บทที่ 3
ตัวกรองคาลมาน

ตัวกรองคาลมานเป็นขั้นตอนวิธีการประมาณค่าวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขวาง ขั้นตอนวิธีนี้ให้ค่าประมาณของตัวแปรโดยใช้แบบจำลองระบบและความแตกต่างระหว่างการทำนายจากแบบจำลองกับการวัด ตัวกรองคาลมานประกอบด้วยแบบจำลองพลศาสตร์ระบบที่ถูกทำให้เป็นเชิงเส้นและการใช้ค่าประมาณทางสถิติของความคลาดเคลื่อนของระบบเพื่อใช้คำนวณค่าเกนที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเพื่อนำไปดำเนินการกับข้อมูลการวัดด้านขาออกของระบบ แต่เนื่องจากข้อมูลการวัดถูกนำไปใช้เพื่อทำการตรวจแก้และปรับปรุงชดเชยระบบที่มีความคลาดเคลื่อน ดังนั้นถ้าพลศาสตร์ความคลาดเคลื่อนของระบบและค่าสถิติที่เกี่ยวข้องในตัวกรองถูกสร้างแบบจำลองอย่างถูกต้อง แล้วจะให้ค่าตรวจแก้ที่เหมาะสมที่สุดของข้อมูลการวัด

3.1 ตัวกรองคาลมานที่มีเวลาต่อเนื่อง

ตัวกรองคาลมานที่มีเวลาต่อเนื่องถูกนำไปใช้เมื่อการวัดเป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างต่อเนื่อง แบบจำลองสเตตที่แปรเปลี่ยนตามเวลาแบบเชิงเส้นถูกแสดงผ่านวิธีปริภูมิสเตต (state-space) แบบจำลองสเตตประกอบด้วยตัวแปร 3 ชนิด คือตัวแปรอินพุต, ตัวแปรสเตต และตัวแปรเอาต์พุต

ตัวแปรอินพุต-เอาต์พุต : ตัวแปรอินพุตและเอาต์พุตแสดงถึงลักษณะการเผชิญหน้าซึ่งกันและกันระหว่างระบบกับภายนอกระบบ อินพุตสื่อถึงการกระตุ้นที่ถูกส่งเข้าไปยังระบบ ส่วนเอาต์พุตสื่อถึงสัญญาณที่ถูกส่งคืนกลับออกไปยังภายนอกระบบ

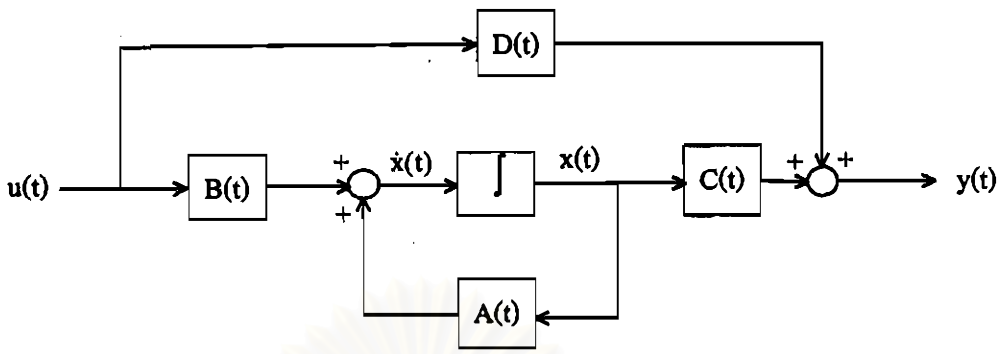
ตัวแปรสเตต : ตัวแปรสเตตแสดงถึงตัวแปรที่มีความหมายหรือการรวมเชิงเส้นของตัวแปรชนิดนี้ ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์สเตตเป็นเซตของตัวแปร n ตัว ซึ่งค่าของตัวแปรเหล่านี้อธิบายถึงพฤติกรรมระบบอย่างสมบูรณ์

จากแผนภาพในรูปที่ 3.1 สมการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์อันดับหนึ่งระดับขั้น n สามารถเขียนได้ดังนี้ :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

โดยมีสเตตเริ่มต้นเป็น

$$x(t_0) = x_0$$



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองสเตตที่แปรเปลี่ยนตามเวลาแบบเชิงเส้น

เมื่อ $x(t) \in R^n$ เป็นเวกเตอร์สเตต (คือเวกเตอร์ของตัวแปรสเตต), $u(t) \in R^m$ คือเวกเตอร์อินพุตของระบบ และ $y(t) \in R^r$ คือเวกเตอร์เอาต์พุตของระบบ เมทริกซ์ A(t), B(t), C(t) และ D(t) เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบต่อเนื่อง คำจำกัดความของเมทริกซ์เหล่านี้เป็นดังนี้ :

A(t) คือเมทริกซ์แบบป้อนกลับที่มีมิติ nxn โดยนิยามอันตรกิริยาภายในระหว่างสเตต

B(t) คือเมทริกซ์ที่มีมิติ nxm ซึ่งเป็นตัวกรองอินพุตที่สื่อถึงอันตรกิริยาระหว่างการกระตุ้นจากภายนอกระบบและสเตต

C(t) คือเมทริกซ์ที่มีมิติ rxn ซึ่งเป็นตัวกรองเอาต์พุตระหว่างสัญญาณเอาต์พุตที่วัดได้ y(t) และตัวแปรสเตต x(t)

D(t) เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ rxm และแสดงค่าเกนของระบบแบบป้อนไปข้างหน้า

พิจารณาสัญญาณ x(t) ที่มีมิติ n ซึ่งถูกอ้างอิงเป็นสเตตของระบบหรือเวกเตอร์สเตต (โดยเวกเตอร์สเตตไม่ใช่ปริมาณที่วัดได้) แล้วระบบเชิงเส้นที่แปรเปลี่ยนตามเวลาโดยมีสัญญาณรบกวนสีขาว สามารถแสดงกระบวนการได้ดังต่อไปนี้ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \Gamma(t)\xi(t), \qquad t \in [t_0, t_f] \qquad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad E[x_0] = \mu_x$$

เมื่อ x(t) = เวกเตอร์สเตตที่มีมิติ nx1 ซึ่งแสดงสเตตแบบจำลองที่คลาดเคลื่อน

A(t) = เมทริกซ์ nxn ซึ่งอธิบายระบบและพลศาสตร์แบบจำลองที่คลาดเคลื่อน

Γ(t) = เมทริกซ์ nxr มักจะเรียกกันว่า “เมทริกซ์เกนของสัญญาณรบกวน” ซึ่งแสดงผลของพลศาสตร์อินพุต

ξ(t) = เวกเตอร์ของอินพุตสโตแคสติคที่มีมิติ rx1 (หรือสัญญาณรบกวนสีขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์)

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์ที่แปรเปลี่ยนตามเวลาอันดับหนึ่ง (3.1) เป็นดังนี้

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\Gamma(\tau)\xi(\tau)d\tau \qquad (3.2)$$

เมื่อเมทริกซ์ถ่ายทอดสเตด (state transition matrix, $\Phi(t,t_0)$) เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเมทริกซ์เอกพันธุ์

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t_0)\Phi(t,t_0) \qquad (3.3)$$

ที่มีสภาวะเริ่มต้น

$$\Phi(t,t_0) = I$$

เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

จากสมการ (3.2) พิจารณาพจน์ที่สองทางด้านขวามือ พจน์นี้แสดงผลของเวกเตอร์สเตดของอินพุต u(t) ตลอดช่วงเวลา (t,t_0) ในบางโอกาสอินพุตอาจมีค่าคงที่ นั่นคือ u(t) = u = คงที่ ดังนั้น u อาจจะถูกย้ายไปด้านขวาของอินทิกรัลได้ ดังนั้นการแก้ไขสมการ (3.2) เป็นดังนี้ :

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \left[\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\Gamma(\tau)d\tau\right]u$$

เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ $S(t,t_0)$ แทนอินทิกรัลที่อยู่ภายในวงเล็บดังนี้

$$S(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\Gamma(\tau)d\tau$$

ตอนนี้สมมติมีการวัด m ค่าที่เหมาะสมซึ่งสัมพันธ์กับสเตดอย่างเชิงเส้นและถูกรบกวนโดยสัญญาณรบกวนสีขาว

$$y(t) = C(t)x(t) + \eta(t) \qquad (3.4)$$

เมื่อ y(t) = เวกเตอร์ที่มีมิติ mx1 เวกเตอร์การวัดหรือเอาต์พุต

C(t) = เมทริกซ์ mxn เรียกกันว่าเมทริกซ์การสังเกต (หรือการวัด)

$\eta(t)$ = เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนในการสังเกตสโตแคสติคที่มีมิติ mx1

จากสมการ (3.4) เอาต์พุตเป็นปริมาณที่วัดได้และเป็นเวกเตอร์ y(t) ที่มีมิติ m เวกเตอร์การสังเกตประกอบด้วยการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์สเตดกับเวกเตอร์สัญญาณรบกวน $\eta(t)$ มิติ m เมทริกซ์การสังเกต C(t) ที่มีมิติ mxn แสดงถึงความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นซึ่งคงอยู่ระหว่างเวกเตอร์สเตดและเวกเตอร์การสังเกต สมมติให้ค่าสถิติครั้งก่อนของสัญญาณรบกวนสีขาวแบบเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ แล้วนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0, \qquad E[x(0)] = \mu_x(0)$$

$$E[\xi(t)\xi^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$$

$$E[\eta(t)\eta^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$$

$$E[\eta(t)\xi^T(\tau)] = 0 \qquad (3.5)$$

เมื่อ $E[\,]$ = ตัวดำเนินการค่าคาดหวัง (expectation operator)

$\mu_x(0)$ = ค่าเฉลี่ย x(0)

$\delta(t)$ = ฟังก์ชันไดแรกเดลตา (Dirac delta function)

$Q(t)$ = เมทริกซ์ rxr ซึ่งมีชื่อเรียกว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมความไม่แน่นอนของแบบจำลองสเตต (ความแรงของสัญญาณรบกวนระบบ)

$R(t)$ = เมทริกซ์ mxm ที่เรียกกันว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนการสังเกต (หรือเรียกว่าความแรงของสัญญาณรบกวนการวัด)

นิยามของฟังก์ชันไดแรกเดลตาในพจน์ของนิพจน์อินทิกรัล คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_D(t-\tau)dt = 1 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-|\varepsilon|}^{\tau+|\varepsilon|}\delta_D(t-\tau)dt = 1 \qquad (3.6)$$

ดังนั้นเมื่อ ε มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกน้อย ๆ

$$\delta_D(t-\tau) = \begin{cases} 1/2, & \tau-\varepsilon/2 < t < \tau+\varepsilon/2 \\ 0, & \text{กรณีอื่น} \end{cases} \qquad (3.7)$$

จากสมการ (3.5) ลำดับสัญญาณรบกวนสีขาว $\xi(t)$ และ $\eta(t)$ ไม่สัมพันธ์กัน

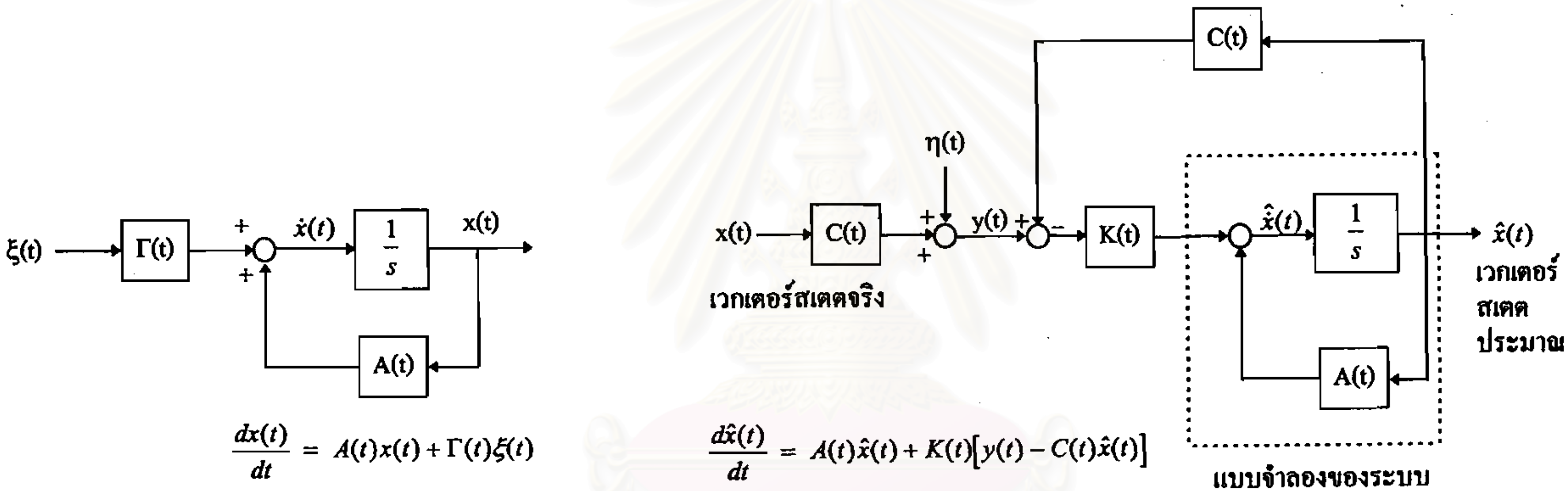
จากแบบจำลองในข้างต้น เราปรับปรุงค่าประมาณของเวกเตอร์สเตต x(t) ให้ทันสมัยและมีค่าดีที่สุดตามการรวมเชิงเส้นของการวัด y(t) และค่าประมาณสเตตปัจจุบัน $\hat{x}(t)$ เพื่อทำให้ดัชนีสมรรถนะ (performance index) มีค่าน้อยที่สุด

$$E\left[\left[x(t)-\hat{x}(t)\right]^T\left[x(t)-\hat{x}(t)\right]\right] = \text{minimum} \qquad (3.8)$$

ผลเฉลยสำหรับปัญหานี้ คือตัวกรองคาลมาน-บิซิ (Kalman-Bucy filter) ซึ่งรู้จักกันดีสมการสำหรับตัวประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุด (หรือตัวกรองที่เหมาะสมที่สุด) คือ

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)\left[y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right] \qquad (3.9)$$

ค่าประมาณตัวกรองคาลมานที่เหมาะสมที่สุดของสเตต $\hat{x}(t)$ ได้มาจากการรวมถ่วงน้ำหนัก (weighted combination) ของการทำนายที่ขึ้นอยู่กับแบบจำลองระบบและการตรวจแก้ที่ขึ้นอยู่กับการวัด ตัวประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุดนี้คือสมการ (3.9) ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ถูกต้องของสภาวะเริ่มต้น, ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนและระบบ (หรือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์) รูปที่ 3.2 แสดงแผนภาพบล็อกเมทริกซ์ (matrix block diagram) ของตัวกรองคาลมานที่มีเวลาต่อเนื่อง



(ก) ระบบ

(ข) ตัวประมาณค่า

รูปที่ 3.2 แผนภาพบล็อกเมทริกซ์ของระบบตัวกรองคาลมานที่มีเวลาต่อเนื่องและตัวประมาณ

เมทริกซ์เกนคาลมาน K(t) เป็นเมทริกซ์ nxm ของสัมประสิทธิ์ ซึ่งถูกกำหนดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นแบบริกคาทิ (Riccati type) โดยนิยามเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน P(t) เป็น

$$P(t) \;=\; E\left[[x(t)-\hat{x}(t)][x(t)-\hat{x}(t)]^T\right] \tag{3.10}$$

ปริมาณ $x(t)-\hat{x}(t)$ แสดงความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณ จากสมการ (3.8) เป็นการลดความเคลื่อนเคลื่อนให้มีค่าน้อยที่สุด (คือ $P(t)=\sigma^2_{\tilde{x}_1}+\sigma^2_{\tilde{x}_2}+\ldots+\sigma^2_{\tilde{x}_n}$ เมื่อ $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$) ซึ่งเป็นความคลามเคลื่อนของค่าประมาณ โดยสมมติว่าทราบเมทริกซ์ P(t) ที่สภาวะเริ่มต้นหรือ $P(t_0)$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์ริกคาทิเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นหรือสมการความแปรปรวนร่วมคือ

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} \;=\;& A(t)P(t)+P(t)A^T(t)\\ &-P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)\\ &+\Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t)\end{aligned} \tag{3.11}$$

ภายใต้สภาวะเริ่มต้น

$$P(t_0) \;=\; \mathrm{cov}[x(t_0), x(t_0)]$$

โดยที่ P(t) คือเมทริกซ์บวกแน่นอนและสมมาตร ซึ่งเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์ริกคาทิเมทริกซ์ นอกจากนี้ การแผ่กระจายเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน P(t) เป็นอิสระจากการวัด แต่ขึ้นอยู่กับพลวัตระบบ A(t) และสัญญาณรบกวน Q(t) เท่านั้น ดังนั้น ถ้า C(t) = [0] ไม่มีการวัดที่เหมาะสมและสมการ (3.11) ลดไปเป็นสมการความแปรปรวนร่วมเชิงเส้น

$$\dot{P}(t)=A(t)P(t)+P(t)A^T(t)+\Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t) \tag{3.12}$$

ถ้า $\eta(t)$ ในสมการ(3.4) เป็นศูนย์เหมือนกัน (คือ การวัดสมบูรณ์) แล้วสมการเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (3.11) จะเป็นเอกฐาน (singular) ซึ่ง R(t) จะเป็นเมทริกซ์ศูนย์ (null matrix)

เมทริกซ์ P(t) มีค่าสถิติอันดับสองของความคลาดเคลื่อนระบบ โดยที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมเป็นความแปรปรวนของส่วนประกอบของความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าและสมาชิกนอกแนวเส้นทแยงมุมเป็นความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าบนเส้นทแยงมุมของ P(t) เมทริกซ์เกนคาลมานที่เหมาะสมที่สุดได้จาก

$$K(t) \;=\; P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{3.13}$$

ในกรณีที่สเตต "ทั้งหมด" ถูกวัด นั่นคือ C = I และ R = diag($r_1, r_2, \ldots, r_n$) เกนตัวกรองคาลมานต้องมีรูปแบบ

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\tilde{x}_1}/r_1 & \sigma^2_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}/r_2 & \cdots & \sigma^2_{\tilde{x}_1\tilde{x}_n}/r_n \\ \sigma^2_{\tilde{x}_2\tilde{x}_1}/r_1 & \sigma^2_{\tilde{x}_2}/r_2 & \cdots & \sigma^2_{\tilde{x}_2\tilde{x}_n}/r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2_{\tilde{x}_n\tilde{x}_1}/r_1 & \sigma^2_{\tilde{x}_n\tilde{x}_2}/r_2 & \cdots & \sigma^2_{\tilde{x}_n}/r_n \end{bmatrix}$$

ความสำคัญของพจน์ต่าง ๆ ด้านขวามือของสมการเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในสมการ (3.11) เป็นดังนี้ :

$AP+PA^T$ พจน์เหล่านี้เป็นผลมาจากพฤติกรรมระบบเอกพันธุ์ที่ปราศจากการวัด นอกจากนี้ผลรวมของพจน์เหล่านี้บอกถึงผลของพลศาสตร์ระบบในการแผ่กระจายเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม P

Q พจน์นี้แสดงการเพิ่มขึ้นของความไม่แน่นอนเนื่องจากกระบวนการหรืออินพุตสัญญาณรบกวนขับ (driving noise input) โดยมีแนวโน้มเพิ่ม P

$-PC^TR^{-1}CP$ พจน์นี้แสดงการลดลงของความไม่แน่นอนเหมือนผลของการวัด ซึ่งเป็นผลมาจากข้อมูลการวัด สัญญาณรบกวนการวัดมากจะทำให้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมความคลาดเคลื่อนมีค่าทั้งลดลงหรือเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับพลศาสตร์ระบบ, การรบกวนและค่าเริ่มต้นของ P สัญญาณรบกวนน้อยจะทำให้ค่าประมาณตัวกรองเข้าสู่ค่าจริงเร็วขึ้น

3.2 การแปลความหมายของตัวกรองคาลมาน

สมการตัวกรองคาลมานที่ให้โดยสมการ (3.9) พจน์ด้านขวามือของสมการนี้สามารถเห็นถึงการขาดข้อมูลการวัด ซึ่งค่าประมาณที่เหมาะที่สุดของสเตตจะเกิดขึ้นที่เวลาใดเวลาหนึ่งตามความสัมพันธ์เชิงพลวัตเหมือนในระบบจริง ดังนั้นถ้าการวัดถูกขัดขวางหรือถูกปิดกั้นแล้ว ค่าประมาณสเตตสามารถหาได้โดยการแก้สมการที่ทราบการเคลื่อนที่ของระบบจริง โดยมีเหตุผลที่เกิดขึ้นในตัวเองและเป็นหัวใจของทฤษฎีตัวกรองคาลมาน โดยเฉพาะพจน์ที่สองด้านขวามือของสมการ (3.9) แสดงผลกระทบของการวัดค่าประมาณสเตต ซึ่งเป็นความแตกต่างระหว่างการวัดจริง y(t) และการวัดคาดหมาย $C(t)\hat{x}(t)$ ซึ่งมีผลต่อตัวประมาณค่า (ปริมาณในวงเล็บเรียกว่า "นวัตกรรม (innovation)") ดังนั้นเมื่อตัวประมาณประมาณค่าได้ถูกต้อง พจน์ขับของตัวกรองคาลมานมีค่าน้อย เกนคาลมาน K(t) แทนน้ำหนักเป็นสัดส่วนกับความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในค่าประมาณ P(t) และเป็นสัดส่วนผกผันกับความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในการวัด R(t) เมื่อกำหนด R(t) ให้ ความมั่นใจในค่าประมาณลดลง (สังเกตได้จาก P(t) มีค่าเพิ่มขึ้น) ต้อง

ให้น้ำหนักของการวัดค่าใหม่เพิ่มขึ้น ในทำนองเดียวกัน เมื่อกำหนด P(t) ให้ R(t) เพิ่มขึ้นหมายถึงการวัดเป็นตัวสัญญาณรบกวน (noisier) หมายความว่าจะต้องถ่วงน้ำหนักให้น้อยลง

ตัวกรองทำงานได้ดีที่สุดในระบบเชิงเส้น และสมมติให้สัญญาณรบกวนระบบที่มีผลต่อตัวกรองเป็นสีขาวและแบบเกาส์

คุณสมบัติของตัวกรองที่นำไปใช้กับแบบจำลองการประมาณค่าสรุปได้ดังนี้ :

1. ที่เวลา t ตัวกรองให้ค่าประมาณ $\hat{x}(t)$ ที่ไม่เอนเอียงของเวกเตอร์สเตต x นั่นคือค่าที่คาดหมายของค่าประมาณเป็นค่าของเวกเตอร์สเตตที่เวลา t
2. ค่าประมาณ เป็นค่าประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด
3. ตัวกรองเป็นแบบเรียกตนเอง (recursive) หมายถึงไม่มีการเก็บข้อมูลในอดีต
4. ตัวกรองเป็นเชิงเส้นหรือต้องทำให้เป็นเชิงเส้น ซึ่งการทำให้เป็นเชิงเส้นช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นและสะดวกต่อการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีตัวกรองคาลมาน เราสร้างแบบจำลองตามข้อสมมติต่อไปนี้ :

1. เวกเตอร์สเตต x(t) คงอยู่ในสภาวะแวดล้อมแบบสุ่ม (คือ พลศาสตร์ระบบ) ซึ่งเป็นแบบเกาส์มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม Q(t) ที่เวลา t
2. เวกเตอร์สเตตที่ไม่ทราบค่าสามารถประมาณค่าได้โดยใช้การสังเกตหรือตัวอย่างข้อมูลที่เป็นฟังก์ชันของเวกเตอร์สเตต
3. การสังเกตที่จุดเวลา t ถูกรบกวนโดยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์ที่ไม่สหสัมพันธ์กัน (uncorrelated) มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม R(t)

3.3 ตัวกรองคาลมานที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง

ตัวกรองคาลมานสามารถนำไปใช้กับระบบที่ไม่ต่อเนื่องได้ สำหรับระบบข้อมูลแบบสุ่มตัวอย่าง รูปแบบเวลาที่ไม่ต่อเนื่องของตัวกรองคาลมานเป็นสิ่งที่น่าสนใจ ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องการวัดเพื่อปรับปรุงค่าประมาณสเตตของระบบถูกทำในช่วงเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง ถึงแม้ว่าแหล่งกำเนิดการวัดทำการวัดอย่างต่อเนื่อง สภาพเรียกตนเองของกรณีเวลาไม่ต่อเนื่องหมายความว่าไม่มีความจำเป็นที่จะต้องเก็บการวัดในอดีตและค่าประมาณเดิมเพื่อใช้ในการคำนวณค่าประมาณปัจจุบันลักษณะเฉพาะเรียกตนเองมีความสำคัญเพราะช่วยลดขนาดหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ลงอย่างมาก

ในระบบเชิงพลวัตของสมการ (3.1) อาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องได้ โดยใช้เมทริกซ์ถ่ายทอดสเตตที่นิยามไว้ในสมการ (3.3)

สมการเวลาไม่ต่อเนื่องเชิงเส้นมีรูปแบบเหมือนกับแบบจำลองสเตตของตัวกรองคาลมานที่มีเวลาต่อเนื่องที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.1 สามารถหาได้จากแผนแบบต่าง ๆ คือ (1) เทคนิคออยเลอร์, (2) ระเบียบวิธีซิมป์สัน และ (3) ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal method) ในที่นี้ เราขอกล่าวถึงเฉพาะเทคนิคประมาณค่าออยเลอร์แบบข้างหน้า โดย

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

เมื่อ $x(t_k)$ เป็นค่าข้อมูลสุ่มตัวอย่างของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง $x(t)$

แทนสมการข้างต้นลงในแบบจำลองสเตตเวลาต่อเนื่อง (3.1) จะได้

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \approx A(t_k)x(t_k) + B(t_k)u(t_k)$$

ให้ $h = t_{k+1} - t_k = \Delta t$ แล้วแบบจำลองเวลาไม่ต่อเนื่องจะมีรูปแบบเป็น

$$x(t_{k+1}) \approx \left[I + hA(t_k)\right]x(t_k) + hB(t_k)u(t_k)$$

ให้ $x(t_k)$ แทน $x(k)$ แล้วเมทริกซ์ A คือ

$$A(k) = I + hA(t_k)$$

และเมทริกซ์ B เป็น

$$B(k) = hB(t_k)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนแบบจำลองสเตตที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องแปรเปลี่ยนตามเวลาแบบเชิงเส้นเป็น

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

สำหรับระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลา เราสามารถเขียนตัวกรองคาลมานในรูปแบบไม่ต่อเนื่องแบบเรียกตนเองได้ดังนี้ :

$$x(k+1) = A(k+1,k)x(k) + \Gamma(k)\xi(k)\,, \qquad k=0, 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

$\xi(k) \sim N(0, Q(k))$ (ลำดับแบบเกาส์สีขาวที่มี $k > 0$)

$$y(k) = C(k)x(k) + \eta(k) \tag{3.15}$$

$\eta(k) \sim N(0, R(k))$ (ลำดับแบบเกาส์สีขาว)

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k+1,k)\hat{x}(k|k) \tag{3.16}$$

$$P(k+1|k) = A(k+1,k)P(k|k)A^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k+1)\Gamma^T(k) \quad (3.17)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)] \quad (3.18)$$

$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]P(k|k-1) \quad (3.19ก)$$

หรือ

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)C(k)P(k|k-1) \quad (3.19ข)$$

หรือ

$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]P(k|k-1)[I - K(k)C(k)]^T + K(k)RK^T(k) \quad (3.19ค)$$

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (3.20)$$

เมื่อดัชนีบน T แทนทรานสโพสของเมทริกซ์

สมการ (3.14) เรียกว่าสมการสเตตเป็นสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่งที่เวลา k ซึ่ง x ค่าหนึ่งคือ x(k) สัมพันธ์กับค่า x(k+1) ถัดไป เวกเตอร์ x(k) แทนพารามิเตอร์หรือเวกเตอร์สเตตที่ขึ้นอยู่กับเวลา สมการ (3.14) เป็นแบบจำลองของสเตตจริง สมการ (3.15) เรียกว่าสมการการวัดเป็นแบบจำลองของกระบวนการการวัด y(k) แทนเวกเตอร์การวัดซึ่งประกอบด้วยค่าการวัดสเกลาร์แต่ละค่าที่เวลา k นอกจากนี้ สมการ (3.15) สัมพันธ์กับค่าการวัดเหล่านี้และเวกเตอร์สเตตโดยผ่านเมทริกซ์การวัด C(k) เมื่อ $k \geq 1$ และแทนสัญญาณรบกวนแบบสุ่มด้วย η(k) เมื่อ $k \geq 1$

สมการ (3.17) แทนการแผ่กระจายความแปรปรวนร่วม ในหัวข้อ 3.2 ได้กล่าวถึงความสำคัญของเกนคาลมาน K(k) ในกรณีเวลาต่อเนื่อง พิจารณาสมการ (3.18) สมการนี้กล่าวว่าค่าประมาณที่ดีที่สุดที่ t = k เท่ากับค่าประมาณทำนายบวกกับความคลาดเคลื่อน (หรือความแตกต่าง) ระหว่างค่าสังเกตและค่าสังเกตประมาณคูณด้วยแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (หรือเกน) K(k)

K(k) เปลี่ยนแปลงตามเวลาและต้องการให้มีค่าเหมาะสมที่สุดเสมอ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของสัญญาณรบกวนการวัด R(k) อย่างมาก ด้วยเหตุนี้ ถ้า R(k) = 1 แล้วสมาชิกของ K(k) จะมีค่าสัมบูรณ์ลดลงอย่างแน่นอน จากสมการ (3.20) ถ้าการวัดที่ได้มีสัญญาณรบกวนการวัดเล็กน้อยเมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนครั้งก่อน (นั่นคือ ถ้า R มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ $C(k)P(k|k-1)C^T(k)$) แล้วเกนจะมีค่ามาก และถ้าการวัดถูกรบกวนมากเมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนครั้งก่อน (นั่นคือ ถ้า R มากเมื่อเทียบกับ $C(k)P(k|k-1)C^T(k)$) แล้วเกนมีค่าน้อยและตัวกรองจะสนใจการวัดเล็กน้อย

การประยุกต์ใช้ตัวกรองเชิงเส้นกับระบบจำเพาะ เราต้องระบุแบบจำลองเชิงพลวัต (A, Γ, C) ค่าสถิติของสัญญาณรบกวน (Q, R) และข้อมูลค่าก่อน ($\hat{x}(0)$, P(0)) ในกรณีเวลาต่อเนื่องสมมติให้ค่าสถิติครั้งก่อนของกระบวนการสัญญาณรบกวน ξ(t) และ η(t) มีค่าเฉลี่ยศูนย์และสีขาว

ด้วยเหตุนี้

$$E[\xi(k)] = E[\eta(k)] = 0\,, \qquad\qquad E\{x(0)\} = \mu_x(0)$$
$$E[\xi(k)\xi^T(j)] = Q(k)\delta_{kj} \tag{3.21}$$
$$E[\eta(k)\eta^T(j)] = R(k)\delta_{kj}$$
$$E[\xi(k)\eta^T(j)] = 0\,, \qquad \forall \quad j,k$$

เมื่อ $\mu_x(0)$ เป็นค่าเฉลี่ยและ δ_{kj} คือครอนเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta) มีนิยามดังนี้ :

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad k \neq j \\ 1 & \text{for} \quad k = j \end{cases} \tag{3.22}$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมสัญญาณรบกวนระบบและสัญญาณรบกวนการวัดสามารถแสดงได้ด้วยเมทริกซ์สมมาตรในรูปแบบ

$$Q(k) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s1} & q_{s2} & \cdots & q_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1s}\sigma_1\sigma_s \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2s}\sigma_{21}\sigma_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{1s}\sigma_1\sigma_s & \rho_{2s}\sigma_{21}\sigma_s & \cdots & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ ρ_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ไขว้สำหรับตัวแปรที่ i และ j

สำหรับ R(k) สามารถเขียนได้ในลักษณะแบบเดียวกัน ยกเว้นพจน์นอกแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์

เมทริกซ์ความแรงสัญญาณรบกวน Q(k) คือ

$$E[\xi(t_{k+1})\xi^T(t_{k+1})] = Q(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)Q(\tau)\Phi^T(t_{k+1},\tau)d\tau$$

สำหรับเมทริกซ์ A(t), Γ(t) และ $\Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t)$ ที่แปรเปลี่ยนตามเวลา การประมาณค่าอันดับหนึ่งของ Q(k) เป็นดังนี้ :

$$Q(k) \approx \Gamma(t_k)Q(t_k)\Gamma^T(t_k)[t_{k+1} - t_k]$$

ให้เซตของการสังเกตแบบลำดับ y(k) = {y(1), y(2), . . ., y(k)} เราต้องการกำหนดค่าประมาณของ x(j) แทนด้วย $\hat{x}(j|k)$ ซึ่งเป็นค่าประมาณสเตตที่ตัวอย่าง j โดยใช้การวัดตัวอย่าง k แล้วความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าเป็น

$$\tilde{x}(j|k) = x(j) - \hat{x}(j|k)$$

ดังที่กล่าวในข้างต้น กระบวนการการประมาณค่าเป็นการเกลา (smoothing) หรือการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ถ้า j < k, การกรอง (filtering) ถ้า j = k, และการทำนาย (prediction) หรือการประมาณค่านอกช่วง (extrapolation) ถ้า j > k

ถ้าเวลาที่ใช้สุ่มตัวอย่าง $T_s \rightarrow 0$ นั่นคือ ช่วงระยะเวลาการสุ่มตัวอย่างน้อยมาก สมการผลต่างสืบเนื่องข้างต้นจะเข้าไปใกล้สมการ (3.11) ความแปรปรวนร่วมเชิงอนุพันธ์ต่อเนื่อง นอกจากนี้เกนคาลมานต่อเนื่องที่นิยามโดยสมการ (3.13) สัมพันธ์กับเกนที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องของสมการ (3.20) โดย

$$K(t) = \lim_{T_s \to 0} \frac{K(k)}{T_s} \qquad (3.23ก)$$

ในทำนองเดียวกัน ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนการวัดที่มีเวลาต่อเนื่องและเวลาไม่ต่อเนื่องมีความสัมพันธ์กันโดย

$$R(t) = \lim_{T_s \to 0} \frac{R(k)}{T_s} \qquad (3.23ข)$$

ดังนั้นเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\dot{P}(t)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องได้โดยนิพจน์

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(k) - P(k-1)}{\Delta t} = \dot{P}(t) \qquad (3.24)$$

เมทริกซ์ความแรงสัญญาณรบกวนระบบ Q มีผลคือ ถ้า Q เพิ่มขึ้นจะแสดงสิ่งหนึ่งสิ่งใดในสองสิ่งนี้ คือ (1) สัญญาณรบกวนแรงกว่ากำลังขับพลศาสตร์ หรือ (2) ความไม่แน่นอนของแบบจำลองที่จะสามารถอธิบายพลศาสตร์จริงได้อย่างถูกต้องมีค่าสูงขึ้น ดังนั้นสมาชิกของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม P(t) จะมีค่าสูงขึ้นด้วย ซึ่งหมายความว่าเกนของตัวกรองจะสูงขึ้น ด้วยเหตุนี้จึงต้องถ่วงน้ำหนักการวัดให้มากขึ้น ดังนั้นการเพิ่ม Q เป็นการให้ความไว้วางใจในเอาต์พุตของแบบจำลองพลศาสตร์ของตัวกรองน้อยลง ในทำนองเดียวกัน การเพิ่ม R แสดงว่าการวัดมุ่งไปยังสัญญาณรบกวนซึ่งเป็นผลเสียอย่างแรง ดังนั้นตัวกรองจะต้องถ่วงน้ำหนักให้น้อยลง

นิยามของตัวแปรที่ปรากฏในสมการ (3.14) - (3.20) มีดังนี้ :

x(k) เวกเตอร์สเตตจริงประกอบด้วยพารามิเตอร์หรือความคลาดเคลื่อนทั้งหมดที่ถูกประมาณค่าโดยตัวกรอง

A(k+1,k) เมทริกซ์ถ่ายทอดสเตตโดยแปลงสเตตที่กำหนดให้ที่เวลา t_k ไปเป็นสเตตอื่นที่เวลา t_{k+1} เมทริกซ์นี้ถูกนำมาใช้เพื่อแผ่กระจายเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมสเตต และใช้คำนวณค่าประมาณเวกเตอร์สเตตในปัจจุบัน t_k จากค่าประมาณเวกเตอร์สเตตในอดีต t_{k-1}

Γ(k) เมทริกซ์สัมประสิทธิ์สัญญาณรบกวนระบบ

$\xi(k)$ สัญญาณรบกวนระบบ

$\eta(k)$ สัญญาณรบกวนการวัด

$y(k)$ เวกเตอร์การวัดที่เวลา t_k ทำการวัด $y(k)$ โดยตัวกรองเพื่อให้ค่าประมาณที่ดีที่สุดของสเตตที่คลาดเคลื่อน $x(k)$ ส่วนประกอบ $y(k)$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของส่วนประกอบของเวกเตอร์สเตตจริง $x(k)$ ด้วย ซึ่งถูกรบกวนโดยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับ $\eta(k)$

$C(k)$ เมทริกซ์การวัดเกี่ยวข้องกับส่วนประกอบของเวกเตอร์สเตตจริงจนถึงการวัด นอกจากนั้น เมทริกซ์การวัดจะถูกคำนวณทุกครั้งของการวัดและมีอนุพันธ์ย่อยของสมการการวัด เมทริกซ์นี้ขึ้นอยู่กับแบบชนิดของข้อมูลวัดซึ่งจำเป็นสำหรับการสนับสนุนตัวกรอง

$\hat{x}(k|k)$ ค่าประมาณสเตตที่ t_k เมื่อกำหนดให้ $y_k = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ พจน์นี้คือค่าประมาณความแปรปรวนต่ำสุดไม่เอนเอียง (ค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์) ของเวกเตอร์สเตต "จริง" $x(k)$ ที่เวลา t_k

$\hat{x}(k+1|k)$ ค่าประมาณสเตตที่ t_{k+1} เมื่อกำหนด y_k ปริมาณ $y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)$ ในสมการ (3.18) คือ ผลต่างระหว่างการวัดจริง $y(k)$ และการวัดที่ถูกทำนาย ดังที่กล่าวไว้ในตอนต้น ปริมาณนี้คือ "นวัตกรรม"

$Q(k+1)$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนระบบ เกี่ยวข้องกับความคลาดเคลื่อนในการแผ่กระจายสเตตไปจนถึงความไม่แน่นอนของค่าประมาณปัจจุบันดังแสดงในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม โดยผู้ใช้ต้องป้อนเมทริกซ์นี้เข้าไปล่วงหน้า ค่าของเมทริกซ์มีความสำคัญ ซึ่งมีผลกระทบต่อสมรรถนะของตัวกรอง

$R(k+1)$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนการวัด เมทริกซ์นี้ถูกกำหนดขึ้นโดยความถูกต้องของอุปกรณ์การวัด การมีหรือไม่มีเมทริกซ์นี้จะมีผลกระทบต่อสมรรถนะของตัวกรอง สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของ $R(k+1)$ เป็นความแปรปรวนการวัดของตัวตรวจรับ โดยผู้ใช้ต้องเป็นผู้กำหนดเมทริกซ์นี้

$P(k|k)$ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน ซึ่งแทนความแปรปรวนร่วมของผลต่างระหว่างเวกเตอร์สเตตจริง $x(k)$ และเวกเตอร์สเตตประมาณ $\hat{x}(k)$

$$P(t_k) = E\left[\left[x(t_k) - \hat{x}(t_k)\right]\left[x(t_k) - \hat{x}(t_k)\right]^T\right]$$

ในการลดค่าสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของ P(t) แต่ละครั้ง ความคลาดเคลื่อนของรากกำลังสองเฉลี่ย (rms) ของการประมาณค่าตัวกรองมีค่าลดลง แหล่งกำเนิดความคลาดเคลื่อนอาจจะเป็นความไม่แน่นอนเริ่มต้นของ $\hat{x}(0)$, สัญญาณรบกวนกระบวนการ $\xi(t)$ หรือสัญญาณรบกวนการวัด $\eta(t)$

K(k+1) เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักหรือเกนคาลมานที่ t_{k+1} เกนคาลมาน K(k+1) แทนน้ำหนักที่ให้ต่อการวัดค่าใหม่สำหรับ "การปรับแต่ง" ค่าประมาณสเตต โดยเลือก K(k+1) เพื่อทำให้สมาชิกแต่ละค่าในแนวเส้นทแยงมุมของ P(k|k) มีค่าต่ำสุด (คือ ลดผลบวกเฉียงของ P(k|k)) ขนาดของเมทริกซ์ $\left[C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)\right]^{-1}$ ถูกกำหนดโดยจำนวนสมาชิกของ y(k) นั่นคือจำนวนของปริมาณที่ถูกสังเกต (หรือถูกวัด)

รูปที่ 3.3 แสดงตัวประมาณค่าตัวกรองคาลมานที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง

ตัวกรองคาลมานดำเนินการในลักษณะทำนาย-แก้ไข (predict-correct) พิจารณาสมการ

$$\hat{x}(k) = A\hat{x}(k-1) + K(k)\left[y(k) - CA\hat{x}(k-1)\right]$$

เมื่อ $\hat{x}(k)$ คือค่าประมาณที่ดีที่สุดของสัญญาณ x(k) ที่เวลา k พจน์แรกคือ $A\hat{x}(k-1)$ ทำนายค่าประมาณของสัญญาณที่เวลา k โดยการคาดคะเนค่าประมาณของสัญญาณที่เวลา k-1 ไปสู่อนาคต โดยใช้เมทริกซ์ถ่ายทอดสเตตของระบบ จากนั้น แก้ไขผลลัพธ์ของการทำนายนี้โดยเปรียบเทียบกับค่าประมาณคาดคะเนกับการสังเกตซึ่งถูกถ่วงน้ำหนักโดยเมทริกซ์เกนคาลมาน K(k)

พิจารณาขั้นตอนการทำนาย

$$\hat{x}(k|k-1) = A\hat{x}(k-1|k-1)$$

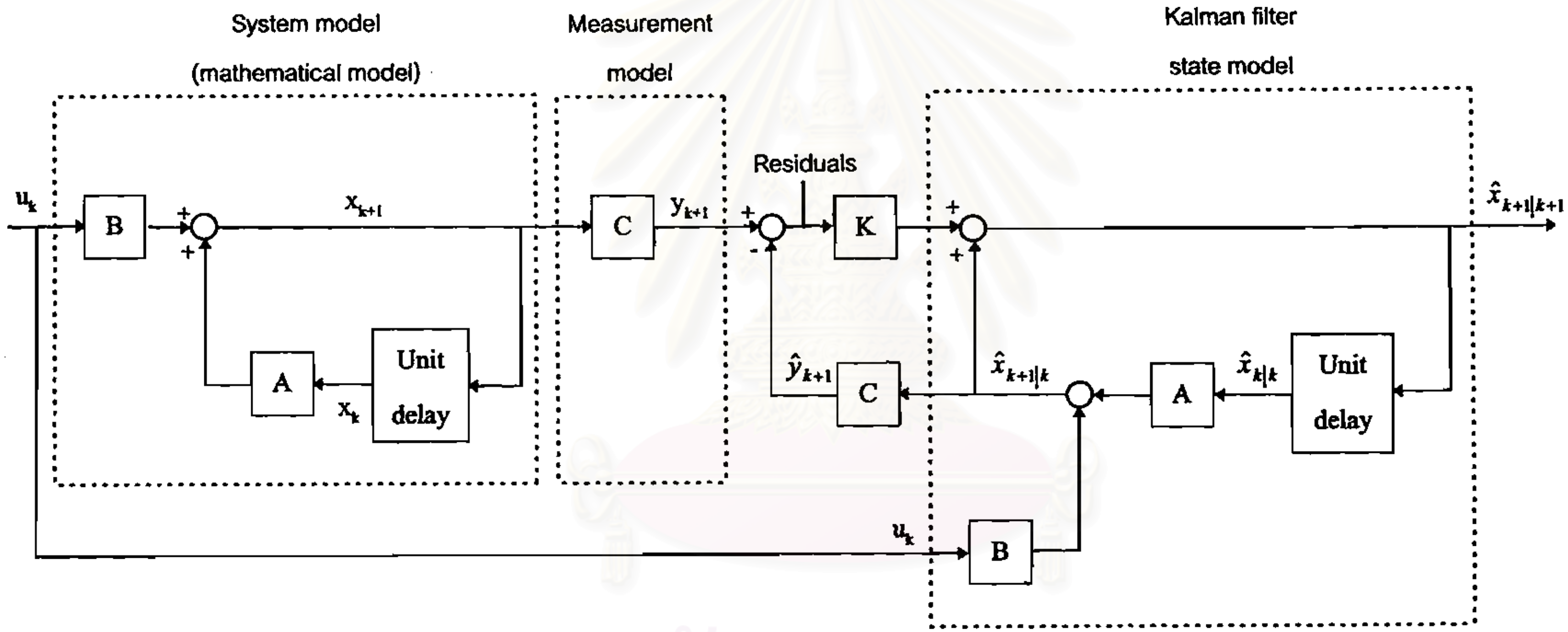
และ

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A^T + Q(k-1)$$

แล้วใช้ผลลัพธ์ของการทำนายไปปรับปรุงค่าให้ทันสมัยหรือตรวจแก้ โดยใช้สมการ (3.18), (3.19ก) และ (3.20) ประมาณค่า ปัญหาในการทำนายเริ่มต้นด้วย

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k)$$

เมื่อ $\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k)$ คือ ค่าประมาณของสัญญาณปัจจุบัน และ $\hat{x}(k+1|k)$ คือ ผลการคาดคะเนของค่าประมาณนี้ ซึ่งหมายความว่าให้สัญญาณที่ถูกกรอง



รูปที่ 3.3 แผนภาพบล็อกของตัวประมาณค่าคาลมานที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง

ค่าประมาณที่ดีที่สุดของค่าในอนาคตของสัญญาณเป็นการคาดคะเนจากเมทริกซ์ถ่ายทอดสเตต A ของระบบ โดยไม่สนใจสัญญาณรบกวนในแผนการทำนายนี้และใช้สมการ (3.18) ในสมการข้างต้นสำหรับ $\hat{x}(k+1|k)$ จะได้

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k-1) + \Gamma(k)\left[y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right]$$

เมื่อเมทริกซ์เกนการทำนายเป็น

$$\Gamma(k) = AK(k)$$

สำหรับปัญหาการทำนาย เราต้องการเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน P(k+1|k) ซึ่งได้มาจากสมการ P(k|k-1) ในข้างต้น จะได้ว่า

$$P(k+1|k) = AP(k|k)A^T + Q(k)$$

จากสมการ (3.19ก) จะได้ P(k|k) ในพจน์ของ P(k|k+1) และแทนสมการ (3.19ก) ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$P(k+1|k) = \left[A - \Gamma(k)C(k)\right]P(k|k-1)A^T + Q(k)$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในการทำนายขั้นที่หนึ่ง

ขั้นตอนวิธีตัวกรองคาลมานที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องแสดงได้ดังสมการ (3.14)-(3.20) และเขียนได้เป็นดังนี้

การทำนายสเตต :

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k|k-1)\hat{x}(k-1|k-1)$$
$$\hat{x}(0|0) = \hat{x}(0)$$

การทำนายการสังเกต :

$$\hat{y}(k|k-1) = C\hat{x}(k|k-1)$$

นวัตกรรม :

$$\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)$$

การทำนายความแปรปรวนร่วม :

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A^T + \Gamma Q \Gamma^T$$
$$P(0|0) = P(0)$$

ความแปรปรวนร่วมของนวัตกรรม :

$$S(k) = CP(k|k-1)C^T + R$$

เกนคาลมาน :

$$K(k) = P(k|k-1)C^T S(k)^{-1}$$

การปรับปรุงสเตตให้ทันสมัย :

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\tilde{y}(k)$$

การปรับปรุงความแปรปรวนร่วมให้ทันสมัย :

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)S(k)K^T(k)$$

[โน้ตว่า $K(k) = P(k|k)C^T R^{-1}$ ด้วย]

พิจารณาแบบจำลองไม่ต่อเนื่องทั้งหมดที่มีรูปแบบดังนี้

$$x(k) = A(k,k-1)x(k-1) + \Gamma(k)\xi(k) \tag{3.25ก}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + \eta(k) \tag{3.25ข}$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

โดยที่ $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$, $\xi(k) \sim N(0,Q)$, $\eta(k) \sim N(0,R)$, $x(k) \in R^n$, $\xi(k) \in R^p$, $y(k) \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $\Gamma \in R^{n \times p}$ และ $C \in R^{m \times n}$

สำหรับ $\xi(k)$ และ $\eta(k)$ เป็นสัญญาณรบกวนสีขาวขึ้นอยู่ซึ่งกันและกันและค่าประมาณสเตตเริ่มต้น x_0 สมมติให้ P_0, Q และ R เป็นเมทริกซ์สมมาตรและบวกแน่นอน

การวัด y(k) ถูกดำเนินการโดยตัวกรองคาลมานเพื่อให้ค่าประมาณเชิงเส้นที่ดีที่สุดของเวกเตอร์สเตต x(k) และแบบแผนการประมาณค่ามี 2 ขั้นคือ ค่าประมาณการปรับปรุงเวลาให้ทันสมัย (time-update estimate) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน, และปริมาณการปรับปรุงการวัดให้ทันสมัย (measurement-update quantities) แบบเดียวกัน เป็นดังต่อไปนี้ :

1. การปรับปรุงเวลาให้ทันสมัย (หรือการแผ่กระจาย) :

$$\hat{x}(t_k^-) = A(t_k, t_{k-1})\hat{x}(t_{k-1}^+) \tag{3.26}$$

$$P(t_k^-) = A(t_k, t_{k-1})P(t_{k-1}^+)A^T(t_k, t_{k-1}) + Q(t_{k-1}) \tag{3.27}$$

2. การปรับปรุงการวัดให้ทันสมัย :

$$\hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k^-) + K(t_k)\left[y(t_k) - C(t_k)\hat{x}(t_k^-)\right] \tag{3.28}$$

$$P(t_k^+) = \left[I - K(t_k)C(t_k)\right]P(t_k^-)\left[I - K(t_k)C(t_k)\right]^T + K(t_k)RK^T(t_k) \tag{3.29}$$

เมื่อ

$$K(t_k) = P(t_k^-)C^T(t_k)\left[C(t_k)P(t_k^-)C^T(t_k) + R(t_k)\right]^{-1} \tag{3.30}$$

โดยมีสภาวะเริ่มต้น

$$\hat{x}(t_0) = E[x(t_0)] = \hat{x}_0$$

$$P(t_0) = E\left[[x(t_0)-\hat{x}_0][x(t_0)-\hat{x}_0]^T\right] = P_0$$

ในแต่ละขั้นมีสมการผลต่างสืบเนื่องของการแผ่กระจายค่าประมาณสเตตและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมความคลาดเคลื่อน ด้วยประสิทธิภาพและความง่ายของขั้นตอนวิธีตัวกรองคาลมาน จึงเป็นที่น่าสนใจสำหรับนำไปใช้ในปัญหาการประมาณค่า

3.4 ความควบคุมได้และความสังเกตได้

(CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY)

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{3.31}$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{3.32}$$

เมื่อ A(t), B(t) และ C(t) เป็นฟังก์ชันเมทริกซ์ nxn, nxm และ qxn ตามลำดับ โดยนิยามของความควบคุมได้และความสังเกตได้เป็นดังนี้ :

ความควบคุมได้ ความควบคุมได้เป็นความสามารถในการถ่ายโอนสเตตเริ่มต้นไม่เจาะจงไปเป็นสเตตสุดท้ายไม่เจาะจงในเวลาจำกัด หรือเป็นความสามารถของอินพุตควบคุมที่มีผลกระทบต่อตัวแปรสเตตแต่ละตัว ถ้าระบบควบคุมได้ในช่วงระยะเวลา $(t_0,\ t_f)$ แล้วจะควบคุมได้อย่างสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อเกณฑ์

$$\mathrm{rank}\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = n \tag{3.33}$$

ถูกปฏิบัติตาม (คือ สมการ (3.33) มีค่าลำดับชั้นเต็ม)

ความสังเกตได้ ความสังเกตได้เป็นความสามารถในการหาค่าสเตตของระบบพลวัตเชิงเส้นอิสระจากการสังเกตของผลบวกเชิงเส้นของเอาต์พุตของระบบในเวลาจำกัด ในการกล่าวถึงความสังเกตได้จำเป็นต้องพิจารณาการสังเกตและแบบจำลองข่าวสาร (message model) ด้วยกัน โดยสมมติให้ทั้ง $\xi(t)$ และ $\eta(t)$ เป็นศูนย์ ดังนั้นระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ในช่วงระยะเวลา (t_0, t_f) ถ้าสามารถหาค่าสเตต x(t) ได้ทุกค่าจาก y(t) = C(t)x(t) ในช่วงระยะเวลา (t_0, t_f) สำหรับระบบที่มีเมทริกซ์คงที่ ระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ

$$\mathrm{rank}\left[C^T \quad A^TC^T \quad (A^T)^2C^T \quad \ldots \quad (A^T)^{n-1}C^T\right] = n \tag{3.34}$$

การทดสอบความสังเกตได้มักนำมาใช้หาจำนวนตัวแปรสเตตในแบบจำลองที่ถูกเสนอสามารถประมาณค่าจากเอาต์พุตของอุปกรณ์การวัดต่างหากได้ แต่ถ้าตัวแปรสเตตบางตัวไม่สามารถประมาณค่าได้ แล้วต้องหาแบบจำลองใหม่แทน

ในการประยุกต์ใช้ตัวกรองคาลมานเป็นไปได้ว่าสเตตค่าหนึ่งในเอาต์พุตอาจจะสังเกตไม่ได้ ในกรณีแบบนี้ มี 2 ทางเลือก คือ (1) ลดอันดับสเตตของตัวกรอง หรือ (2) ใช้ตัวตรวจรับการวัดอื่นสำหรับทั้งความควบคุมได้และความสังเกตได้ เราสามารถกล่าวได้ว่าระบบควบคุมได้และสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ เมื่อมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ :

- ตัวกรองที่เหมาะสมที่สุดเสถียรอย่างเชิงเส้นกำกับ
- ผลลัพธ์ของการเดาเริ่มต้นสำหรับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเป็นสิ่งสำคัญอันดับสองเมื่อมีข้อมูลมากขึ้น

3.5 ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย (THE EXTENDED KALMAN FILTER)

โดยทั่วไป ปัญหาทางกายภาพหรือกระบวนการจะเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ดังนั้นระบบไม่เชิงเส้นจึงต้องถูกทำให้เป็นเชิงเส้น (หรือถูกประมาณ) ก่อนนำไปประยุกต์ใช้กับทฤษฎีตัวกรองเชิงเส้น โดยเฉพาะปัญหาการประมาณค่าพารามิเตอร์และสเตตเป็นปัญหาการประมาณค่าสเตตไม่เชิงเส้นโดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย (EKF)

ปัญหาของระบบเชิงเส้นแบ่งเป็น (1) ระบบเชิงเส้นกำหนด (หรือระบบอิสระจากสัญญาณรบกวน (noise-free)) และ (2) ระบบสโตแคสติค (หมายถึงมีสัญญาณรบกวนแพลนท์หรือระบบและการสังเกต) ระบบชนิดหลังสามารถแก้ไขได้โดยใช้ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย โดยทำให้ระบบเป็นเชิงเส้นแล้วแปลงให้อยู่ในรูปแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

พิจารณาระบบทางกายภาพไม่เชิงเส้นที่มีเวลาต่อเนื่อง (หรือแบบจำลองพลศาสตร์)

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + \Gamma(t)\xi(t) \qquad (3.35)$$

และสมการการวัดหรือการสังเกตเวกเตอร์มิติ m ไม่เชิงเส้น

$$y(t_i) = h[x(t_i), t_i] + \eta(t_i) \qquad (3.36)$$

โดยมีสภาวะเริ่มต้น $x(0) \sim N(\bar{x}(0), P(0))$ ทราบค่าเฉลี่ย $\bar{x}(0)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $P(0)$ ก่อน [ดูสมการ (3.5)] $\xi(t)$ เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์สีขาวมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ โดยที่

$$E[\xi(t)\xi^T(t+\tau)] = Q(t)\delta(\tau)$$

และ $\eta(t)$ เป็นลำดับสัญญาณรบกวนแบบเกาส์สีขาวมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ [คือ $E[\eta(t)\,\xi^T(\tau)] = 0$] โดยไม่ขึ้นอยู่กับ $\xi(t)$

$$E[\eta(t)\eta^T(t+\tau)] = R(t)\delta(\tau)$$

ในสมการข้างต้น $Q(t)$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\xi(t)$ และ $R(t)$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวน $\eta(t)$ นอกจากนี้เมทริกซ์สมมาตร $P(0)$ และ $Q(t)$ ต้องเป็นบวกกึ่งแน่นอน ขณะที่เมทริกซ์สมมาตร $R(t)$ ต้องเป็นบวกแน่นอน

ตัวกรองคาลมานที่เหมาะสมที่สุดเป็นดังนี้ :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ &= f[\hat{x}(t),t] + P(t)C^T(t)R^{-1}(t)\{y(t) - h[\hat{x}(t),t]\}\end{aligned} \tag{3.37}$$

เวกเตอร์สเตต x เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน P เมทริกซ์นี้เป็นค่าคาดหมายของผลคูณภายนอก (outer product) ของเวกเตอร์สเตตกับค่าเฉลี่ยของมัน โดยที่ $P(t) = E[\{x(t) - \bar{x}(t)\}\{x(t) - \bar{x}(t)\}^T]$ และ $\bar{x}(t) = E[x(t)]$ ซึ่งเป็นไปตามสมการความแปรปรวนเชิงเส้น

$$P(k+1|k) = A(k+1,k)P(k|k)A^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k+1)\Gamma^T(k) \tag{3.17}$$

ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายไม่เชิงเส้นต้องการเมทริกซ์ A ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของสมการ (3.37) เทียบกับตัวแปรสเตตแต่ละตัว โดยคำนวณที่สเตตปัจจุบัน นั่นคือ

$$A(t,\hat{x}(t)) = \left.\frac{\partial f[x,t]}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}(t)} \tag{3.38}$$

ถ้าสมมติว่าทราบค่าประมาณค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (conditional-mean) ของ $x(t)$ ซึ่งสามารถกระจาย $f[x(t),t]$ ไปเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ได้โดย $x(t) = \hat{x}(t)$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเอกพันธุ์

$$\dot{x}(t) = f[x(t),t] \qquad x(t_0) = x_0$$

โดยมี

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t),t] \\ &= f[\hat{x}(t),t] + \left.\frac{\partial f[x(t),t]}{\partial x(t)}\right|_{x(t)=\hat{x}(t)}[x(t) - \hat{x}(t)] + \ldots\end{aligned} \tag{3.39}$$

ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ A และ C ใหม่ในแต่ละช่วงของการปรับปรุงให้ทันสมัยและรอบการแผ่กระจาย (propagation cycle) โดยการคำนวณอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเวกเตอร์ f และ h

$$A\left(t,\hat{x}(t)\right)=\left.\frac{\partial f[x,t]}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}(t_i^-)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x=\hat{x}(t_i^-)} \tag{3.40}$$

$$\Gamma(t)=\Gamma\left[\hat{x}(t),t\right] \tag{3.41}$$

$$C\left(t,\hat{x}(t)\right)=\left.\frac{\partial h[x,t]}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}(t_i^-)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_m}\end{bmatrix}_{x(t)=\hat{x}(t_i^-)} \tag{3.42}$$

เมทริกซ์ $A(\hat{x}(t),t)$ และ $C(\hat{x}(t),t)$ เรียกกันว่ายาโคเบียนส์ (Jacobians) สมการการแผ่กระจายเวลาของตัวกรองไม่ต่อเนื่องจาก t_{i-1} ไปเป็น t_i คือ

$$\hat{x}(t_i^-)=\hat{x}(t_{i-1}^+)+\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\left[\hat{x}(\tau),\tau\right]d\tau \tag{3.43}$$

$$P(t_i^-)=A\left[t_i,t_{i-1};\hat{x}(\tau)\right]P(t_{i-1})A\left[t_i,t_{i-1};\hat{x}(\tau)\right]+\Gamma(\tau)Q(\tau)\Gamma^T(\tau) \tag{3.44}$$

แบบจำลองการวัดและสมการปรับปรุงการวัดให้ทันสมัยของตัวกรองไม่เชิงเส้นที่เวลา t_0 คือ

$$y(t_i)=h\left[x(t_0),t_0\right]+\eta(t_i) \tag{3.45}$$

$$K(t_i)=P(t_i^-)C^T\left[t_i;\hat{x}(t_i^-)\right]\left\{C\left[t_i;\hat{x}(t_i^-)\right]P(t_i^-)C^T\left[t_i;\hat{x}(t_i^-)\right]+R(t_i)\right\}^{-1} \tag{3.46}$$

$$\hat{x}(t_i^+)=x(t_i^-)+K(t_i)\left\{y(t_i)-h\left[\hat{x}(t_i^-),t_i\right]\right\} \tag{3.47}$$

$$P(t_i^+)=\left[I-K(t_i)C[t_i;\hat{x}(t_i^-)]\right]P(t_i^-)\left[I-K(t_i)C[t_i;\hat{x}(t_i^-)]\right]^T+K(t_i)RK^T(t_i) \tag{3.48}$$

โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots$

ขั้นตอนวิธีตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายต่อเนื่อง-ไม่ต่อเนื่อง (CDEKF) แบบเรียกตัวเองเริ่มต้นโดยให้ตัวประมาณสเตต $\hat{x}(t)=\hat{x}(0)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า $P(t)=P(0)$ แบบจำลองสเตตไม่เชิงเส้นเขียนได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สเตต

$$\dot{x}(t)=f\left[x(t),u(t),t\right], \qquad x(t_0)=x_0$$

เมื่อ u(t) เป็นฟังก์ชันควบคุมกระจายไปเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ &= f[x^*(t), u^*(t), t] + A(t)[x(t) - x^*(t)] + B(t)[u(t) - u^*(t)] + \ldots\end{aligned}$$

เมื่อ

$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

$$B(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_x$$

โดยที่ $|_x$ แทนการคำนวณเมทริกซ์ที่ $x = x^*$ และ $u = u^*$

ตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขวางในปัญหาการหาวงโคจร (orbit determination), การติดตามเครื่องบิน (aircraft tracking), ความถูกต้องของอุปกรณ์ ฯลฯ ตัวอย่าง เช่น ถ้าเราต้องการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนเอนเอียงของเครื่องมือ แล้วสมการสเตตระบบไม่เชิงเส้นที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องมีรูปแบบเป็น

$$x(t_{i+1}) = f[x(t_i), t_i] + \xi(t_i) \qquad (3.49ก)$$

มีแบบจำลองสังเกตเป็น

$$y(t_i) = h[x(t_i), t_i] + \eta(t_i) \qquad (3.49ข)$$

แล้วความเอนเอียง b ที่จะถูกประมาณเป็นสเตตของระบบเสริมดังนี้ :

$$b(t_{i+1}) = b(t_i) \qquad (3.50)$$

$$y(t_i) = h[x(t_i), t_i] + \eta(t_i) + b(t_i) \qquad (3.51)$$

สมมติว่าระบบสังเกตได้อย่างสมบูรณ์

ผลของการทำให้เป็นเชิงเส้น สเตตของระบบ $\hat{x}(k|k)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $P(k|k)$ เป็นไปตามสมการตัวกรองคาลมานเชิงเส้น

$$x(k+1|k) = A(k+1, k)x(k) + \xi(k)$$

$$P(k|k-1) = A(k, k-1)P(k-1)A^T(k, k-1) + Q(k)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]P(k|k-1)[I - K(k)C(k)]^T + K(k)RK^T(k)$$

เมื่อ

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(k)\left[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R(k)\right]^{-1}$$

$\xi(k)$ เป็นเวกเตอร์สัญญาณรบกวนระบบ และ $Q(k)$ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระบบ โดยเราต้องกำหนดเวกเตอร์ค่าประมาณสเตตเริ่มต้น $x(0)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของระบบเริ่มต้น $P(0)$

ผังงานของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยายแสดงได้ดังรูปที่ 3.4 โดยมี

แบบจำลองพลศาสตร์ (หรือข่าวสาร) :

$$x(k+1) = A\left[x(k), k\right] + \Gamma\left[x(k), k\right]\xi(k) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

แบบจำลองการสังเกต :

$$y(k) = h\left[x(k), k\right] + \eta(k) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

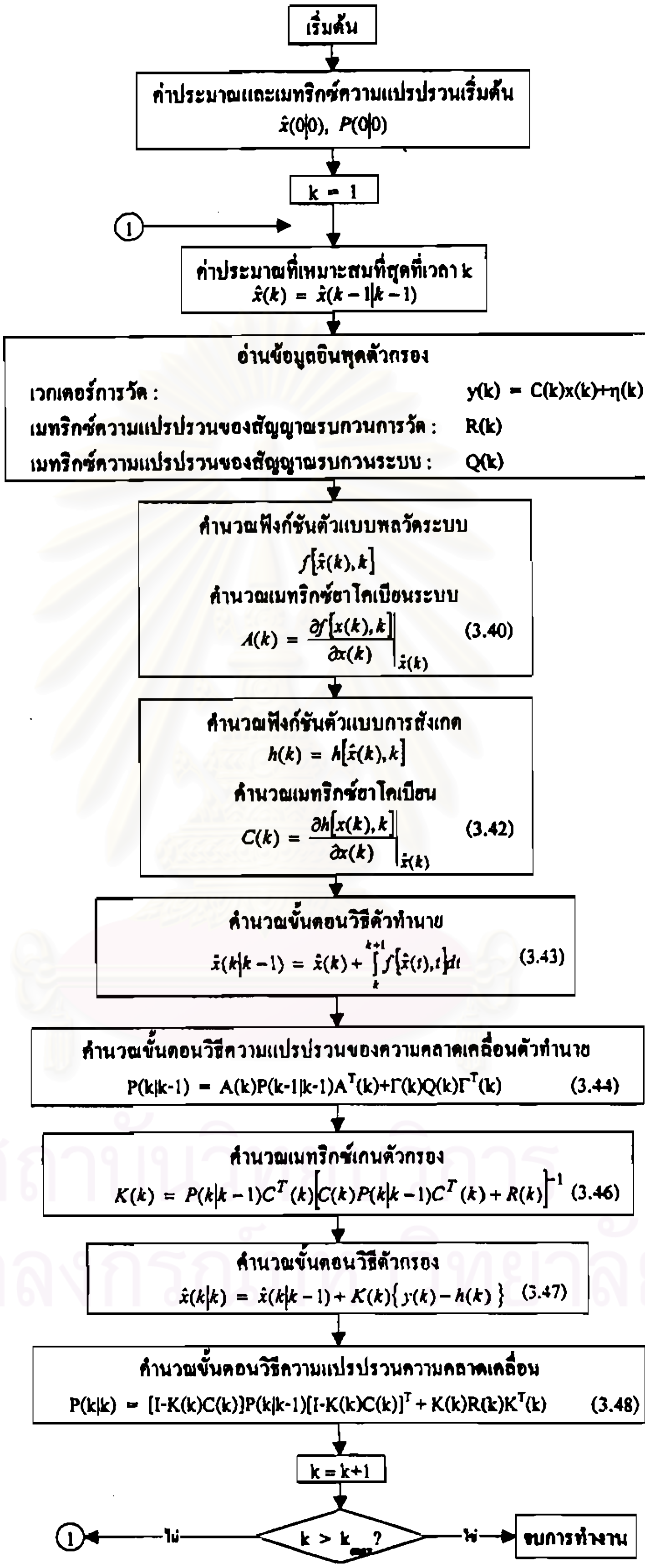
ค่าสถิติ :

$$E\left[\xi(k)\xi(j)^T\right] = Q(k)\delta_{kj}$$

$$E\left[\eta(k)\eta(j)^T\right] = R(k)\delta_{kj}$$

(สมมติว่า $[\xi(k)]$ และ $[\eta(k)]$ เป็นอิสระ)

เมื่อแบบจำลองจริงของระบบประกอบด้วยพลศาสตร์เชิงเส้นและสมการการวัด ตัวกรองคาลมานเชิงเส้นของระบบนี้ คือ ตัวประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุด



รูปที่ 3.4 ผังงานของตัวกรองคาลมานแบบยืดขยาย