บทที่ 3

เปรียบเทียบและสรุปผลวิเคราะห์

เพื่อเป็นการทวนสอบ(verification)ว่าชุดฟังก์ชันที่ได้พิจารณาเลือกไว้ในบทที่ 2. มีความบริบูรณ์เพียงพอที่จะใช้แก้ปัญหาระนาบในทางวิศวกรรมทั่ว ๆ ไป และเพื่อเป็นการแสดงระเบียบวิธีในการคำนวณ จะได้นำปัญหาตัวอย่างต่อไปนี้ มาวิเคราะห์หาผลเฉลยตามวิธีการที่นำเสนอในการศึกษานี้ และเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลวิเคราะห์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ และผลเฉลยแม่นตรง(exact solution)เท่าที่มีอยู่

3.1 ตัวอย่างที่ 1

ในตัวอย่างแรกนี้ จะได้พิจารณาปัญหาซึ่งสามารถใช้แทนปัญหาของแผ่นยืดหยุ่นรูปวงกลม(elastic circular plate) หรือ ทรงกระบอกยืดหยุ่นที่มีความยาวอนันต์(infinitely long elastic cylinder)ก็ได้ โดยกำหนดให้มีรัศมี a ถูกกระทำด้วยหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่มีผลลัพธ์เท่ากับ P ต่อหนึ่งหน่วยความหนาของแผ่น หรือหนึ่งหน่วยของระยะทางตามแกนของทรงกระบอกแล้วแต่กรณี มีรายละเอียดดังในรูปที่ 9.

ปัญหานี้จัดเป็นปัญหาโดเมนข้างใน(interior domain problem) ดังนั้นควรเลือกใช้ชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีดังสมการ(2.2.21) และเนื่องจากปัญหานี้มีสมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta = 0$ (แกน x)ด้วย ชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่จะนำมาสร้างระบบผลเฉลยต้องมีสมบัติดังกล่าว ดังนั้นชุดฟังก์ชันที่บริบูรณ์สำหรับตัวอย่างนี้ได้แก่

$$C\left\{\ r^2\ ,\ r\cos\theta\ ,\ r^3\cos\theta\ ,\ r^j\cos(j\theta)\ ,\ r^{j+2}\cos(j\theta)\ \ \middle|\ \ j\ =\ 2,3,\ldots\right\}$$

แต่ฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่มีค่าฟังก์ชันเป็น $r\cos\theta$ เป็นพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็ง(rigid body displacement) ให้ค่าความเค้นเท่ากับศูนย์ ไม่จำเป็นสำหรับตัวอย่างนี้จึงตัดทิ้งไป คงเหลือระบบผลเฉลยสำหรับปัญหานี้เป็น

$$\phi\ =\ B_0 r^2\ +B_1 r^3\cos\theta\ +\ \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_j r^j + B_j r^{j+2}\right]\cos(j\theta) \tag{3.1.1}$$

โดยที่ B_0 , B_1 , A_j และ B_j หมายถึง สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบก็คือแต่ละพจน์ในระบบผลเฉลยข้างบนนั่นเอง ดังนี้

$$r^2\ ,\ \ r^3\cos\theta\ ,\ r^i\cos(i\theta)\ ,\ r^{i+2}\cos(i\theta)\quad \text{โดยที่}\ \ i = 2,3,\ldots$$

จากฟังก์ชัน ϕ ในสมการข้างต้น เมื่อแทนลงในสมการ (2.1.17) (2.1.14) และ (2.1.15) ก็จะได้สูตรของหน่วยแรงตั้งฉาก หน่วยแรงเฉือน และการกระจัด คือ

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 2B_0 + B_1 2r\cos\theta - \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left[A_j j(j-1)r^{j-2} + B_j(j+1)(j-2)r^j\right]\cos(j\theta) \\
\sigma_{\theta\theta} &= 2B_0 + B_1 6r\cos\theta + \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left[A_j j(j-1)r^{j-2} + B_j(j+1)(j+2)r^j\right]\cos(j\theta) \qquad (3.1.2)\\
\sigma_{r\theta} &= B_1 2r\sin\theta + \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left[A_j j(j-1)r^{j-2} + B_j(j+1)jr^j\right]\sin(j\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r &= B_0\frac{(\kappa-1)}{2\mu}r + B_1\frac{(\kappa-2)}{2\mu}r^2\cos\theta - \frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left[A_j j r^{j-1} + B_j(j+1-\kappa)r^{j+1}\right]\cos(j\theta) \\
u_\theta &= B_1\frac{(\kappa+2)}{2\mu}r^2\sin\theta + \frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left[A_j j r^{j-1} + B_j(j+1+\kappa)r^{j+1}\right]\sin(j\theta)
\end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

เงื่อนไขสภาพขอบเมื่อพิจารณาถึงความสมมาตรของปัญหาเป็นดังนี้

สำหรับ $0<\theta<\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$ และ $\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta<\theta<\pi$ จะได้

$$\sigma_{rr}(a,\theta) = \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \qquad (3.1.4)$$

สำหรับ $\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta<\theta<\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta$ จะได้

$$\sigma_{rr}(a,\theta) = -\frac{P}{2a\beta}\sin\theta \quad , \quad \sigma_{r\theta}(a,\theta) = -\frac{P}{2a\beta}\cos\theta \qquad (3.1.5)$$

จากเงื่อนไขข้างบน สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลย(solution system)ซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของพจน์ต่าง ๆ ดังในสมการ(3.1.1)กับระบบทดสอบ(trial system)ซึ่งก็คือพจน์ที่ i ใด ๆ ในระบบผลเฉลยนั้นเอง จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\left[\sigma_{rri}(a,\theta)u_r(a,\theta)+\sigma_{r\theta i}(a,\theta)u_\theta(a,\theta)\right]a\,d\theta = \\
&\qquad -\frac{P}{2a\beta}\int_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta}\left[\sin\theta\, u_{ri}(a,\theta)+\cos\theta\, u_{\theta i}(a,\theta)\right]a\,d\theta \quad i=1,2,3,\dots \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

จำนวนสมการที่ได้จากข้างบนจะเท่ากับจำนวนสัมประสิทธิ์ในสมการ(3.1.1)พอดี แยกพิจารณาได้ดังนี้

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ r^2 ซึ่งให้หน่วยแรงและการกระจัดเป็น

$$\sigma_{rri}(r,\theta) = 2 \ , \ \sigma_{r\theta i}(r,\theta) = 0 \ , \ u_{ri}(r,\theta) = \frac{(\kappa-1)}{2\mu} r \ , \ u_{\theta i}(r,\theta) = 0 \tag{3.1.7}$$

สมการงานผกผัน(3.1.6)ก็จะให้ว่า

$$\int_0^{\pi} 2\left[B_0 \frac{(\kappa-1)}{2\mu} a + B_1 \frac{(\kappa-2)}{2\mu} a^2 \cos\theta - \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left[A_j j a^{j-1} + B_j (j+1-\kappa) a^{j+1}\right] \cos(j\theta)\right] a\, d\theta$$
$$= -\frac{P}{2a\beta} \int_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta} \left[\sin\theta \frac{(\kappa-1)}{2\mu} a\right] a\, d\theta \tag{3.1.8}$$

เนื่องด้วย $\int_0^{\pi} \cos(j\theta) d\theta = 0$ ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะเหลือเพียง

$$B_0 = -\frac{P}{2a\pi\beta} \cos\alpha \sin\beta \tag{3.1.9}$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^3 \cos\theta$ ซึ่งให้หน่วยแรงและการกระจัดเป็น

$$\begin{aligned} \sigma_{rri}(r,\theta) &= 2r\cos\theta & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= 2r\sin\theta \\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{(\kappa-2)}{2\mu} r^2 \cos\theta & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{(\kappa+2)}{2\mu} r^2 \sin\theta \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

สมการงานผกผัน(3.1.6)ก็จะให้ว่า

$$\int_0^{\pi} \left\{ 2a\cos\theta \left[B_0 \frac{(\kappa-1)}{2\mu} a + B_1 \frac{(\kappa-2)}{2\mu} a^2 \cos\theta - \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left[A_j j a^{j-1} + B_j (j+1-\kappa) a^{j+1}\right] \cos(j\theta)\right]\right.$$
$$\left. + \ 2a\sin\theta \left[B_1 \frac{(\kappa+2)}{2\mu} a^2 \sin\theta + \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty} \left[A_j j a^{j-1} + B_j (j+1+\kappa) a^{j+1}\right] \sin(j\theta)\right] \right\} a\, d\theta =$$

$$-\frac{P}{2a\beta} \int_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta} \left[\sin\theta \frac{(\kappa-2)}{2\mu} a^2 \cos\theta + \cos\theta \frac{(\kappa+2)}{2\mu} a^2 \sin\theta\right] a\, d\theta \tag{3.1.11}$$

จากสมบัติเชิงตั้งฉาก(orthogonal property)ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ

$$\int_0^\pi \sin(j\theta)\sin(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & ; \quad j \neq i \\ \pi/2 & ; \quad j = i \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos(j\theta)\cos(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & ; \quad j \neq i \\ \pi/2 & ; \quad j = i \end{cases} \tag{3.1.12}$$

จะทำให้สมการ(3.1.11)ข้างบนลดรูปเป็น

$$B_1 = \frac{P\sin(2\alpha)\sin(2\beta)}{4\pi\beta a^2} \tag{3.1.13}$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^i\cos(i\theta)$, $i = 2,3,..$ ซึ่งให้หน่วยแรงและการกระจัดเป็น

$$\begin{aligned} \sigma_{rri}(r,\theta) &= -i(i-1)r^{i-2}\cos(i\theta) & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= i(i-1)r^{i-2}\sin(i\theta) \\ u_{ri}(r,\theta) &= -\frac{i}{2\mu}r^{i-1}\cos(i\theta) & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{i}{2\mu}r^{i-1}\sin(i\theta) \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

สมการงานผกผัน(3.1.6)ก็จะให้ว่า

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \Bigg\{ -i(i-1)a^{i-2}\cos(i\theta)\Bigg[B_0\frac{(\kappa-1)}{2\mu}a + B_1\frac{(\kappa-2)}{2\mu}a^2\cos\theta - \frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\Big[A_j j a^{j-1} \\ &\quad + B_j(j+1-\kappa)a^{j+1}\Big]\cos(j\theta)\Bigg] + i(i-1)a^{i-2}\sin(i\theta)\Bigg[B_1\frac{(\kappa+2)}{2\mu}a^2\sin\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\Big[A_j j a^{j-1} + B_j(j+1+\kappa)a^{j+1}\Big]\sin(j\theta)\Bigg]\Bigg\} a\,d\theta = \\ &\qquad \frac{P}{2a\beta}\int_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta}\left[\sin\theta\frac{i}{2\mu}a^{i-1}\cos(i\theta) - \cos\theta\frac{i}{2\mu}a^{i-1}\sin(i\theta)\right]a\,d\theta \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

โดยอาศัยสมบัติตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น สมการข้างบนก็จะลดรูปเหลือเพียง

$$iA_i + (i+1)a^2B_i = -\frac{Pa^{1-i}}{\pi\beta(i-1)^2}\sin\left[(i-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i-1)\beta\right] \tag{3.1.16}$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{i+2}\cos(i\theta)$, $i = 2,3,..$ ซึ่งให้หน่วยแรงและการกระจัดเป็น

$$\sigma^{\bullet}_{rr}(r,\theta) = -(i+1)(i-2)r^{i}\cos(i\theta) \qquad \sigma^{\bullet}_{r\theta}(r,\theta) = i(i+1)r^{i}\sin(i\theta)$$
$$u^{\bullet}_{r}(r,\theta) = -\frac{i+1-\kappa}{2\mu}r^{i+1}\cos(i\theta) \qquad u^{\bullet}_{\theta}(r,\theta) = \frac{i+1+\kappa}{2\mu}r^{i+1}\sin(i\theta) \tag{3.1.17}$$

ก็จะได้จากสมการงานผกผัน(3.1.6)ว่า

$$\int_0^{\pi}\Bigg\{-(i+1)(i-2)a^{i}\cos(i\theta)\Bigg[B_0\frac{(\kappa-1)}{2\mu}a+B_1\frac{(\kappa-2)}{2\mu}a^2\cos\theta-\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\big[A_j j a^{j-1}$$
$$+B_j(j+1-\kappa)a^{j+1}\big]\cos(j\theta)\Bigg]+i(i+1)a^{i}\sin(i\theta)\Bigg[B_1\frac{(\kappa+2)}{2\mu}a^2\sin\theta$$
$$+\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\big[A_j j a^{j-1}+B_j(j+1+\kappa)a^{j+1}\big]\sin(j\theta)\Bigg]\Bigg\}a\,d\theta =$$

$$\frac{P}{2a\beta}\int_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta}\left[\sin\theta\frac{i+1-\kappa}{2\mu}a^{i+1}\cos(i\theta)-\cos\theta\frac{i+1+\kappa}{2\mu}a^{i+1}\sin(i\theta)\right]a\,d\theta \tag{3.1.18}$$

ซึ่งสามารถใช้เหตุผลในทำนองเดียวกับข้างบนลดลงเหลือเพียง

$$i(i-1)A_i+(i^2+\kappa-1)a^2B_i=-\frac{Pa^{1-i}}{\pi\beta(i+1)}\Bigg\{\frac{i+1}{i-1}\sin\left[(i-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i-1)\beta\right]$$
$$+\frac{\kappa}{i+1}\sin\left[(i+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i+1)\beta\right]\Bigg\} \tag{3.1.19}$$

แก้สมการ(3.1.16) และ (3.1.19) ก็จะได้ค่าของ A_i และ B_i ดังนี้

$$A_i=\frac{Pa^{-i+2}}{a\pi\beta i(i-1)^2(i+1)}\Bigg\{-(i+1)\sin\left[(i-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i-1)\beta\right]$$
$$+(i-1)^2\sin\left[(i+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i+1)\beta\right]\Bigg\} \tag{3.1.20}$$

$$B_i=-\frac{Pa^{-i}}{a\pi\beta(i+1)^2}\sin\left[(i+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(i+1)\beta\right] \quad i=2,3,4,\ldots \tag{3.1.21}$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทุกตัวที่ได้อยู่ในรูปชัดแจ้ง(explicit form) จึงสามารถที่จะเพิ่มจำนวนพจน์ในอนุกรมให้มากขึ้นอีกเท่าใดก็ได้โดยไม่ทำให้สัมประสิทธิ์เดิมต้องเปลี่ยนค่าไป ซึ่งก็จะทำให้ผลเฉลยที่ได้ถูกต้องยิ่ง ๆ ขึ้นไปอีก โดย

มีอัตราการลู่เข้า(convergence rate)เร็วมาก(ดูจากสูตรของ A_i และ B_i ข้างบนที่มีระดับกำลังสองของ i เป็นตัวหาร) จึงถือได้ว่าผลเฉลยที่หาได้นี้เป็นรูปแบบหนึ่งของผลเฉลยแม่นตรง(exact solution)

เมื่อแทนค่า B_0 B_1 A_j และ B_j จากสมการ (3.1.9) (3.1.13) (3.1.20) และ (3.1.21) ตามลำดับ ลงในสมการ (3.1.1) และ (3.1.2) ก็จะได้ผลเฉลยสำหรับฟังก์ชัน ϕ และ ความเค้น ดังนี้

$$\frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi}=-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\alpha\sin\beta+\frac{\sin(2\alpha)\sin(2\beta)}{4\beta}\left(\frac{r}{a}\right)^3\cos\theta-\frac{1}{\beta}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^j\frac{1}{j(j-1)^2(j+1)}\Big[(j+1)\sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j-1)\beta\right]-(j-1)^2\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\Big]+\left(\frac{r}{a}\right)^{j+2}\frac{1}{(j+1)^2}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\right\}\cos(j\theta) \tag{3.1.22}$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi}=-\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}+\sin(2\alpha)\frac{\sin(2\beta)}{2\beta}\frac{r}{a}\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{j-2}\frac{1}{j^2-1}\Big[(j+1)\sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j-1)\beta\right]-(j-1)^2\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\Big]+\left(\frac{r}{a}\right)^j\frac{j-2}{j+1}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\right\}\cos(j\theta) \tag{3.1.23}$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi}=-\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}+3\sin(2\alpha)\frac{\sin(2\beta)}{2\beta}\frac{r}{a}\cos\theta-\frac{1}{\beta}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{j-2}\frac{1}{j^2-1}\Big[(j+1)\sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j-1)\beta\right]-(j-1)^2\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\Big]+\left(\frac{r}{a}\right)^j\frac{j+2}{j+1}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right]\right\}\cos(j\theta) \tag{3.1.24}$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \sin(2\alpha)\frac{\sin(2\beta)}{2\beta}\frac{r}{a}\sin\theta - \frac{1}{\beta}\sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{j-2}\frac{1}{j^2-1}\left[(j+1)\sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j-1)\beta\right] - (j-1)^2\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right] \right] + \left(\frac{r}{a}\right)^{j}\frac{j}{j+1}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\sin\left[(j+1)\beta\right] \right\}\sin(j\theta) \qquad (3.1.25)$$

รูปที่ 10. แสดงหน่วยแรงที่ขอบของโดเมนที่ได้จากสมการ(3.1.23) และ (3.1.25) โดยแทนค่า $\beta = \pi/8$ และ $\alpha = \pi/4$ เพื่อแสดงเปรียบเทียบกับสภาพความเป็นจริง พบว่าค่าของหน่วยแรงที่ได้จากสมการดังกล่าวให้ผลเฉลยที่ถูกต้อง

ถ้ากำหนดให้ β มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล(l'Hospital's rule)[7] ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันศูนย์หารด้วยศูนย์ ฟังก์ชัน ϕ ในสมการ(3.1.22) ก็จะลดรูปเหลือเป็น

$$\frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\cos\theta - \sum_{j=2,3,\dots}^{\infty}\left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{j}\left[\frac{1}{j(j-1)}\sin\left[(j-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] - \frac{1}{j}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\right] + \left(\frac{r}{a}\right)^{j+2}\frac{1}{(j+1)}\sin\left[(j+1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] \right\}\cos(j\theta) \qquad (3.1.26)$$

และ ฟังก์ชัน ϕ ข้างต้นนี้สามารถแปรรูปต่อไปได้อีกจนกระทั่งได้เป็น(ดูภาคผนวก ก)

$$\phi = -\frac{P}{\pi}\left[r_1\theta_1\sin\theta_1 - r_2\theta_2\sin\theta_2 - \frac{\cos\alpha}{2}\frac{r^2}{a} \right] \qquad (3.1.27)$$

ฟังก์ชัน ϕ ที่ได้มานี้ก็คือผลเฉลยของเฮิร์ทซ์[6](Hertz's solution) ซึ่งเป็นผลเฉลยเฉพาะสำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว P นั่นเอง โดยระบบพิกัดต่าง ๆ แสดงดังรูปที่ 11.

หน่วยแรงต่าง ๆ สำหรับกรณีเฉพาะที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว P หาได้โดยการแทนฟังก์ชัน ϕ ในสมการ(3.1.27) ลงในสมการ(2.1.17) และอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด (r_1,θ_1) (r_2,θ_2) และ (r,θ) จะได้

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi}=\cos\alpha-\frac{2\left[\cos\alpha+(r/a)\sin\theta\right]\left[\sin(\theta+\alpha)+(r/a)\right]^2}{\left[1+(r/a)^2+2(r/a)\sin(\theta+\alpha)\right]^2}-\frac{2\left[\cos\alpha-(r/a)\sin\theta\right]\left[\sin(\theta-\alpha)-(r/a)\right]^2}{\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\sin(\theta-\alpha)\right]^2} \tag{3.1.28}$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi}=\cos\alpha-\frac{2\cos^2(\theta+\alpha)\left[\cos\alpha+(r/a)\sin\theta\right]}{\left[1+(r/a)^2+2(r/a)\sin(\theta+\alpha)\right]^2}-\frac{2\cos^2(\theta-\alpha)\left[\cos\alpha-(r/a)\sin\theta\right]}{\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\sin(\theta-\alpha)\right]^2} \tag{3.1.29}$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi}=-\frac{\left[3(r/a)\cos\alpha-(r/a)\cos(2\theta+\alpha)+\sin(\theta+2\alpha)+\left(2(r/a)^2+1\right)\sin\theta\right]\cos(\theta+\alpha)}{\left[1+(r/a)^2+2(r/a)\sin(\theta+\alpha)\right]^2}+\frac{\left[3(r/a)\cos\alpha-(r/a)\cos(2\theta-\alpha)-\sin(\theta-2\alpha)-\left(2(r/a)^2+1\right)\sin\theta\right]\cos(\theta-\alpha)}{\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\sin(\theta-\alpha)\right]^2} \tag{3.1.30}$$

รูปที่ 12. แสดงการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากในแนวตั้งฉากกับรัศมี $\sigma_{\theta\theta}$ ที่ขอบของโดเมน หน่วยแรงตั้งฉาก σ_{xx} ในแนวของแรงกระทำ และในแนวผ่านศูนย์กลางของโดเมนตามแนวดิ่ง หน่วยแรงตั้งฉาก σ_{yy} ในแนวผ่านศูนย์กลางของโดเมนตามแนวราบ สำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นหน่วยแรงเดี่ยว P และ มุม $\alpha=\pi/4$

ปัญหาในตัวอย่างนี้เริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์ปัญหาที่มีหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับ P ผลเฉลยของฟังก์ชัน ϕ ที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรม แต่เมื่อกำหนดให้มุม β มีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว ฟังก์ชัน ϕ ก็จะกลายเป็นผลเฉลยเฉพาะสำหรับหน่วยแรงเดี่ยว P และสามารถลู่เข้า(converge)สู่ฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งได้อีก ผลเฉลยเฉพาะที่ได้มีค่าที่สอดคล้องกับผลเฉลยของเฮิร์ทซ์ซึ่งเป็นผลเฉลยแม่นตรง ทำให้เป็นที่ยืนยันถึงความบริบูรณ์ของชุดฟังก์ชันได้เป็นอย่างดี

3.2 ตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างนี้จะหาผลเฉลยซึ่งอาจใช้แทนปัญหาของแผ่นยืดหยุ่นรูปวงแหวน(circular ring elastic plate) หรือท่อกลมที่มีความยาวอนันต์(infinite cylinder) รัศมีภายนอกเท่ากับ a หน่วย รัศมีภายในเท่ากับ b หน่วย ถูกอัดด้วยแรงเดี่ยว P ในแนวดิ่ง ที่ปลายบนสุดและล่างสุดของวงแหวน ดังรูปที่ 13.

จากรูปที่ 13. เห็นได้ว่าปัญหานี้มีภาวะเป็นเอกฐานที่ตำแหน่งที่แรงเดี่ยวกระทำ แต่ชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีสำหรับวิเคราะห์ปัญหาเป็นชุดฟังก์ชันที่ปราศจากฟังก์ชันเอกฐาน ไม่สามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาดังรูปที่ 13. ได้โดยตรง จึงต้องทำการปรับแก้โดยการกระจายแรงเดี่ยวให้เป็นหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่มีแรงลัพธ์เท่ากับ P กระทำอยู่บริเวณที่แรงเดี่ยวเดิมกระทำอยู่ดังรูปที่ 14. แล้วจึงนำมาวิเคราะห์ หลังจากวิเคราะห์แล้วก็กำหนดให้บริเวณที่หน่วยแรงกระจายมีพื้นที่น้อยมาก (β เข้าใกล้ 0) ก็จะได้ผลเฉลยของปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาในรูปที่ 13.

ปัญหาจัดเป็นปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) ดังนั้นควรเลือกใช้ชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีในระบบพิกัดเชิงขั้วดังสมการ(2.2.20) โดยเลือกเฉพาะฟังก์ชันที่มีสมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta=0$ (แกน x) และแกน $\theta=\pi/2$ (แกน y) ซึ่งได้แก่

$$C\left\{r^2 , \ln r \ , \ r^j\cos(j\theta) \ , \ r^{j+2}\cos(j\theta) \ , \ r^{-j}\cos(j\theta) \ , \ r^{-j+2}\cos(j\theta) \quad | \quad j=2,4,\ldots\right\}$$

ดังนั้นระบบผลเฉลยสำหรับปัญหานี้คือ

$$\phi \;=\; A_0 r^2 + B_0\ln r + \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty}\left[A_j r^j + B_j r^{j+2} + C_j r^{-j} + D_j r^{-j+2}\right]\cos(j\theta) \qquad (3.2.1)$$

โดยที่ A_0 , B_0 , A_j B_j , C_j และ D_j หมายถึง สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดลอบก็คือแต่ละฟังก์ชันความเค้นของแอรีในระบบผลเฉลย ดังนี้

$$r^2 \ , \ \ln r \ , r^i\cos(i\theta) , r^{i+2}\cos(i\theta), r^{-i}\cos(i\theta) , r^{-i+2}\cos(i\theta) \ \text{โดยที่} \ i=2,4,\ldots$$

จากระบบผลเฉลยในสมการ(3.2.1) จะได้ผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉาก หน่วยแรงเฉือน และการกระจัด คือ

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 2A_0 + \frac{B_0}{r^2} - \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \Big[A_j j(j-1) r^{j-2} + B_j (j+1)(j-2) r^{j} + C_j j(j+1) r^{-j-2} \\
&\qquad + D_j (j+2)(j-1) r^{-j} \Big] \cos(j\theta) \\
\sigma_{\theta\theta} &= 2A_0 - \frac{B_0}{r^2} + \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \Big[A_j j(j-1) r^{j-2} + B_j (j+1)(j+2) r^{j} + C_j j(j+1) r^{-j-2} \\
&\qquad + D_j (j-1)(j-2) r^{-j} \Big] \cos(j\theta) \\
\sigma_{r\theta} &= \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \Big[A_j j(j-1) r^{j-2} + B_j (j+1) j r^{j} - C_j j(j+1) r^{-j-2} - D_j j(j-1) r^{-j} \Big] \sin(j\theta)
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
u_r &= A_0 \frac{(\kappa-1)}{2\mu} r - B_0 \frac{1}{2\mu r} - \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \Big[A_j j r^{j-1} + B_j (j+1-\kappa) r^{j+1} - C_j j r^{-j-1} \\
&\qquad - D_j (j-1+\kappa) r^{-j+1} \Big] \cos(j\theta) \\
u_\theta &= \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \Big[A_j j r^{j-1} + B_j (j+1+\kappa) r^{j+1} + C_j j r^{-j-1} + D_j (j-1-\kappa) r^{-j+1} \Big] \sin(j\theta)
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

เงื่อนไขสภาพขอบที่พิจารณาถึงความสมมาตรของปัญหาด้วย เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}(a,\theta) = \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 && , \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}-\beta \\
&\sigma_{rr}(a,\theta) = -\frac{P}{2a\sin\beta} , \quad \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 && , \quad \frac{\pi}{2}-\beta<\theta<\frac{\pi}{2} \\
&\sigma_{rr}(b,\theta) = \sigma_{r\theta}(b,\theta) = 0 && , \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

จากเงื่อนไขสภาพขอบดังกล่าว สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลยและระบบทดสอบเขียนได้ เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sigma_{rri}(a,\theta) u_r(a,\theta) + \sigma_{r\theta i}(a,\theta) u_\theta(a,\theta) \Big] a\,d\theta \\
&\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sigma_{rri}(b,\theta) u_r(b,\theta) + \sigma_{r\theta i}(b,\theta) u_\theta(b,\theta) \Big] b\,d\theta = -\frac{P}{2a\sin\beta} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}} \Big[u_{ri}(a,\theta) \Big] a\,d\theta
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

โดย σ_{rri} , $\sigma_{r\theta i}$, u_{ri} และ $u_{\theta i}$ หมายถึง หน่วยแรง และ การกระจัด ของระบบทดสอบ แยกพิจารณาได้ดังนี้

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ r^2 ซึ่งให้ค่าหน่วยแรงและการกระจัดดังสมการ(3.1.7) สมการงานผกผัน (3.2.5) จะให้ว่า

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left[A_0 \frac{(\kappa-1)}{2\mu} a - B_0 \frac{1}{2\mu a} - \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \left[A_j j a^{j-1} + B_j (j+1-\kappa) a^{j+1} - C_j j a^{-j-1} \right.\right.$$
$$\left.\left. - D_j (j-1+\kappa) a^{-j+1} \right] \cos(j\theta) \right] a\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left[A_0 \frac{(\kappa-1)}{2\mu} b - B_0 \frac{1}{2\mu b} - \frac{1}{2\mu} \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \left[A_j j b^{j-1} \right.\right.$$
$$\left.\left. + B_j (j+1-\kappa) b^{j+1} - C_j j b^{-j-1} - D_j (j-1+\kappa) b^{-j+1} \right] \cos(j\theta) \right] b\,d\theta$$
$$= \quad -\frac{P}{2a\sin\beta} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\kappa-1)}{2\mu} a \right] a\,d\theta \qquad (3.2.6)$$

เนื่องด้วย $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(j\theta)\,d\theta \quad = \quad 0$ สำหรับ $j = 2,4,\ldots$ ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$A_0 \;=\; \frac{P\beta}{2a\pi\left[(b/a)^2 - 1\right]\sin\beta} \qquad (3.2.7)$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $\ln r$ ซึ่งให้

$$\begin{aligned} \sigma_{rri}(r,\theta) &= \frac{1}{r^2} & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= 0 \\ u_{ri}(r,\theta) &= -\frac{1}{2\mu r} & u_{\theta i}(r,\theta) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.2.8)$$

จะได้

$$B_0 \;=\; \frac{Pa^2\beta}{a\pi\left[(b/a)^{-2} - 1\right]\sin\beta} \qquad (3.2.9)$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^i \cos(i\theta)$, $i = 2,4,..$ ซึ่งให้ค่าต่าง ๆ ดังสมการ(3.1.14) ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการงานผกผัน(3.2.5) และอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จะได้

$$i\left[1-(b/a)^{2i-2}\right]A_i + (i+1)a^2\left[1-(b/a)^{2i}\right]B_i = -\frac{Pa^{2-i}}{a\pi i(i-1)\sin\beta}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \qquad (3.2.10)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{i+2}\cos(i\theta)$, $i = 2,4,..$ โดยใช้สมการ(3.1.17) ก็จะได้

$$i(i-1)\left[1-(b/a)^{2i}\right]A_i+\left(i^2+\kappa-1\right)a^2\left[1-(b/a)^{2i+2}\right]B_i-(i-1)(\kappa-1)a^{2-2i}\left[1-(b/a)^2\right]D_i$$
$$=\ -\frac{P(i+1-\kappa)}{a\pi i(i+1)\sin\beta}a^{2-i}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \qquad (3.2.11)$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i}\cos(i\theta)$, $i=2,4,..$ ซึ่งให้หน่วยแรงและการกระจัดเป็น

$$\begin{aligned}\sigma_{rri}(r,\theta) &= -i(i+1)r^{-i-2}\cos(i\theta) & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= -i(i+1)r^{-i-2}\sin(i\theta)\\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{i}{2\mu}r^{-i-1}\cos(i\theta) & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{i}{2\mu}r^{-i-1}\sin(i\theta)\end{aligned} \qquad (3.2.12)$$

สมการงานผกผัน(3.2.5) ก็จะให้ว่า

$$i\left[1-(b/a)^{-2i-2}\right]C_i+(i-1)a^2\left[1-(b/a)^{-2i}\right]D_i\ =\ -\frac{Pa^{i+2}}{a\pi i(i+1)\sin\beta}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \qquad (3.2.13)$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i+2}\cos(i\theta)$, $i=2,4,..$ ซึ่งให้

$$\begin{aligned}\sigma_{rri}(r,\theta) &= -(i+2)(i-1)r^{-i}\cos(i\theta) & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= -i(i-1)r^{-i}\sin(i\theta)\\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{i-1+\kappa}{2\mu}\ r^{-i+1}\cos(i\theta) & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{i-1-\kappa}{2\mu}\ r^{-i+1}\sin(i\theta)\end{aligned} \qquad (3.2.14)$$

ก็จะให้ว่า

$$(i+1)(\kappa-1)\left[1-(b/a)^2\right]B_i+i(i+1)a^{-2i-2}\left[1-(b/a)^{-2i}\right]C_i+\left(i^2+\kappa-1\right)a^{-2i}\left[1-(b/a)^{-2i+2}\right]D_i$$
$$=\ -\frac{P(i-1+\kappa)}{a\pi i(i-1)\sin\beta}a^{-i}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \qquad (3.2.15)$$

จากสมการ (3.2.10) (3.2.11) (3.2.13) และ (3.2.15) แก้สมการหาค่าของ A_i B_i C_i และ D_i ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{Pa^{-i+2}}{a\pi i(i-1)\Delta_i \sin\beta}\left\{(b/a)^{-2i} - \left[(b/a)^2 - 1\right]i - 1\right\}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \\
B_i &= -\frac{Pa^{-i}}{a\pi i(i+1)\Delta_i \sin\beta}\left\{(b/a)^{-2i} + \left[(b/a)^{-2} - 1\right]i - 1\right\}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \\
C_i &= -\frac{Pa^{i+2}}{a\pi i(i+1)\Delta_i \sin\beta}\left\{(b/a)^{2i} + \left[(b/a)^2 - 1\right]i - 1\right\}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right] \\
D_i &= \frac{Pa^{i}}{a\pi i(i-1)\Delta_i \sin\beta}\left\{(b/a)^{2i} - \left[(b/a)^{-2} - 1\right]i - 1\right\}\sin\left[i(\pi/2-\beta)\right]
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

โดยที่

$$
\Delta_i = \left[(b/a)^2 + (b/a)^{-2} - 2\right]i^2 - (b/a)^{-2i} - (b/a)^{2i} + 2
$$

แทนสมการ (3.2.7) (3.2.9) และ (3.2.16) ลงในสมการ (3.2.2) และสมการ(3.2.3) จะได้ผลเฉลยของหน่วยแรงและการกระจัดในรูปชัดแจ้ง (explicit form) คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi} &= \frac{\beta}{\left[(b/a)^2-1\right]\sin\beta} + \frac{\beta}{\left[(b/a)^{-2}-1\right](r/a)^2\sin\beta} \\
&+\sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty}\Bigg\{-\left\{(b/a)^{-2j} - \left[(b/a)^2-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j-2} + \frac{j-2}{j}\left\{(b/a)^{-2j} + \left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j} \\
&\qquad +\left\{(b/a)^{2j} + \left[(b/a)^2-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j-2} - \frac{j+2}{j}\left\{(b/a)^{2j} - \left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j}\Bigg\} \\
&\qquad \times\frac{\sin\left[j(\pi/2-\beta)\right]}{\Delta_j\sin\beta}\cos(j\theta)
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} &= \frac{\beta}{\left[(b/a)^2-1\right]\sin\beta} - \frac{\beta}{\left[(b/a)^{-2}-1\right](r/a)^2\sin\beta} \\
&+\sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty}\Bigg\{\left\{(b/a)^{-2j} - \left[(b/a)^2-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j-2} - \frac{j+2}{j}\left\{(b/a)^{-2j} + \left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j} \\
&\qquad -\left\{(b/a)^{2j} + \left[(b/a)^2-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j-2} + \frac{j-2}{j}\left\{(b/a)^{2j} - \left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j}\Bigg\} \\
&\qquad \times\frac{\sin\left[j(\pi/2-\beta)\right]}{\Delta_j\sin\beta}\cos(j\theta)
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \sum_{j=2,4,\dots}^{\infty}\left\{\left\{(b/a)^{-2j}-\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j-2}-\left\{(b/a)^{-2j}+\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j}\right.$$
$$\left.+\left\{(b/a)^{2j}+\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j-2}-\left\{(b/a)^{2j}-\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j}\right\}$$
$$\times\frac{\sin\left[j(\pi/2-\beta)\right]}{\Delta_j\sin\beta}\sin(j\theta) \tag{3.2.19}$$

$$\frac{u_r(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = \frac{\beta(\kappa-1)(r/a)}{2\left[(b/a)^{2}-1\right]}-\frac{\beta}{\left[(b/a)^{-2}-1\right](r/a)\sin\beta}$$
$$+\sum_{j=2,4,\dots}^{\infty}\left\{-\frac{1}{j-1}\left\{(b/a)^{-2j}-\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j-1}+\frac{j+1-\kappa}{j(j+1)}\left\{(b/a)^{-2j}+\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j+1}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{j+1}\left\{(b/a)^{2j}+\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j-1}+\frac{j-1+\kappa}{j(j-1)}\left\{(b/a)^{2j}-\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j+1}\right\}$$
$$\times\frac{\sin\left[j(\pi/2-\beta)\right]}{\Delta_j\sin\beta}\cos(j\theta) \tag{3.2.20}$$

$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{P/2\mu\ \pi} =$$
$$\sum_{j=2,4,\dots}^{\infty}\left\{\frac{1}{j-1}\left\{(b/a)^{-2j}-\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j-1}-\frac{j+1+\kappa}{j(j+1)}\left\{(b/a)^{-2j}+\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{j+1}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{j+1}\left\{(b/a)^{2j}+\left[(b/a)^{2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j-1}+\frac{j-1-\kappa}{j(j-1)}\left\{(b/a)^{2j}-\left[(b/a)^{-2}-1\right]j-1\right\}(r/a)^{-j+1}\right\}$$
$$\times\frac{\sin\left[j(\pi/2-\beta)\right]}{\Delta_j\sin\beta}\sin(j\theta) \tag{3.2.21}$$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลย รูปที่ 15. แสดงหน่วยแรงที่ขอบของโดเมนที่ได้จากสมการ(3.2.17) และ(3.2.19) จากรูป จะเห็นได้ว่าผลเฉลยของหน่วยแรงที่ได้ ให้ค่าที่สอดคล้องกับสภาพขอบของโดเมน

สำหรับกรณีที่มุม $\beta=\pi/2$ จะเป็นปัญหาของท่อกลม หรือแผ่นวงแหวน รับความดันภายนอกเท่ากับ $\sigma_0 = P/2a$ ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความสมมาตรตามแกน(axi-symmetry) สมการผลเฉลยข้างบนก็จะลดรูปเหลือเพียง

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{\sigma_0} = \frac{1}{(b/a)^2-1}\left(1-\frac{(b/a)^2}{(r/a)^2}\right)$$
$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{\sigma_0} = \frac{1}{(b/a)^2-1}\left(1+\frac{(b/a)^2}{(r/a)^2}\right)$$
$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{\sigma_0} = 0 \qquad (3.2.22)$$
$$\frac{u_r(r,\theta)}{\sigma_0 a/2\mu} = \frac{1}{(b/a)^2-1}\left(\frac{\kappa-1}{2}\ \frac{r}{a}+\frac{(b/a)^2}{r/a}\right)$$
$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{\sigma_0 a/2\mu} = 0$$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่ได้ข้างต้นมีสูตรที่ตรงกับผลเฉลยแม่นตรง[10] ซึ่งเป็นผลงานของ ลาเม(Lame')

รูปที่ 16. แสดงหน่วยแรง $\sigma_{\theta\theta}$ ตามแนวแกน $\theta=0$ และ $\theta=\pi/2$ ในกรณีที่ β เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งหน่วยแรงกระทำก็จะกลายเป็นแรงเดี่ยว P โดยได้แสดงเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของทิโมเชงโก(Timoshenko)[10] ดังตารางข้างล่างนี้

ตารางแสดงผลเฉลยแม่นตรงของทิโมเชงโก(Timoshenko) สำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว P

r/a	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sigma_{\theta\theta}(r,0)/(P/a\pi)$	-17.884	-9.22	-4.024	-0.226	2.954	5.22
$\sigma_{\theta\theta}(r,\pi/2)/(P/a\pi)$	20.294	8.004	2.48	-1.188	-4.37	-7.576

จากรูปก็จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่ได้ สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงของทิโมเชงโก(Timoshenko)แสดงว่าผลเฉลยถูกต้อง

เมื่อกำหนดให้ปัญหานี้เป็นปัญหาระนาบทางความเค้น ปัญหาในตัวอย่างนี้คือวงแหวนปรับเทียบ(proving ring)นั่นเอง ซึ่งใช้เป็นเครื่องมือสำหรับวัดขนาดของแรง โดยมีหลักการคือวัดระยะการหดตัวของวงแหวนแล้วนำไปคำนวณหาขนาดของแรงกดได้ รูปที่ 17. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการหดตัวของวงแหวนตามแนวแรง สำหรับวงแหวนที่มีอัตราส่วน b/a ต่าง ๆกัน และเป็นวัสดุที่มีอัตราส่วนปัวส์ซอง(Poisson's ratio) เท่ากับ 0.05 , 0.25 และ 0.45 ตามลำดับ จากรูปสังเกตได้ว่าเมื่อ b/a อยู่ในช่วง 0 ถึง 0.7 ระยะการหดตัวของวงแหวนจะมีค่าที่ยังไม่แตกต่างกันมากนัก เมื่อเลยช่วงนี้ขึ้นไประยะการหดตัวจะเพิ่มขึ้นอย่างมากเมื่อ b/a มากขึ้น

3.3 ตัวอย่างที่ 3

แผ่นยืดหยุ่นมีพื้นที่อนันต์ หรือ full space domain มีรูเจาะรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a รับหน่วยแรงตั้งฉาก $P/(2a\sin\beta)$ ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับแรง P ในแนวดิ่ง ดังรูปที่ 18. ซึ่งจัดเป็นปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) ชุดฟังก์ชันที่ใช้จะเป็นดังสมการ(2.2.22) โดยเลือกเฉพาะพจน์ที่มีสมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta = 0$ ดังนั้น ชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่เหมาะสมคือ

$$C\left\{\ln r\,,\ (\kappa-1)r\ln r\cos\theta-(\kappa+1)r\theta\sin\theta\,,\ \frac{\cos\theta}{r}\,,\ r^{-j}\cos(j\theta)\,,\ r^{2-j}\cos(j\theta)\ \mid\ j = 2,3,...\right\}$$

ดังนั้นระบบผลเฉลยสำหรับปัญหานี้คือ

$$\begin{aligned}\phi \;=\; & A_0\ln r + B_0\left[(\kappa-1)r\ln r\cos\theta-(\kappa+1)r\theta\sin\theta\right] + C_0\frac{\cos\theta}{r} \\ & +\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j r^{-j}+B_j r^{2-j}\right]\cos(j\theta)\end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

โดยที่ A_0 , B_0 , C_0 , A_j และ B_j หมายถึง สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบก็คือแต่ละฟังก์ชันความเค้นของแอรีในระบบผลเฉลย ดังนี้

$$\ln r\,,\ (\kappa-1)r\ln r\cos\theta-(\kappa+1)r\theta\sin\theta\ ,\ \frac{\cos\theta}{r}\,,\ r^{-i}\cos(i\theta)\ ,\ r^{2-i}\cos(i\theta)\ \mid\ i=2,3,...$$

จากระบบผลเฉลยในสมการ(3.3.1) จะได้ผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉาก หน่วยแรงเฉือน และการกระจัด คือ

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{A_0}{r^2}-B_0(\kappa+3)\frac{\cos\theta}{r}-C_0 2\frac{\cos\theta}{r^3}-\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j j(j+1)r^{-j-2}+B_j(j+2)(j-1)r^{-j}\right]\cos(j\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{A_0}{r^2}+B_0(\kappa-1)\frac{\cos\theta}{r}+C_0 2\frac{\cos\theta}{r^3}+\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j j(j+1)r^{-j-2}+B_j(j-1)(j-2)r^{-j}\right]\cos(j\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= B_0(\kappa-1)\frac{\sin\theta}{r}-C_0 2\frac{\sin\theta}{r^3}-\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j j(j+1)r^{-j-2}+B_j j(j-1)r^{-j}\right]\sin(j\theta)\end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{A_0}{2\mu r}-B_0\frac{(2\kappa\ln r-1)}{2\mu}\cos\theta+C_0\frac{\cos\theta}{2\mu r^2}+\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j j r^{-j-1}+B_j(j-1+\kappa)r^{-j+1}\right]\cos(j\theta) \\ u_\theta &= B_0\frac{(2\kappa\ln r+1)}{2\mu}\sin\theta+C_0\frac{\sin\theta}{2\mu r^2}+\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[A_j j r^{-j-1}+B_j(j-1-\kappa)r^{-j+1}\right]\sin(j\theta)\end{aligned} \qquad (3.3.3)$$

พิจารณารูปที่ 18. ได้ว่าเงื่อนไขสภาพขอบที่พิจารณาถึงความสมมาตรของปัญหาดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr}(a,\theta) &= -P/(2a\sin\beta) \quad , \quad \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \quad , \quad 0<\theta<\beta \\
\sigma_{rr}(a,\theta) &= \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \quad , \quad \beta<\theta<\pi
\end{aligned}
\qquad (3.3.4)
$$

จากเงื่อนไขสภาพขอบดังกล่าว สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลยและระบบทดสอบโดยพิจารณาถึงความสมมาตรของปัญหา เป็นดังนี้

$$
-\int_0^{\pi}\left[\sigma_{rri}(a,\theta)u_r(a,\theta)+\sigma_{r\theta i}(a,\theta)u_\theta(a,\theta)\right]a\,d\theta = \frac{P}{2a\sin\beta}\int_0^{\beta}\left[u_{ri}(a,\theta)\right]a\,d\theta \qquad (3.3.5)
$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $\ln r$ ซึ่งมีพจน์ของความเค้นและการกระจัดดังสมการ(3.2.8) และใช้สมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ สมการงานผกผันก็จะให้ว่า

$$
A_0 = -\frac{Pa\beta}{2\pi\sin\beta} \qquad (3.3.6)
$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $(\kappa-1)r\ln r\cos\theta-(\kappa+1)r\theta\sin\theta$ ซึ่งให้ค่าความเค้นและการกระจัดเป็น

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rri}(r,\theta) &= -(\kappa+3)\frac{\cos\theta}{r} & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= (\kappa-1)\frac{\sin\theta}{r} \\
u_{ri}(r,\theta) &= -\frac{(2\kappa\ln r-1)}{2\mu}\cos\theta & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{(2\kappa\ln r+1)}{2\mu}\sin\theta
\end{aligned}
\qquad (3.3.7)
$$

ซึ่งเมื่อแทน ลงในสมการงานผกผัน แล้วอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะได้

$$
B_0 2\pi\left(\kappa^2\ln a+\kappa\ln a-1\right)-C_0\frac{2\pi}{a^2} = \frac{P}{2}(2\kappa\ln a-1) \qquad (3.3.8)
$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $\frac{\cos\theta}{r}$ ซึ่งมีให้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rri}(r,\theta) &= -2\frac{\cos\theta}{r^3} & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= -2\frac{\sin\theta}{r^3} \\
u_{ri}(r,\theta) &= \frac{\cos\theta}{2\mu r^2} & u_{\theta i}(r,\theta) &= \frac{\sin\theta}{2\mu r^2}
\end{aligned}
\qquad (3.3.9)
$$

ก็จะได้ว่า

$$B_0 2\pi \quad + \quad C_0 \frac{2\pi}{a^2} \quad = \quad \frac{P}{2} \tag{3.3.10}$$

แก้สมการ(3.3.8) และ (3.3.10) หาค่า B_0 และ C_0 จะได้

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{P}{2\pi(\kappa+1)} \\ C_0 &= \frac{Pa^2(\kappa-1)}{4\pi(\kappa+1)} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i}\cos(i\theta)$, $i = 2,3,..$ ซึ่งให้พจน์ต่าง ๆ ดังสมการ(3.2.12) และอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ สมการงานผกผัน(3.3.5) จะให้ว่า

$$iA_i + (i-1)a^2 B_i \quad = \quad \frac{Pa^{i+1}\sin(i\beta)}{2\pi i(i+1)\sin\beta} \tag{3.3.12}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i+2}\cos(i\theta)$, $i = 2,3,..$ ซึ่งให้ค่าต่าง ๆ ดังสมการ (3.2.14) ก็จะได้ว่า

$$i(i+1)A_i \quad + \quad (i^2+\kappa-1)a^2 B_i \quad = \quad \frac{Pa^{i+1}(i-1+\kappa)\sin(i\beta)}{2\pi i(i-1)\sin\beta} \tag{3.3.13}$$

แก้สมการ (3.3.12) และ (3.3.13) หาค่าของ A_i และ B_i ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{Pa^{i+1}\sin(i\beta)}{2\pi i(i+1)\sin\beta} \\ B_i &= \frac{Pa^{i-1}\sin(i\beta)}{2\pi i(i-1)\sin\beta} \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

เมื่อแทน A_0 B_0 C_0 A_i และ B_i จากสมการ (3.3.6) (3.3.11) และ (3.3.14) ลงในสมการ (3.3.1) (3.3.2) และสมการ(3.3.3) จะได้ผลเฉลยของฟังก์ชัน ϕ หน่วยแรง และการกระจัด ในรูปชัดแจ้ง (explicit form) คือ

$$\frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = -\frac{\beta}{2\sin\beta}\ln r + \frac{(\kappa-1)}{2(\kappa+1)}\frac{r}{a}\ln r\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\theta\sin\theta + \frac{(\kappa-1)}{4(\kappa+1)(r/a)}\cos\theta$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[\frac{1}{j(j+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-j} - \frac{1}{j(j-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2-j}\right]\frac{\sin(j\beta)}{\sin\beta}\cos(j\theta) \qquad (3.3.15)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi} = -\frac{\beta}{2(r/a)^2\sin\beta} - \frac{1}{2(\kappa+1)}\left(\frac{\kappa+3}{(r/a)} + \frac{\kappa-1}{(r/a)^3}\right)\cos\theta + \sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[(r/a)^{-j-2} - \frac{j+2}{j}(r/a)^{-j}\right]\times$$
$$\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\cos(j\theta) \qquad (3.3.16)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{\beta}{2(r/a)^2\sin\beta} + \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)} + \frac{1}{(r/a)^3}\right)\cos\theta - \sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[(r/a)^{-j-2} - \frac{j-2}{j}(r/a)^{-j}\right]\times$$
$$\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\cos(j\theta) \qquad (3.3.17)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)} - \frac{1}{(r/a)^3}\right)\sin\theta + \sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[(r/a)^{-j-2} - (r/a)^{-j}\right]\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\sin(j\theta) \qquad (3.3.18)$$

สำหรับการกระจัดซึ่งได้เพิ่มพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็ง คือ $\frac{\kappa\ln a}{(\kappa+1)}\cos\theta$ และ $\frac{\kappa\ln a}{\kappa+1}\sin\theta$ เข้าไปในพจน์ของ u_r และ u_θ ตามลำดับจะได้

$$\frac{u_r(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = \frac{\beta}{2(r/a)\sin\beta} - \left(\frac{2\kappa\ln(r/a)-1}{2(\kappa+1)} - \frac{\kappa-1}{4(\kappa+1)(r/a)^2}\right)\cos\theta - \sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[\frac{1}{j+1}(r/a)^{-j-1}\right.$$
$$\left.-\frac{j-1+\kappa}{j(j-1)}(r/a)^{-j+1}\right]\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\cos(j\theta) \qquad (3.3.19)$$

$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = \left(\frac{2\kappa\ln(r/a)+1}{2(\kappa+1)} + \frac{\kappa-1}{4(\kappa+1)(r/a)^2}\right)\sin\theta - \sum_{j=2,3,...}^{\infty}\left[\frac{1}{j+1}(r/a)^{-j-1} - \frac{j-1-\kappa}{j(j-1)}(r/a)^{-j+1}\right]$$
$$\times\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\sin(j\theta) \qquad (3.3.20)$$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลย รูปที่ 19. แสดงหน่วยแรงที่ขอบของโดเมนที่ได้จากสมการ (3.3.16) และ(3.3.18) จากรูป จะเห็นได้ว่าสมการทั้งสองให้ค่าหน่วยแรงตั้งฉากในแนวรัศมี และหน่วยแรงเฉือนสอดคล้องกับสภาพขอบของโดเมน ทุกประการ

ในกรณีเฉพาะที่ β เข้าใกล้ศูนย์ แรงกระทำก็จะกลายเป็นแรงเดี่ยว P ซึ่งสามารถทวนสอบ(verification) ได้ว่า(ดูภาคผนวก ข) ฟังก์ชัน ϕ ดังสมการ(3.3.15) จะมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรง[6] หรือที่เรียกว่าผลเฉลยของทิโมเชงโก(Timoshenko) ดังนี้

$$\phi=-\frac{P}{\pi}\left[r_1\theta_1\sin\theta_1-\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}r\ln r\cos\theta-\frac{1}{2}r\theta\sin\theta+\frac{a}{2}\ln r-\frac{\kappa}{2(\kappa+1)}\frac{a^2}{r}\cos\theta\right] \qquad (3.3.21)$$

โดยที่ระบบพิกัดเชิงขั้ว (r_1,θ_1) มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดที่แรงเดี่ยวกระทำ ดังรูปที่ 20.

หน่วยแรงและการกระจัดสำหรับกรณีเฉพาะที่หน่วยแรงเดี่ยว P กระทำ เป็นดังนี้

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi}=\frac{(3\kappa+1)\cos\theta}{2(\kappa+1)(r/a)}-\frac{1}{2(r/a)^2}-\frac{\kappa\cos\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3}-\frac{2(\cos\theta-r/a)^2\left[(r/a)\cos\theta-1\right]}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2} \qquad (3.3.22)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi}=\frac{(\kappa-1)\cos\theta}{2(\kappa+1)(r/a)}+\frac{1}{2(r/a)^2}+\frac{\kappa\cos\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3}-\frac{2\left[(r/a)\cos\theta-1\right]\sin^2\theta}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2} \qquad (3.3.23)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi}=\frac{(\kappa-1)\sin\theta}{2(\kappa+1)(r/a)}-\frac{\kappa\sin\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3}+\frac{\left\{-2\left[(r/a)^2+1\right]\cos\theta+(r/a)\left[\cos(2\theta)+3\right]\right\}}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2}\sin\theta \qquad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned}\frac{u_r(r,\theta)}{P/2\mu\pi}&=-\frac{(\kappa+1)\cos\theta}{4}\ln\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]+\frac{(\kappa^2+1)\cos\theta}{2(\kappa+1)}\ln(r/a)+\frac{1}{2(r/a)}\\&-\frac{2(r/a)-\left[1+(r/a)^2\right]\cos\theta}{2\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]}-\frac{(\kappa-1)\sin\theta}{2}\arctan\left(\frac{\sin\theta}{r/a-\cos\theta}\right)\\&+\frac{\kappa\cos\theta}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)^2}-1\right)\end{aligned} \qquad (3.3.25)$$

$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = \frac{(\kappa+1)\sin\theta}{4}\ln\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]-\frac{(\kappa^2+1)\sin\theta}{2(\kappa+1)}\ln(r/a)$$

$$+\frac{\left[(r/a)^2-1\right]\sin\theta}{2\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]}-\frac{(\kappa-1)\cos\theta}{2}\arctan\left(\frac{\sin\theta}{r/a-\cos\theta}\right)$$

$$+\frac{\kappa\sin\theta}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)^2}-1\right) \qquad (3.3.26)$$

ปัญหาระนาบซึ่งเป็นปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) โดยหลักการแล้วจะต้องให้ผลเฉลยของหน่วยแรงและการกระจัดที่ระยะอนันต์เข้าใกล้ศูนย์ แต่เมื่อพิจารณาสมการแสดงผลเฉลยของหน่วยแรงและการกระจัดสำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเดี่ยว P ดังสมการ(3.3.22) ถึง (3.3.26) จะสังเกตได้ว่าเฉพาะผลเฉลยของหน่วยแรงเท่านั้นที่ให้ค่าที่สอดคล้องกับหลักการดังกล่าว กล่าวคือ ในสูตรแสดงค่าหน่วยแรงจะมีการหารด้วยพจน์ที่เป็น r/a เสมอ ซึ่งเมื่อที่ระยะห่างจุดกำเนิดมากขึ้น(r มากขึ้น)ก็จะทำให้ค่าของหน่วยแรงน้อยลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ศูนย์ที่ระยะอนันต์ ดังเช่น ในรูปที่ 21ก. 21ข. และ 21 ค. ซึ่งแสดงค่าของหน่วยแรง σ_{rr} ตามแนวแกน $\theta=0$ $\theta=\pi/2$ และ $\theta=\pi$ ตามลำดับ จากรูปจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าหน่วยแรง σ_{rr} จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ ที่ระยะ r มากขึ้น แต่สำหรับค่าการกระจัด จากสูตรจะเห็นว่ามีพจน์ที่เป็น $\ln(r/a)$ และ $\ln\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]$ คูณอยู่ ทั้งสองพจน์นี้จะทำให้การกระจัดมากขึ้นเรื่อย ๆ ที่ระยะ r มากขึ้น และจะมีภาวะเป็นเอกฐาน(singularity)ที่ระยะอนันต์ ส่วนพจน์หลังนั้นยังมีผลทำให้การกระจัดมีค่าเป็นภาวะเอกฐานที่ตำแหน่งที่แรงเดี่ยวกระทำอีกด้วย อย่างไรก็ตามลักษณะการเป็นเอกฐานเป็นภาวะเอกฐานอย่างอ่อน ๆ(weak singularity) เท่านั้นกล่าวคือ การเพิ่มขึ้นของการกระจัดค่อย ๆเพิ่มขึ้นที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมากขึ้น ไม่ได้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังรูปที่ 21ง. 21จ. และ 21 ฉ. ซึ่งแสดงค่าของการกระจัด u_r ตามแนวแกน $\theta=0$ $\theta=\pi/2$ และ $\theta=\pi$ ตามลำดับ ซึ่งนับเป็นความแปลกประหลาดของปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) ในตัวอย่างนี้ ทั้ง ๆ ที่ผลเฉลยของหน่วยแรงต่าง ๆ ก็สอดคล้องกับความเป็นจริงแล้ว แต่ผลเฉลยของการกระจัดกลับไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง

อย่างไรก็ตามตัวอย่างนี้ก็ได้แสดงให้เห็นถึงความบริบูรณ์ของฟังก์ชัน ϕ ได้เป็นอย่างดี เนื่องจากผลเฉลยที่วิเคราะห์ได้ ตรงกับผลเฉลยแม่นตรงนั่นเอง

3.4 ตัวอย่างที่ 4

ถ้าแรงกระทำในตัวอย่างที่ 3. เปลี่ยนมาเป็นหน่วยแรงเฉือน $P/(2a\sin\beta)$ ดังในรูปที่ 22. ชุดฟังก์ชันที่ใช้จะเป็นดังสมการ(2.2.22) โดยเลือกเฉพาะฟังก์ชันที่ให้ค่าความเค้น และการกระจัดสอดคล้องกับสมบัติปฏิสมมาตรรอบแกน $\theta=0$ ด้วย ได้แก่

$$C\left\{\theta,(\kappa-1)r\ln r\sin\theta+(\kappa+1)r\theta\cos\theta\,,\frac{\sin\theta}{r},\ r^{-j}\sin(j\theta)\,,r^{2-j}\sin(j\theta)\ \mid\ j\ =\ 2,3,\ldots\right\}$$

ดังนั้นระบบผลเฉลยสำหรับปัญหานี้คือ

$$\begin{aligned}\phi\ =\ &A_0\theta+B_0[(\kappa-1)r\ln r\sin\theta+(\kappa+1)r\theta\cos\theta]+C_0\frac{\sin\theta}{r}\\ &+\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jr^{-j}+B_jr^{2-j}\right]\sin(j\theta)\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

โดยที่ A_0 , B_0 , C_0 , A_j และ B_j หมายถึง สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบก็คือแต่ละฟังก์ชันความเค้นของแอรีในระบบผลเฉลย ดังนี้

$$\theta\,,(\kappa-1)r\ln r\sin\theta+(\kappa+1)r\theta\cos\theta\ ,\frac{\sin\theta}{r},\ r^{-i}\sin(i\theta)\ ,\ r^{2-i}\sin(i\theta)\ \mid\ i=2,3,\ldots$$

จากระบบผลเฉลยในสมการ(3.4.1) จะได้ผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉาก หน่วยแรงเฉือน และการกระจัด คือ

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -B_0(\kappa+3)\frac{\sin\theta}{r}-C_0 2\frac{\sin\theta}{r^3}-\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jj(j+1)r^{-j-2}+B_j(j+2)(j-1)r^{-j}\right]\sin(j\theta)\\ \sigma_{\theta\theta} &= B_0(\kappa-1)\frac{\sin\theta}{r}+C_0 2\frac{\sin\theta}{r^3}+\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jj(j+1)r^{-j-2}+B_j(j-2)(j-1)r^{-j}\right]\sin(j\theta)\\ \sigma_{r\theta} &= \frac{A_0}{r^2}-B_0(\kappa-1)\frac{\cos\theta}{r}+C_0 2\frac{\cos\theta}{r^3}+\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jj(j+1)r^{-j-2}+B_jj(j-1)r^{-j}\right]\cos(j\theta)\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned}u_r &= -B_0\frac{(2\kappa\ln r-1)}{2\mu}\sin\theta+C_0\frac{\sin\theta}{2\mu r^2}+\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jjr^{-j-1}+B_j(j-1+\kappa)r^{-j+1}\right]\sin(j\theta)\\ u_\theta &= -\frac{A_0}{2\mu r}-B_0\frac{(2\kappa\ln r+1)}{2\mu}\cos\theta-C_0\frac{\cos\theta}{2\mu r^2}-\frac{1}{2\mu}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[A_jjr^{-j-1}+B_j(j-1-\kappa)r^{-j+1}\right]\cos(j\theta)\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

เงื่อนไขสภาพขอบที่พิจารณาถึงสมบัติปฏิสมมาตรของปัญหาเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr}(a,\theta) &= 0 \quad , \quad \sigma_{r\theta}(a,\theta) = -P/(2a\sin\beta) \quad , \quad 0<\theta<\beta \\
\sigma_{rr}(a,\theta) &= \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \quad , \quad \beta<\theta<\pi
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

จากเงื่อนไขสภาพขอบ สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลย และระบบทดสอบโดยพิจารณาถึงความปฏิสมมาตรของปัญหา เป็นดังนี้

$$
-\int_0^\pi \left[\sigma_{rri}(a,\theta)u_r(a,\theta)+\sigma_{r\theta i}(a,\theta)u_\theta(a,\theta)\right]a\,d\theta = \frac{P}{2a\sin\beta}\int_0^\beta \left[u_{\theta i}(a,\theta)\right]a\,d\theta \tag{3.4.5}
$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ θ ซึ่งให้ค่าต่าง ๆ คือ

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rri}(r,\theta) &= 0 \qquad & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= \frac{1}{r^2} \\
u_{ri}(r,\theta) &= 0 \qquad & u_{\theta i}(r,\theta) &= -\frac{1}{2\mu r}
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

และเมื่อแทนลงในสมการงานผกผันแล้วอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะได้

$$
A_0 = -\frac{Pa\beta}{2\pi\sin\beta} \tag{3.4.7}
$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $(\kappa-1)r\ln r\sin\theta+(\kappa+1)r\theta\cos\theta$ ซึ่งให้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rri}(r,\theta) &= -(\kappa+3)\frac{\sin\theta}{r} \qquad & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= -(\kappa-1)\frac{\cos\theta}{r} \\
u_{ri}(r,\theta) &= -\frac{(2\kappa\ln r-1)}{2\mu}\sin\theta \qquad & u_{\theta i}(r,\theta) &= -\frac{(2\kappa\ln r+1)}{2\mu}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{3.4.8}
$$

และเมื่อแทนลงในสมการงานผกผัน แล้วอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะได้

$$
B_0 2\pi\left(\kappa^2\ln a+\kappa\ln a-1\right)-C_0\frac{2\pi}{a^2} = \frac{P}{2}(2\kappa\ln a+1) \tag{3.4.9}
$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $\dfrac{\sin\theta}{r}$ ซึ่งให้ค่าต่าง ๆ คือ

$$\begin{aligned}\sigma_{rri}(r,\theta) &= -2\frac{\sin\theta}{r^3} & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= 2\frac{\cos\theta}{r^3}\\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{\sin\theta}{2\mu r^2} & u_{\theta i}(r,\theta) &= -\frac{\cos\theta}{2\mu r^2}\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

ก็จะได้

$$B_0 2\pi + C_0\frac{2\pi}{a^2} = -\frac{P}{2} \tag{3.4.11}$$

แก้สมการ(3.4.9) และ (3.4.11) หาค่า B_0 และ C_0 จะได้

$$\begin{aligned}B_0 &= \frac{P}{2\pi(\kappa+1)}\\ C_0 &= -\frac{Pa^2(\kappa+3)}{4\pi(\kappa+1)}\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

เมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i}\sin(i\theta)$, $i=2,3,..$ ซึ่งให้ค่าต่าง ๆ คือ

$$\begin{aligned}\sigma_{rri}(r,\theta) &= -i(i+1)r^{-i-2}\sin(i\theta) & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= i(i+1)r^{-i-2}\cos(i\theta)\\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{i}{2\mu}r^{-i-1}\sin(i\theta) & u_{\theta i}(r,\theta) &= -\frac{i}{2\mu}r^{-i-1}\cos(i\theta)\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการงานผกผัน แล้วอาศัยสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จะได้

$$iA_i + (i-1)a^2B_i = -\frac{Pa^{i+1}\sin(i\beta)}{2\pi i(i+1)\sin\beta} \tag{3.4.14}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทดสอบด้วยระบบทดสอบ $r^{-i+2}\sin(i\theta)$, $i=2,3,..$ ซึ่งให้

$$\begin{aligned}\sigma_{rri}(r,\theta) &= -(i+2)(i-1)r^{-i}\sin(i\theta) & \sigma_{r\theta i}(r,\theta) &= i(i-1)r^{-i}\cos(i\theta)\\ u_{ri}(r,\theta) &= \frac{i-1+\kappa}{2\mu}r^{-i+1}\sin(i\theta) & u_{\theta i}(r,\theta) &= -\frac{i-1-\kappa}{2\mu}r^{-i+1}\cos(i\theta)\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

ก็จะได้ว่า

$$i(i+1)A_i + (i^2+\kappa-1)a^2B_i = -\frac{Pa^{i+1}(i-1-\kappa)}{2\pi i(i-1)\sin\beta}\sin(i\beta) \tag{3.4.16}$$

แก้สมการ (3.4.14) และ (3.4.16) หาค่าของ A_i และ B_i ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{Pa^{i+1}(i+2)\sin(i\beta)}{2\pi i^2(i+1)\sin\beta} \\ B_i &= \frac{Pa^{i-1}\sin(i\beta)}{2\pi i(i-1)\sin\beta} \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

เมื่อแทน A_0 B_0 C_0 A_i และ B_i จากสมการ (3.4.7) (3.4.12) และ (3.4.17) ลงในสมการ (3.4.1) (3.4.2) และสมการ(3.4.3) จะได้ผลเฉลยของฟังก์ชัน ϕ หน่วยแรง และการกระจัด ในรูปชัดแจ้ง (explicit form) คือ

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r,\theta)}{Pa/\pi} = &-\frac{\beta}{2\sin\beta}\theta + \frac{(\kappa-1)}{2(\kappa+1)}\frac{r}{a}\ln r\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{r}{a}\theta\cos\theta - \frac{(\kappa+3)}{4(\kappa+1)(r/a)}\sin\theta \\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[\frac{j+2}{j^2(j+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-j} - \frac{1}{j(j-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2-j}\right]\frac{\sin(j\beta)}{\sin\beta}\sin(j\theta) \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{\kappa+3}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)^3}-\frac{1}{r/a}\right)\sin\theta + \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\frac{j+2}{j}\left[(r/a)^{-j-2}-(r/a)^{-j}\right]\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\sin(j\theta) \tag{3.4.19}$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{1}{2(\kappa+1)}\left(\frac{\kappa-1}{(r/a)}-\frac{\kappa+3}{(r/a)^3}\right)\sin\theta - \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[\frac{j+2}{j}(r/a)^{-j-2}-\frac{j-2}{j}(r/a)^{-j}\right]\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\sin(j\theta) \tag{3.4.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = &-\frac{\beta}{2(r/a)^2\sin\beta} - \frac{1}{2(\kappa+1)}\left(\frac{\kappa-1}{(r/a)}+\frac{\kappa+3}{(r/a)^3}\right)\cos\theta - \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[\frac{j+2}{j}(r/a)^{-j-2}-(r/a)^{-j}\right]\times \\ &\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\cos(j\theta) \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

สำหรับการกระจัด ซึ่งได้เพิ่มพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็งในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 3. เข้าไปในพจน์ของ u_r และ u_θ ตามลำดับจะได้

$$\begin{aligned} \frac{u_r(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = &-\left(\frac{2\kappa\ln(r/a)-1}{2(\kappa+1)}+\frac{\kappa+3}{4(\kappa+1)(r/a)^2}\right)\sin\theta - \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[\frac{j+2}{j(j+1)}(r/a)^{-j-1}-\frac{j-1+\kappa}{j(j-1)}(r/a)^{-j+1}\right] \\ &\times\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\sin(j\theta) \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = \frac{\beta}{2(r/a)\sin\beta} - \left(\frac{2\kappa\ln(r/a)+1}{2(\kappa+1)} - \frac{\kappa+3}{4(\kappa+1)(r/a)^2}\right)\cos\theta + \sum_{j=2,3,\ldots}^{\infty}\left[\frac{j+2}{j(j+1)}(r/a)^{-j-1}\right.$$
$$\left. - \frac{j-1-\kappa}{j(j-1)}(r/a)^{-j+1}\right]\frac{\sin(j\beta)}{2\sin\beta}\cos(j\theta) \tag{3.4.23}$$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลย รูปที่ 23. แสดงหน่วยแรงที่ขอบของโดเมนที่ได้จากสมการ (3.4.19) และ(3.4.21) ซึ่งพบว่าให้ค่าที่ถูกต้อง

ในกรณีเฉพาะที่ β เข้าใกล้ศูนย์ แรงกระทำก็จะกลายเป็นแรงเดี่ยว P ซึ่งสามารถทวนสอบ(verification)ได้ว่า(ดูภาคผนวก ค) ฟังก์ชัน ϕ ที่ได้จะมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรง[6] ดังนี้

$$\phi = \frac{P}{\pi}\left[r_1\theta_1\cos\theta_1 + \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}r\ln r\sin\theta - \frac{1}{2}r\theta\cos\theta + \frac{a}{2}\theta + \frac{\kappa}{2(\kappa+1)}\frac{a^2}{r}\sin\theta\right] \tag{3.4.24}$$

โดยที่ระบบพิกัดเชิงขั้ว (r_1,θ_1) มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดที่แรงเดี่ยวกระทำ ดังรูปที่ 24.

หน่วยแรงและการกระจัดสำหรับกรณีเฉพาะที่หน่วยแรงเดี่ยว P กระทำ เป็นดังนี้

$$\frac{\sigma_{rr}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{(3\kappa+1)\sin\theta}{2(\kappa+1)(r/a)} - \frac{\kappa\sin\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3} - \frac{2(r/a)(r/a-\cos\theta)^2}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2}\sin\theta \tag{3.4.25}$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = \frac{(\kappa-1)\sin\theta}{2(\kappa+1)(r/a)} + \frac{\kappa\sin\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3} - \frac{2(r/a)\sin^3\theta}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2} \tag{3.4.26}$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(r,\theta)}{P/a\pi} = -\frac{(\kappa-1)\cos\theta}{2(\kappa+1)(r/a)} + \frac{1}{2(r/a)^2} + \frac{\kappa\cos\theta}{(\kappa+1)(r/a)^3} - \frac{2(r/a)(r/a-\cos\theta)\sin^2\theta}{\left[1-2(r/a)\cos\theta+(r/a)^2\right]^2} \tag{3.4.27}$$

$$\frac{u_r(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = -\frac{\kappa+1}{4}\ln\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]\sin\theta + \frac{\kappa^2+1}{2(\kappa+1)}\ln(r/a)\sin\theta$$
$$-\frac{\left[1-(r/a)^2\right]\sin\theta}{2\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]} + \frac{(\kappa-1)\cos\theta}{2}\arctan\left(\frac{\sin\theta}{r/a-\cos\theta}\right)$$
$$+\frac{\kappa\sin\theta}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)^2}-1\right) \tag{3.4.28}$$

$$\frac{u_\theta(r,\theta)}{P/2\mu\pi} = -\frac{\kappa+1}{4}\ln\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]\cos\theta+\frac{\kappa^2+1}{2(\kappa+1)}\ln(r/a)\cos\theta-\frac{1}{2(r/a)}$$
$$+\frac{2(r/a)-\left[1+(r/a)^2\right]\cos\theta}{2\left[1+(r/a)^2-2(r/a)\cos\theta\right]}-\frac{(\kappa-1)\sin\theta}{2}\arctan\left(\frac{\sin\theta}{r/a-\cos\theta}\right)$$
$$-\frac{\kappa\cos\theta}{2(\kappa+1)}\left(\frac{1}{(r/a)^2}-1\right) \tag{3.4.29}$$

จากสูตรข้างบนเห็นได้ว่าผลเฉลยหน่วยแรงจะให้ค่าเข้าใกล้ศูนย์ที่ระยะอนันต์ ดังเช่นใน รูปที่ 25ก. 25ข. และ 25ค. ซึ่งแสดงค่าของหน่วยแรงเฉือน $\sigma_{r\theta}$ ตามแนวแกน $\theta=0$ $\theta=\pi/2$ และ $\theta=\pi$ ส่วนการการกระจัดจะมีค่าเป็นค่าเอกฐานที่ระยะอนันต์และตำแหน่งที่แรงเดี่ยวกระทำ ดังรูปที่ 25ง. 25จ. และ 25ฉ. ซึ่งแสดงค่าของการกระจัด u_θ ตามแนวแกน $\theta=0$ $\theta=\pi/2$ และ $\theta=\pi$ ตามลำดับ ซึ่งไม่สอดคล้องกับหลักการของปัญหาโดเมนข้างนอก (exterior domain problem) ทั้ง ๆ ที่ผลเฉลยของหน่วยแรงที่ได้ก็ให้ค่าที่สอดคล้องกับความเป็นจริง นับเป็นความแปลกของปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) เช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 3.

และตัวอย่างนี้ก็ได้สนับสนุนความบริบูรณ์ของฟังก์ชัน ϕ ได้เป็นอย่างดี เช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 3.

3.5 ตัวอย่างที่ 5

คานช่วงเดียว(single span beam) ยาว $2a$ ลึก $2b$ หนา 1 หน่วย รับหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอ σ_0 ที่ขอบบนของคาน รองรับด้วยแรงปฏิกิริยาที่กระจายตัวสม่ำเสมอในระยะ $2d$ จากขอบคาน ดังรูปที่ 26.

ปัญหานี้จัดเป็นปัญหาระนาบทางความเค้น และเป็นปัญหาโดเมนข้างใน(interior domain problem) ดังนั้นชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่ใช้จะเป็นดังสมการ(2.2.21) แต่เลือกเฉพาะที่มีสมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta=\pi/2$ ซึ่งได้แก่

$$C\left\{r^2\ ,\ r^j\cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ r^{j+2}\cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\ \mid\ j=1,2,3,..\right\}$$

สำหรับฟังก์ชัน $r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ หรือ $r\sin\theta$ เป็นพจน์ของการกระจัดของวัตถุแข็งเกร็ง(rigid body displacement) ให้ค่าความเค้นเท่ากับศูนย์ ไม่จำเป็นต้องนำมาใช้ จึงตัดทิ้งไป จะได้ระบบผลเฉลยสำหรับปัญหาคือ

$$\phi=\sum_{j=2,3,..}^{N}A_j r^j\cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sum_{j=0,1,..}^{N}B_j r^{j+2}\cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{3.5.1}$$

เมื่อ A_j และ B_j คือ สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบคือ

$$r^i \cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i=2,3,\ldots,N \qquad , \qquad r^{i+2}\cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i=0,1,\ldots,N$$

ค่าความเค้นและการกระจัด ที่สืบเนื่องจากฟังก์ชันความเค้นของแอรีของแต่ละพจน์ในสมการ(3.5.1) เมื่อแสดงในระบบพิกัด (n,t) ได้รวบรวมไว้ในตารางที่ 2

เมื่อพิจารณาสมบัติสมมาตรของปัญหา ก็สามารถเขียนสมการของสภาพขอบออกมาได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
&\sigma_{nn}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = -\sigma_0 \;,\; \sigma_{nt}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \;,\; -\frac{\pi}{2}<\bar{\theta}<-\arctan\frac{b}{a}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right) = 0 \;,\; -\arctan\frac{b}{a}<\bar{\theta}<\arctan\frac{b}{a}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sigma_0 a}{2d} \;,\; \sigma_{nt}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;,\; \arctan\frac{b}{a}<\bar{\theta}<\arctan\frac{b}{a-2d}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;,\; \arctan\frac{b}{a-2d}<\bar{\theta}<\frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

โดยที่อาร์กิวเมนต์(argument)สองตัวแรกของหน่วยแรงคือ r กับ θ ที่ขอบของโดเมน ส่วนตัวที่สามคือ มุม α

สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลย และระบบทดสอบ สามารถเขียนได้โดยพิจารณาความสมมาตรของปัญหาดังนี้

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)u_n\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)u_t\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)\right]a\sec^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_0 u_{ni}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}-\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a-2d}}\left[\frac{\sigma_0 a}{2d}u_{ni}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

ถ้าใช้ดรรชนีบน 1 และ 2 ให้หมายถึงความเค้นและการกระจัดที่เกิดจากฟังก์ชัน $r^j \cos j\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ และ $r^{j+2} \cos j\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ ตามลำดับ ก็อาจจะเขียนสมการของความเค้นและการกระจัดในรูปสัญลักษณ์ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \sum_{j=2,3,..}^{N} A_j \sigma_{nnj}^1 + \sum_{j=0,1,..}^{N} B_j \sigma_{nnj}^2 \\
\sigma_{nt} &= \sum_{j=2,3,..}^{N} A_j \sigma_{ntj}^1 + \sum_{j=0,1,..}^{N} B_j \sigma_{ntj}^2
\end{aligned}
\tag{3.5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
u_n &= \sum_{j=2,3,..}^{N} A_j u_{nj}^1 + \sum_{j=0,1,..}^{N} B_j u_{nj}^2 \\
u_t &= \sum_{j=2,3,..}^{N} A_j u_{tj}^1 + \sum_{j=0,1,..}^{N} B_j u_{tj}^2
\end{aligned}
\tag{3.5.5}
$$

พิจารณาสมการ(3.5.1) จะเห็นได้ว่ามีสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าจำนวน $2N$ ตัว โดยแบ่งออกเป็น $N-1$ ตัว สำหรับ $A_j(A_2, A_3, ..., A_N)$ และ $N+1$ ตัว สำหรับ $B_j(B_0, B_1, ..., B_N)$

เมื่อทดสอบระบบผลเฉลยด้วยระบบทดสอบ $r^i \cos i\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right), i = 2,3,...,N$ โดยการแทนสมการ (3.5.5)ลงในสมการ(3.5.3) จะได้สมการงานผกผันจำนวน $N-1$ สมการ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2,3,..}^{N} \Bigg\{ & \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) u_{nj}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) u_{tj}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right)\right] b\csc^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \\
& + \int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) u_{nj}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) u_{tj}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right)\right] a\sec^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \\
& + \int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) u_{nj}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) u_{tj}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right)\right] b\csc^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \Bigg\} A_j
\end{aligned}
$$

$$+$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2,3,..}^{N} \Bigg\{ & \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) u_{nj}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right) u_{tj}^1\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{-\pi}{2}\right)\right] b\csc^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \\
& + \int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) u_{nj}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right) u_{tj}^1\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}}, \bar{\theta}; 0\right)\right] a\sec^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \\
& + \int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sigma_{nni}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) u_{nj}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_{nti}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right) u_{tj}^1\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}}, \bar{\theta}; \frac{\pi}{2}\right)\right] b\csc^2\bar{\theta}\, d\bar{\theta} \Bigg\} A_j
\end{aligned}
$$

$$= \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_0 u_{ni}^1\left(\frac{-b}{\sin\theta},\theta;\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\theta\,d\theta \quad -\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a-2d}}\left[\frac{\sigma_0 a}{2d}u_{ni}^1\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta}$$

$$,\quad i = 2,3,\ldots,N \qquad (3.5.6)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทดสอบระบบผลเฉลยด้วยระบบทดสอบ $r^{i+2}\cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), i=0,1,\ldots,N$ จะได้สมการงานผกผันจำนวน $N+1$ สมการ ดังนี้

$$\sum_{j=2,3,\ldots}^{N}\left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_{nj}^1\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_{tj}^1\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \right.$$
$$+\int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_{nj}^1\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_{tj}^1\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)\right]a\sec^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta}$$
$$\left.+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_{nj}^1\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_{tj}^1\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \right\}A_j$$

$$+$$

$$\sum_{j=0,1,\ldots}^{N}\left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_{nj}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_{tj}^2\left(\frac{-b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \right.$$
$$+\int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_{nj}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_{tj}^2\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)\right]a\sec^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta}$$
$$\left.+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_{nj}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_{tj}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \right\}B_j$$

$$= \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_0 u_{ni}^2\left(\frac{-b}{\sin\theta},\theta;\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\theta\,d\theta \quad -\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a-2d}}\left[\frac{\sigma_0 a}{2d}u_{ni}^2\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta}$$

$$,\quad i = 0,1,\ldots,N \qquad (3.5.7)$$

สูตรของความเค้นและการกระจัดในสมการข้างบนสามารถปรับใช้ได้จากตารางที่ 2. กล่าวคือ ให้แทนมุม θ และ มุม α ในสูตรด้วยมุม $\pi/2-\theta$ และ $\pi/2-\alpha$ ตามลำดับ และ เฉพาะหน่วยแรงเฉือนกับการกระจัดในแนวแกน t ให้เปลี่ยนเครื่องหมายด้วย เนื่องจากแนวแกน t จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับของเดิม จะได้ดังนี้

$$\sigma^1_{nnj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = -j\left(j-1\right)r^{j-2}\cos\left[\left(j-2\right)\overline{\theta}+2\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sigma^1_{ntj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = j\left(j-1\right)r^{j-2}\sin\left[\left(j-2\right)\overline{\theta}+2\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]$$
$$u^1_{nj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = -\frac{jr^{j-1}}{2\mu}\cos\left[\left(j-1\right)\overline{\theta}+\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right] \tag{3.5.8}$$
$$u^1_{tj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = \frac{jr^{j-1}}{2\mu}\sin\left[\left(j-1\right)\overline{\theta}+\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sigma^1_{nnj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = \left(j+1\right)r^{j}\left\{2\cos\left[j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]-j\cos\left[\left(j-2\right)\overline{\theta}+2\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$
$$\sigma^1_{ntj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = j\left(j+1\right)r^{j}\sin\left[\left(j-2\right)\overline{\theta}+2\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]$$
$$u^1_{nj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = \frac{r^{j+1}}{2\mu}\left\{\kappa\cos\left[\left(j+1\right)\overline{\theta}-\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]-\left(j+1\right)\cos\left[\left(j-1\right)\overline{\theta}+\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]\right\} \tag{3.5.9}$$
$$u^1_{tj}\left(\overline{r},\overline{\theta};\overline{\alpha}\right) = \frac{r^{j+1}}{2\mu}\left\{\kappa\sin\left[\left(j+1\right)\overline{\theta}-\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]+\left(j+1\right)\sin\left[\left(j-1\right)\overline{\theta}+\overline{\alpha}-j\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

เมื่อแทนค่า σ_{nnj} σ_{ntj} σ_{nni} σ_{nti} u_{nj} u_{tj} u_{ni} และ u_{ti} ข้างบนนี้ ลงในสมการ (3.5.6) และ (3.5.7) เป็นที่เรียบร้อยแล้วจะได้ว่าพจน์ซ้ายมือของสมการประกอบไปด้วยผลรวมเชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของผลเฉลยในรูปอนุกรม ในขณะที่พจน์ทางขวามือของสมการจะเป็นค่าที่ทราบแล้วทั้งสิ้น เมื่อทดสอบระบบผลเฉลยด้วยระบบทดสอบจนครบทุกระบบทดสอบแล้วก็จะได้ชุดของสมการเชิงเส้น $2N$ สมการ ที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนของสัมประสิทธิ์ $2N$ ตัวที่ไม่ทราบค่าพอดี จึงสามารถแก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ได้ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $b=a$ และ $d = 0.1a$ ก็จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของ A_i และ B_i ดังแสดงในตารางที่ 3.

จากตารางจะเห็นได้ว่า ผลเฉลยของฟังก์ชันความเค้นของแอรีเมื่อ $N=8$ $N=16$ และ $N=24$ มีค่าสัมประสิทธิ์ในพจน์ต้น ๆ ที่ใกล้เคียงกัน และพจน์ท้าย ๆ ของอนุกรมค่าสัมประสิทธิ์จะมีค่าน้อยจนเกือบเป็นศูนย์ โดยที่ผลเฉลยในรูปอนุกรมที่ใช้จำนวนพจน์มากกว่าจะมีค่าใกล้ศูนย์มากกว่า

จากผลเฉลยของฟังก์ชัน ϕ ที่ได้ สามารถนำไปหาค่าความเค้น และการกระจัดได้ ผลการวิเคราะห์แสดงได้ดังรูปที่ 28. โดยแสดงเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ซึ่งวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม STADD III โดยชิ้นส่วน(element)ที่ใช้เป็นชิ้นส่วนพันธ์ทาง(hybrid element)ที่สมมุติการกระจายของความเค้นแบบกำลังสอง (quadratic stress distribution) กับ ผลเฉลยแม่นตรง สำหรับการแบ่งชิ้นส่วนในระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ในปัญหานี้แสดงได้ดังรูปที่ 27. ผลการวิเคราะห์ในรูปที่ 28. แสดงให้เห็นว่า เมื่อใช้จำนวนพจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมมากขึ้นจะให้ผลเฉลยที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์หรือค่าที่แท้จริงมากขึ้น

สำหรับผลการวิเคราะห์ในตัวอย่างนี้ พบว่าอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยจะแตกต่างกันที่ตำแหน่งต่างกันในคาน สังเกตได้ว่าตามขอบของคาน ค่าความเค้นจะมีค่าที่ลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริงหรือผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ได้ช้ากว่าที่ตำแหน่งอื่น ๆ ของคาน ซึ่งแสดงได้อย่างชัดเจนสำหรับค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่ขอบล่างของคานในรูปที่ 28ค. เห็นได้ว่าการใช้เพียง 24 พจน์ผลเฉลยยังไม่ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง จำเป็นต้องใช้ประมาณ 60-80 พจน์ ดังรูปที่ 28จ. จึงจะให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง

3.6 ตัวอย่างที่ 6

ถ้าคานในตัวอย่างที่ 5. มีช่องเปิดอยู่ที่กึ่งกลางคานกว้าง $2e$ ลึก $2f$ ดังแสดงในรูปที่ 29. ก็จะกลายเป็นปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) ดังนั้นชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่ใช้จะเป็นดังสมการ(2.2.20) แต่จะเลือกเฉพาะพจน์ที่มีสมบัติสมมาตรที่สอดคล้องกับปัญหา และ ละพจน์การกระจัดของวัตถุแข็งเกร็งเสีย

ดังนั้นระบบผลเฉลยสำหรับปัญหาคือ

$$\begin{aligned}\phi = {} & A_1 \ln r + \sum_{j=2,3,\ldots}^{N} B_j r^j \cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \sum_{j=0,1,\ldots}^{N} C_j r^{j+2} \cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ & + \sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} D_j r^{-j} \cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \sum_{j=2,3,\ldots}^{N} E_j r^{-j+2} \cos j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

เมื่อ A_1 , B_j , C_j , D_j และ E_j คือ สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบคือ

$$\begin{array}{lll} \ln r & & \\ r^i \cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i = 2,3,\ldots,N & , & r^{i+2} \cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i = 0,1,\ldots,N \\ r^{-i} \cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i = 1,2,\ldots,N & , & r^{-i+2} \cos i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \mid i = 2,3,\ldots,N \end{array}$$

ค่าความเค้นและการกระจัด ที่สืบเนื่องจากฟังก์ชันความเค้นของแอรีของแต่ละพจน์ในสมการ(3.6.1) แสดงได้ดังตารางที่ 2 ซึ่งแสดงในระบบพิกัด (n,t) และมีทิศทางบนขอบนอกและขอบในของโดเมนดังแสดงในรูปที่ 30.

เมื่อพิจารณาสมบัติสมมาตรของปัญหา สมการสภาพขอบเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{nn}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = -\sigma_0 \;,\; \sigma_{nt}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \;,\; -\frac{\pi}{2}<\bar{\theta}<-\arctan\frac{b}{a}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right) = 0 \;,\; -\arctan\frac{b}{a}<\bar{\theta}<\arctan\frac{b}{a}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sigma_0 a}{2d} \;,\; \sigma_{nt}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;,\; \arctan\frac{b}{a}<\bar{\theta}<\arctan\frac{b}{a-2d}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;,\; \arctan\frac{b}{a-2d}<\bar{\theta}<\frac{\pi}{2} \qquad (3.6.2)\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;,\; -\frac{\pi}{2}<\bar{\theta}<-\arctan\frac{f}{e}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right) = 0 \;,\; -\arctan\frac{f}{e}<\bar{\theta}<\arctan\frac{f}{e}\\
&\sigma_{nn}\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = \sigma_{nt}\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \;,\; \arctan\frac{f}{e}<\bar{\theta}<\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลยและระบบทดสอบ i ใด ๆ สามารถเขียนโดยพิจารณาความสมมาตรของปัญหาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{-\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)u_n\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)u_t\left(\frac{a}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};0\right)\right]a\sec^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{f}{e}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{-f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]f\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{-\arctan\frac{f}{e}}^{\arctan\frac{f}{e}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right)u_n\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right)u_t\left(\frac{e}{\cos\bar{\theta}},\bar{\theta};\pi\right)\right]e\sec^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}\\
&+\int_{\arctan\frac{f}{e}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{f}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]f\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_0 u_{ni}\left(\frac{-b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{-\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}-\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{b}{a-2d}}\left[\frac{\sigma_0 a}{2d}u_{ni}\left(\frac{b}{\sin\bar{\theta}},\bar{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\bar{\theta}\,d\bar{\theta}
$$

(3.6.3)

พิจารณาสมการ(3.6.1) จะเห็นได้ว่ามีสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าจำนวน $4N$ ตัว โดยแบ่งออกเป็น 1 ตัวสำหรับ A_1 $N-1$ ตัว สำหรับ $B_j(B_2,B_3,...,B_N)$ $N+1$ ตัว สำหรับ $C_j(C_0,C_1,...,C_N)$ N ตัวสำหรับ $D_j(D_1,D_2,...,D_N)$ และ $N-1$ ตัว สำหรับ $E_j(E_2,E_3,...,E_N)$ ในขณะเดียวกันสมการของงานผกผัน (3.6.3) เมื่อเขียนสำหรับระบบทดสอบ $\ln r$; $\sin\theta/r$; $r^{\pm i}\cos i(\pi/2-\theta)$, $i=2,3,...,N$; r^2 ; $r^3\sin\theta$; $r^{\pm i+2}\cos i(\pi/2-\theta)$, $i=2,3,...,N$ ก็จะได้ชุดของสมการเชิงเส้น $4N$ สมการ ที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนของสัมประสิทธิ์ $4N$ ตัวที่ไม่ทราบค่าพอดี จึงสามารถแก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ได้ ตัวอย่างเช่นถ้ากำหนดให้อัตราส่วน $b/a=1$, $d/a=0.1$, $e/a=0.3$ และ $f/a=0.3$ และ ลองใช้ $N=8$ $N=16$ และ $N=24$ ก็จะได้ค่าของสัมประสิทธิ์ A_1 , B_j , C_j , D_j และ E_j ดังแสดงในตารางที่ 4. ซึ่งจะเห็นได้ว่า ตัวเลขที่ได้มีลักษณะที่คล้ายกับตัวอย่างที่ 5 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ในพจน์แรก ๆ ใกล้เคียงกัน และจะลดลงจนเกือบเป็นศูนย์ในพจน์ท้าย ๆ

ผลเฉลยของความเค้น และการกระจัด ที่ได้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ และค่าที่แท้จริง แสดงดังรูปที่ 32. โดยการแบ่งชิ้นส่วนสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นดังรูปที่ 31.

จากรูปที่ 32. สังเกตได้ว่า ผลเฉลย ณ ตำแหน่งที่ไม่ใช่ขอบ(boundary)ของโดเมน มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ผลเฉลยที่ขอบของโดเมนก็มีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริง ยกเว้นในบางตำแหน่งยังให้ผลเฉลยที่ไม่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงสักเท่าใดนัก ตำแหน่งดังกล่าวก็คือที่ช่องเปิดของคาน อันได้แก่ขอบบนของช่องเปิดและขอบขวาของช่องเปิด ดังรูปที่ 32ช. , 32ฌ. , 32ฎ. และ 32ฐ. ตามลำดับ ให้ผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนไม่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง ส่วนที่ขอบล่างของช่องเปิดดังรูปที่ 32ญ , 32ฏ ให้ผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่ใกล้เคียงความเป็นจริง เหตุที่เป็นเช่นนั้นเนื่องมาจากว่าที่มุมทั้ง 4 ของช่องเปิดมีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงอย่างกระทันหันจากหน่วยแรงค่าหนึ่งไปเป็นศูนย์ กล่าวคือที่บริเวณใกล้กับมุมของช่องเปิดมาก ๆ แต่ยังอยู่ในเนื้อคาน บริเวณนี้ยังมีทั้งหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือน แต่เมื่อเลยออกมาเพียงน้อยถึงขอบของช่องเปิด หน่วยแรงต่าง ๆ ต้องมีค่าเป็นศูนย์ในทันที เกิดเป็นความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรง ซึ่งแสดงได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 32ต. ถึง 32 บ. และ ตารางที่ 5. ซึ่งแสดงความเค้นหลัก(principal stress) ที่มุมของช่องเปิด

จากสมบัติของชุดฟังก์ชันที่นำมาวิเคราะห์ปัญหาเป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าที่ต่อเนื่องตลอดบนโดเมนของปัญหาจึงเป็นไปไม่ได้ที่จะให้ผลเฉลยที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง ชุดฟังก์ชันก็จะให้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเท่าที่จะทำให้ได้เท่านั้น กล่าวคือ ฟังชันก็ไม่สามารถปรับผลเฉลยของหน่วยแรงจากค่าหนึ่ง ๆ ให้เป็นศูนย์ได้ในทันที แต่จะค่อย ๆ ลดลง ทำให้บริเวณขอบของช่องเปิด ผลเฉลยของหน่วยแรงมีค่าแกว่ง ๆ ใกล้กับศูนย์ ปริมาณความผิดพลาดจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับว่าที่มุมของช่องเปิดมีหน่วยแรงมากเพียงใด ถ้ามีค่ามาก ชุดฟังก์ชันจะต้องปรับหน่วยแรงจากค่าที่มากนั้นให้ลดลงจนเป็นศูนย์ ความผิดพลาดก็จะมากไปด้วย ซึ่งเห็นได้ชัดเจนที่ขอบบนของช่อง(รูปที่ 32ต. และ 32ถ.) ส่วนที่ขอบล่างของช่องเปิด ผลเฉลยของหน่วยแรงมีความผิดพลาดน้อย เนื่องจากมุมของช่องเปิดที่ติดกับขอบล่างนี้ มีผลเฉลยของหน่วยแรงน้อย พิจารณารูปที่ 32ท. และ 32ธ. จะเห็นได้ชันเจน ส่วนที่ขอบด้านขวาของช่องเปิด ที่มุมด้านล่างหน่วยแรงในเนื้อคานมีค่าน้อย มุมด้านบนหน่วยแรงมีค่ามาก ผลเฉลยของหน่วยแรงที่ขอบด้านขวาที่ติดกับมุมล่างให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงศูนย์มากกว่าขอบที่ถัดไปทางด้านบน ดังรูปที่ 32น. และ 32บ.

ตามทฤษฎีแล้วการจะลดความผิดพลาดในลักษณะนี้ ทำได้ด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์ฟังก์ชันให้มากขึ้นความผิดพลาดก็จะน้อยลง จะเห็นได้อย่างชัดเจนสำหรับผลเฉลยของหน่วยแรงตั้งฉากที่ขอบล่างของคาน ซึ่งค่าของหน่วยแรงตั้งฉากมีลักษณะที่ไม่ต่อเนื่องเช่นเดียวกัน การจะให้ผลเฉลยที่ได้มีความผิดพลาดน้อยต้องใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันประมาณ 60 –80 พจน์ จึงจะให้ผลเฉลยผิดพลาดน้อยกว่าการใช้จำนวนพจน์ 8-24 พจน์ ดังรูปที่ 32จ. และรูปที่ 32ค. ตามลำดับ แต่ในทางปฏิบัติแล้วการเพิ่มจำนวนพจน์มาก ๆ จะมีความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเมื่อคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ด้วยเช่นกัน จึงไม่น่าจะเกิดประโยชน์มากนักในการทำเช่นนั้น เพราะนอกเหนือจากจุดของความไม่ต่อเนื่องดังกล่าวแล้ว ผลเฉลยที่ได้ให้ผลถูกต้องเพียงพอแล้ว

ตารางที่ 6. แสดงแรงลัพธ์ในแนวแกน y ที่แต่ละขอบของโดเมน ซึ่งได้จากการอินทิเกรต(integrate)หน่วยแรงในแนวแกน y จากผลเฉลยของหน่วยแรงที่ได้ เช่น ที่ขอบบนก็จะอินทิเกรตหน่วยแรงตั้งฉาก ขอบขวาก็จะอินทิเกรตหน่วยแรงเฉือน เป็นต้น พบว่าเมื่อรวมแรงลัพธ์ในแนวแกน y ของแต่ละด้านเข้าด้วยกันจะได้ค่าที่ใกล้เคียงกับศูนย์มาก แสดงว่าระบบอยู่ในสมดุล ดังนั้น ถึงแม้ว่าชุดฟังก์ชันจะให้ผลเฉลยของหน่วยแรงที่แต่ละด้านคลาดเคลื่อนไปบ้าง แต่ความคลาดเคลื่อนของด้านหนึ่งจะถูกชดเชยด้วยด้านอื่น ๆ ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนรอบ ๆ ขอบของปัญหามีค่าน้อยมาก ซึ่งเป็นเป็นไปตามทฤษฎีของระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์[1]นั่นเอง

รูปที่ 32ป. ถึง 32ภ. แสดงหน่วยแรงตามแนวที่ใกล้กับบริเวณขอบของช่องเปิด จากรูปแสดงให้เห็นได้ว่าผลเฉลยของหน่วยแรงที่ได้ให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ ไม่ได้มีปัญหาแต่อย่างใด ซึ่งจะเป็นยืนยันได้ดีว่าผลเฉลยที่ได้จากชุดฟังก์ชันนี้จะค่อนข้างมีความผิดพลาดก็เพียงบริเวณที่มีหน่วยแรงไม่ต่อเนื่องเท่านั้น ส่วนบริเวณอื่น ๆ ที่ไม่มีผลของความไม่ต่อเนื่องแล้ว ผลเฉลยที่ได้ก็จะไม่ผิดพลาดแต่อย่างใด

จากการวิเคราะห์ตัวอย่างนี้พอจะกล่าวได้ว่า อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยในบางตำแหน่งจะช้ากว่าตำแหน่งอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่มีความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรงอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยจะช้ากว่าตำแหน่งอื่น ๆ อย่างเห็นได้ชัด เนื่องด้วยวิธีการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้เป็นระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์ การจะพิจารณาว่าจำนวนพจน์ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์เพียงพอหรือยัง การตรวจสอบจะต้องดูที่ขอบของโดเมนเป็นหลัก แต่ให้พิจารณาเฉพาะขอบที่หน่วยแรงมีค่าต่อเนื่องเท่านั้น เมื่อชุดฟังก์ชันที่ใช้ให้ผลเฉลยที่ขอบของบริเวณเหล่านี้ถูกต้องแล้ว แสดงว่าชุดฟังก์ชันนั้นพอเพียงแก่ความต้องการในการนำไปวิเคราะห์หน่วยแรงต่าง ๆ บนโดเมนของปัญหาได้

3.7 ตัวอย่างที่ 7

ตัวอย่างนี้อาจใช้แทนปัญหาแผ่นยืดหยุ่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(rectangular elastic plate) กว้าง $2b$ หน่วย ยาว $2a$ หน่วย รับแรงดึง σ_0 ที่ปลายซ้ายและขวา มีช่องเปิดรูปวงกลมรัศมี e หน่วย สองช่อง ตามแนวแกน x โดยจุดศูนย์กลางของช่องเปิดอยู่ห่างจากกึ่งกลางของแผ่นยืดหยุ่น d หน่วย ดังรูปที่ 33.

ปัญหาในตัวอย่างนี้จัดเป็นปัญหาโดเมนวงแหวนหลายวง(multiple-ring domain problem) ชุดฟังก์ชันที่ใช้จะเป็นดังสมการ(2.2.23) โดยเลือกเอาเพียงชุดฟังก์ชันที่ให้สมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta = 0$ และ $\theta = \pi/2$ จะได้

$$C\left\{\begin{array}{ll} r^{j}\cos(j\theta) & \mid\ j=2,4,6,\ldots \\ r^{j+2}\cos(j\theta) & \mid\ j=0,2,4,6,\ldots \end{array}\right\}$$

$$+\ C\left\{\begin{array}{ll} \ln r_1 & \\ r_1^{-j}\cos(j\theta_1) & \mid\ j=1,2,\ldots \\ r_1^{-j+2}\cos(j\theta_1) & \mid\ j=2,3,\ldots \end{array}\right\} +\ C\left\{\begin{array}{ll} \ln r_2 & \\ r_2^{-j}\cos(j\theta_2) & \mid\ j=1,2,\ldots \\ r_2^{-j+2}\cos(j\theta_2) & \mid\ j=2,3,\ldots \end{array}\right\}$$

สำหรับชุดฟังก์ชันที่มีระบบพิกัดเชิงขั้ว (r_1,θ_1) และ (r_2,θ_2) แต่ละพจน์(ยกเว้นพจน์ $\ln r_1$ กับ $\ln r_2$) ยังให้เพียงความสมมาตรรอบแกน $\theta = 0$ เท่านั้น แต่ถ้านำแต่ละพจน์ที่มีลักษณะคล้ายกันมาจับคู่กันเช่น พจน์ $r_1^{-j}\cos(j\theta_1)$ คู่กับ $r_2^{-j}\cos(j\theta_2)$ ก็จะให้สมบัติสมมาตรรอบแกน $\theta = \pi/2$ ได้ ดังนั้น ชุดฟังก์ชันสำหรับระบบผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}\phi = \quad & A_1(\ln r_1 + \ln r_2) \\ & + \sum_{j=2,4,6,\ldots}^{N} B_j r^{j}\cos(j\theta) + \sum_{j=0,2,4,\ldots}^{N} C_j r^{j+2}\cos(j\theta) \\ & + \sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} D_j\left[r_1^{-j}\cos(j\theta_1) + r_2^{-j}\cos(j\theta_2)\right] + \sum_{j=2,3,4,\ldots}^{N} E_j\left[r_1^{-j+2}\cos(j\theta_1) + r_2^{-j+2}\cos(j\theta_2)\right] \quad (3.7.1)\end{aligned}$$

เมื่อ A_1, B_j ,C_j ,D_j และ E_j คือ สัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าในอนุกรม

ส่วนระบบทดสอบคือ

$$\ln r_1 + \ln r_2$$

$$r^{i}\cos(i\theta) \quad \mid\ i=2,4,6,\ldots \qquad\qquad r^{i+2}\cos(i\theta) \quad \mid\ i=0,2,4,\ldots$$

$$r_1^{-i}\cos(i\theta_1) + r_2^{-i}\cos(i\theta_2) \ \mid\ i=1,2,\ldots \qquad r_1^{-i+2}\cos(i\theta_1) + r_2^{-i+2}\cos(i\theta_2) \ \mid\ i=2,3,\ldots$$

เงื่อนไขสภาพขอบโดยพิจารณาถึงความสมมาตรเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{nn}\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right) &= \sigma_0 \quad , \quad \sigma_{nt}\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right) = 0 \quad , \quad 0 \le \overline{\theta} \le \arctan\frac{b}{a} \\
\sigma_{nn}\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right) &= \sigma_{nt}\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad , \quad \arctan\frac{b}{a} \le \overline{\theta} \le \frac{\pi}{2} \\
\sigma_{r_1r_1}\left(e,\overline{\theta}_1\right) &= \sigma_{r_1\theta_1}\left(e,\overline{\theta}_1\right) = 0 \quad , \quad 0 \le \overline{\theta} \le \pi
\end{aligned}
\tag{3.7.2}
$$

จากเงื่อนไขที่สภาพขอบ จะได้สมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลยและระบบทดสอบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_n\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)u_t\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)\right]a\sec^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \\
+ &\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sigma_{nni}\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_n\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{nti}\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)u_t\left(\frac{b}{\sin\overline{\theta}},\overline{\theta};\frac{\pi}{2}\right)\right]b\csc^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta} \\
- &\int_0^{\pi}\left[\sigma_{r_1r_1i}\left(e,\overline{\theta}_1\right)u_{r_1}\left(e,\overline{\theta}_1\right)+\sigma_{r_1\theta_1i}\left(e,\overline{\theta}_1\right)u_{\theta_1}\left(e,\overline{\theta}_1\right)\right]e\,d\overline{\theta}_1 \\
= &\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\left[\sigma_0 u_{ni}\left(\frac{a}{\cos\overline{\theta}},\overline{\theta};0\right)\right]a\sec^2\overline{\theta}\,d\overline{\theta}
\end{aligned}
\tag{3.7.3}
$$

จากสมการ(3.7.1)จะเห็นได้ว่าฟังก์ชัน ϕ มีระบบพิกัดเป็นทั้ง (r,θ) (r_1,θ_1) และ (r_2,θ_2) แต่ในสมการงานผกผัน หน่วยแรงจะอยู่ในระบบพิกัด (n,t) และ (r_1,θ_1) จึงต้องมีการแปลงความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดทั้งสามนี้เสียก่อน จึงจะแทนค่าลงในสมการงานผกผันได้ โดยความสัมพันธ์เป็นดังนี้

แปลงจากระบบพิกัด (r_1,θ_1) ไปยัง (r,θ)

$$
\begin{aligned}
u_r &= u_{r_1}\cos(\theta_1-\theta) - u_{\theta_1}\sin(\theta_1-\theta) \\
u_\theta &= u_{r_1}\sin(\theta_1-\theta) + u_{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta) \\
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{r_1r_1}+\sigma_{\theta_1\theta_1}}{2}+\frac{\sigma_{r_1r_1}-\sigma_{\theta_1\theta_1}}{2}\cos(2\theta_1-2\theta)-\sigma_{r_1\theta_1}\sin(2\theta_1-2\theta) \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{r_1r_1}+\sigma_{\theta_1\theta_1}}{2}-\frac{\sigma_{r_1r_1}-\sigma_{\theta_1\theta_1}}{2}\cos(2\theta_1-2\theta)+\sigma_{r_1\theta_1}\sin(2\theta_1-2\theta) \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{r_1\theta_1}\cos(2\theta_1-2\theta)+\frac{\sigma_{r_1r_1}-\sigma_{\theta_1\theta_1}}{2}\sin(2\theta_1-2\theta)
\end{aligned}
\tag{3.7.4}
$$

แปลงจากระบบพิกัด (r_2,θ_2) ไปยัง (r,θ)

$$
\begin{aligned}
u_r &= -u_{r_2}\cos(\theta_2+\theta) + u_{\theta_2}\sin(\theta_2+\theta)\\
u_\theta &= u_{r_2}\sin(\theta_2+\theta) + u_{\theta_2}\cos(\theta_2+\theta)\\
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{r_2r_2}+\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}+\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\cos(2\theta_2+2\theta)-\sigma_{r_2\theta_2}\sin(2\theta_2+2\theta) \qquad (3.7.5)\\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{r_2r_2}+\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}-\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\cos(2\theta_2+2\theta)+\sigma_{r_2\theta_2}\sin(2\theta_2+2\theta)\\
\sigma_{r\theta} &= -\sigma_{r_2\theta_2}\cos(2\theta_2+2\theta)-\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\sin(2\theta_2+2\theta)
\end{aligned}
$$

แปลงจากระบบพิกัด (r_2,θ_2) ไปยัง (r_1,θ_1)

$$
\begin{aligned}
u_{r_1} &= -u_{r_2}\cos(\theta_2+\theta_1) + u_{\theta_2}\sin(\theta_2+\theta_1)\\
u_{\theta_1} &= u_{r_2}\sin(\theta_2+\theta_1) + u_{\theta_2}\cos(\theta_2+\theta_1)\\
\sigma_{r_1r_1} &= \frac{\sigma_{r_2r_2}+\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}+\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\cos(2\theta_2+2\theta_1)-\sigma_{r_2\theta_2}\sin(2\theta_2+2\theta_1) \qquad (3.7.6)\\
\sigma_{\theta_1\theta_1} &= \frac{\sigma_{r_2r_2}+\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}-\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\cos(2\theta_2+2\theta_1)+\sigma_{r_2\theta_2}\sin(2\theta_2+2\theta_1)\\
\sigma_{r_1\theta_1} &= -\sigma_{r_2\theta_2}\cos(2\theta_2+2\theta_1)-\frac{\sigma_{r_2r_2}-\sigma_{\theta_2\theta_2}}{2}\sin(2\theta_2+2\theta_1)
\end{aligned}
$$

ส่วนการแปลงจากระบบพิกัด (r,θ) ไปยัง (r_1,θ_1) ก็อาจใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(3.7.4) โดยให้แทนความสัมพันธ์กลับกัน และพจน์ที่มีฟังก์ชันไซน์ก็ให้เปลี่ยนเครื่องหมายเสีย เมื่อสามารถแปลงความสัมพันธ์จากระบบพิกัดต่าง ๆ ให้อยู่ในระบบพิกัด (r,θ) ก็สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบพิกัด (n,t) โดยอาศัยความสัมพันธ์ในสมการ (2.3.1) และ (2.3.2)

เมื่อสามารถแปลงให้ค่าต่าง ๆ ให้อยู่ในระบบพิกัด (n,t) และ (r_1,θ_1) ก็สามารถที่จะแทนลงในสมการงานผกผัน และเมื่อทดสอบระบบผลเฉลยด้วยระบบทดสอบจนครบ สมการงานผกผันก็จะให้ชุดของสมการเชิงเส้นจำนวน $3N+1$ สมการ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $3N+1$ ตัว พอดี สามารถแก้สมการหาผลเฉลยของค่าสัมประสิทธิ์เหล่านั้นได้ เช่นถ้ากำหนดให้ $a/b=2$, $d/b=1$ และ $e/b=0.5$ จะได้ผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า A_1, B_j ,C_j ,D_j และ E_j ดังตารางที่ 7. โดยวิเคราะห์ผลเฉลยเมื่อ $N=12$ $N=16$ และ $N=20$

จากผลการวิเคราะห์ก็พบว่าผลเฉลยของสัมประสิทธิ์มีค่าที่ดี กล่าวคือ มีค่าใกล้เคียงกันในพจน์ต้น ๆ และมีการลู่เข้าของผลเฉลยอย่างเห็นได้ชัด ผลเฉลยของหน่วยแรงต่าง ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 34. เมื่อพิจารณาผลเฉลยของหน่วยแรงที่ขอบของโดเมน(รูปที่ 34ก. 34ข. 34ค. 34ง. 34จ. และ 34ฉ.)ก็จะเห็นได้ว่าหน่วยแรงที่ได้สอดคล้องกับสภาพขอบแสดงว่าผลเฉลยถูกต้อง พิจารณารูปที่ 34ช. เห็นได้ว่าหน่วยแรงดึง σ_{xx} ตามแนวตัดผ่านกึ่งกลางช่องเปิดที่ตัดกับขอบของแผ่นยืดหยุ่นมีค่าประมาณ 3 เท่าของหน่วยแรงดึงภายนอก σ_0 แต่ที่กึ่งกลางของแผ่นพบว่าหน่วยแรงดึง σ_{xx} มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ รูปที่ 34ฌ. เห็นได้ว่าหน่วยแรงดึง σ_{xx} ตามแนวตัดผ่านกึ่งกลางช่องเปิดที่ตัดกับขอบของช่องเปิดมีค่าประมาณ 4 เท่าของหน่วยแรงดึงภายนอก σ_0 แต่ค่าเหล่านี้สามารถแปรเปลี่ยนได้ตามอัตราส่วนระหว่างความยาวกับความกว้างของแผ่นยืดหยุ่น ตำแหน่งและขนาดของช่องเปิดด้วย

ถ้าช่องเปิดในแผ่นยืดหยุ่นมีขนาดเล็กมาก ๆ ปัญหานี้จะคล้ายคลึงกับปัญหาของแผ่นยืดหยุ่น(elastic plate)ที่มีพื้นที่อนันต์ มีรูเจาะรูปวงกลมอยู่หนึ่งรู รับแรงดึงตามแนวแกนที่ระยะอนันต์ ดังรูปที่ 35. ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรง[6] คือ

$$\phi=\frac{\sigma_0}{4}\left(r^2-r^2\cos(2\theta)-2a^2\ln r-\frac{a^4}{r^2}\cos(2\theta)+2a^2\cos(2\theta)\right) \tag{3.7.7}$$

และสำหรับตัวอย่างนี้เมื่อกำหนดให้อัตราส่วนอื่น ๆ คงเดิมแต่ให้ช่องเปิดมีขนาดเล็กลง กล่าวคือ กำหนดให้ $e/b=0.05$ จะได้ว่าหน่วยแรงดึง σ_{xx} ตามแนวตัดผ่านแกน $x=d$ มีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่แผ่นยืดหยุ่นมีพื้นที่อนันต์เป็นอย่างมากดังรูปที่ 36ก. ส่วนหน่วยแรงดึง σ_{xx} ตามแนวกึ่งกลางแผ่นยืดหยุ่นมีค่าที่ใกล้เคียงกับหน่วยแรงดึงภายนอก ซึ่งนับว่าถูกต้องเนื่องจากช่องเปิดมีขนาดเล็กมาก ผลเฉลยของหน่วยแรงดึงตรงนี้ก็จะใกล้เคียงกับกรณีที่ไม่มีช่องเปิดนั่นเอง ดังรูปที่ 36ข.

เมื่อแปรค่า e/b จาก 0.1 ถึง 0.6 จะได้หน่วยแรงดึง σ_{xx} ตามแนวที่ตัดผ่านกึ่งกลางช่องเปิดกับตัดผ่านกึ่งกลางของแผ่นยืดหยุ่น ดังรูปที่ 37. จะเห็นได้ว่าเมื่อช่องมีขนาดใหญ่ขึ้นหน่วยแรงดังกล่าวมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย ณ ตำแหน่งที่ตัดผ่านขอบช่องเปิด และตำแหน่งที่แนวตัดผ่านกึ่งกลางตัดกับขอบแผ่นยืดหยุ่น ส่วนที่บริเวณกึ่งกลางแผ่นยืดหยุ่นหน่วยแรงดังกล่าวกลับมีค่าน้อยลง