะล็อก ทำให้ระบบจำนวนแอนะล็อกสามารถทำงานได้แบบทันกาล ด้วยความสามารถในระดับวงจรของระบบแอนะล็อกเอง ส่วนข้อเสียของระบบจำนวนแอนะล็อก คือ สัญญาณรบกวนในวงจรอาจจะกลายมาเป็นค่าความผิดพลาดในระบบจำนวนได้ ซึ่งถือเป็นจุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ด้วยที่จะทำการลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบ

ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นถูกนำเสนอขึ้นมาสำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีสัญญาณรบกวนน้อย (low noise arithmetic) โดยใช้รูปแบบการแทนค่า (representation) และการดำเนินการ (operation) แบบแอนะล็อก ซึ่งการคำนวณสำหรับระบบจำนวนนี้จะสามารถคำนวณแบบไม่มีตัวทด (carry free arithmetic) ได้โดยการใช้คุณสมบัติของการทำงานของวงจรแอนะล็อก ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องจะใช้จำนวนสัญญาณหลายสัญญาณในการแทนค่าจำนวนเพียงจำนวนเดียว โดยที่สัญญาณที่เพิ่มเข้าไปเหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดิจิตซ้ำซ้อน (redundancy digit) ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแต่ละดิจิต โดยที่ดิจิตที่มีลำดับ

สูงสุดเท่านั้นที่เป็นดิจิตที่แสดงถึงค่าทั้งหมดที่เราต้องการ ส่วนดิจิตอื่นๆ จะเป็นดิจิตที่ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อบอกรายละเอียดที่ลดลงไปเรื่อยๆ ของแต่ละดิจิต โดยวิธีการการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนนี้ จะใช้คุณสมบัติของดิจิตซ้ำซ้อนเหล่านั้นนำมาทำการปรับปรุงค่าของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันเพื่อเพิ่มค่าความถูกต้องให้สูงขึ้นเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงดิจิตตัวแรกสุด โดยขบวนการที่ใช้ในการเพิ่มค่าความถูกต้องนั้นจะเริ่มจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด ไปยังดิจิตที่มีนัยสำคัญมากที่สุด ทำให้เวลาที่ถูกใช้ในการเพิ่มค่าความถูกต้องนี้ขึ้นกับจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน หรือสามารถบอกได้ว่าค่าความซับซ้อนของเวลา (time complexity) สำหรับการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเป็น $\Theta(n)$ โดยที่ n คือ จำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน โดยที่ในระบบที่คำนึงถึงความถูกต้องที่มากขึ้นก็จะต้องการจำนวนดิจิตซ้ำซ้อนที่มากขึ้นด้วยเช่นกัน

สำหรับฐาน β ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $\beta \geq 2$ กำหนดให้จำนวนจริง X โดยค่าสูงสุดของ X จะถูกจำกัดด้วยค่า M ซึ่ง $|X| < M$ และค่าจำนวนจริง X นั้นจะประกอบไปด้วยดิจิตค่าต่อเนื่อง (continuous valued digit) x_n หลายดิจิต ซึ่ง $K \leq n \leq L$ โดยที่ K และ L เป็นจำนวนเต็มที่ $K > 0$ และ $0 \leq L$ ค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต (maximum dynamic range) สามารถคำนวณได้จาก

$$M = \beta^{L+1} \tag{2.6}$$

รูปแบบการแสดงค่าของ X สามารถเขียนออกมาได้เป็น

$$(x_L, x_{L-1}, \ldots, x_0 \mid x_{-1}, \ldots, x_{K+1}, x_K)$$

เครื่องหมาย | ใช้ในการแยกส่วนที่เป็นจำนวนเต็มทางด้านขวาออกจากส่วนที่เป็นทศนิยมทางด้านซ้าย ในการสร้างดิจิตค่าต่อเนื่องนั้นจะถูกสร้างเริ่มต้นจากดิจิตที่มีค่าลำดับมากที่สุด หรือ x_L ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$x_L = \beta \times \frac{X}{M} \tag{2.7}$$

และดิจิตอื่นที่เหลือสามารถทำการคำนวณได้ด้วย

$$x_n = (x_{n+1} - \lfloor x_{n+1} \rfloor)\beta \tag{2.8}$$

จากสมการที่ 2.7 และ 2.8 เราสามารถทำการสรุปได้ว่า $|x_n| < \beta$ และ $|\lfloor x_n \rfloor| \leq \beta - 1$ และจากสมการที่ 2.6 นั้นเราก็สามารถทำการหาค่าของ L ในกรณีที่เราทราบ M ได้โดย $\beta^{L+1} \geq |M|$ นอกจากนั้นยังสามารถทำการคำนวณดิจิต $n > L$ ได้โดยจะเรียกดิจิตที่มีเลขลำดับมากกว่าค่า L นี้ว่า ดิจิตที่ถูกสร้างเกิน (Excessively evolved digits, EEDs) โดยยังคงใช้สมการเดิมคือสมการที่ 2.8 ซึ่งสามารถทำให้ง่ายขึ้นได้ว่า $x_n = x_{n-1} / \beta$ โดยดิจิตที่ถูกสร้างเกินนี้จะใช้ในการคำนวณที่คำตอบของการดำเนินการนั้นเกินกว่าค่า M ทำให้ต้องมีการเพิ่มค่าของ L ซึ่งนั่นก็คือเพิ่มค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต

ดังที่กล่าวมาข้างต้นว่าในขณะที่ดำเนินการคำนวณของระบบจำนวนแอนะล็อกนั้นอาจมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นได้ ซึ่งค่าความผิดพลาดที่เราสนใจในระบบนี้จะอยู่ในรูป

$$x'_n = x_n + \varepsilon_n$$

ซึ่ง x'_n หมายถึงค่าของ x_n ที่รวมกับค่าของความผิดพลาดเข้าไว้ด้วยกัน

วิธีการกู้ค่าความผิดพลาดของดิจิตลำดับที่ n ($x'_n = x_n + \varepsilon_n$) ของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้น สามารถทำได้โดยการกำหนดให้ดิจิตที่มีลำดับต่ำกว่าที่อยู่ติดกันนั้นเป็นค่าที่ถูกต้องหรือไม่มีค่าความผิดพลาด $x'_{n-1} = x_{n-1}$ และด้วยเงื่อนไขเพิ่มเติมอีกหนึ่งเงื่อนไข คือ

$$\lfloor x'_n \rfloor = \lfloor x_n \rfloor \tag{2.9}$$

ด้วยเงื่อนไขเหล่านี้เองทำให้เราสามารถทำการกู้คืนค่าของ x'_n ออกมาเป็น x''_n ที่มีค่าเท่ากับ x_n ดังสมการที่ 2.10

$$x''_n = \begin{cases} \lfloor x'_n \rfloor + \left(x'_{n-1} / \beta \right) & n > K \\ x'_K & n = K \end{cases} \tag{2.10}$$

ซึ่งจะเรียกวิธีการกู้คืนข้อมูลนี้ว่า ขบวนการวิวัฒนาการย้อนกลับ (reverse evolution process) ซึ่งขบวนการนี้จะสามารถกู้คืนได้อย่างถูกต้องก็เมื่อทำการคำนวณฟังก์ชันพื้น (floor function) ตามสมการที่ 2.9 ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งเทคนิคการกู้ค่าความผิดพลาดนี้จะไม่สามารถทำได้ในกรณีที่ $\lfloor x_n + \varepsilon_n \rfloor > \lfloor x_n \rfloor$ หรือ $\lfloor x_n + \varepsilon_n \rfloor < \lfloor x_n \rfloor$ จึงได้มีการปรับปรุงโดยการเปลี่ยนฟังก์ชันพื้นให้เป็นฟังก์ชันการถูกปัดเศษ (rounded function) แทน $\lfloor x'_n \rfloor$ ได้ดังนี้

$$\lfloor x'_n \rfloor_R = \left[x'_n - \left(x'_{n-1} / \beta \right) \right]_{Rounded}$$

และด้วยเงื่อนไขที่ว่า

$$\left| \varepsilon_n - \left(\varepsilon_{n-1} / \beta \right) \right| < \frac{1}{2} \tag{2.11}$$

และเมื่อเอาไปแทนในสมการที่ 2.10 แล้วเราจะได้สมการในการกู้ค่าความผิดพลาดออกมาดังนี้

$$\begin{aligned} \lfloor x'_n \rfloor_R &= \left[x'_n - \left(x''_{n-1} / \beta \right) \right]_{Rounded} \\ [x''_n]_R &= \begin{cases} \lfloor x'_n \rfloor_R + \left(x''_{n-1} / \beta \right) & n > K \\ x'_K & n = K \end{cases} \end{aligned} \tag{2.12}$$

ซึ่งเทคนิคที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นจะทำการปรับปรุงค่าความแม่นยำของดิจิตที่มีลำดับสูงกว่าที่อยู่ติดกันทีละดิจิตในหนึ่งรอบ นั่นก็หมายความว่า ค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นมีค่าเท่ากับ $\Theta(n)$ โดยที่ n เท่ากับจำนวนของดิจิตซ้ำซ้อน ซึ่งค่าความซับซ้อนนี้มีค่าเท่ากับการแพร่กระจายของตัวทดในระบบดิจิทัล

และจากสมการที่ 2.12 แสดงให้เห็นว่าการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นไม่สามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดสำหรับดิจิตที่มีลำดับต่ำที่สุด (x_K) ซึ่งเป็นดิจิตตัวขวาสุดได้ ทำให้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิตนั้นจะเกิดการแพร่กระจายไปยังดิจิตอื่นๆ ของรูปแบบการแทนค่าซึ่งเหตุการณ์นี้จะเรียกว่า การแพร่กระจายของความผิดพลาดที่เกิดจากดิจิตที่มีค่าความสำคัญน้อยที่สุด (least significant digit error propagation) โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_K นั้นได้ส่งผลกระทบไปยังดิจิต x_L ด้วยค่าความผิดพลาดที่สามารถจะคำนวณได้ดังสมการที่ 2.13

$$\varepsilon_L = \varepsilon_K / \beta_{L-K} \tag{2.13}$$

จะเห็นได้ว่าการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นจะเริ่มจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดก่อนเรื่อยไปยังดิจิตที่มีนัยสำคัญมากที่สุดโดยที่ข้อด้อยของระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง คือ ระบบนี้จะยังมีค่าความผิดพลาดติดอยู่ในระบบ อันเนื่องมาจากอัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาดจะเริ่มต้นจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดก่อน ทำให้ค่าความผิดพลาดที่ติดอยู่ที่ดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดส่งผลกระทบไปยังดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงกว่า ทำให้ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องจึงทำได้เพียงลดค่าความผิดพลาดลงเท่านั้น ไม่สามารถกำจัดค่าความผิดพลาดได้หมดอย่างสมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 2.2 *กำหนดให้ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่มีค่าฐาน $\beta = 10$ และระยะสูงสุดแบบพลวัต $M = 100$ ที่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 4% รูปแบบการแทนค่าของ $X = 78.459$ ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่องและผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1*

ตารางที่ 2.1 แสดงถึงการทำงานของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องและการกู้ค่าความผิดพลาด โดยที่ระบบมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 4%

n	1	0	-1	-2	-3
x_n	7.8459	8.459	4.59	5.9	9
x'_n	8.159736	8.79736	4.7736	6.136	9.36
$[x''_n]_R$	7.845936	8.45936	4.5936	5.936	9.36

จากตารางที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนค่าต่อเนื่องนั้นยังคงได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดอยู่ซึ่งจะส่งผลกระทบไปยังทุกๆ ค่า ทำให้คำตอบที่ได้ไม่ตรงคำตอบที่แท้จริงอีกทั้งค่าความซับซ้อนของเวลาที่ใช้ในการกู้ค่าความผิดพลาดยังเป็นเชิงพหุนาม ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ใช้ในการแทนจำนวน □

2.4 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

สืบเนื่องจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่ว่า ค่าความผิดพลาดไม่สามารถกำจัดออกไปได้หมด ทำให้ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนได้ถูกคิดค้นขึ้นมาในปี 2004 ซึ่งเป็นระบบจำนวนแอนะล็อกที่พัฒนาต่อมาจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง โดยข้อดีของระบบนี้คือ ระบบสามารถกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างถูกต้อง ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำปราศจากค่าความผิดพลาดจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด แต่ว่าข้อจำกัดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนคือ ค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูปของตัวประกอบจำเป็นจะต้องมีค่าเท่ากันทั้งระบบจึงจะสามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างถูกต้อง สำหรับค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะเป็นค่าคงที่ ซึ่งมีค่าความ

ซับซ้อนของเวลาน้อยกว่าระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่มีค่าความซับซ้อนของเวลาเป็นเชิงพหุนาม $\Theta(n)$ โดยที่ n เป็นจำนวนของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน

กำหนดให้ M เป็นค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต โดยที่ค่า M เป็นค่าที่กำหนดว่าถ้าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่า M จะพิจารณาว่าระบบเกิดปัญหาส่วนล้น (overflow) และกำหนดให้ β เป็นจำนวนจริงซึ่งเรียกว่าฐาน (base) โดยที่ $\beta \geq 2$ การนำเสนอค่า X บนระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสำหรับทุกๆ ค่าเชิงตัวเลขของ X ใดๆ ที่ $|X| \leq M$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$X = (x_v, x_r)$$

โดยที่ x_v คือ ดิจิตแอนะล็อกค่า และ x_r คือ ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน ซึ่งค่าของ x_v และ x_r สามารถคำนวณได้จาก

$$x_v = \beta \times \left(X / M \right) \tag{2.14}$$

$$x_r = \begin{cases} \left(\lceil x_v \rceil - x_v \right) \times \beta & x_v \geq 0 \\ \left(\lfloor x_v \rfloor - x_v \right) \times \beta & x_v < 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

สมการที่ 2.15 สามารถเขียนให้อยู่รูปของสมการ 2.16 ได้ดังนี้

$$x_r = \left(sign\left(x_v \right) \times \left(\lceil |x_v| \rceil - |x_v| \right) \right) \times \beta \tag{2.16}$$

ผลกระทบของค่าความผิดพลาด (ε) ที่มีต่อระบบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการคูณกันของตัวประกอบได้ดังนี้

$$x'_v = x_v \times \varepsilon$$

$$x'_r = x_r \times \varepsilon$$

สำหรับการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v \beta}{\left[x'_v + \left(x'_r / \beta \right) \right]_{Rounded} \times \beta}$$

$$x^*_v = x'_v / \varepsilon$$

$$x^*_r = x'_r / \varepsilon$$

โดยที่ x^*_v คือ ดิจิตแอนะล็อกค่าที่ปราศจากค่าความผิดพลาด และ x^*_r คือ ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ปราศจากค่าความผิดพลาด

ตัวอย่างที่ 2.3 *กำหนดให้ $\beta = 2$ และให้ค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต $M = 32$ ซึ่งมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 25% รูปแบบการแทนค่าของ $X = 12.315$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนและผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.2*

ตารางที่ 2.2 แสดงถึงการทำงานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนและการกู้ค่าความผิดพลาดโดยที่ระบบมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 25%

	x_v	x_r
x_n	0.7696875	0.460625
x'_n	0.962109375	0.57578125
x^*_n	0.7696875	0.460625

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นได้ว่าระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างถูกต้องสำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดเท่ากันทั้งระบบ และค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนยังเป็นค่าคงที่อีกด้วย □

บทที่ 3

ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ การนำเสนอรูปแบบการแทนจำนวนแบบช่วงบนระบบจำนวนแอนะล็อก ที่มีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง (Interval redundant analog number system, IRANS) โดยที่ระบบการแทนจำนวนแบบใหม่นี้สามารถรองรับปัญหาที่เกิดจากความผิดพลาดของข้อมูลขาเข้าและปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกได้ โดยค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบนั้นสามารถกู้ค่าได้โดยการนำอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงแรงจูงในการนำเสนอรูปแบบการแทนจำนวนแบบใหม่ พร้อมทั้งได้นำเสนอระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาด ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม การประมาณช่วงใกล้เคียง และตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน (บวก ลบ คูณ และหาร) สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่นี้

3.1 บทกล่าวนำ

ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงเป็นระบบจำนวนที่ถูกพัฒนามาจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่องและระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเป็นระบบจำนวนที่ถูกนำเสนอขึ้นมาเพื่อลดค่าความผิดพลาดในระบบที่เกิดขึ้นจากสัญญาณรบกวนในวงจร ในขณะที่ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนเป็นระบบที่พัฒนามาจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่องเพื่อลดค่าความซับซ้อนของเวลาในการกู้ค่าความผิดพลาดลงจาก $\Theta(n)$ เหลือเป็นค่าคงที่ เมื่อ n คือจำนวนดิจิตซ้ำซ้อนที่ใช้ในระบบ สำหรับค่าความซับซ้อนของเวลาสามารถลดลงได้เนื่องจากระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนจะใช้ดิจิตซ้ำซ้อนเพียงสองดิจิตในการนำเสนอจำนวนแต่ละจำนวน โดยที่ยังคงรักษาความถูกต้องของข้อมูลไว้ ซึ่งต่างจากระบบจำนวนค่าต่อเนื่องที่จำเป็นต้องใช้จำนวนดิจิตซ้ำซ้อนหลายดิจิตเพื่อความถูกต้องของข้อมูล อีกทั้งระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนยังสามารถทำการกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างถูกต้อง โดยปราศจากการแพร่กระจายของข้อผิดพลาดจากดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดอีกด้วย ซึ่งระบบจำนวนค่าต่อเนื่องไม่สามารถกำจัดข้อผิดพลาดนี้ได้

แต่ทว่าในระหว่างที่มีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ บางครั้งอาจมีความจำเป็นต้องปัดเศษทิ้งในบางตำแหน่งเพื่อลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ หรือในบางกรณีที่ระบบไม่สามารถรองรับการคำนวณได้ครบทุกดิจิต ทำให้มีความจำเป็นต้องปัดเศษทิ้งในบางตำแหน่งเพื่อให้ระบบสามารถทำงานต่อไปได้ อีกทั้งในบางครั้งความผิดพลาดของข้อมูลอาจเกิดขึ้นได้จากความ

คลาดเคลื่อนของอุปกรณ์การวัด หรือจากข้อมูลขาเข้า ซึ่งปัญหาต่างๆ เหล่านี้อาจทำให้การคำนวณผิดพลาดคลาดเคลื่อนไปได้ ดังนั้นแทนที่จะคำนวณจากข้อมูลที่ได้รับมาโดยตรง สามารถใช้การคำนวณจากการแทนช่วงแทน ทำให้สามารถมั่นใจได้ว่าคำตอบจริงที่ได้จะต้องอยู่ในช่วงที่ได้จากการคำนวณอย่างแน่นอน สำหรับอัลกอริทึมในการแทนช่วงนั้นสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ที่ [5]

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยให้ความสนใจกับการนำการแทนจำนวนแบบช่วงมาประยุกต์ใช้บนระบบจำนวนแอนะล็อกที่ใช้พื้นฐานในการทำงานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ทำให้ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบใหม่นี้สามารถรองรับปัญหาที่เกิดขึ้นจากความผิดพลาดของอุปกรณ์การวัด ความผิดพลาดจากข้อมูลขาเข้า และค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษได้ อีกทั้งยังมีความสามารถในการกู้ค่าความผิดพลาดได้อีกด้วย ระบบจำนวนที่ได้นำเสนอขึ้นมานี้มีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง โดยที่ระบบนี้จะใช้สามแอนะล็อกดิจิตในการแทนจำนวนแต่ละจำนวน พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมสำหรับตัวดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ บวก ลบ คูณ และหาร สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกแบบใหม่นี้อีกด้วย

3.2 ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง (Interval redundant analog number system)

กำหนดให้ X เป็นค่าเชิงตัวเลขแบบช่วง (interval numerical value) สำหรับจำนวนจริงใดๆ บนฐาน β ที่ $\beta \geq 2$ ซึ่งประกอบไปด้วย X_L (จำนวนขอบเขตล่าง, lower endpoint value) และ X_U (จำนวนขอบเขตบน, upper endpoint value) ที่เป็นจำนวนจริง โดยที่ $|X_L| < M$ และ $|X_U| < M$ โดยที่ M เป็นค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต (maximum dynamic range) รูปแบบการแทนจำนวนในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะใช้ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (redundant analog digit) จำนวนสามดิจิต ในการแทนช่วง X ซึ่งประกอบด้วย x_L (ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง, lower endpoint analog digit) คือ ดิจิตที่ทำหน้าที่แทนค่าขอบเขตล่างของช่วง X โดยที่ x_U (ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน, upper endpoint analog digit) คือ ดิจิตที่ทำหน้าที่แทนค่าขอบเขตบนของช่วง X และ x_R (ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน, redundancy analog digit) คือ ดิจิตที่เป็นดิจิตซ้ำซ้อนของ x_L และ x_U โดยที่รูปแบบการแทนค่าของ X ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ประกอบไปด้วย x_L x_U และ x_R สามารถแสดงได้ดังนี้

$$X = (x_L, x_U, x_R)$$

ซึ่งค่าของ x_L x_U และ x_R สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$x_L = X_L \times (\beta / M) \tag{3.1}$$

$$x_U = X_U \times (\beta / M) \tag{3.2}$$

$$x_R = \begin{cases} \left(\lceil x_L + x_U \rceil - (x_L + x_U)\right) \times \beta, & (x_L + x_U) \geq 0 \\ \left(\lfloor x_L + x_U \rfloor - (x_L + x_U)\right) \times \beta, & (x_L + x_U) < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

จากสมการที่ 3.3 สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการที่ 3.4 ได้ดังนี้

$$x_R = \left(sign\left(x_L + x_U \right) \times \left(\left\lceil \left| x_L + x_U \right| \right\rceil - \left| x_L + x_U \right| \right) \right) \times \beta \qquad (3.4)$$

โดยที่

$$sign\left(x_L + x_U \right) = \begin{cases} 1 & \left(x_L + x_U \right) \geq 0 \\ -1 & \left(x_L + x_U \right) < 0 \end{cases}$$

เนื่องจากการนำเสนอระบบจำนวนแบบใหม่นั้นต้องการความสมบูรณ์ของระบบในการนำเสนอ ซึ่งความสมบูรณ์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนั้นสามารถแสดงได้ดังทฤษฎีบทที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *จำนวนจริงแบบช่วงทุกจำนวนที่ค่าขอบเขตล่างและค่าขอบเขตบนมีค่าไม่เกิน M สามารถแปลงให้อยู่ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้เสมอ ในระบบที่มีค่าฐาน β ที่ซึ่ง $\beta \geq 2$ โดยที่ค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง (x_L) ค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน (x_U) และค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน (x_R) สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะมีค่าไม่เกินค่าของ β*

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตล่างที่แปลงให้อยู่ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง จะมีค่าไม่เกิน β

กำหนดให้ X เป็นจำนวนจริงแบบช่วงใดๆ ที่มีรูปแบบการแทนจำนวน คือ $[X_L, X_U]$

กรณีที่ 1 การพิสูจน์ x_L

จากข้อกำหนดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ว่า

$$|X_L| < M$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\left| \frac{X_L}{M} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{X_L}{M} < 1$$

เมื่อนำ β มาคูณทั้งสมการจะสามารถสรุปได้อีกทีว่า

$$-\beta < \frac{X_L}{M} \times \beta < \beta$$

กรณีที่ 2 การพิสูจน์ x_U

จากข้อกำหนดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ว่า

$$|X_U| < M$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\left|\frac{X_U}{M}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{X_U}{M} < 1$$

เมื่อนำ β มาคูณทั้งสมการจะสามารถสรุปได้อีกทีว่า

$$-\beta < \frac{X_U}{M} \times \beta < \beta$$

กรณีที่ 3 การพิสูจน์ x_R

จากสมการที่ 3.4

$$\left| sign(x_L + x_U) \times \left(\lceil |x_L + x_U| \rceil - |x_L + x_U| \right) \right| < 1$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$-1 < \left(sign(x_L + x_U) \times \left(\lceil |x_L + x_U| \rceil - |x_L + x_U| \right) \right) < 1$$

เมื่อนำ β มาคูณทั้งสมการจะสามารถสรุปได้อีกทีว่า

$$-\beta < \left(sign(x_L + x_U) \times \left(\lceil |x_L + x_U| \rceil - |x_L + x_U| \right) \right) \times \beta < \beta$$

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1 ทำให้สามารถสรุปได้ว่าจำนวนจริงแบบช่วงทุกจำนวนสามารถแปลงให้อยู่ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้เสมอ โดยค่าสัมบูรณ์ของดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน และดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนั้นจะมีค่าไม่เกิน β ■

ตัวอย่างที่ 3.1 *กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X = [11.73, 14.86] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β = 2 และ 10 ที่มีค่า M = 32 และ 100 ตามลำดับ รูปแบบการแทนจำนวนของ X ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.1*

ตารางที่ 3.1 แสดงรูปแบบการแทนจำนวนของ X = [11.73, 14.86] บนระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

β	x_L	x_U	x_R
2	0.733125	0.92875	0.67625
10	1.173	1.486	3.41

ในการทำงานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนั้น ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน และดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน อาจได้รับผลกระทบจากสัญญาณรบกวนในวงจรที่อยู่ในรูปของค่าความผิดพลาดได้ ดังนั้นสมมุติให้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาเดียวกันนั้น อยู่ในรูปของการคูณกันของตัวประกอบใดๆ สำหรับดิจิต x_L x_U และ x_R หลังจากที่ได้ทำการใส่ตัวประกอบของค่าความผิดพลาดแล้ว สามารถแสดงออกมาได้ดังสมการ 3.5 3.6 และ 3.7 ตามลำดับ

$$x'_L = x_L \times \varepsilon \tag{3.5}$$

$$x'_U = x_U \times \varepsilon \tag{3.6}$$

$$x'_R = x_R \times \varepsilon \tag{3.7}$$

โดยที่ ε คือ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับสัญญาณ x_L x_U และ x_R

จากสมการที่ 3.5 3.6 และ 3.7 ค่าความผิดพลาด ε ที่เกิดขึ้นในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนั้น จะอยู่ในรูปของจำนวนเท่าดังนี้

$$\varepsilon = 1 + (\text{ เปอร์เซ็นต์ของค่าความผิดพลาด } / 100)$$

ตัวอย่างที่ 3.2 *กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X = [5.38, 18.63] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β = 2 และมีค่า M = 32 โดยที่รูปแบบการแทนจำนวนของ X ประกอบไปด้วย (x_L, x_U, x_R) ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดในแต่ละดิจิตเป็น 25% เท่ากันทั้งระบบ ผลลัพธ์ของจำนวนจริงแบบช่วง X หลังได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.2*

ตารางที่ 3.2 แสดงผลลัพธ์ของจำนวนจริงแบบช่วง X หลังได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดในแต่ละดิจิตเป็น 25% เท่ากันทั้งระบบ

	x_L	x_U	x_R
x_n	0.33625	1.164375	0.99875
x'_n	0.4203125	1.45546875	1.2484375

□

3.3 การกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ในขณะที่ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ อาจมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นได้ในระบบ ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้จะกล่าวถึงอัลกอริทึมในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง เนื่องจากระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้นำความรู้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนมาใช้ ดังนั้นผลลัพธ์จากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะถูกต้องแม่นยำก็ต่อเมื่อค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นมีค่าเท่ากันทั้งระบบเช่นเดียวกันกับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน สำหรับ

กรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เท่ากัน อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดจะไม่สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจะกล่าวถึงบทวิเคราะห์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เท่ากันในแต่ละสัญญาณในภายหลัง ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบสามารถกู้ค่าได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.2 *อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ใช้ดิจิตแอนะล็อกสองดิจิต สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ใช้ดิจิตแอนะล็อกสามดิจิตซึ่งประกอบไปด้วย* x_L x_U *และ* x_R *ได้อย่างถูกต้องตามอัลกอริทึมที่ 3.1*

อัลกอริทึมที่ 3.1 อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน

Input: $\left(x'_v, x'_r\right)$
Output: $\left(x^*_v, x^*_r\right)$

Begin

if x'_v = 0 and x'_r = 0 then

$x^*_v \longleftarrow 0, \; x^*_r \longleftarrow 0$

else

$$\varepsilon = \frac{x'_r + x'_v\beta}{\left[x'_v + (x'_r/\beta)\right]_{Rounded} \times \beta} \tag{3.8}$$

$x^*_v = x'_v/\varepsilon \,, \; x^*_r = x'_r/\varepsilon$

end if

End

โดยที่ฟังก์ชัน Rounded ในอัลกอริทึมสามารถนิยามได้ว่า

$$\left[x'_v + (x'_r/\beta)\right]_{Rounded} = \begin{cases} \lceil x_v \rceil & x_v \ge 0 \\ \lfloor x_v \rfloor & x_v < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้อย่างถูกต้อง

กำหนดให้ดิจิต x_v และ x_r ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนสามารถคำนวณได้จาก (x_L + x_U) จากสมการที่ 3.1 และ 3.2 และ x_R จากสมการที่ 3.3 ในระบบจำนวนแอนะซ้ำซ้อนแบบช่วง

กำหนดให้ ε คือ ค่าความผิดพลาดที่ถูกต้องและจากสมการที่ 3.1 3.2 3.3 และ 3.8 จะได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{x'_R + (x'_L + x'_U)\beta}{\left[(x'_L + x'_U) + (x'_R / \beta)\right]_{Rounded} \times \beta} \tag{3.10}$$

กำหนดให้ ε' คือ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_L x_U และ x_R ทำให้สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'\left(x_R + \left(x_L + x_U\right)\beta\right)}{\left[\varepsilon'\left((x_L + x_U) + (x_R / \beta)\right)\right]_{Rounded} \times \beta} \tag{3.11}$$

โดยจะแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณี คือ

กรณีที่ 1 คือ ($x_L + x_U$) ≥ 0 และจากสมการที่ 3.11 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\varepsilon'\left(\lceil x_L + x_U \rceil \beta\right)}{\lceil x_L + x_U \rceil \beta} \\ &= \varepsilon'\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 คือ ($x_L + x_U$) < 0 และจากสมการที่ 3.11 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\varepsilon'\left(\lfloor x_L + x_U \rfloor \beta\right)}{\lfloor x_L + x_U \rfloor \beta} \\ &= \varepsilon'\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นได้ว่า ค่าความผิดพลาด ε' ที่คำนวณได้จะมีค่าเท่ากับ ε ที่เป็นตัวประกอบของระบบจริง ■

หมายเหตุ ฟังก์ชัน Rounded ที่ใช้ในอัลกอริทึมที่ 3.1 นั้นคือฟังก์ชันการปัดเศษใกล้เคียงลง (rounded floor function) กำหนดให้จำนวนจริง $X = Y + Z$ โดยที่ Y เป็นภาคจำนวนเต็ม (integer part) และ Z เป็นภาคเศษส่วน (fractional part) ของ X ซึ่ง $0 \leq Z < 1$ ฟังก์ชันการปัดเศษใกล้เคียงลงสามารถนิยามได้ดังสมการที่ 3.12

$$\left[X\right]_{Rounded} = \begin{cases} Y + 1 & 0.5 < Z < 1 \\ Y & 0 \leq Z \leq 0.5 \end{cases} \tag{3.12}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 *กำหนดให้ $X = [23.655, 36.921]$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน $\beta = 10$ และค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต $M = 100$ โดยมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 3% เท่ากันทั้งระบบ ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.3*

ตารางที่ 3.3 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในระบบที่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 3% เท่ากันทั้งระบบ

	x_L	x_U	x_R
x_n	2.3655	3.6921	9.424
x'_n	2.436465	3.802863	9.70672
x^*_n	2.3655	3.6921	9.424

□

3.4 ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

เนื่องจากระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้นำความรู้ในการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนมาใช้ ทำให้มีการพิจารณาค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้ในเชิงเดียวกัน นั่นคือ เนื่องจากสมการที่ 3.10 ในอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดได้มีการใช้ฟังก์ชัน Rounded เกิดขึ้น ซึ่งค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้นั้นหมายถึง ขอบเขตของค่าความผิดพลาดสูงสุดที่เกิดขึ้นได้ในระบบ ถ้าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นเกินขอบเขตนี้จะทำให้อัลกอริทึมกู้ค่าความผิดพลาดนั้นไม่สามารถคำนวณผลลัพธ์ออกมาได้ โดยค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้สามารถคำนวณออกมาได้ดังทฤษฎีบทที่ 3.3

ทฤษฎีบทที่ 3.3 *กำหนดให้ ε เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบและ β เป็นค่าฐาน โดยที่ $\beta \geq 2$ ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในการกู้ค่าความผิดพลาดสามารถคำนวณได้จากอสมการข้างล่างนี้*

$$1-\frac{1}{2\beta} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\beta}+1 \quad (3.13)$$

พิสูจน์

จากสมการที่ 3.1 3.2 และ 3.3 และจากเงื่อนไขของสมการที่ 3.9 ในกรณีที่ $(x_L + x_U) \geq 0$

$$\begin{aligned} \lceil x_L + x_U \rceil &= \left[(x'_L + x'_U) + (x'_R / \beta)\right]_{Rounded} \\ &= \left[\varepsilon\left((x_L + x_U) + (x_R / \beta)\right)\right]_{Rounded} \\ &= \left[\varepsilon\lceil x_L + x_U \rceil\right]_{Rounded} \end{aligned}$$

ซึ่ง ε จะส่งผลให้ฟังก์ชัน Rounded เป็นไปได้สองอย่างนั่นคือ

$$\beta \times (\varepsilon - 1) \leq \frac{1}{2}$$

$$\beta \times (\varepsilon - 1) \geq -\frac{1}{2}$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$-\frac{1}{2} \leq \beta \times (\varepsilon - 1) \leq \frac{1}{2}$$

โดยสามารถสรุปได้ว่า

$$1 - \frac{1}{2\beta} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\beta} + 1$$

ส่วนการพิจารณาสมการที่ 3.9 ในส่วนของเงื่อนไขที่ว่า $(x_L + x_U) < 0$ จะได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน

จากการพิสูจน์จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดจะสามารถกู้ค่าได้อย่างถูกต้องก็ต่อเมื่อค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบมีค่าอยู่ในช่วงของอสมการที่ 3.13 ■

จากอสมการที่ 3.13 และบทพิสูจน์จะเห็นได้ว่าค่าฐานจะมีผลต่อค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบ โดยค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมจะลดลงเมื่อค่าของฐานนั้นมีค่าเพิ่มขึ้น ยกตัวอย่างเช่น บนฐาน $\beta = 2$ ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมเท่ากับ 25% และจะมีค่าเท่ากับ 5% สำหรับฐาน $\beta = 10$

3.5 การประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ในขณะที่ระบบกำลังดำเนินการคำนวณทางคณิตศาสตร์ สัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในวงจรอาจส่งผลกระทบต่อระบบการคำนวณได้ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแต่ละสัญญาณเหล่านี้ไม่สามารถควบคุมให้เท่ากันได้ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการการกู้ค่าความผิดพลาดในอัลกอริทึมที่ 3.1 มีความผิดเพี้ยนไป ในส่วนนี้เราจึงได้ทำการพิจารณาถึงกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่ไม่ทราบค่าเกิดขึ้นในระบบอยู่ในรูปของตัวประกอบที่ค่าไม่เท่ากัน การประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถคำนวณได้ดังอสมการที่ 3.14 และ 3.15

ทฤษฎีบทที่ 3.4 *กำหนดให้ x_{Lest} เป็นค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่างที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียง x_{Uest} เป็นค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบนที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียง x_L เป็นค่าจริงของดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง x_U เป็นค่าจริงของดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ค่าความผิดพลาดที่ไม่ทราบค่าในแต่ละสัญญาณมีค่าไม่เท่ากัน ช่วงคำตอบที่ถูกต้องจะมีค่าเป็นไปตามอสมการข้างล่างนี้*

$$x_L \ge x_{Lest} \tag{3.14}$$

$$x_U \le x_{Uest} \tag{3.15}$$

โดยที่ค่าของ x_{Lest} และ x_{Uest} สามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$x_{Lest} = \frac{x'_L}{1+e_L}$$

$$x_{Uest} = \frac{x'_U}{1+e_U}$$

ซึ่งค่าของ e_L และ e_U สามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$e_L = 1 - \frac{\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)[T]_{Rounded}}{T}, e_U = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2\beta}+1\right)[T]_{Rounded}}{T}$$

และ

$$T = \left(x'_L + x'_U\right) + \left(x'_R / \beta\right)$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะเริ่มจากการสรุปความสัมพันธ์ระหว่างสมการที่ 3.10 ในอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาด

$$\varepsilon = \frac{x'_R + (x'_L + x'_U)\beta}{\left[(x'_L + x'_U) + (x'_R / \beta)\right]_{Rounded} \times \beta}$$

และสมการ

$$T = \left(x'_L + x'_U\right) + \left(x'_R / \beta\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{T}{\left[T\right]_{Rounded}} \tag{3.16}$$

จากนั้นจะนำความสัมพันธ์ของสมการที่ 3.16 ไปใช้ในการพิสูจน์สมการที่ 3.14 และ 3.15

กรณีที่ 1 การพิสูจน์สมการที่ 3.14 เป็นการพิสูจน์การประมาณค่าขอบเขตล่างที่น้อยที่สุดที่จะเกิดขึ้นกับดิจิต x_L

กำหนดให้ ε_L เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_L และ err_L เป็นผลกระทบของค่าความผิดพลาดต่อดิจิต x_L หลังจากมีการกู้ค่าความผิดพลาดแล้ว (ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากัน) ซึ่ง err_L นั้นจะคำนวณได้จาก

$$err_L = x_L - \left(x'_L / \varepsilon\right)$$

$$= x_L - \frac{\dfrac{x_L \varepsilon_L}{T}}{[T]_{Rounded}}$$

$$= x_L \left(1 - \frac{\varepsilon_L [T]_{Rounded}}{T}\right)$$

จากสมการนี้จะเห็นว่า $\left(1 - \dfrac{\varepsilon_L [T]_{Rounded}}{T}\right)$ คือ อัตราส่วนที่เป็นผลกระทบของค่าความผิดพลาดที่มีต่อดิจิต x_L ซึ่งอัตราส่วนของผลกระทบจะมีค่าขึ้นอยู่กับ ε_L โดย ε_L จะมีค่าน้อยที่สุดที่เป็นได้และมากที่สุดที่เป็นได้ตามสมการที่ 3.13 นั่นคือ

$$1 - \frac{1}{2\beta} \le \varepsilon \le \frac{1}{2\beta} + 1$$

ซึ่งค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ ε_L คือ $\dfrac{2\beta - 1}{2\beta}$ ดังสมการนี้

$$err_L = x_L \left(1 - \frac{\dfrac{2\beta - 1}{2\beta} [T]_{Rounded}}{T}\right)$$

$$err_L = x_L \left(1 - \frac{\left(1 - \dfrac{1}{2\beta}\right) [T]_{Rounded}}{T}\right)$$

$$= x_L e_L$$

ทำให้เราสรุปความสัมพันธ์ของ x_L x'_L และ e_L ได้ว่า

$$x_L + x_L e_L \ge x'_L$$

สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x_L \ge \frac{x'_L}{1 + e_L}$$

ซึ่งก็คือ

$$x_L \ge x_{Lest}$$

กรณีที่ 2 การพิสูจน์สมการที่ 3.15 เป็นการพิสูจน์การประมาณค่าขอบเขตบนที่มากที่สุดที่จะเกิดขึ้นกับดิจิต x_U

กำหนดให้ ε_U เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_U และ err_U เป็นผลกระทบของค่าความผิดพลาดต่อดิจิต x_U หลังจากมีการกู้ค่าความผิดพลาดแล้ว (ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากัน) ซึ่ง err_U นั้นจะคำนวณได้จาก

$$
\begin{aligned}
err_U &= x_U - \left(x'_U / \varepsilon\right) \\
&= x_U - \frac{\dfrac{x_U \varepsilon_U}{T}}{[T]_{Rounded}} \\
&= x_U \left(1 - \frac{\varepsilon_U [T]_{Rounded}}{T}\right)
\end{aligned}
$$

จากสมการนี้จะเห็นว่า $\left(1 - \frac{\varepsilon_U [T]_{Rounded}}{T}\right)$ คือ อัตราส่วนที่เป็นผลกระทบของค่าความผิดพลาดที่มีต่อดิจิต x_U ซึ่งอัตราส่วนของผลกระทบจะมีค่าขึ้นอยู่กับ ε_U โดย ε_U จะมีค่าน้อยที่สุดที่เป็นได้และมากที่สุดที่เป็นได้ตามสมการที่ 3.13 นั่นคือ

$$1 - \frac{1}{2\beta} \le \varepsilon \le \frac{1}{2\beta} + 1$$

ซึ่งค่าที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของ ε_U คือ $\frac{2\beta + 1}{2\beta}$ ดังสมการนี้

$$err_U = x_U \left(1 - \frac{\frac{2\beta + 1}{2\beta} [T]_{Rounded}}{T}\right)$$

$$
\begin{aligned}
err_U &= x_U \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{2\beta} + 1\right) [T]_{Rounded}}{T}\right) \\
&= x_U e_U
\end{aligned}
$$

ทำให้เราสรุปความสัมพันธ์ของ x_U x'_U และ e_U ได้ว่า

$$x_U + x_U e_U \le x'_U$$

สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x_U \le \frac{x'_U}{1 + e_U}$$

ซึ่งก็คือ

$$x_U \le x_{Uest}$$

จากอสมการที่ 3.14 3.15 และบทพิสูจน์ ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าการประมาณช่วงใกล้เคียงของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ได้จากอสมการที่ 3.14 และ 3.15 จะครอบคลุมคำตอบจริงอย่างแน่นอน ■

ตัวอย่างที่ 3.4 *กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง $X = [14.83, 16.27]$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน $\beta = 10$ และค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต $M = 100$ โดยมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นกับดิจิต x_L x_U และ x_R เป็น 3% 4% และ 5% ตามลำดับ ผลลัพธ์จากการประมาณค่าใกล้เคียงของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.4*

ตารางที่ 3.4 แสดงผลลัพธ์จากการประมาณช่วงใกล้เคียงของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าความผิดพลาดเป็น 3% 4% และ 5% ตามลำดับ

	x_L	x_U	x_R
x_n	1.483	1.627	8.9
x'_n	1.52749	1.69208	9.345
x^*_n	1.470837035	1.629322568	8.998403975

จากตารางที่ 3.4 จะเห็นว่าคำตอบจากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดไม่สามารถคำนวณผลลัพธ์ออกมาได้อย่างถูกต้อง อันเนื่องมาจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบมีค่าไม่เท่ากันในแต่ละสัญญาณ แต่ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงก็สามารถประมาณช่วงใกล้เคียงได้จากทฤษฎีบทที่ 3.4 ซึ่งผลลัพธ์จากการประมาณช่วงแสดงให้เห็นว่า คำตอบที่แท้จริงจะต้องอยู่ในช่วงของ

$$x_L \geq 1.407340822,\ x_U \leq 1.710732656$$

โดยจะเห็นได้ชัดว่า คำตอบที่แท้จริงจะอยู่ภายในช่วงที่เกิดจากการประมาณช่วงใกล้เคียงของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจริง □

3.6 การแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่มีค่าไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการในการแปลงรูปแบบการแทนค่าบนฐานหนึ่งๆ ไปยังรูปแบบการแทนค่าอีกรูปแบบบนฐานที่มีค่าที่แตกต่างกัน เนื่องจากในวงจรนั้นไม่มีความจำเป็นต้องให้ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมในแต่ละส่วนของวงจรจะต้องมีค่าเท่ากัน และเนื่องจากการศึกษาถึงระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้แสดงให้เห็นถึงค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมกับค่าฐานที่ได้เลือกใช้ดังในอสมการที่ 3.11 ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้จึงได้นำเสนออัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงรูปแบบการแทนค่าระหว่างค่าฐานต่างๆ สำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 3.5 *กำหนดให้ (x_{L1}, x_{U1}, x_{R1}) เป็นรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสำหรับค่าฐาน β_1 และ (x_{L2}, x_{U2}, x_{R2}) เป็นรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสำหรับค่าฐาน β_2 รูปแบบการแทนค่าของ (x_{L2}, x_{U2}, x_{R2}) บนค่าฐาน β_2 สามารถคำนวณได้จาก (x_{L1}, x_{U1}, x_{R1}) บนฐาน β_1 ดังสมการดังต่อไปนี้*

$$x_{L2} = x_{L1} \times \left(\beta_2 / \beta_1\right) \tag{3.17}$$

$$x_{U2} = x_{U1} \times \left(\beta_2 / \beta_1\right) \tag{3.18}$$

$$x_{R2} = \begin{cases} \left(\left(\left\lceil \dfrac{\left(x_{L1} + x_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rceil \beta_2\right) - \left(\left\lceil x_{L1} + x_{U1} \right\rceil \dfrac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{x_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x_{L1} + x_{U1}\right) \geq 0 \\ \left(\left(\left\lfloor \dfrac{\left(x_{L1} + x_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rfloor \beta_2\right) - \left(\left\lfloor x_{L1} + x_{U1} \right\rfloor \dfrac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\dfrac{x_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x_{L1} + x_{U1}\right) < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแยกพิจารณาออกเป็นสองส่วน คือ x_{L2} x_{U2} และ x_{R2}

การพิสูจน์ส่วนแรก การพิสูจน์ x_{L2} และ x_{U2} จะอ้างอิงจากสมการที่ 3.1 และ 3.2 โดยจะพิจารณาพร้อมกันดังนี้

$$\begin{aligned} x_L &= X_L \times \left(\beta / M\right) & x_U &= X_U \times \left(\beta / M\right) \\ X_L &= x_{L1} \times \left(M / \beta\right) & X_U &= x_{U1} \times \left(M / \beta\right) \\ X_L &= x_{L2} \times \left(M / \beta\right) & X_U &= x_{U2} \times \left(M / \beta\right) \\ x_{L2} &= x_{L1} \times \left(\beta_2 / \beta_1\right) & x_{U2} &= x_{U1} \times \left(\beta_2 / \beta_1\right) \end{aligned}$$

การพิสูจน์ส่วนที่สอง การพิสูจน์ x_{R2} ในกรณีที่ $(x_{L1} + x_{U1}) \geq 0$ จะเริ่มจากสมการที่ 3.4 นั่นคือ

$$x_R = \left(sign\left(x_L + x_U\right) \times \left(\left\lceil \left|x_L + x_U\right| \right\rceil - \left|x_L + x_U\right|\right)\right) \times \beta$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $x_L + x_U$ ได้ว่า

$$x_L + x_U = \left\lceil x_L + x_U \right\rceil - \left(x_R / \beta\right)$$

จากสมการที่ 3.1 และ 3.2 สามารถสรุปได้ว่า

$$X_L + X_U = \left(\left\lceil x_L + x_U \right\rceil - \left(x_R / \beta\right)\right) \times \left(M / \beta\right) \tag{3.20}$$

เมื่อนำสมการที่ 3.20 มาเปรียบเทียบกันระหว่าง β_1 กับ β_2 จะได้ว่า

$$\left(\left\lceil x_{L1} + x_{U1} \right\rceil - \left(x_{R1} / \beta_1\right)\right) \times \left(M / \beta_1\right) = \left(\left\lceil x_{L2} + x_{U2} \right\rceil - \left(x_{R2} / \beta_2\right)\right) \times \left(M / \beta_2\right)$$

ซึ่งก็คือ

$$x_{R2} = \left(\left\lceil x_{L2} + x_{U2} \right\rceil \beta_2\right) - \left(\left\lceil x_{L1} + x_{U1} \right\rceil \left(\beta_2^2 / \beta_1\right)\right) + \left(\left(x_{R1} \times \beta_2^2\right)\beta_1^2\right)$$

และจากสมการที่ 3.17 และ 3.18 จะได้

$$x_{R2}=\left(\left\lceil\frac{(x_{L1}+x_{U1})\beta_2}{\beta_1}\right\rceil\beta_2\right)-\left(\left\lceil x_{L1}+x_{U1}\right\rceil\frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right)+\left(\frac{x_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right)$$

ส่วนการพิสูจน์ x_{R2} ในกรณีที่ $(x_{L1}+x_{U1})<0$ นั้น จะใช้วิธีพิสูจน์ในเชิงเดียวกันโดยเปลี่ยนจากการพิจารณา $\lceil x_{L1}+x_{U1}\rceil$ เป็น $\lfloor x_{L1}+x_{U1}\rfloor$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังสมการข้างล่างนี้

$$x_{R2}=\left(\left\lfloor\frac{(x_{L1}+x_{U1})\beta_2}{\beta_1}\right\rfloor\beta_2\right)-\left(\left\lfloor x_{L1}+x_{U1}\right\rfloor\frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right)+\left(\frac{x_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 3.5 *กำหนดให้ X = [19.6, 25.7] บนค่าฐาน β = 10 และ M = 100 ทำการแปลงค่าฐานไปยังฐานอื่นๆ รูปแบบการแทนจำนวนของ X บนฐาน 10 ไปยังฐานอื่นๆ สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.5*

ตารางที่ 3.5 แสดงการแปลงค่าฐานของ X = [43.61, 45.18] บนฐาน 10 ไปยังฐานอื่นๆ

β	x_L	x_U	x_R
10	1.96	2.57	4.7
9	1.764	2.313	8.307
8	1.568	2.056	3.008
7	1.372	1.799	5.803
6	1.176	1.542	1.692
5	0.98	1.285	3.675
4	0.784	1.028	0.752
3	0.588	0.771	1.923
2	0.392	0.514	0.188

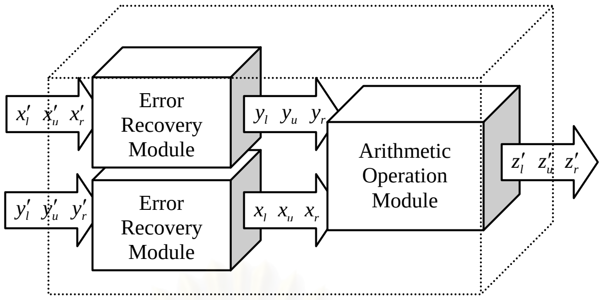
□

3.7 ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของงานวิจัยนี้ จะมุ่งเน้นไปที่ตัวดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (fundamental arithmetic operations) ซึ่งประกอบไปด้วยการบวก ลบ คูณ และหาร เนื่องจากระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงได้นำความรู้เรื่องเลขคณิตแบบช่วงมาประยุกต์ใช้ ดังนั้นจึงไม่สามารถทำการคำนวณแบบทั่วไปได้ แต่ต้องนำความรู้เรื่องการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของระบบแทนจำนวนแบบช่วงมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนแอนะล็อกแบบใหม่นี้ด้วย [19, 20, 21, 22]

ลำดับขั้นตอนการทำงานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงเริ่มต้นจากการกู้ค่าความผิดพลาดของข้อมูลขาเข้าเป็นอันดับแรก หลังจากนั้นจึงนำข้อมูลที่กู้ค่าความผิดพลาดแล้วมาทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์ต่อไปโดยแสดงดังรูปที่ 3.1

IRANS Arithmetic Operation Model



รูปที่ 3.1 แบบจำลองการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

3.7.1 ตัวดำเนินการบวกของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 3.6 *การบวกของจำนวนจริงแบบช่วงสองจำนวนที่มีค่าไม่เกิน M และมีรูปแบบการแทนจำนวน คือ $X = (x_L, x_U, x_R)$ และ $Y = (y_L, y_U, y_R)$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β ที่ซึ่ง $\beta \geq 2$ รูปแบบการแทนจำนวนของผลลัพธ์สามารถแทนได้ด้วย (z_L, z_U, z_R) ผลลัพธ์จากการบวกสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_L = f(x_L + y_L, \beta) \tag{3.21}$$

$$z_U = f(x_U + y_U, \beta) \tag{3.22}$$

$$z_R = \begin{cases} f(x_R + y_R + \beta, \beta) & (z_L + z_U) \geq 0 \\ f(x_R + y_R - \beta, \beta) & (z_L + z_U) < 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

โดยที่

$$f(a,b) = \begin{cases} a - b\lfloor a/b \rfloor & a \geq 0 \\ a - b\lceil a/b \rceil & a < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า ค่าของดิจิตผลลัพธ์ คือ (z_L, z_U, z_R) ที่ได้จากการคำนวณจะยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ เพื่อที่จะทำให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าจากอัลกอริทึมที่ 3.1 ได้ หลังจากที่ดำเนินการบวกแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น

กำหนดให้ $[Z_L, Z_U]$ เป็นค่าจำนวนจริงแบบช่วงของ (z_L, z_U, z_R) ซึ่งค่าของดิจิตเหล่านี้สามารถนิยามได้ตามสมการที่ 3.1 3.2 และ 3.3 ดังต่อไปนี้

$$z_L = Z_L \times (\beta / M)$$

$$z_U = Z_U \times (\beta / M)$$

$$z_R = \begin{cases} (\lceil z_L + z_U \rceil - (z_L + z_U)) \times \beta, & (z_L + z_U) \geq 0 \\ (\lfloor z_L + z_U \rfloor - (z_L + z_U)) \times \beta, & (z_L + z_U) < 0 \end{cases}$$

ทำให้การพิสูจน์ถูกแบ่งออกเป็นสามกรณี คือ

กรณีที่ 1 การพิสูจน์ z_L

จากสมการ 3.21

$$\begin{aligned} z_L &= f\left(x_L + y_L, \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_L \times (\beta / M)\right) + \left(Y_L \times (\beta / M)\right), \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_L + Y_L\right) \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= f\left(Z_L \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= Z_L \times (\beta / M) \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_L ที่ได้จากการบวกกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 2 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.22

$$\begin{aligned} z_U &= f\left(x_U + y_U, \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_U \times (\beta / M)\right) + \left(Y_U \times (\beta / M)\right), \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_U + Y_U\right) \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= f\left(Z_U \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= Z_U \times (\beta / M) \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_U ที่ได้จากการบวกกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 3 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.23

$$z_R = \begin{cases} f(x_R + y_R + \beta, \beta) & (z_L + z_U) \geq 0 \\ f(x_R + y_R - \beta, \beta) & (z_L + z_U) < 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก z_R เป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ดังนั้นการพิสูจน์ z_R จะสามารถแบ่งออกได้เป็นอีกสองกรณีย่อย คือ

กรณีที่ 3.1 คือ ผลลัพธ์ของช่วงมีค่าเป็นบวกหรือ $(z_L + z_U) \geq 0$

กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X และ Y มีค่าเป็นบวกทั้งคู่และจากสมการที่ 3.23

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(x_R + y_R + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U \rceil - (x_L + x_U)\right)\beta + \left(\lceil y_L + y_U \rceil - (y_L + y_U)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U \rceil + \lceil y_L + y_U \rceil - \left((x_L + x_U) + (y_L + y_U)\right)\right)\beta + \beta, \beta\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

จากสมการที่ 3.24 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

ถ้า $\lceil x_L + x_U \rceil + \lceil y_L + y_U \rceil = \lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= \left(\lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta \\ &= \left(\lceil z_L + z_U \rceil - \left(z_L + z_U\right)\right)\beta \end{aligned} \tag{3.25}$$

แต่ถ้า $\lceil x_L + x_U \rceil + \lceil y_L + y_U \rceil = \lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil + 1$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil + 1 - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta + 2\beta, \beta\right) \\ &= \left(\lceil x_L + x_U + y_L + y_U \rceil - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta \\ &= \left(\lceil z_L + z_U \rceil - \left(z_L + z_U\right)\right)\beta \end{aligned} \tag{3.26}$$

กรณีที่ 3.2 คือ ผลลัพธ์ของช่วงมีค่าเป็นลบหรือ $(z_L + z_U) < 0$

กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X และ Y มีค่าเป็นลบทั้งคู่และจากสมการที่ 3.23

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(x_R + y_R - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U \rfloor - \left(x_L + x_U\right)\right)\beta + \left(\lfloor y_L + y_U \rfloor - \left(y_L + y_U\right)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U \rfloor + \lfloor y_L + y_U \rfloor - \left(\left(x_L + x_U\right) + \left(y_L + y_U\right)\right)\right)\beta - \beta, \beta\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

จากสมการที่ 3.27 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

ถ้า $\lfloor x_L + x_U \rfloor + \lfloor y_L + y_U \rfloor = \lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= \left(\lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta \\ &= \left(\lfloor z_L + z_U \rfloor - \left(z_L + z_U\right)\right)\beta \end{aligned} \tag{3.28}$$

แต่ถ้า $\lfloor x_L + x_U \rfloor + \lfloor y_L + y_U \rfloor = \lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - 1$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - 1 - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta - 2\beta, \beta\right) \\ &= \left(\lfloor x_L + x_U + y_L + y_U \rfloor - \left(x_L + x_U + y_L + y_U\right)\right)\beta \\ &= \left(\lfloor z_L + z_U \rfloor - \left(z_L + z_U\right)\right)\beta \end{aligned} \tag{3.29}$$

จากสมการที่ 3.25 3.26 3.28 และ 3.29 แสดงให้เห็นว่า z_R ที่ได้จากการบวกกันของช่วงจำนวนสองจำนวน ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่เหมือนเดิม ■

ตัวอย่างที่ 3.6 *การบวกของ $X = [13.39, 16.84]$ และ $Y = [-4.16, 5.29]$ ในระบบที่มีค่าฐาน $\beta = 2$ และ $M = 32$ ซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 18% เท่ากันทั้งระบบ การดำเนินการบวกในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.6*

ตารางที่ 3.6 แสดงการดำเนินการบวกของ $X = [13.39, 16.84]$ และ $Y = [-4.16, 5.29]$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

n	L	U	R
x_n	0.836875	1.0525	0.22125
y_n	-0.26	0.330625	1.85875
z_n	0.576875	1.383125	0.08
z'_n	0.6807125	1.6320875	0.0944
z^*_n	0.576875	1.383125	0.08

คำตอบที่ได้ คือ (0.576875, 1.383125, 0.08) ซึ่งมีค่าเท่ากับ [9.23, 22.13] □

3.7.2 ตัวดำเนินการลบของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 3.7 *การลบของจำนวนจริงแบบช่วงสองจำนวนที่มีค่าไม่เกิน M และมีรูปแบบการแทนจำนวน คือ $X = (x_L, x_U, x_R)$ และ $Y = (y_L, y_U, y_R)$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β ที่ซึ่ง $\beta \geq 2$ รูปแบบการแทนจำนวนของผลลัพธ์สามารถแทนได้ด้วย (z_L, z_U, z_R) ผลลัพธ์จากการลบสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_L = f(x_L - y_U, \beta) \tag{3.30}$$

$$z_U = f(x_U - y_L, \beta) \tag{3.31}$$

$$z_R = \begin{cases} f(x_R - y_R + \beta, \beta) & (z_L + z_U) \geq 0 \\ f(x_R - y_R - \beta, \beta) & (z_L + z_U) < 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

โดยที่

$$f(a,b) = \begin{cases} a - b\lfloor a/b \rfloor & a \geq 0 \\ a - b\lceil a/b \rceil & a < 0 \end{cases}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า ค่าของดิจิตผลลัพธ์ คือ (z_L, z_U, z_R) ที่ได้จากการคำนวณจะยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ เพื่อที่จะทำให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าจากอัลกอริทึมที่ 3.1 ได้ หลังจากที่ดำเนินการลบแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น

กำหนดให้ $[Z_L,\ Z_U]$ เป็นค่าจำนวนจริงแบบช่วงของ $(z_L,\ z_U,\ z_R)$ ซึ่งค่าของดิจิตเหล่านี้สามารถนิยามได้ตามสมการที่ 3.1 3.2 และ 3.3 ดังต่อไปนี้

$$z_L = Z_L \times (\beta / M)$$

$$z_U = Z_U \times (\beta / M)$$

$$z_R = \begin{cases} \left(\lceil z_L + z_U \rceil - (z_L + z_U)\right) \times \beta, & (z_L + z_U) \geq 0 \\ \left(\lfloor z_L + z_U \rfloor - (z_L + z_U)\right) \times \beta, & (z_L + z_U) < 0 \end{cases}$$

ทำให้การพิสูจน์ถูกแบ่งออกเป็นสามกรณี คือ

กรณีที่ 1 การพิสูจน์ z_L

จากสมการ 3.30

$$\begin{aligned} z_L &= f\left(x_L - y_U, \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_L \times (\beta / M)\right) - \left(Y_U \times (\beta / M)\right), \beta\right) \\ &= f\left((X_L - Y_U) \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= f\left(Z_L \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= Z_L \times (\beta / M) \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_L ที่ได้จากการลบกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 2 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.31

$$\begin{aligned} z_U &= f\left(x_U - y_L, \beta\right) \\ &= f\left(\left(X_U \times (\beta / M)\right) - \left(Y_L \times (\beta / M)\right), \beta\right) \\ &= f\left((X_U - Y_L) \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= f\left(Z_U \times (\beta / M), \beta\right) \\ &= Z_U \times (\beta / M) \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_U ที่ได้จากการลบกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 3 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.32

$$z_R = \begin{cases} f(x_R - y_R + \beta, \beta) & (z_L + z_U) \geq 0 \\ f(x_R - y_R - \beta, \beta) & (z_L + z_U) < 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก z_R เป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ดังนั้นการพิสูจน์ z_R จะสามารถแบ่งออกได้เป็นอีกสองกรณีย่อย คือ

กรณีที่ 3.1 คือ ผลลัพธ์ของช่วงมีค่าเป็นบวกหรือ $(z_L + z_U) \geq 0$

กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X มีค่าเป็นบวก Y มีค่าเป็นลบและจากสมการที่ 3.32

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(x_R - y_R + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U \rceil - (x_L + x_U)\right)\beta - \left(\lfloor y_L + y_U \rfloor - (y_L + y_U)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil x_L + x_U \rceil - \lfloor y_L + y_U \rfloor - \left((x_L + x_U) + (y_L + y_U)\right)\right)\beta + \beta, \beta\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

จากสมการที่ 3.33 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

ถ้า $\lceil x_L + x_U \rceil - \lfloor y_L + y_U \rfloor = \lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= \left(\lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta \\ &= \left(\lceil z_L + z_U \rceil - (z_L + z_U)\right)\beta \end{aligned} \quad (3.34)$$

แต่ถ้า $\lceil x_L + x_U \rceil - \lfloor y_L + y_U \rfloor = \lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil + 1$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil + 1 - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta + \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta + 2\beta, \beta\right) \\ &= \left(\lceil (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rceil - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta \\ &= \left(\lceil z_L + z_U \rceil - (z_L + z_U)\right)\beta \end{aligned} \quad (3.35)$$

กรณีที่ 3.2 คือ ผลลัพธ์ของช่วงมีค่าเป็นลบหรือ $(z_L + z_U) < 0$

กำหนดให้จำนวนจริงแบบช่วง X มีค่าเป็นลบ Y มีค่าเป็นบวกและจากสมการที่ 3.32

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(x_R - y_R - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U \rfloor - (x_L + x_U)\right)\beta - \left(\lceil y_L + y_U \rceil - (y_L + y_U)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor x_L + x_U \rfloor - \lceil y_L + y_U \rceil - \left((x_L + x_U) + (y_L + y_U)\right)\right)\beta - \beta, \beta\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

จากสมการที่ 3.36 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

ถ้า $\lfloor x_L + x_U \rfloor - \lceil y_L + y_U \rceil = \lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= \left(\lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta \\ &= \left(\lfloor z_L + z_U \rfloor - (z_L + z_U)\right)\beta \end{aligned} \quad (3.37)$$

แต่ถ้า $\lfloor x_L + x_U \rfloor - \lceil y_L + y_U \rceil = \lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - 1$ จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} z_R &= f\left(\left(\lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - 1 - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta - \beta, \beta\right) \\ &= f\left(\left(\lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta - 2\beta, \beta\right) \\ &= \left(\lfloor (x_L + x_U) - (y_L + y_U) \rfloor - (x_L + x_U + y_L + y_U)\right)\beta \\ &= \left(\lfloor z_L + z_U \rfloor - (z_L + z_U)\right)\beta \end{aligned} \quad (3.38)$$

จากสมการที่ 3.34 3.35 3.37 และ 3.38 แสดงให้เห็นว่า z_R ที่ได้จากการลบกันของช่วงจำนวนสองจำนวน ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่เหมือนเดิม ■

ตัวอย่างที่ 3.7 *การลบของ X = [-5.29, -4.16] และ Y = [-13.39, 16.84] ในระบบที่มีค่าฐาน β = 2 และ M = 32 ซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 18% เท่ากันทั้งระบบ การดำเนินการลบในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.7*

ตารางที่ 3.7 แสดงการดำเนินการลบของ X = [-5.29, -4.16] และ Y = [-13.39, 16.84] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

n	L	U	R
x_n	-0.330625	-0.26	-0.81875
y_n	-0.836875	1.0525	1.56875
z_n	-1.383125	0.576875	-0.3875
z'_n	-1.6320875	0.6807125	-0.45725
z^*_n	-1.383125	0.576875	-0.3875

คำตอบที่ได้ คือ (-1.383125, 0.576875, -0.3875) ซึ่งมีค่าเท่ากับ [-22.13, 9.23] □

3.7.3 ตัวดำเนินการคูณของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 3.8 *การคูณของจำนวนจริงแบบช่วงสองจำนวนที่มีค่าไม่เกิน M และมีรูปแบบการแทนจำนวน คือ $X = (x_L, x_U, x_R)$ และ $Y = (y_L, y_U, y_R)$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β ที่ซึ่ง $\beta \geq 2$ รูปแบบการแทนจำนวนของผลลัพธ์สามารถแทนได้ด้วย (z_L, z_U, z_R) ผลลัพธ์จากการคูณสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_L = f\left(\min\left(x_L y_L, x_L y_U, x_U y_L, x_U y_U\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right) \tag{3.39}$$

$$z_U = f\left(\max\left(x_L y_L, x_L y_U, x_U y_L, x_U y_U\right) \times \frac{M}{\beta}, \beta\right) \tag{3.40}$$

$$z_R = \begin{cases} \left(\left\lceil w_{\min} + w_{\max} \right\rceil - \left(w_{\min} + w_{\max}\right)\right) \times \beta & \left(z_L + z_U\right) \geq 0 \\ \left(\left\lfloor w_{\min} + w_{\max} \right\rfloor - \left(w_{\min} + w_{\max}\right)\right) \times \beta & \left(z_L + z_U\right) < 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

$$w = f\left\{\frac{\begin{array}{l}\beta(g(x_L + x_U, 1) \times g(y_L + y_U, 1) - g(x_L + x_U, y_T) - g(y_L + y_U, x_T) \\ + x_T y_T) - g(x_L + x_U, y_R) - g(y_L + y_U, x_R) + x_T y_R + y_T x_R + \dfrac{x_R y_R}{\beta}\end{array}}{\beta} \times \frac{M}{\beta}, \beta\right\} \tag{3.42}$$

โดยที่

$$f(a,b)=\begin{cases} a-b\lfloor a/b \rfloor & a \ge 0 \\ a-b\lceil a/b \rceil & a<0 \end{cases}$$

$$g(a,b)=sign(a)\times\lceil |a| \rceil\times b$$

ที่ซึ่ง

สำหรับ $w_{\min}$ $\quad x_T=\lceil x_L+x_U \rceil-x_{\min}$ และ $y_T=\lceil y_L+y_U \rceil-y_{\min}$

สำหรับ $w_{\max}$ $\quad x_T=\lceil x_L+x_U \rceil-x_{\max}$ และ $y_T=\lceil y_L+y_U \rceil-y_{\max}$

โดยที่ $x_{\min}$ $y_{\min}$ $x_{\max}$ และ $y_{\max}$ คือ ค่า x และ y ที่ถูกเลือกจาก z_L กับ z_U ตามลำดับ

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า ค่าของดิจิตผลลัพธ์ คือ (z_L, z_U, z_R) ที่ได้จากการคำนวณจะยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ เพื่อที่จะทำให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าจากอัลกอริทึมที่ 3.1 ได้ หลังจากที่ดำเนินการคูณแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น

กำหนดให้ [Z_L, Z_U] เป็นค่าจำนวนจริงแบบช่วงของ (z_L, z_U, z_R) ซึ่งค่าของดิจิตเหล่านี้สามารถนิยามได้ตามสมการที่ 3.1 3.2 และ 3.3 ดังต่อไปนี้

$$z_L=Z_L\times(\beta/M)$$

$$z_U=Z_U\times(\beta/M)$$

$$z_R=\begin{cases}(\lceil z_L+z_U \rceil-(z_L+z_U))\times\beta, & (z_L+z_U)\ge 0\\ (\lfloor z_L+z_U \rfloor-(z_L+z_U))\times\beta, & (z_L+z_U)<0\end{cases}$$

ทำให้การพิสูจน์ถูกแบ่งออกเป็นสามกรณี คือ

กรณีที่ 1 การพิสูจน์ z_L

จากสมการ 3.39

$$z_L=f\left(\min(x_Ly_L,x_Ly_U,x_Uy_L,x_Uy_U)\times\frac{M}{\beta},\beta\right)$$

กำหนดให้ $x_{\min}$ และ $y_{\min}$ เป็นค่าที่ถูกเลือกจากอัลกอริทึมการคูณในสมการที่ 3.39 ดังนั้น

$$\begin{aligned}z_L&=f\left(x_{\min}\times y_{\min}\times\frac{M}{\beta},\beta\right)\\&=f\left(\left(X_{\min}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\left(Y_{\min}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\frac{M}{\beta},\beta\right)\\&=f\left((X_{\min}\times Y_{\min})\times\frac{\beta}{M},\beta\right)\\&=f\left(Z_{\min}\times\frac{\beta}{M},\beta\right)\\&=Z_{\min}\times\frac{\beta}{M}\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_L ที่ได้จากการคูณกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 2 การพิสูจน์ z_U

จากสมการ 3.40

$$z_U = f\left(\max\left(x_L y_L, x_L y_U, x_U y_L, x_U y_U\right)\times\frac{M}{\beta}, \beta\right)$$

กำหนดให้ $x_{\max}$ และ $y_{\max}$ เป็นค่าที่ถูกเลือกจากอัลกอริทึมการคูณในสมการที่ 3.40 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
z_U &= f\left(x_{\max}\times y_{\max}\times\frac{M}{\beta}, \beta\right)\\
&= f\left(\left(X_{\max}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\left(Y_{\max}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\frac{M}{\beta}, \beta\right)\\
&= f\left(\left(X_{\max}\times Y_{\max}\right)\times\frac{\beta}{M}, \beta\right)\\
&= f\left(Z_{\max}\times\frac{\beta}{M}, \beta\right)\\
&= Z_{\max}\times\frac{\beta}{M}
\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_U ที่ได้จากการคูณกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 3 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.41 และ 3.42 จะเห็นว่าค่าของดิจิต z_U จะยังคงอยู่ในระบบดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงก็ต่อเมื่อ $w_{\min}$ และ $w_{\max}$ มีค่าเท่ากับดิจิต z_L และ z_U ตามลำดับ ดังนั้นการพิสูจน์ z_U จึงแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นอีกสองกรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่ 3.1 การพิสูจน์ $w_{\min}$

จากสมการที่ 3.42

$$w = f\left\{\frac{\begin{array}{l}\beta(g(x_L+x_U,1)\times g(y_L+y_U,1)-g(x_L+x_U,y_T)-g(y_L+y_U,x_T)\\ +x_T y_T)-g(x_L+x_U,y_R)-g(y_L+y_U,x_R)+x_T y_R+y_T x_R+\dfrac{x_R y_R}{\beta}\end{array}}{\beta}\times\frac{M}{\beta}, \beta\right\}$$

$$= f\left\{\begin{array}{l}(g(x_L+x_U,1)\times g(y_L+y_U,1)-g(x_L+x_U,y_T)-g(y_L+y_U,x_T)+x_T y_T)\\ -\dfrac{g(x_L+x_U,y_R)}{\beta}-\dfrac{g(y_L+y_U,x_R)}{\beta}+\dfrac{x_T y_R}{\beta}+\dfrac{y_T x_R}{\beta}+\dfrac{x_R y_R}{\beta^2}\times\dfrac{M}{\beta}, \beta\end{array}\right\}$$

$$
= f\left\{\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}
\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\right)\times\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\right) \\
-\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\times y_T\right)-\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\times x_T\right) \\
+x_T y_T
\end{array}\right) \\
-\dfrac{\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\times y_R\right)}{\beta}-\dfrac{\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\times x_R\right)}{\beta} \\
+\dfrac{x_T y_R}{\beta}+\dfrac{y_T x_R}{\beta}+\dfrac{x_R y_R}{\beta^2}\times\dfrac{M}{\beta},\beta
\end{array}\right\}
$$

$$
= f\left\{\begin{array}{l}
\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil-x_T-\dfrac{x_R}{\beta}\right)\times \\
\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil-y_T-\dfrac{y_R}{\beta}\right)\times\dfrac{M}{\beta},\beta
\end{array}\right\}
$$

จากเหตุผลที่ว่า x_T และ y_T ของ $w_{\min}$ ได้มาจาก x และ y ที่ถูกเลือกจากสมการที่ 3.39 ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
w_{\min} &= f\left(\left(\left(x_{\min}\times y_{\min}\right)\times\frac{M}{\beta}\right),\beta\right) \\
&= z_L
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3.2 การพิสูจน์ $w_{\max}$

จากสมการที่ 3.42

$$
w = f\left\{\frac{\begin{array}{l}\beta(g(x_L+x_U,1)\times g(y_L+y_U,1)-g(x_L+x_U,y_T)-g(y_L+y_U,x_T) \\ +x_T y_T)-g(x_L+x_U,y_R)-g(y_L+y_U,x_R)+x_T y_R+y_T x_R+\dfrac{x_R y_R}{\beta}\end{array}}{\beta}\times\frac{M}{\beta},\beta\right\}
$$

$$
= f\left\{\begin{array}{l}
(g(x_L+x_U,1)\times g(y_L+y_U,1)-g(x_L+x_U,y_T)-g(y_L+y_U,x_T)+x_T y_T) \\
-\dfrac{g(x_L+x_U,y_R)}{\beta}-\dfrac{g(y_L+y_U,x_R)}{\beta}+\dfrac{x_T y_R}{\beta}+\dfrac{y_T x_R}{\beta}+\dfrac{x_R y_R}{\beta^2}\times\dfrac{M}{\beta},\beta
\end{array}\right\}
$$

$$= f\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\right)\times\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\right)\\ -\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\times y_T\right)-\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\times x_T\right)\\ +x_T y_T\end{array}\right)\\ -\dfrac{\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil\times y_R\right)}{\beta}-\dfrac{\left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil\times x_R\right)}{\beta}\\ +\dfrac{x_T y_R}{\beta}+\dfrac{y_T x_R}{\beta}+\dfrac{x_R y_R}{\beta^2}\times\dfrac{M}{\beta},\beta\end{array}\right\}$$

$$= f\left\{\begin{array}{l}\left(sign\left(x_L+x_U\right)\times\left\lceil\left|x_L+x_U\right|\right\rceil-x_T-\dfrac{x_R}{\beta}\right)\times\\ \left(sign\left(y_L+y_U\right)\times\left\lceil\left|y_L+y_U\right|\right\rceil-y_T-\dfrac{y_R}{\beta}\right)\times\dfrac{M}{\beta},\beta\end{array}\right\}$$

จากเหตุผลที่ว่า x_T และ y_T ของ $w_{\max}$ ได้มาจาก x และ y ที่ถูกเลือกจากสมการที่ 3.40 ดังนั้น

$$w_{\max} = f\left(\left(\left(x_{\max}\times y_{\max}\right)\times\frac{M}{\beta}\right),\beta\right)$$

$$= z_U$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่า $w_{\min}$ และ $w_{\max}$ ในสมการที่ 3.41 มีค่าเท่ากับ z_L และ z_U ตามลำดับ ซึ่งทำให้สามารถสรุปได้ว่า z_U ที่ได้จากยังคงการคูณกันของช่วงจำนวนสองจำนวน ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ ■

ตัวอย่างที่ 3.8 *การคูณของ X = [2.11, 3.76] และ Y = [5.38, 7.49] ในระบบที่มีค่าฐาน β = 2 และ M = 32 ซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 12% เท่ากันทั้งระบบ การดำเนินการคูณในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.8*

ตารางที่ 3.8 แสดงการดำเนินการคูณของ X = [2.11, 3.76] และ Y = [5.38, 7.49] ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

n	L	U	R
x_n	0.131875	0.235	1.26625
y_n	0.33625	0.468125	0.39125
z_n	0.7094875	1.76015	1.060725
z'_n	0.794626	1.971368	1.188012
z^*_n	0.7094875	1.76015	1.060725

คำตอบที่ได้ คือ (0.7094875, 1.76015, 1.060725) ซึ่งมีค่าเท่ากับ [11.3518, 28.1624] □

3.7.4 ตัวดำเนินการหารของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 3.9 *การหารของจำนวนจริงแบบช่วงสองจำนวนที่มีค่าไม่เกิน M และมีรูปแบบการแทนจำนวน คือ $X = (x_L, x_U, x_R)$ และ $Y = (y_L, y_U, y_R)$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่มีค่าฐาน β ที่ซึ่ง $\beta \geq 2$ รูปแบบการแทนจำนวนของผลลัพธ์สามารถแทนได้ด้วย (z_L, z_U, z_R) ผลลัพธ์จากการหารสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้*

$$z_L = f\left(\min\left(\frac{x_L}{y_L},\frac{x_L}{y_U},\frac{x_U}{y_L},\frac{x_U}{y_U}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \tag{3.43}$$

$$z_U = f\left(\max\left(\frac{x_L}{y_L},\frac{x_L}{y_U},\frac{x_U}{y_L},\frac{x_U}{y_U}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \tag{3.44}$$

$$z_R = \begin{cases}\left(\lceil w_{\min}+w_{\max}\rceil-\left(w_{\min}+w_{\max}\right)\right)\beta & (z_L+z_U)\geq 0\\ \left(\lfloor w_{\min}+w_{\max}\rfloor-\left(w_{\min}+w_{\max}\right)\right)\beta & (z_L+z_U)<0\end{cases} \tag{3.45}$$

$$w = f\left\{\left(\frac{f\left(x_L+x_U,\beta\right)-x_T\beta-x_R}{f\left(y_L+y_U,\beta\right)-y_T\beta-y_R}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right\} \tag{3.46}$$

โดยที่

$$f(a,b)=\begin{cases}a-b\lfloor a/b\rfloor & a\geq 0\\ a-b\lceil a/b\rceil & a<0\end{cases}$$

$$g(a,b)=sign(a)\times\lceil |a|\rceil\times b$$

ที่ซึ่ง

สำหรับ $w_{\min}$ $\quad x_T=\lceil x_L+x_U\rceil-x_{\min}$ และ $y_T=\lceil y_L+y_U\rceil-y_{\min}$

สำหรับ $w_{\max}$ $\quad x_T=\lceil x_L+x_U\rceil-x_{\max}$ และ $y_T=\lceil y_L+y_U\rceil-y_{\max}$

โดยที่ $x_{\min}$ $y_{\min}$ $x_{\max}$ และ $y_{\max}$ คือ ค่า x และ y ที่ถูกเลือกจาก z_L กับ z_U ตามลำดับ

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแสดงให้เห็นว่า ค่าของดิจิตผลลัพธ์ คือ $(z_L,\ z_U,\ z_R)$ ที่ได้จากการคำนวณจะยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ เพื่อที่จะทำให้ดิจิตเหล่านี้สามารถทำการกู้ค่าจากอัลกอริทึมที่ 3.1 ได้ หลังจากที่ดำเนินการหารแล้วมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น

กำหนดให้ $[Z_L,\ Z_U]$ เป็นค่าจำนวนจริงแบบช่วงของ $(z_L,\ z_U,\ z_R)$ ซึ่งค่าของดิจิตเหล่านี้สามารถนิยามได้ตามสมการที่ 3.1 3.2 และ 3.3 ดังต่อไปนี้

$$z_L = Z_L\times\left(\beta/M\right)$$

$$z_U = Z_U\times\left(\beta/M\right)$$

$$z_R=\begin{cases}\left(\lceil z_L+z_U\rceil-\left(z_L+z_U\right)\right)\times\beta, & (z_L+z_U)\geq 0\\ \left(\lfloor z_L+z_U\rfloor-\left(z_L+z_U\right)\right)\times\beta, & (z_L+z_U)<0\end{cases}$$

ทำให้การพิสูจน์ถูกแบ่งออกเป็นสามกรณี คือ

กรณีที่ 1 การพิสูจน์ z_L

จากสมการ 3.43

$$z_L = f\left(\min\left(\frac{x_L}{y_L},\frac{x_L}{y_U},\frac{x_U}{y_L},\frac{x_U}{y_U}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right)$$

กำหนดให้ $x_{\min}$ และ $y_{\min}$ เป็นค่าที่ถูกเลือกจากอัลกอริทึมการหารในสมการที่ 3.43 ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_L &= f\left(x_{\min}\div y_{\min}\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(\left(X_{\min}\times\frac{\beta}{M}\right)\div\left(Y_{\min}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(\left(X_{\min}\div Y_{\min}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(Z_{\min}\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= Z_{\min}\times\frac{\beta}{M} \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_L ที่ได้จากการหารกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 2 การพิสูจน์ z_U

จากสมการ 3.44

$$z_U = f\left(\max\left(\frac{x_L}{y_L},\frac{x_L}{y_U},\frac{x_U}{y_L},\frac{x_U}{y_U}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right)$$

กำหนดให้ $x_{\max}$ และ $y_{\max}$ เป็นค่าที่ถูกเลือกจากอัลกอริทึมการหารในสมการที่ 3.44 ดังนั้น

$$\begin{aligned} z_U &= f\left(x_{\max}\div y_{\max}\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(\left(X_{\max}\times\frac{\beta}{M}\right)\div\left(Y_{\max}\times\frac{\beta}{M}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(\left(X_{\max}\div Y_{\max}\right)\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= f\left(Z_{\max}\times\frac{\beta}{M},\beta\right) \\ &= Z_{\max}\times\frac{\beta}{M} \end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าดิจิต z_U ที่ได้จากการหารกันของช่วงจำนวนสองจำนวนยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่

กรณีที่ 3 การพิสูจน์ z_U

จากสมการที่ 3.45 และ 3.46 จะเห็นว่าค่าของดิจิต z_U จะยังคงอยู่ในระบบดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงก็ต่อเมื่อ $w_{\min}$ และ $w_{\max}$ มีค่าเท่ากับดิจิต z_L และ z_U ตามลำดับ ดังนั้นการพิสูจน์ z_U จึงแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นอีกสองกรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่ 3.1 การพิสูจน์ $w_{\min}$

จากสมการที่ 3.46

$$\begin{aligned}
w &= f\left\{\left(\frac{f\left(x_L + x_U, \beta\right) - x_T\beta - x_R}{f\left(y_L + y_U, \beta\right) - y_T\beta - y_R}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\} \\
&= f\left\{\left(\frac{\left(sign\left(x_L + x_U\right) \times \lceil |x_L + x_U| \rceil \times \beta\right) - x_T\beta - x_R}{\left(sign\left(y_L + y_U\right) \times \lceil |y_L + y_U| \rceil \times \beta\right) - y_T\beta - y_R}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\} \\
&= f\left\{\left(\frac{sign\left(x_L + x_U\right) \times \lceil |x_L + x_U| \rceil - x_T - \dfrac{x_R}{\beta}}{sign\left(y_L + y_U\right) \times \lceil |y_L + y_U| \rceil - y_T - \dfrac{y_R}{\beta}}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\}
\end{aligned}$$

จากเหตุผลที่ว่า x_T และ y_T ของ $w_{\min}$ ได้มาจาก x และ y ที่ถูกเลือกจากสมการที่ 3.43 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
w_{\min} &= f\left(\left(\left(x_{\min} / y_{\min}\right) \times \frac{M}{\beta}\right), \beta\right) \\
&= z_L
\end{aligned}$$

กรณีที่ 3.2 การพิสูจน์ $w_{\max}$

จากสมการที่ 3.46

$$\begin{aligned}
w &= f\left\{\left(\frac{f\left(x_L + x_U, \beta\right) - x_T\beta - x_R}{f\left(y_L + y_U, \beta\right) - y_T\beta - y_R}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\} \\
&= f\left\{\left(\frac{\left(sign\left(x_L + x_U\right) \times \lceil |x_L + x_U| \rceil \times \beta\right) - x_T\beta - x_R}{\left(sign\left(y_L + y_U\right) \times \lceil |y_L + y_U| \rceil \times \beta\right) - y_T\beta - y_R}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\} \\
&= f\left\{\left(\frac{sign\left(x_L + x_U\right) \times \lceil |x_L + x_U| \rceil - x_T - \dfrac{x_R}{\beta}}{sign\left(y_L + y_U\right) \times \lceil |y_L + y_U| \rceil - y_T - \dfrac{y_R}{\beta}}\right) \times \frac{\beta}{M}, \beta\right\}
\end{aligned}$$

จากเหตุผลที่ว่า x_T และ y_T ของ $w_{\max}$ ได้มาจาก x และ y ที่ถูกเลือกจากสมการที่ 3.44 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
w_{\max} &= f\left(\left(\left(x_{\max} / y_{\max}\right) \times \frac{M}{\beta}\right), \beta\right) \\
&= z_U
\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่า $w_{\min}$ และ $w_{\max}$ ในสมการที่ 3.45 มีค่าเท่ากับ z_L และ z_U ตามลำดับ ซึ่งทำให้สามารถสรุปได้ว่า z_U ที่ได้จากยังคงการหารกันของช่วงจำนวนสองจำนวน ยังคงคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอยู่ ■

ตัวอย่างที่ 3.9 *การหารของ $X = [2.11, 3.76]$ และ $Y = [5.38, 7.49]$ ในระบบที่มีค่าฐาน $\beta = 2$ และ $M = 32$ ซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบเท่ากับ 12% เท่ากันทั้งระบบ การดำเนินการหารในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.9*

ตารางที่ 3.9 แสดงการดำเนินการหารของ $X = [2.11, 3.76]$ และ $Y = [5.38, 7.49]$ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

n	L	U	R
x_n	0.131875	0.235	1.26625
y_n	0.33625	0.468125	0.39125
z_n	0.0176068091	0.0436802974	1.877425787
z'_n	0.0197196262	0.0489219331	2.102716881
z^*_n	0.0176068091	0.0436802974	1.877425787

คำตอบที่ได้ คือ (0.0176068091, 0.0436802974, 1.877425787) ซึ่งมีค่าเท่ากับ [0.2817089453, 0.6988847584] □

3.8 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอระบบจำนวนรูปแบบใหม่สำหรับการทำงานบนระบบจำนวนแอนะล็อก ซึ่งระบบจำนวนรูปแบบใหม่นี้มีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง โดยเป็นระบบที่นำความสามารถของระบบแทนจำนวนแบบช่วงมาประยุกต์ใช้บนพื้นฐานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน ทำให้ระบบจำนวนแบบใหม่นี้นอกจากจะสามารถกู้ค่าความผิดพลาดได้แล้ว ยังสามารถรองรับปัญหาที่เกิดจากความผิดพลาดของข้อมูลขาเข้าและปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษได้อีกด้วย ในระบบที่มีค่าความผิดพลาดอยู่ในรูปของตัวประกอบที่ใช้สามแอนะล็อกดิจิตในการแสดงจำนวนแต่ละจำนวน ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะมีความถูกต้องแม่นยำสำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากันทั้งระบบ แต่ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดมีค่าไม่เท่ากัน อัลกอริทึมการประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะสามารถประมาณช่วงใกล้เคียงของคำตอบที่แท้จริงได้ ซึ่งในกรณีที่ไม่ทราบว่าค่าความผิดพลาดมีค่าเท่ากันทั้งระบบหรือไม่ จะสามารถใช้การประมาณช่วงใกล้เคียงได้เลย เนื่องจากช่วงการประมาณที่ได้ จะครอบคลุมค่าจริงอย่างแน่นอน อีกทั้งในบทนี้ยังได้นำเสนอ

การแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่ไม่เท่ากันและอัลกอริทึมการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงอีกด้วย

บทที่ 4

บทวิเคราะห์ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงบทวิเคราะห์ในแง่มุมต่างๆ ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง โดยมุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงกับค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นและส่งผลต่อระบบ

4.1 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อผลลัพธ์หลังจากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ในความเป็นจริงแล้ว ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแต่ละสัญญาณนั้นไม่สามารถควบคุมให้เท่ากันได้ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความผิดเพี้ยนไป ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้จะวิเคราะห์ถึงความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่เกิดจากค่าความผิดพลาดที่ไม่เท่ากันและความคลาดเคลื่อนที่สูงที่สุดที่เกิดขึ้นได้ในระบบ โดยเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงสามารถคำนวณได้ดังทฤษฎีบทที่ 4.1

ทฤษฎีบทที่ 4.1 *กำหนดให้ d_L d_U d_R เป็นเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ของ x_L x_U x_R ตามลำดับ และ ε_L ε_U ε_R เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับ x_L x_U x_R ตามลำดับ และ ε^* เป็นค่าความผิดพลาดที่คำนวณได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงสามารถแสดงได้ตามสมการดังต่อไปนี้*

$$d_L = \left| \left(\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \right| \tag{4.1}$$

$$d_U = \left| \left(\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \right| \tag{4.2}$$

$$d_R = \left| \left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \right| \tag{4.3}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์จะแบ่งออกเป็นสามกรณี

กรณีที่ 1 คือ การพิสูจน์ d_L

กำหนดให้ x_L คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่าง และ x'_L คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่างที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูป

$$x'_L = x_L \times \varepsilon_L$$

และกำหนดให้ $diff$ คือ ความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงซึ่งคำนวณได้จาก

$$diff = \frac{x'_L}{\varepsilon^*} - x_L \tag{4.4}$$

จากสมการที่ 4.4 สามารถนำมาเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d_L &= \frac{diff}{x_L} \times 100 \\ &= \frac{\dfrac{x'_L}{\varepsilon^*} - x_L}{x_L} \times 100 \\ &= \left(\frac{x'_L}{x_L \times \varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} - 1 \right)$ อาจเป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ ดังนั้นเราสามารถสรุปใหม่ได้ว่า

$$d_L = \left| \left(\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \right|$$

กรณีที่ 2 คือ การพิสูจน์ d_U

กำหนดให้ x_U คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบน และ x'_L คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบนที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูป

$$x'_U = x_U \times \varepsilon_U$$

และกำหนดให้ $diff$ คือ ความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงซึ่งคำนวณได้จาก

$$diff = \frac{x'_U}{\varepsilon^*} - x_U \tag{4.5}$$

จากสมการที่ 4.5 สามารถนำมาเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d_U &= \frac{diff}{x_U} \times 100 \\ &= \frac{\dfrac{x'_U}{\varepsilon^*} - x_U}{x_U} \times 100 \\ &= \left(\frac{x'_U}{x_U \times \varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*} - 1 \right) \times 100 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*}-1\right)$ อาจเป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ ดังนั้นเราสามารถสรุปใหม่ได้ว่า

$$d_U = \left|\left(\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*}-1\right)\times 100\right|$$

กรณีที่ 3 คือ การพิสูจน์ d_R

กำหนดให้ x_R คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อน และ x'_R คือ ค่าดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูป

$$x'_R = x_R \times \varepsilon_R$$

และกำหนดให้ $diff$ คือ ความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงซึ่งคำนวณได้จาก

$$diff = \frac{x'_R}{\varepsilon^*} - x_R \tag{4.6}$$

จากสมการที่ 4.6 สามารถนำมาเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d_R &= \frac{diff}{x_R}\times 100 \\ &= \frac{\frac{x'_R}{\varepsilon^*}-x_R}{x_R}\times 100 \\ &= \left(\frac{x'_R}{x_R\times\varepsilon^*}-1\right)\times 100 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*}-1\right)\times 100 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*}-1\right)$ อาจเป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ ดังนั้นเราสามารถสรุปใหม่ได้ว่า

$$d_R = \left|\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*}-1\right)\times 100\right|$$ ■

จากทฤษฎีบทที่ 4.1 เป็นเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในอัลกอริทึมที่ 3.1 เปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่แท้จริง ซึ่งเปอร์เซ็นต์ดังกล่าวจะมีค่าไม่เกินไปกว่า $d_{\max}$ ที่เป็นเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงในทฤษฎีบทที่ 4.2 ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.2 *กำหนดให้ d_{max} เป็นเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงที่ค่าความผิดพลาดมีค่าไม่เกินค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม บนฐาน β เมื่อ β เป็นจำนวนจริงที่ $\beta \geq 2$ เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงสามารถแสดงได้ดังสมการดังต่อไปนี้*

$$d_{\max} = \left|\left(\frac{1}{1+1/2\beta}-1\right)\times 100\right| \tag{4.7}$$

พิสูจน์

กำหนดให้ไม่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นเลยในแต่ละสัญญาณ และค่าความผิดพลาดที่คำนวณได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 เป็นค่าที่สูงสุดเท่าที่จะเป็นไปที่ไม่เกินค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้ และกำหนดให้ d_{Lmax} d_{Umax} และ d_{Rmax} เป็นเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงในแต่ละสัญญาณที่ซึ่งพิจารณามาจากค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนยินยอม

จากสมการที่ 4.1 4.2 และ 4.3 สามารถสรุปได้ดังนี้

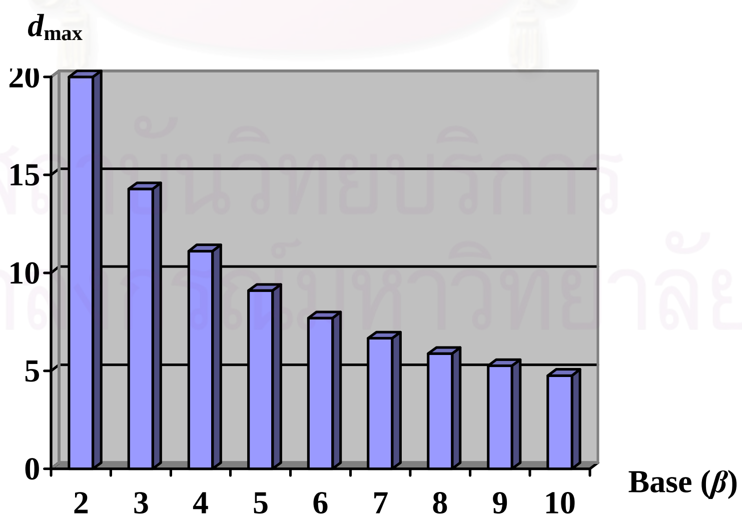
$$d_{L\max} = \left|\left(\frac{1}{1+1/2\beta}-1\right)\times 100\right|$$

$$d_{U\max} = \left|\left(\frac{1}{1+1/2\beta}-1\right)\times 100\right|$$

$$d_{R\max} = \left|\left(\frac{1}{1+1/2\beta}-1\right)\times 100\right|$$

จากการพิสูจน์จะเห็นได้ว่าเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงในแต่ละสัญญาณจะมีค่าเท่ากับสมการที่ 4.7 ■

จากสมการที่ 4.3 ในทฤษฎีบทที่ 4.2 จะเห็นว่าเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงนั้นมีความสัมพันธ์กันกับค่าฐาน β ทำให้สามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงกับค่าฐานออกมาเป็นกราฟได้ดังรูปข้างล่างนี้



รูปที่ 4.1 แสดงเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงเปรียบเทียบกับค่าฐาน

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อค่าฐานมีค่าลดลง

ตัวอย่างที่ 4.1 *กำหนดให้ช่วงของ* $X = [31.36, 47.19]$ *ในระบบที่มีค่า* $\beta = 10$ *และ* $M = 100$ *ที่ประกอบไปด้วย* x_L x_U *และ* x_R *โดยได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดเท่ากับ 4% 3% และ 5% ตามลำดับ ความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงแสดงได้ดังตารางที่ 4.1*

ตารางที่ 4.1 แสดงความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์จริง
สำหรับระบบที่มีค่าความผิดพลาดไม่เท่ากัน

	x_L	x_U	x_R
x_n	3.136	4.719	1.45
x'_n	3.26144	4.86057	1.5225
x^*_n	3.153335767	4.699460737	1.472034961
d_n	0.5527986926	0.4140551542	1.519652513
$d_{\max}$	4.761904762	4.761904762	4.761904762

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงเมื่อเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์จะมีค่าไม่เกินกว่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดจริง □

4.2 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อระบบในการแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่มีค่าไม่เท่ากันของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

เนื่องจากสาเหตุที่ว่า ในวงจรแอนะล็อกนั้นไม่มีความจำเป็นที่ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมในแต่ละส่วนของวงจรต้องมีค่าเท่ากัน และทฤษฎีบทที่ 3.5 ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมกับค่าฐานที่เลือกใช้ ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้จะกล่าวถึงความเป็นไปได้ในการแปลงดิจิตเซตไปยังค่าฐานที่เลือกใช้โดยไม่ผ่านอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดก่อน เพื่อเป็นการลดขั้นตอนในการทำงานลงซึ่งผลที่ได้จากการวิเคราะห์แสดงดังทฤษฎีบทที่ 4.3 ข้างล่างนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.3 *กำหนดให้* $(x'_{L1}, x'_{U1}, x'_{R1})$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดสำหรับค่าฐาน* β_1 *และ* $(x'_{L2}, x'_{U2}, x'_{R2})$ *เป็นรูปแบบการแทนค่าของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดสำหรับค่าฐาน* β_2 *รูปแบบการแทนค่าของ* $(x'_{L2}, x'_{U2}, x'_{R2})$ *บนค่าฐาน* β_2 *สามารถคำนวณได้จาก* $(x'_{L1}, x'_{U1}, x'_{R1})$ *บนฐาน* β_1 *ดังสมการดังต่อไปนี้*

$$x'_{L2} = \left(x'_{L1} / \beta_1\right) \times \beta_2 \tag{4.8}$$

$$x'_{U2} = \left(x'_{U1} / \beta_1\right) \times \beta_2 \tag{4.9}$$

$$x'_{R2} = \begin{cases} \left(\left\lceil \frac{\left(x'_{L1} + x'_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rceil \beta_2\right) - \left(\left\lceil x'_{L1} + x'_{U1} \right\rceil \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\frac{x'_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x'_{L1} + x'_{U1}\right) \geq 0 \\ \left(\left\lfloor \frac{\left(x'_{L1} + x'_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rfloor \beta_2\right) - \left(\left\lfloor x'_{L1} + x'_{U1} \right\rfloor \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\frac{x'_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x'_{L1} + x'_{U1}\right) < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์สมการที่ 4.8 4.9 และ 4.10 จะพิจารณาเหมือนทฤษฎีบทที่ 3.5 ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ตรงกับสมการที่ 4.8 4.9 และ 4.10 ■

แต่ข้อสังเกตของสมการที่ 4.4 4.5 และ 4.6 คือ ผลกระทบของค่าความผิดพลาดที่ได้หลังจากการแปลงค่าฐานต่อการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

ทฤษฎีบทที่ 4.4 *ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงที่ผ่านการแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่ไม่เท่ากันแล้วโดยไม่ผ่านอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดก่อน อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดหลังจากการแปลงดิจิตเซตแล้วจะไม่สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง*

พิสูจน์

จากสมการที่ 4.8 4.9 และ 4.10 สามารถวิเคราะห์ได้ดังนี้ว่า

$$x_{L2} \times \varepsilon_L = \left(\frac{x_{L1} \times \varepsilon_L}{\beta_1}\right) \times \beta_2$$

$$x_{U2} \times \varepsilon_U = \left(\frac{x_{U1} \times \varepsilon_U}{\beta_1}\right) \times \beta_2$$

$$x_{R2} \times \varepsilon_R = \begin{cases} \left(\left\lceil \frac{\left(x'_{L1} + x'_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rceil \beta_2\right) - \left(\left\lceil x'_{L1} + x'_{U1} \right\rceil \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\frac{x'_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x'_{L1} + x'_{U1}\right) \geq 0 \\ \left(\left\lfloor \frac{\left(x'_{L1} + x'_{U1}\right)\beta_2}{\beta_1} \right\rfloor \beta_2\right) - \left(\left\lfloor x'_{L1} + x'_{U1} \right\rfloor \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right) + \left(\frac{x'_{R1}\beta_2^2}{\beta_1^2}\right) & \left(x'_{L1} + x'_{U1}\right) < 0 \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นที่ค่าฐานใหม่จะมีค่าเท่ากับค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นที่ค่าฐานเดิมไม่ได้เปลี่ยนไปตามค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมได้ของค่าฐานใหม่ ซึ่งจะส่งผลต่อการกู้ค่าของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงทำให้ไม่สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง ■

ตัวอย่างที่ 4.2 *กำหนดให้ X = [14.65, 17.28] บนฐาน $\beta = 2$ ด้วยค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต M = 32 ทำการแปลงค่าฐานไปที่ $\beta = 10$ ที่ประกอบไปด้วย x_L x_U และ x_R โดยได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดเท่ากับ 20% 11% และ 17% ตามลำดับ ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงบนค่าฐานใหม่สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.2*

ตารางที่ 4.2 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดหลังจากการแปลงค่าฐาน
โดยไม่ผ่านการกู้ค่าความผิดพลาดมาก่อน

	x_L	x_U	x_R
x_{n1}	0.915625	1.08	0.00875
x'_{n1}	1.09875	1.1988	0.0102375
x'_{n2}	5.49375	5.994	0.2559375
x^*_{n2}	5.725964709	6.24735921	0.2667556938
x^*_{n1}	1.145192942	1.249471842	0.01067022775
d_n	25.07226668	15.69183722	21.94545714
$d_{\max}$	20.00	20.00	20.00

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นได้ว่าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นหลังจากการแปลงค่าฐานอาจส่งผลให้อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดทำงานผิดเพี้ยนไป ซึ่งในบางสัญญาณผลลัพธ์ก็ยังอยู่ในขอบเขตสูงสุด $d_{\max}$ แต่ในบางสัญญาณผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีค่าเกินขอบเขตสูงสุด $d_{\max}$ โดย $d_{\max}$ จากทฤษฎีบทที่ 4.2 นั้นคือเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลลัพธ์จริงที่ซึ่งพิจารณาจากค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอม ทำให้เราไม่สามารถสรุปได้ว่าการแปลงค่าฐานก่อนการกู้ค่าความผิดพลาดจะถูกต้องเสมอไป □

4.3 การวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดที่ส่งผลต่อช่วงของผลลัพธ์หลังจากการกู้ค่าความผิดพลาดของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

เนื้อหาในส่วนนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ค่าความผิดพลาดในระบบ ในกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เท่ากันและส่งผลต่อช่วงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ จากอัลกอริทึมที่ 3.1 จะเห็นได้ว่า ถ้าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เท่ากันจะทำให้ ε ที่ได้จากสมการที่ 3.8 มีความผิดเพี้ยนไป

ทฤษฎีบทที่ 4.5 *กำหนดให้ ε^* เป็นค่าความผิดพลาดที่กู้ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 สำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบมีค่าไม่เท่ากัน ε_L ε_U และ ε_R เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับสัญญาณ x_L x_U และ x_R ตามลำดับ ถ้าค่าความผิดพลาด ε_L ε_U และ ε_R มีค่าน้อยกว่า ε^* แล้ว ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดจะมีค่าลดลงจากเดิม*

พิสูจน์

กำหนดให้ค่าความผิดพลาด ε_L ε_U และ ε_R มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้แสดงดังอสมการข้างล่างนี้

$$\varepsilon_L < \varepsilon^* \qquad \varepsilon_U < \varepsilon^* \qquad \varepsilon_R < \varepsilon^*$$

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} < 1 \qquad \frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*} < 1 \qquad \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*} < 1$$

ดังนั้น

$$\frac{x'_L}{\varepsilon^*} < x_L \qquad \frac{x'_U}{\varepsilon^*} < x_U \qquad \frac{x'_R}{\varepsilon^*} < x_R$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าผลลัพธ์จากการกู้ค่าจะมีค่าลดลงจากค่าจริง ■

ทฤษฎีบทที่ 4.6 *กำหนดให้ ε^* เป็นค่าความผิดพลาดที่กู้ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 สำหรับกรณีที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบมีค่าไม่เท่ากัน ε_L ε_U และ ε_R เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับสัญญาณ x_L x_U และ x_R ตามลำดับ ถ้าค่าความผิดพลาด ε_L ε_U และ ε_R มีค่ามากกว่า ε^* แล้ว ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากเดิม*

พิสูจน์

กำหนดให้ค่าความผิดพลาด ε_L ε_U และ ε_R มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้แสดงดังอสมการข้างล่างนี้

$$\varepsilon_L > \varepsilon^* \qquad \varepsilon_U > \varepsilon^* \qquad \varepsilon_R > \varepsilon^*$$

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon^*} > 1 \qquad \frac{\varepsilon_U}{\varepsilon^*} > 1 \qquad \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*} > 1$$

ดังนั้น

$$\frac{x'_L}{\varepsilon^*} > x_L \qquad \frac{x'_U}{\varepsilon^*} > x_U \qquad \frac{x'_R}{\varepsilon^*} > x_R$$

จากการพิสูจน์จะเห็นว่าผลลัพธ์จากการกู้ค่าจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากค่าจริง ■

จากทฤษฎีบทที่ 4.5 และ 4.6 จะเห็นว่าผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดไม่เท่ากันอาจมีทั้งค่าที่ลดลงและเพิ่มขึ้น ดังนั้นการวิเคราะห์เนื้อหาในส่วนนี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี

กรณีศึกษาที่ 1 คือ ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้

กำหนดให้ ε_L ε_U และ ε_R เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_L x_U และ x_R ตามลำดับ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง X = [23.83, 27.26] บนฐาน β = 10 และ M = 100 ที่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 2% 4% และ 3% ตามลำดับ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์แสดงได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้

	x_L	x_U	x_R
x_n	2.383	2.726	8.91
x'_n	2.43066	2.83504	9.1773
x^*_n	2.358555041	2.750939203	8.905057546

กรณีศึกษาที่ 2 คือ ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้

กำหนดให้ ε_L ε_U *และ* ε_R เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_L x_U *และ* x_R ตามลำดับ ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง $X = [23.83, 27.26]$ บนฐาน $\beta = 10$ และ $M = 100$ ที่มีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้น 4% 2% และ 3% ตามลำดับ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์แสดงได้ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดในกรณีที่ค่าความผิดพลาดของดิจิต x_L มีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้ และ x_U มีค่าน้อยกว่าค่าความผิดพลาดที่กู้ได้

	x_L	x_U	x_R
x_n	2.383	2.726	8.91
x'_n	2.47832	2.78052	9.1773
x^*_n	2.407472109	2.701033099	8.914947943

จากการวิเคราะห์จะสามารถสรุปได้ว่า ถ้ามีค่าความผิดพลาดที่ไม่เท่ากันเกิดขึ้นในระบบแล้ว อัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดจะไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่ครอบคลุมค่าจริงได้ทุกกรณี □

ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแก้ไขปัญหาที่เกิดจากบทวิเคราะห์นี้ได้ โดยการนำช่วงผลลัพธ์จากการประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในทฤษฎีบทที่ 3.4 มาใช้เป็นช่วงคำตอบสุดท้าย เนื่องจากช่วงผลลัพธ์จากการประมาณช่วงใกล้เคียงนั้นจะให้ช่วงผลลัพธ์ที่ครอบคลุมคำตอบทุกๆ ค่าในช่วงจริงเสมอ จากกรณีศึกษาที่ 1 และ 2 ช่วงผลลัพธ์จากการประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.5 และ 4.6

ตารางที่ 4.5 แสดงช่วงผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียงเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีศึกษาที่ 1

	x_L	x_U	x_R
x_n	2.383	2.726	8.91
x'_n	2.43066	2.83504	9.1773
x^*_n	2.358555041	2.750939203	8.905057546
x_{nest}	2.254407016	2.889513089	8.56079895

ตารางที่ 4.6 แสดงช่วงผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียงเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดในกรณีศึกษาที่ 2

	x_L	x_U	x_R
x_n	2.383	2.726	8.91
x'_n	2.47832	2.78052	9.1773
x^*_n	2.407472109	2.701033099	8.914947943
x_{nest}	2.30079586	2.837217778	8.61986362

จากตารางที่ 4.5 และ 4.6 จะเห็นได้ชัดว่าช่วงผลลัพธ์ ($x_{L\mathrm{est}}$, $x_{U\mathrm{est}}$) ที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงจะครอบคลุมคำตอบในช่วงจริง (x_L, x_U) ทั้งในกรณีศึกษาที่ 1 และ 2 $\square$

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอรูปแบบการแทนจำนวนแบบใหม่บนระบบแอนะล็อก ที่มีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง ซึ่งเป็นระบบที่สามารถควบคุมและตรวจสอบปัญหาที่เกิดจากค่าคลาดเคลื่อนการปัดเศษ ความผิดพลาดของจำนวนที่เกิดจากความคลาดเคลื่อนของข้อมูลขาเข้า รวมทั้งยังสามารถกู้ค่าความผิดพลาดได้อย่างถูกต้องในกรณีที่ค่าความผิดพลาดเท่ากันทั้งระบบและอยู่ภายใต้ค่าคลาดเคลื่อนที่ยินยอม แต่ถ้าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เท่ากันแต่ยังอยู่ภายใต้ค่าคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบ ระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงก็สามารถประมาณช่วงใกล้เคียงกับคำตอบจริงได้ ซึ่งตรงกับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้

ผลจากทฤษฎีการคำนวณค่าประมาณช่วงใกล้เคียงดังกล่าว ทำให้ได้ข้อสรุปที่น่าสนใจมากอย่างหนึ่ง คือ ถ้าในระบบมีค่าความผิดพลาดไม่เท่ากันทั้งระบบแต่ค่าความผิดพลาดยังอยู่ภายใต้เงื่อนไขของค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมแล้ว การประมาณช่วงใกล้เคียงดังกล่าวสามารถนำมาใช้เป็นคำตอบที่ถูกต้องได้เช่นเดียวกัน ทั้งนี้เป็นเพราะสามารถพิสูจน์ได้ว่า ค่าประมาณช่วงใกล้เคียงที่คำนวณได้จะครอบคลุมช่วงของค่าที่ถูกต้องแน่นอน ดังนั้น คำตอบที่ถูกต้องทั้งหมด (พิจารณาเป็นช่วงจำนวน) จะอยู่ภายในคำตอบของค่าที่ประมาณได้ทุกค่า ซึ่งเป็นไปตามหลักการของการคำนวณแบบช่วงแต่ค่าประมาณช่วงใกล้เคียงนี้อาจไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด

นอกจากนี้ ยังได้ออกแบบอัลกอริทึมการแปลงดิจิตเซตด้วยค่าฐานที่ไม่เท่ากันและอัลกอริทึมการบวก ลบ คูณ และหาร สำหรับระบบจำนวนแบบใหม่นี้อีกด้วย

ผลจากการวิเคราะห์งานวิจัยนี้ ในส่วนแรกพบว่าเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงจะมีค่าน้อยเมื่อค่าฐานสูงและจะมีค่ามากเมื่อค่าฐานต่ำ ซึ่งจะมีค่ามากที่สุดเมื่อค่าฐานเท่ากับสองโดยที่ค่าฐานนั้นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองตามคุณสมบัติของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง และจะมีค่าลดลงเมื่อค่าฐานมีค่าเพิ่มขึ้น สาเหตุที่ทำให้เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงมีค่าเปลี่ยนแปลงตามค่าฐานเพราะเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงนี้พิจารณาจากค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงซึ่งเปลี่ยนแปลงตามค่าฐานเช่นเดียวกัน และจากเหตุผลที่ว่าบางส่วนของวงจรที่แยกหน้าที่กันทำงานไม่จำเป็นต้องให้ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมมีค่าเท่ากัน ทำให้สามารถเลือกฐานที่เหมาะสมกับแต่ละระบบตามค่าฐานที่เลือกใช้ได้ถ้าทราบค่าความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุด

ที่เกิดขึ้นได้กับแต่ละระบบ โดยการแปลงค่าฐานของระบบนั้นไปยังค่าฐานที่สูงขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบนั้นมีค่าลดลง

ส่วนที่สองเป็นการวิเคราะห์เพื่อลดขั้นตอนการทำงานลงสำหรับการแปลงค่าฐาน การแปลงค่าฐานในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงนั้นจำเป็นต้องทำการกู้ค่าความผิดพลาดก่อน เพื่อไม่ให้ค่าความผิดพลาดส่งผลกระทบถึงระบบจำนวนที่แปลงค่าฐานไปแล้ว ซึ่งการวิเคราะห์ในส่วนนี้แสดงให้ว่า ไม่สามารถแปลงค่าฐานโดยไม่ผ่านอัลกอริทึมการกู้ค่าได้ เพราะค่าความผิดพลาดจากค่าฐานแรกอาจมีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของค่าฐานที่สองได้ในกรณีที่เกิดการแปลงจากระบบที่มีค่าฐานแรกน้อยกว่าไปยังค่าฐานที่สองที่มีค่ามากกว่า

การวิเคราะห์ในส่วนสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์ผลกระทบของค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบที่มีค่าไม่เท่ากันต่อช่วงของผลลัพธ์ที่ได้หลังจากการกู้ค่าความผิดพลาด ซึ่งผลจากการวิเคราะห์พบว่า ในบางกรณีจะทำให้ผลลัพธ์มีค่าลดลงและในบางกรณีจะทำให้ผลลัพธ์มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งไม่สามารถสรุปได้ว่าถ้ามีค่าความผิดพลาดที่ไม่เท่ากันเกิดขึ้นในระบบแล้วอัลกอริทึมการกู้ค่าความผิดพลาดจะให้ช่วงของผลลัพธ์ครอบคลุมค่าจริงเสมอ

5.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะจากงานวิจัยนี้คือ ถ้ามีสัญญาณแอนะล็อกขาเข้าสองสัญญาณซึ่งประกอบไปด้วยสัญญาณแสดงค่าและสัญญาณซ้ำซ้อนที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดแล้ว จากนั้นนำทั้งสองสัญญาณมาทำกู้ค่าความผิดพลาด สิ่งที่น่าสนใจคือ จะสามารถให้ผลลัพธ์เป็นช่วงแทนสัญญาณแสดงค่าที่สามารถครอบคลุมสัญญาณแสดงค่าจริงเสมอได้หรือไม่ โดยที่ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในระบบนั้นไม่ทราบว่าเป็นเท่าใดและต่างกันหรือไม่ ทราบแต่เพียงว่ามีค่าไม่เกินค่าคลาดเคลื่อนที่ยินยอมของระบบ ทำให้ผลลัพธ์จากการกู้ค่าความผิดพลาดนั้นไม่สามารถยืนยันได้ว่าจะมีค่าเท่ากับค่าจริงที่ไม่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาดเสมอไป ซึ่งตรงจุดนี้ไม่สามารถใช้การประมาณช่วงใกล้เคียงสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงในหาการช่วงของผลลัพธ์ได้ เนื่องจากสัญญาณขาเข้านั้นไม่ได้อยู่ในระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วงมาก่อน และถ้าสามารถหาได้จะสามารถหาช่วงของผลลัพธ์ได้ใกล้เคียงกับสัญญาณแสดงค่าจริงได้มากที่สุดได้อย่างไร จึงยังคงเป็นปัญหาที่น่าสนใจอยู่

อภิธานศัพท์

สัญกรณ์ทางคณิตศาสตร์

X	ค่าเชิงตัวเลข (numerical value)
X_L	ค่าเชิงตัวเลขขอบเขตล่าง (lower bound numerical value)
X_U	ค่าเชิงตัวเลขขอบเขตบน (upper bound numerical value)
M	ค่าระยะสูงสุดแบบพลวัต (maximum dynamic range)
β	ค่าฐาน (base)
$\min()$	การเลือกค่าที่น้อยที่สุด (minimum)
$\max()$	การเลือกค่าที่มากที่สุด (maximum)
$[x_n]_{Rounded}$	การคำนวณฟังก์ชันการปัดเศษ (rounded function)
$\lceil x_n \rceil$	การคำนวณฟังก์ชันเพดาน (ceiling function)
$\lfloor x_n \rfloor$	การคำนวณฟังก์ชันพื้น (floor function)
$sign(x_n)$	เครื่องหมายของ x_n
ε	ค่าความผิดพลาด (error)
ε_n	ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับดิจิต x_n
ε^*	ค่าความผิดพลาดที่กู้ได้
x_n'	ดิจิตแอนะล็อก x_n ที่ได้รับผลกระทบจากค่าความผิดพลาด
x_n^*	ดิจิตแอนะล็อก x_n ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาด
$[x_n'']_R$	ผลลัพธ์ที่ได้จากการกู้ค่าความผิดพลาดที่ดิจิต x_n ในระบบจำนวนค่าต่อเนื่อง
x_v	ดิจิตแอนะล็อกค่าสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน
x_r	ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อน
x_L	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่างสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
x_U	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบนสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
x_R	ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนสำหรับระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
x_{Lest}	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่างที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียง
x_{Uest}	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบนที่ได้จากการประมาณช่วงใกล้เคียง
z_L	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตล่างที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
z_U	ดิจิตแอนะล็อกขอบเขตบนที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง
z_R	ดิจิตแอนะล็อกซ้ำซ้อนที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนแอนะล็อกซ้ำซ้อนแบบช่วง

d_L	เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงของดิจิต x_L
d_U	เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงของดิจิต x_U
d_R	เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริงของดิจิต x_R
$d_{\max}$	เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนมากที่สุดของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จริง

รายการอ้างอิง

[1] J. Micheal Schulte. and E. Earl Swartzlander Jr. “A Family of Variable-Precision Interval Arithmetic Processors.” *IEEE Transactions on Computers*, 49, 5 (2000): 387-397.

[2] R.E. Moore. “Interval Analysis.” Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, USA, (1996).

[3] S. Ahmet Akka. “A Combined Interval and Floating-point Comparator/Selector.” *Proceedings of the IEEE International Conference on Application-Specific Systems, Architectures, and Processors (ASAP’ 02)*, 2 (2002): 208-217.

[4] H. Munoz and E. Pierre. “Interval Arithmetic Optimization Technique for System Reliability with Redundancy.” *8th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*, Iowa State University, Ames, Towa, (2004).

[5] G.F. Corliss. “Industrial Applications of Interval Techniques.” *Computer Arithmetic and self-validating Numerical Methods*, Acadamic Press, Boston, USA, (1990).

[6] L. Hedger. “Analog Computation: Everything Old Is New Again.” *Research & Creative Activity Indiana University*, 21, 2 (1998).

[7] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Analog Digits: Bit Level Redundancy in Binary Multiplier.” *Proc. 32nd Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers*, 1 (1998): 236-240.

[8] C. Frougny and A. Surarerks. “On-line multiplication in real and complex base.” *Proceedings of the 16th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, (2004): 212-219.

[9] N. Srimanotham, S. Srivansont and A. Surarerks. “On-Line multiplication in compressed Signed Digit Representation Using On-the-fly Technique.” *Proceedings of the 8th National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2004)*, (2004).

[10] N. Srimanotham and A. Surarerks. “On-Line Arithmetic in Compressed Signed Digit Representation.” *Proceedings of the 9th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE9)*, (2005).

[11] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Overlap Resolution: Continuous Valued Digits for Hybrid Architectures.” *Proc. 40th Midwest Symp. Circuits and Systems*, 1 (1997): 377-380.

[12] A. Saed, M. Ahmadi, G.A. Jullien and W.C. Miller. “Overlap Resolution: Arithmetic with Continuous Valued Digits for Hybrid Architectures.” *Proc. 31st Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers*, 2 (1997): 1188-1191.

[13] R. A. Aroca, M. Ahmadi, R. Hashemian, G. A. Jullien and W. C. Miller. “A B-s Complement Continuous Valued Digit Adder.” *9th International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, 2 (2002): 433-436.

[14] A. Saed, M. Ahmadi and G. A. Jullien. “A Number System with Continuous Valued Digits and Modulo Arithmetic.” *IEEE Transactions on Computers*, 51 (2002): 1294-1305.

[15] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Redundant Analog Number System.” *IEEE TENCON 2004, IEEE Region 10 Conference*, B-2 (2004): 179-182.

[16] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Modified Continuous Valued Number System.” *Proceedings of the 2004 International Conference on Algorithmic Mathematics and Computer Science (AMCS’04)*, (2004).

[17] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Reducing Error Recovery Time in CVNS.” *Proceedings of the 8th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE8)*, (2004).

[18] S. Srivanasont and A. Surarerks. “Digit Conversion in Redundant Analog Number System.” *Proceedings of The 9th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE9)*, (2005).

[19] N. Srimanotham and A. Surarerks. “Interval Number Representation in Analog System.” *Proceedings of the 3rd Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2005)*, (2005).

[20] N. Srimanotham and A. Surarerks. “Interval Redundant Analog Number System.” *Proceedings of the IADIS International Conference Applied Computing 2006 (IADIS2006)*, (2006).

[21] N. Srimanotham and A. Surarerks. “Interval Arithmetic for Analog Computing.” *Proceedings of the 10th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE10)*, (2006).

[22] N. Srimanotham and A. Surarerks. “A Redundant Analog Interval System.” *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2007)*, (2007).

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนพคุณ ศรีมโนธรรม เกิดเมื่อวันที่ 26 เมษายน พ.ศ. 2526 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายจากโรงเรียนเซนต์คาเบรียล อ.ดุสิต จ.กรุงเทพมหานคร เข้ารับการศึกษาต่อที่มหาวิทยาลัยมหิดล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตในปี พ.ศ. 2547