บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงลักษณะรูปแบบข้อมูลที่ใช้ศึกษาวิจัย สถิติที่ใช้ในแต่ละวิธีของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย สำหรับข้อมูลที่ตัดปลายทั้งทางซ้ายและทางขวา โดยมีรายละเอียดดังนี้

รูปแบบลักษณะข้อมูลที่ใช้ศึกษา

ลักษณะข้อมูลที่ถูกตัดปลายทั้งทางซ้ายและทางขวา :

$$Y = \begin{cases} X & ; d < x \le m \\ m & ; x > m \end{cases}$$

ฉะนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y คือ

$$f_y(x) = \frac{f_x(x)}{F_x(m) - F_x(d)} \quad ; d < x \le m$$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y คือ

$$F_y(x) = \frac{F_x(x) - F_x(d)}{F_x(m) - F_x(d)}$$

เมื่อ Y เป็นตัวแปรสุ่มความเสียหายที่มีการเก็บบันทึก

X เป็นตัวแปรสุ่มความเสียหายที่เกิดขึ้นจริง

d เป็นค่าความรับผิดชอบส่วนแรก

m เป็นค่าความรับผิดชอบสูงสุด

$F_y(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม Y

$F_x(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม X

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย

1. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย โดยทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_y(x_i)$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln f_y(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_x(x_i) - n \ln(F_x(m)-F_x(d))$$

เมื่อ n เป็นจำนวนกรมธรรม์(ขนาดตัวอย่าง)

1.1. การแจกแจงแบบสมมาตร

-การแจกแจงแบบปกติ

เพื่อหาค่า μ และ σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ ln L เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \quad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \quad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ , σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน(Newton-Raphson Method) ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}(\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i))^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}(\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)))^2\right) \quad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i)\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i)\right) -$$

$$\frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))\right) \qquad (g_{12})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}(\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i))^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}(\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d)))^2\right) \qquad (g_{22})$$

เมื่อ $\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i) = \frac{x_i-\mu}{\sigma^2}f_x(x_i)$ (1.1.1)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma}\left(\phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{d-\mu}{\sigma})\right) \qquad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma}f_x(x_i)\left((\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2 - 1\right) \qquad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left((m-\mu)\phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - (d-\mu)\phi(\frac{d-\mu}{\sigma})\right) \qquad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma^2}f_x(x_i)\left[\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right] \qquad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left((\frac{m-\mu}{\sigma})\phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - (\frac{d-\mu}{\sigma})\phi(\frac{d-\mu}{\sigma})\right) \qquad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}f_x(x_i) = (\frac{x_i-\mu}{\sigma^3})f_x(x_i)\left[(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2 - 3\right] \qquad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left\{\phi(\frac{m-\mu}{\sigma})\left[(\frac{m-\mu}{\sigma})^2-1\right]\right.$$

$$\left.-\phi(\frac{d-\mu}{\sigma})\left[(\frac{d-\mu}{\sigma})^2-1\right]\right\} \qquad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma^2}f_x(x_i)\left\{(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^4-5\cdot(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2+2\right\} \qquad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left\{(\frac{m-\mu}{\sigma})\left[(\frac{m-\mu}{\sigma})^2-2\right]\phi(\frac{m-\mu}{\sigma})\right.$$

$$\left.-(\frac{d-\mu}{\sigma})\left[(\frac{d-\mu}{\sigma})^2-2\right]\phi(\frac{d-\mu}{\sigma})\right\} \qquad (1.1.10)$$

แทนค่าของสมการ (1.1.1) ถึง (1.1.10) ลงในสมการ (g_1), (g_2), (g_{11}), (g_{12}) และ (g_{22})

1.2. การแจกแจงแบบเบ้

- การแจกแจงลอกนอร์มอล

เพื่อหาค่า μ และ σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ $\ln L$ เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \qquad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \qquad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ, σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}(\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i))^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))\right)^2\right) \quad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i)\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i)\right) -$$

$$\frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))\right) \quad (g_{12})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i)\right)^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))\right)^2\right) \quad (g_{22})$$

เมื่อ $\frac{\partial}{\partial\mu}f_x(x_i) = \frac{\ln x_i - \mu}{\sigma^2}f_x(x_i)$ (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma}\left(\phi\left(\frac{\ln m-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma}f_x(x_i)\left(\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right) \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left((\ln m-\mu)\phi\left(\frac{\ln m-\mu}{\sigma}\right) - (\ln d-\mu)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right)$$
(1.2.4)

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma^2}f_x(x_i)\left[\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right] \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(m)-F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(\left(\frac{\ln m-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln m-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right)$$
(1.2.6)

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu} f_x(x_i) = (\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma^3}) f_x(x_i)\left[(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma})^2 - 3\right] \tag{1.2.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\mu}(F_x(m) - F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left\{\phi(\frac{\ln m - \mu}{\sigma})\left[(\frac{\ln m - \mu}{\sigma})^2 - 1\right]\right.$$

$$\left. -\phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})\left[(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})^2 - 1\right]\right\} \tag{1.2.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} f_x(x_i) = \frac{1}{\sigma^2} f_x(x_i)\left\{(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma})^4 - 5\cdot(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma})^2 + 2\right\} \tag{1.2.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(m) - F_x(d)) = -\frac{1}{\sigma^2}\left\{(\frac{\ln m - \mu}{\sigma})\left[(\frac{\ln m - \mu}{\sigma})^2 - 2\right]\phi(\frac{\ln m - \mu}{\sigma})\right.$$

$$\left. -(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})\left[(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})^2 - 2\right]\phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})\right\} \tag{1.2.10}$$

แทนค่าของสมการ (1.2.1) ถึง (1.2.10) ลงในสมการ (g_1), (g_2), (g_{11}), (g_{12}) และ (g_{22})

1.3. การแจกแจงแบบหางยาว

-การแจกแจงโลจิสติค

เพื่อหาค่า α และ β โดยจะทำการหาอนุพันธ์ $\ln L$ เทียบกับ α และ β และให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\alpha}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m) - F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \quad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln L = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial}{\partial\beta}f_x(x_i) - \frac{n}{F_x(m) - F_x(d)}\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d)) = 0 \quad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า α, β ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}f_x(x_i)\right)^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))\right)^2\right) \quad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}f_x(x_i)\frac{\partial}{\partial\beta}f_x(x_i)\right) -$$

$$\frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))\right) \quad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f_x(x_i)}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}f_x(x_i) - \frac{1}{(f_x(x_i))^2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}f_x(x_i)\right)^2\right) - \frac{n}{F_x(m)-F_x(d)}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(F_x(m)-F_x(d)) - \frac{1}{(F_x(m)-F_x(d))}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))\right)^2\right) \quad (g_{22})$$

เมื่อ $\frac{\partial}{\partial\alpha}f_x(x_i) = \frac{1}{\beta}f_x(x_i)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)$ (1.3.1)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(F(m)-F(d)) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2} - \frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^2}\right) \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}f_x(x_i) = \frac{1}{\beta}f_x(x_i)\left[\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)-1\right] \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(F(m)-F(d)) = -\frac{1}{\beta}\left(\left(\frac{m-\alpha}{\beta}\right)\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d-\alpha}{\beta}\right)\frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^2}\right) \quad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f_x(x_i) = \frac{1}{\beta} f_x(x_i)\left(-2f_x(x_i) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)^2\right) \tag{1.3.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(F(m)-F(d)) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{\beta(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2}\left(\frac{1-e^{-(m-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(m-\alpha)/\beta}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\beta}\frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^2}\left(\frac{1-e^{-(d-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(d-\alpha)/\beta}}\right)\right) \tag{1.3.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} f_x(x_i) = \frac{1}{\beta} f_x(x_i)\left[-2\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)f_x(x_i) - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta}\left(\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)-1\right)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)\right] \tag{1.3.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(F(m)-F(d)) = \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2}\left[-\left(\frac{m-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(m-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(m-\alpha)/\beta}}\right)+1\right]\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^2}\left[-\left(\frac{d-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(d-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(d-\alpha)/\beta}}\right)+1\right]\right) \tag{1.3.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f_x(x_i) = \frac{1}{\beta^2} f_x(x_i)\left[\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{-(x_i-\alpha)/\beta}(1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta})}{(1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta})^2}\right)-\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)\right)$$

$$\left.+\left(\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)-1\right)\left(\left(\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1-e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(x_i-\alpha)/\beta}}\right)-2\right)\right] \tag{1.3.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(F(m)-F(d)) = -\left(\frac{m-\alpha}{\beta^2}\right)^2\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2}\left(\frac{1-e^{-(m-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(m-\alpha)/\beta}}\right)$$

$$+2\left(\frac{m-\alpha}{\beta^3}\right)\frac{e^{-(m-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(m-\alpha)/\beta})^2}+\left(\frac{d-\alpha}{\beta^2}\right)^2\frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^2}$$

$$\cdot(\frac{1-e^{-(d-\alpha)/\beta}}{1+e^{-(d-\alpha)/\beta}})-2(\frac{m-\alpha}{\beta^{3}})\frac{e^{-(d-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(d-\alpha)/\beta})^{2}} \qquad (1.3.10)$$

แทนค่าของสมการ (1.3.1) ถึง (1.3.10) ลงในสมการ (g_1), (g_2), (g_{11}), (g_{21}) และ (g_{22})

2. วิธีระยะห่างต่ำสุด เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย โดยทำให้ตัวสถิติคราเมอร์-วอน ไมส์(Cramer-Von Mises Statistic)มีค่าต่ำสุด ในวิธีนี้มีค่าถ่วงน้ำหนัก เป็น 1

$$K=\sum_{i=1}^{n}(F_y(x_i)-F_n(x_i))^2$$

เมื่อ $F_y(x_i)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม Y ในเชิงทฤษฎีของความเสียหายจำนวนที่ i

$F_n(x_i)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของค่าสังเกต(Empirical distribution function) ของข้อมูลความเสียหายที่ i

n เป็นจำนวนกรมธรรม์(ขนาดตัวอย่าง)

2.1. การแจกแจงแบบสมมาตร

-การแจกแจงปกติ

เพื่อหาค่า μ,σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}K=\sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)=0 \qquad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}K=\sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i)=0 \qquad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ,σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_1=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_2 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}F_y(x_i)+\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i)\right] \qquad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{22})$$

เมื่อ $$\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i) = \frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2} \qquad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i) = \frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2} \qquad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}F_y(x_i) = \frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i) \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}F_y(x_i) = \frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$+\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\mu}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i) \qquad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}F_y(x_i)=\frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\sigma}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i) \qquad (2.1.5)$$

แทนค่าของสมการ (1.1.2) , (1.1.4) , (1.1.6) , (1.1.8) และ (1.1.10) ลงในสมการ (2.1.1) ถึง (2.1.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

2.2. การแจกแจงแบบเบ้

-การแจกแจงลอกนอร์มอล

เพื่อหาค่า μ,σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์ จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}K=\sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)=0 \qquad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}K = \sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i) = 0 \qquad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ,σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_1 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_2 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}F_y(x_i)+\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i)\right] \qquad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{22})$$

แทนค่าของสมการ (1.2.2) , (1.2.4) , (1.2.6) , (1.2.8) , (1.2.10) ลงในสมการ (2.1.1) ถึง (2.1.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

2.3. การแจกแจงแบบหางยาว

-การแจกแจงโลจิสติค

เพื่อหาค่า α,β โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ α และ β และให้เท่ากับศูนย์ จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}K = \sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i) = 0 \qquad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}K = \sum_{i=1}^{n}2(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i) = 0 \qquad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ,σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_1 = \sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_2=\sum_{i=1}^{n}2\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}F_y(x_i)+\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i)\right] \qquad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_2=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{22})$$

เมื่อ $$\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i)=\frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2} \qquad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i)=\frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2} \qquad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F_y(x_i)=\frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i) \qquad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}F_y(x_i)=\frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$+\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i) \qquad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}F_y(x_i) = \frac{(F_x(m)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(F_x(x_i)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-\frac{(F_x(x_i)-F_x(d))\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(F_x(m)-F_x(d))}{(F_x(m)-F_x(d))^2}$$

$$-2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}(F_x(m)-F_x(d))}{F_x(m)-F_x(d)}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i) \qquad (2.3.5)$$

แทนค่าของสมการ (1.3.2) , (1.3.4) , (1.3.6) , (1.3.8) และ (1.3.10) ลงในสมการ (2.3.1) และ (2.3.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

3. วิธีระยะห่างต่ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหายโดยทำให้ตัวสถิติคราเมอร์-วอน ไมส์ มีค่าต่ำสุด

ในวิธีนี้มีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น $\dfrac{n}{\frac{nF_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{\frac{nF_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})} (F_y(x_i) - F_n(x_i))^2$$

เมื่อ $F_y(x_i)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม Y ในเชิงทฤษฎีของความเสียหายจำนวนที่ i

$F_n(x_i)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของค่าสังเกตของข้อมูลความเสียหายที่ i

n เป็นจำนวนกรมธรรม์(ขนาดตัวอย่าง)

3.1. การแจกแจงแบบสมมาตร

-การแจกแจงปกติ

เพื่อหาค่า μ, σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} K = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})} (F_y(x_i) - F_n(x_i)) \frac{\partial}{\partial \mu} F_y(x_i) = 0 \quad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} K = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})} (F_y(x_i) - F_n(x_i)) \frac{\partial}{\partial \sigma} F_y(x_i) = 0 \quad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ, σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})} \cdot \left[(F_y(x_i) - F_n(x_i)) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} F_y(x_i) + (\frac{\partial}{\partial \mu} F_y(x_i))^2 \right] \quad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{F_n(x_i)}{n+1})} \cdot \left[(F_y(x_i) - F_n(x_i)) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} F_y(x_i) + \frac{\partial}{\partial \mu} F_y(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} F_y(x_i) \right] \quad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{22})$$

แทนค่าของสมการ (1.1.2) , (1.1.4) , (1.1.6) , (1.1.8) และ (1.1.10) ลงในสมการ (2.1.1) ถึง (2.1.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

3.2. การแจกแจงแบบเบ้

-การแจกแจงลอกนอร์มอล

เพื่อหาค่า μ,σ โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ μ และ σ และให้เท่ากับศูนย์ จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}K=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)=0 \qquad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}K=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i)=0 \qquad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า μ,σ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{F_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma}F_y(x_i)+\frac{\partial}{\partial\mu}F_y(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i)\right] \qquad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}g_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\sigma}F_y(x_i))^2\right] \qquad (g_{22})$$

แทนค่าของสมการ (1.2.2) , (1.2.4) , (1.2.6) , (1.2.8) และ (1.2.10) ลงในสมการ (2.1.1) ถึง (2.1.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

3.3. การแจกแจงแบบหางยาว

-การแจกแจงโลจิสติค

เพื่อหาค่า α, β โดยจะทำการหาอนุพันธ์ K เทียบกับ α และ β และให้เท่ากับศูนย์ จะได้สมการ (g_1) และ (g_2)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}K=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i)=0 \quad (g_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}K=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i)=0 \quad (g_2)$$

แก้สมการ (g_1) และ (g_2) หาค่า α,β ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการในส่วนต่อไป โดยใช้ค่าของสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i))^2\right] \quad (g_{11})$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{F_n(x_i)}{n+1})}\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}F_y(x_i)+\frac{\partial}{\partial\alpha}F_y(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i)\right] \quad (g_{21})$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\frac{F_n(x_i)}{n+1}(1-\frac{nF_n(x_i)}{n+1})}\cdot\left[(F_y(x_i)-F_n(x_i))\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}F_y(x_i)+(\frac{\partial}{\partial\beta}F_y(x_i))^2\right] \quad (g_{22})$$

แทนค่าของสมการ (1.3.2) , (1.3.4) , (1.3.6) , (1.3.8) และ (1.3.10) ลงในสมการ (2.3.1) ถึง (2.3.5) แล้วนำค่าที่ได้มาแทนในสมการ (g_1) , (g_2) , (g_{11}) , (g_{21}) และ (g_{22})

วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน(Newton-Raphson Method)

เป็นวิธีการเชิงตัวเลข(Numerical Method) ที่ใช้แก้สมการเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์ ในการวิจัยจะใช้หลักการนี้เพื่อแก้สมการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ 2 ค่า มีวิธีการดังนี้

จากรูปสมการ 2 สมการต้องการหาค่า y,z

$$g_1(y,z) = 0 \qquad (1)$$

และ

$$g_2(y,z) = 0 \qquad (2)$$

สามารถแก้สมการหาค่าโดยใช้สมการดังนี้

$$g_{11}(y_0,z_0)(y-y_0)+g_{12}(y_0,z_0)(z-z_0) = -g_1(y_0,z_0) \qquad (3)$$

$$g_{21}(y_0,z_0)(y-y_0)+g_{22}(y_0,z_0)(z-z_0) = -g_2(y_0,z_0) \qquad (4)$$

เมื่อ $g_{11} = \frac{\partial}{\partial y} g_1$, $g_{12} = \frac{\partial}{\partial z} g_1 = \frac{\partial}{\partial y} g_2 = g_{21}$, $g_{22} = \frac{\partial}{\partial z} g_2$

กำหนดค่าเริ่มต้นคือ y_0 , z_0 ในการวิจัยกำหนดค่าเริ่มต้นจากวิธีโมเมนต์ซึ่งแสดงรายละเอียดในภาคผนวก แทนในสมการ (3) , (4) ซึ่งสมการนี้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น(linear eqaution) ดังนั้นจะใช้เมตริกซ์ช่วยในการคำนวณดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{bmatrix} g_{12}g_2 - g_{22}g_1 \\ g_{21}g_1 - g_{11}g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

เมื่อแทนค่า y_0 , z_0 ซึ่งเป็นค่าเริ่มต้นแล้วจากนั้นก็ใช้กระบวนการทำซ้ำ (Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่า y , z ภายใต้ความคลาดเคลื่อนที่กำหนด ซึ่งการวิจัยนี้ใช้ความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.001 โดยค่า y,z ในการวิจัยก็คือค่าประมาณพารามิเตอร์

การคำนวณค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง(Root Mean Square Error : RMSE) ของพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย

ถ้า $\hat{\Theta}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ Θ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\hat{\Theta}$ คือ

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\Theta}-\Theta)^2$$

เมื่อ n เป็นจำนวนรอบการทำซ้ำ

และค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\hat{\Theta}$ คือ

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$