บทที่ 2

การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

2.1 สมการควบคุม(Governing Equations)

สำหรับปัญหาระนาบ(plane problem)ของวัสดุเนื้อเดียว ที่มีกลสมบัติแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นเหมือนกันทุกทิศทาง(homogeneous isotropic linear elastic material)นั้นเมื่อสร้างสูตร(formulate) โดยใช้ความเค้นเป็นตัวไม่รู้ค่ามูลฐาน(stress as basic unknown) ก็จะถูกควบคุมด้วยความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในระบบพิกัดคาร์ทีเชียน(Cartesian co-ordinate system) (x, y) ดังต่อไปนี้ [6]

สมการสมดุล(equilibrium equations):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+X &= 0\\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+Y &= 0\end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

โดยที่ σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy} X และ Y หมายถึง ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y ความเค้นเฉือน แรงตัว(body force)ในแนวแกน x และ แรงตัว(body force)ในแนวแกน y ตามลำดับ ดังรูปที่ 1. และ 2.

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด(stress-strain relation):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{xx}-\frac{3-\kappa}{4}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right]\\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{yy}-\frac{3-\kappa}{4}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right]\\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}\end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

โดยที่ ε_{xx} ε_{yy} ε_{xy} และ μ หมายถึง ความเครียดในแนวแกน x ความเครียดในแนวแกน y ความเครียดเฉือน และมอดุลัสแข็งเกร็ง(modulus of rigidity) ตามลำดับ โดยทิศทางที่เป็นบวกของความเครียดแสดงดังรูปที่ 2ข. ส่วน κ จะ

มีค่าเป็น $3-4\nu$ สำหรับปัญหาระนาบทางความเครียด (plane strain problem) หรือ $(3-\nu)/(1+\nu)$ สำหรับปัญหาระนาบทางความเค้น(plane stress problem) โดยที่ ν คือ อัตราส่วนของปัวส์ซอง(Poisson's ratio)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด(strain-displacement relation):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.1.3}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

โดยที่ u และ v หมายถึง การกระจัดในแนวแกน x และ การกระจัดในแนวแกน y ตามลำดับ

สมการของความสอดคล้อง(compatibility equation):

สมการของความสอดคล้องในพจน์ของความเครียดคือ

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1.4}$$

แต่ถ้าแทนค่าความเครียดที่อยู่ในรูปของความเค้นจากสมการ(2.1.2) ลงไปก็จะได้สมการของความสอดคล้องในพจน์ของความเค้นเป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{(3-\kappa)}{4}\nabla^2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right) = 0 \tag{2.1.5}$$

โดยที่ ∇^2 หมายถึง ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator) มีสูตรเป็นดังนี้

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.1.6}$$

สมการ(2.1.5)ยังสามารถเขียนให้กระชับขึ้นไปอีก ด้วยการขจัดพจน์ σ_{xy} โดยใช้สมการสมดุล(2.1.1) ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2.1.7}$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ(2.1.5) จะได้

$$\nabla^2\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = -\frac{4}{1+\kappa}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2.1.8}$$

การสร้างสูตร(formulate) ในแบบนี้ ผลเฉลย(solution)ของความเค้นซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่ามูลฐานจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล(2.1.1) และสมการของความสอดคล้อง(2.1.8) ส่วนความเครียดและการกระจัดก็สามารถหาได้จากสมการ(2.1.2) และ (2.1.3) ตามลำดับ

ในปี ค.ศ.1862 แอรี(Airy) [6] ได้เสนอว่าสำหรับระบบที่มีแรงตัวซึ่งอนุรักษ์ไว้(conservative body force) กล่าวคือ X และ Y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์(derivative) ของฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันศักย์(potential function) , V ดังนี้

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{2.1.9}$$

สมการของความเค้นดังข้างล่างนี้ ก็จะสอดคล้องกับสมการสมดุล(2.1.1) เสมอ

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V \tag{2.1.10}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

โดยที่ ϕ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีความต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ตามสูตรข้างบนได้

และเมื่อแทนสมการ(2.1.9) และ (2.1.10) ลงไปในสมการของความสอดคล้อง(2.1.8) ก็จะได้สมการควบคุม (governing equation)ในพจน์ของฟังก์ชัน ϕ

$$\nabla^4\phi = -2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\nabla^2 V \tag{2.1.11}$$

เมื่อ ∇^4 คือ ตัวดำเนินการไบฮาร์มอนิก(bi-harmonic operator) เทียบเท่ากับการใช้ตัวดำเนินการฮาร์มอนิกสองครั้ง หรือ $\nabla^2\nabla^2$ นั่นเอง

โดยทั่วไปแล้ว แรงตัว(body force) ถ้าจะมีอยู่บ้าง ในปัญหาสถิตก็คือแรงโน้มถ่วง(gravity force) นั่นเอง ซึ่งมักมีค่าคงที่ ทำให้ฟังก์ชันศักย์เป็นได้อย่างมากเพียงฟังก์ชันเชิงเส้น(linear function) ของ x กับ y ดังนั้น $\nabla^2 V$ จึงมีค่าเป็นศูนย์ และทำให้สมการข้างต้นลดรูปลงเหลือเพียง

$$\nabla^4\phi = 0 \tag{2.1.12}$$

ผลเฉลยของ ϕ ที่สอดคล้องกับสมการควบคุมข้างต้นมีชื่อเรียกว่าฟังก์ชันความเค้นของแอรี(Airy's stress function)

โดยสรุปแล้วการหาผลเฉลยโดยใช้ความเค้นเป็นตัวไม่รู้ค่ามูลฐาน ประกอบด้วยการแก้สมการของความสอดคล้อง (2.1.11) หรือ (2.1.12) แล้วแต่กรณี แล้วนำฟังก์ชัน ϕ ที่ได้ไปคำนวณหาความเค้น ความเครียด และการกระจัดโดยใช้สมการ (2.1.10) (2.1.2) และ (2.1.3) ตามลำดับ แต่ทั้งนี้ผลเฉลยที่ได้จะต้องสอดคล้องกับสภาพบังคับที่ขอบ(prescribed boundary condition)ของปัญหาด้วย ซึ่งนับเป็นภาระที่ยุ่งยากที่สุดของขบวนการหาผลเฉลยทั้งหมด

เมื่อพิจารณาปัญหาระนาบโดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว(polar co-ordinate system) ความเค้น และ แรงตัว(body force) ที่กระทำต่อชิ้นส่วนน้อยยิ่ง ก็อาจแสดงได้ด้วยรูปที่ 3. มีสมการสมดุลดังนี้[6]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+B_r &= 0\\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}+B_\theta &= 0\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

เมื่อ σ_{rr} $\sigma_{\theta\theta}$ $\sigma_{r\theta}$ B_r และ B_θ หมายถึง ความเค้นตั้งฉากในแนวรัศมี ความเค้นตั้งฉากในแนวที่ตั้งฉากกับรัศมี ความเค้นเฉือน แรงตัว(body force)ในแนวรัศมี และ แรงตัว(body force)ในแนวตั้งฉากกับรัศมี ตามลำดับ ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้น แสดงได้ดังรูปที่ 4ก.

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ความเครียดกับการกระจัด แรงตัว(body force) กับฟังก์ชันศักย์ความเค้นกับฟังก์ชันความเค้นของแอรี รวมทั้งสมการของความสอดคล้องก็อาจเขียนได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด(stress-strain relation):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{rr} - \frac{3-\kappa}{4}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{\theta\theta} - \frac{3-\kappa}{4}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right] \tag{2.1.14}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu}$$

โดยที่ ε_{rr} $\varepsilon_{\theta\theta}$ $\varepsilon_{r\theta}$ และ μ หมายถึง ความเครียดในแนวรัศมี ความเครียดในแนวตั้งฉากกับรัศมี ความเครียดเฉือน และ มอดุลัสแข็งเกร็ง(modulus of rigidity) ตามลำดับ โดยทิศทางที่เป็นบวกของความเครียดแสดงดังรูปที่ 4ข. ส่วน κ จะมีความหมายเช่นเดียวกันกับที่ได้นิยามไว้ในสมการ(2.1.2)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด(strain-displacement relation):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \tag{2.1.15}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

โดยที่ u_r และ u_θ หมายถึง การกระจัดในแนวรัศมี และการกระจัดในแนวตั้งฉากกับรัศมี ตามลำดับ

ความสัมพันธ์ระหว่าง แรงตัวกับฟังก์ชันศักย์ (body force-potential function relation):

$$B_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{2.1.16}$$

โดยที่ V คือ ฟังก์ชันศักย์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับฟังก์ชันความเค้นของแอรี(stress-ϕ relation):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + V$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + V \tag{2.1.17}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

โดยที่ ϕ คือ ฟังก์ชันความเค้นของแอรีในระบบพิกัดเชิงขั้ว

สมการของความสอดคล้อง(compatibility equation):

$$\nabla^4\phi = -2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\nabla^2 V \tag{2.1.18}$$

โดยที่ ∇^4 คือ ตัวดำเนินการไบฮาร์มอนิกในระบบพิกัดเชิงขั้ว เทียบเท่ากับการใช้ตัวดำเนินการฮาร์มอนิกในระบบพิกัดเชิงขั้วสองครั้ง หรือ $\nabla^2\nabla^2$ โดย ∇^2 ในระบบพิกัดเชิงขั้วมีสูตรเป็นดังนี้

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{2.1.19}$$

ดังที่ได้กล่าวข้างต้นแล้วว่า แรงตัว(body force)ในปัญหาสถิตซึ่งเป็นแรงโน้มถ่วง(gravity force) ทำให้ฟังก์ชันศักย์เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x กับ y หรือ $r\cos\theta$ กับ $r\sin\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วนั่นเอง ดังรูปที่ 5. ทำให้ $\nabla^2 V$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่าเป็นศูนย์เช่นเดียวกัน สมการของความสอดคล้อง(2.1.18)จึงลดรูปลงเหลือเพียง

$$\nabla^4\phi = 0 \tag{2.1.20}$$

ค่าต่าง ๆ ที่เขียนในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและระบบพิกัดเชิงขั้ว สามารถแปลง(transform) ไปและกลับ ได้ด้วยสูตรความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้[6]

$$
\begin{aligned}
u &= u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \\
v &= u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta \\
u_r &= u\cos\theta + v\sin\theta \\
u_\theta &= -u\sin\theta + v\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.1.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos(2\theta) - \sigma_{r\theta}\sin(2\theta) \\
\sigma_{yy} &= \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos(2\theta) + \sigma_{r\theta}\sin(2\theta) \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{r\theta}\cos(2\theta) + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\sin(2\theta) \\
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) + \sigma_{xy}\sin(2\theta) \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) - \sigma_{xy}\sin(2\theta) \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{xy}\cos(2\theta) - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin(2\theta)
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

$$
\begin{aligned}
X &= B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta \\
Y &= B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta \\
B_r &= X\cos\theta + Y\sin\theta \\
B_\theta &= -X\sin\theta + Y\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.1.23}
$$

การสร้างสูตร(formulate)สำหรับปัญหาระนาบโดยใช้ทั้งระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและระบบพิกัดเชิงขั้ว ทำให้สามารถเลือกใช้ระบบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละปัญหา และยังสามารถแปลงไปมาระหว่างสองระบบได้ตามต้องการ

2.2 ผลเฉลยของสมการควบคุมในรูปของชุดฟังก์ชันที่บริบูรณ์

สำหรับผลเฉลย(solution)ของสมการควบคุม ซึ่งเป็นฟังก์ชันไบฮาร์มอนิก(bi-harmonic function)นี้ อาจกล่าวได้ว่ามีอยู่มากมายนับไม่ถ้วน ซึ่งจะเห็นได้จากทฤษฎีของตัวแปรเชิงซ้อน(theory of complex variables)[7] ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่า ส่วนจริง(real part) และส่วนจินตภาพ(imaginary part)ของ ฟังก์ชันวิเคราะห์(analytic function)ใด ๆ จะมีสมบัติเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก ซึ่งโดยตัวของมันเองก็จะมีสมบัติเป็นฟังก์ชันไบฮาร์มอนิกด้วย และแม้เมื่อคูณด้วย x หรือ y หรือ $r^2 = x^2 + y^2$ ผลคูณที่ได้ก็จะยังคงเป็นฟังก์ชันไบฮาร์มอนิก ฉะนั้นแล้วในงานวิจัยนี้จึงจะสนใจเฉพาะผลเฉลยในรูปของอนุกรมของฟังก์ชันที่พิจารณาแล้วว่าน่าจะมีความบริบูรณ์เพียงพอ กล่าวคือ เป็นชุดของฟังก์ชันที่เมื่อนำมาผสมกันเชิงเส้น(linearly combine)แล้วสามารถแทนฟังก์ชันอื่น ๆ ได้หลากหลายรูปแบบภายในโดเมนของปัญหา ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้พบว่า ถ้าใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วแล้วจะทำให้เห็นแนวทางในการเลือกผลเฉลยได้ง่ายขึ้น ดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันที่แสดงในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งในระบบนี้ที่ตำแหน่งเดียวกันบนระนาบสามารถแสดงได้ด้วยพิกัด (r,θ) หรือ $(r,\theta - 2\pi)$ พิกัดทั้งสองแสดงถึงตำแหน่งเดียวกันในระบบ ดังนั้นฟังก์ชันที่ใช้ได้จึงต้องให้ค่าเดียวเสมอ ไม่ว่าจะมีอาร์กิวเมนต์(argument)เป็น θ หรือ $\theta - 2\pi$ ก็ตาม ฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นนี้เรียกว่าฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยว(single-valued function)

ฟังก์ชันความเค้นของแอรีสำหรับปัญหาระนาบอาจเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยว หรือไม่เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยวก็ได้ แต่ทั้งนี้จะต้องทำให้ ค่าความเค้น ความเครียด และการกระจัด ที่มีค่าที่สืบเนื่องมาจากฟังก์ชันความเค้นของแอรีเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยว ฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยวบางฟังก์ชันอาจให้ค่าความเค้น ความเครียด และการกระจัดเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยวได้ แต่ไม่เสมอไป และฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่มีสมบัติเชิงเดี่ยวบางฟังก์ชันอาจให้ค่าการกระจัดที่ไม่เป็นค่าเชิงเดี่ยวอีกด้วยดังจะได้กล่าวต่อไป ดังนั้นการนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาจะต้องพิจารณาสิ่งเหล่านี้ด้วย

โดยทั่วไป ฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่มีค่าเชิงเดี่ยวจะให้ค่าค่าความเค้น ความเครียด และการกระจัดมีค่าเชิงเดี่ยว ดังนั้น จึงสมมุติให้ฟังก์ชันความเค้นของแอรีอยู่ในรูปการคูณกันของฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร r เพียงอย่างเดียว และ ฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร θ เพียงอย่างเดียว[8] ดังนี้

$$\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta) \tag{2.2.1}$$

เมื่อ $f(r)$ คือฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร r เพียงอย่างเดียว และ $g(\theta)$ คือฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร θ เพียงอย่างเดียว

เพื่อที่จะทำให้ฟังก์ชันความเค้นของแอรีเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเชิงเดี่ยวแล้ว $g(\theta)$ ควรจะอยู่ในรูปของ $e^{in\theta}$ โดยที่ i หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$ และ n เป็นจำนวนเต็ม เมื่อกำหนดให้อยู่ในรูปนี้แล้วจะทำให้ $g(\theta)$ มีค่าเท่ากับ $g(\theta-2\pi)$ และส่งผลให้ ϕ เป็นเช่นนั้นเหมือนกัน เมื่อเป็นเช่นนี้ทำให้ฟังก์ชันความเค้นของแอรีเป็นดังนี้

$$\phi(r,\theta) \quad = \quad f(r)e^{in\theta} \tag{2.2.2}$$

ซึ่งต้องสอดคล้องกับสมการควบคุม เมื่อแทนลงในสมการควบคุม(2.1.20) จะได้

$$\left(f^{iv}+\frac{2}{r}f'''-\frac{2n^2+1}{r^2}f''+\frac{2n^2+1}{r^3}f'+\frac{n^2(n^2-4)}{r^4}f\right)e^{in\theta} \quad = \quad 0 \tag{2.2.3}$$

สมการ(2.2.3) จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ก็ต่อเมื่อ

$$f^{iv}+\frac{2}{r}f'''-\frac{2n^2+1}{r^2}f''+\frac{2n^2+1}{r^3}f'+\frac{n^2(n^2-4)}{r^4}f \quad = \quad 0 \tag{2.2.4}$$

ซึ่งเป็นสมการแบบออยเลอร์-โคชี[7](Euler-Cauchy equation) ผลเฉลยจะอยู่ในรูป $f(r)=r^m$ เมื่อแทนลงในสมการ(2.2.4) จะได้

$$(m-n)(m+n)(m-n-2)(m+n-2)r^{m-4} \quad = \quad 0 \tag{2.2.5}$$

สมการ(2.2.5) จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ r ก็ต่อเมื่อ

$$(m-n)(m+n)(m-n-2)(m+n-2) \quad = \quad 0 \tag{2.2.6}$$

ซึ่งเป็นสมการลักษณะเฉพาะ(characteristic equation) นั่นเอง จากสมการ (2.2.6) จะได้ตัวแปร m ในรูปตัวแปร n คือ

$$m \;=\; n, -n, n+2, -n+2 \tag{2.2.7}$$

สังเกตได้ว่ากรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือลบจะให้ค่าของ m ที่เหมือนกัน ดังนั้นจึงคิดกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น เริ่มจาก 0,1,2,...

เมื่อ $n=0$ จะได้ว่า $m \;=\; 0,0,2,2$

สำหรับ $m=0,0$ จะเห็นได้ว่ารากสมการซ้ำกัน 0 ตัวแรก จะให้ผลเฉลยในรูปแบบ $r^m=r^0=1$ ส่วน 0 ตัวที่สองหาจากวิธีการแปรผันพารามิเตอร์(variation of parameter)[7] ได้เป็น $\ln r$ คูณกับผลเฉลยตัวแรกเท่ากับ $\ln r$ ในทำนองเดียวกันสำหรับ $m=2,2$ ผลเฉลยทั้งสองคือ r^2 และ $r^2\ln r$ จะได้ว่า

$$f(r) = C\{1, \ln r, r^2, r^2 \ln r\} \qquad (2.2.8)$$

โดยกำหนดให้สัญลักษณ์ $C\{.....\}$ หมายถึง ผลรวมเชิงเส้น(linear combination) ของฟังก์ชันที่อยู่ภายในวงเล็บปีกกา

ดังนั้น

$$\phi = f(r)e^0 = C\{1, \ln r, r^2, r^2 \ln r\} \qquad (2.2.9)$$

เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า $m = 1, 1, -1, 3$ และ

$$f(r) = C\{r, r\ln r, 1/r, r^3\} \qquad (2.2.10)$$

ดังนั้น

$$\phi = C\{(r, r\ln r, 1/r, r^3)(\cos\theta, \sin\theta)\} \qquad (2.2.11)$$

เมื่อ $n = j$, $j = 2,3,\ldots$ จะได้ว่า $m = j, -j, j+2, -j+2$ และ

$$f(r) = C\{r^j, r^{-j}, r^{j+2}, r^{-j+2}\} \qquad (2.2.12)$$

ดังนั้น

$$\phi = C\{(r^j, r^{-j}, r^{j+2}, r^{-j+2})(\cos(j\theta), \sin(j\theta))\} \qquad (2.2.13)$$

ฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่ได้ดังสมการ (2.2.9) (2.2.11) และ (2.2.13)จากการศึกษาแล้วพบว่ายังไม่บริบูรณ์เพียงพอสำหรับปัญหา เพื่อให้ระบบมีความบริบูรณ์เท่าที่ศึกษาในงานวิจัยนี้พบว่ายังต้องมีบางฟังก์ชันอีก คือ

สมมุติให้ $g(\theta)$ เท่ากับ θ เมื่อแทนลงในสมการ(2.2.1) และนำไปแทนลงในสมการควบคุมจะได้

$$\left(f''''(r) + \frac{2}{r}f'''(r) - \frac{1}{r^2}f''(r) + \frac{1}{r^3}f'(r)\right)\theta = 0 \qquad (2.2.14)$$

จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ก็ต่อเมื่อ

$$f''''(r)+\frac{2}{r}f'''(r)-\frac{1}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r^3}f'(r) \quad = \quad 0 \tag{2.2.15}$$

ซึ่งเป็นสมการแบบออยเลอร์-โคชี[7] เช่นเดียวกับในสมการ(2.2.4) ผลเฉลยจะอยู่ในรูป $f(r)=r^m$ เมื่อแทนลงในสมการ(2.2.15) จะได้

$$m^2(m-2)^2 r^{m-4} \quad = \quad 0$$

หรือ

$$m^2(m-2)^2 \quad = \quad 0 \tag{2.2.16}$$

จะได้ว่า $m=0,0,2,2$ และ $f(r)$ ก็จะเป็นเช่นเดียวกับในสมการที่(2.2.8) คือ

$$f(r)= C\{1, \ln r, r^2, r^2 \ln r\} \tag{2.2.17}$$

ดังนั้น

$$\phi = C\{(1, \ln r, r^2, r^2 \ln r)\theta\} \tag{2.2.18}$$

นอกจากนี้แล้วยังต้องมีบางฟังก์ชัน[6] ที่จำเป็นอีก คือ

$$\phi = C\{r\theta\cos\theta, r\theta\sin\theta\} \tag{2.2.19}$$

ฟังก์ชันความเค้นของแอรีที่ได้มาทั้งหมดนี้ ต้องเลือกเอาเฉพาะพจน์หรือผลรวมเชิงเส้นของพจน์บางพจน์ที่ทำให้ความเค้นและการกระจัดเป็นฟังก์ชันมีค่าเชิงเดี่ยว พิจารณาได้ดังนี้

$r^2\ln r$, $\theta\ln r$, θr^2 และ $\theta r^2\ln r$ จากสมการ(2.2.9) และ(2.2.18) ให้ค่าการกระจัดและ/หรือความเค้นไม่เป็นค่าเชิงเดี่ยว ต้องตัดทิ้งไป ส่วนฟังก์ชัน $r(\ln r)\cos\theta$ จากสมการ(2.2.11) คู่กับ $r\theta\sin\theta$ จากสมการ(2.2.19) และ $r(\ln r)\sin\theta$ จากสมการ(2.2.11) คู่กับ $r\theta\cos\theta$ จากสมการ(2.2.19) เมื่อรวมกันเชิงเส้นอย่างเหมาะสมเป็น $[(\kappa-1)r(\ln r)\cos\theta-(\kappa+1)r\theta\sin\theta]$ และ $[(\kappa-1)r(\ln r)\sin\theta+(\kappa+1)r\theta\cos\theta]$ ก็จะขจัดส่วนที่ไม่เป็นเชิงเดี่ยวทิ้งออกไปได้ ดังนั้นจึงสามารถรวมไว้ในชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีได้

เมื่อตัดเอาพจน์ที่ทำให้ค่าความเค้น และการกระจัดไม่เป็นค่าเชิงเดี่ยวออกไปแล้ว ก็สามารถสรุปรวบรวมฟังก์ชันความเค้นของแอรีทั้งหมดได้ดังนี้

$$\phi = C\left\{\begin{array}{lllll} 1 & , \ \ln r & , \ \theta & , \ r^2 & ; \\ (\kappa-1)r(\ln r)\cos\theta & - \ (\kappa+1)r\theta\sin\theta & & & ; \\ (\kappa-1)r(\ln r)\sin\theta & + \ (\kappa+1)r\theta\cos\theta & & & ; \\ r\cos\theta & , \ \cos\theta/r & , \ r^3\cos\theta & & ; \\ r\sin\theta & , \ \sin\theta/r & , \ r^3\sin\theta & & ; \\ r^j\cos(j\theta) & , \ r^{-j}\cos(j\theta) & , \ r^{2+j}\cos(j\theta) & , \ r^{2-j}\cos(j\theta) & ; \\ r^j\sin(j\theta) & , \ r^{-j}\sin(j\theta) & , \ r^{2+j}\sin(j\theta) & , \ r^{2-j}\sin(j\theta) & \mid \ j = 2,3,\ldots \end{array}\right\} \quad (2.2.20)$$

ความเค้นและการกระจัดที่สืบเนื่องจากชุดฟังก์ชันดังสมการ(2.2.20) แสดงได้ดังตารางที่ 1 และสามารถแยกพิจารณาชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีดังกล่าวสำหรับปัญหาระนาบที่มีโดเมนต่าง ๆ กันได้ดังต่อไปนี้

ปัญหาโดเมนข้างใน(Interior domain problem)

ปัญหาระนาบที่เป็นปัญหาโดเมนข้างใน(interior domain problem) แสดงได้ดังรูปที่ 6ก. ซึ่งเป็นปัญหาที่มีโดเมนจำกัด โดเมนมีความต่อเนื่องกันตลอด โดยรวมถึงจุดกำเนิดซึ่ง r มีค่าเป็นศูนย์เอาไว้ด้วย ฟังก์ชันความเค้นของแอรีสำหรับโดเมนดังกล่าว จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าความเค้นและการกระจัดที่มีค่าต่อเนื่องตลอด จากสมการ (2.2.20) จะพบว่ามีบางฟังก์ชันให้ค่าความเค้นและการกระจัดไม่ต่อเนื่องหรือมีค่าเอกฐาน(singular)ที่จุดกำเนิด เมื่อตัดฟังก์ชันเหล่านั้นออกไปจะได้ชุดฟังก์ชันสำหรับปัญหาดังกล่าวคือ

$$\phi = C\left\{\begin{array}{ll} 1 & , \ r^2 \\ r^j\cos(j\theta) & , \ r^{2+j}\cos(j\theta) \\ r^j\sin(j\theta) & , \ r^{2+j}\sin(j\theta) \ \mid \ j = 1,2,\ldots \end{array}\right\} \quad (2.2.21)$$

ปัญหาโดเมนข้างนอก(Exterior domain problem)

ปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) แสดงได้ดังรูปที่ 6ข. ซึ่งเป็นปัญหาที่มีโดเมนไม่จำกัดแต่ไม่รวมจุดกำเนิด โดยมีช่องเปิดที่จุดกำเนิด ฟังก์ชันความเค้นของแอรีสำหรับโดเมนดังกล่าวในทางทฤษฎีแล้วจะต้องให้ค่าความเค้นที่ระยะอนันต์มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วก็จะได้ชุดฟังก์ชันสำหรับปัญหานี้เป็น

$$\phi = C\left\{\begin{array}{lllll} 1 & , \ \ln r & , \ \theta & & \\ (\kappa-1)r(\ln r)\cos\theta & - \ (\kappa+1)r\theta\sin\theta & & & \\ (\kappa-1)r(\ln r)\sin\theta & + \ (\kappa+1)r\theta\cos\theta & & & \\ \cos\theta/r & , \ \sin\theta/r & , & , & \\ r^{-j}\cos(j\theta) & , \ r^{2-j}\cos(j\theta) & , \ r^{-j}\sin(j\theta) & , \ r^{2-j}\sin(j\theta) & \mid \ j = 2,3,\ldots \end{array}\right\} \quad (2.2.22)$$

ปัญหาโดเมนวงแหวน(Ring domain problem)

ปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) แสดงได้ดังรูปที่ 6ค. ซึ่งเป็นปัญหาที่มีโดเมนจำกัดและไม่รวมจุดกำเนิดไว้ด้วย กล่าวคือ มีช่องเปิดอยู่ที่จุดกำเนิด ฟังก์ชันความเค้นของแอรีสำหรับโดเมนดังกล่าว จะให้ค่าความ

เค้นและการกระจัดที่ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องที่จุดกำเนิดก็ได้ จะได้ว่าทุกฟังก์ชันในสมการ(2.2.20) มีสมบัติดังกล่าว ดังนั้นสำหรับปัญหาที่มีโดเมนดังกล่าวจะมีชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีดังสมการ(2.2.20)นั่นเอง

ปัญหาโดเมนวงแหวนหลายวง(Multiple-ring domain problem)

มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) เพียงแต่คราวนี้จะมีช่องเปิดมากกว่า 1 ช่องขึ้นไป ดังรูปที่ 6ง. สำหรับปัญหาที่มีโดเมนแบบนี้จะได้จากการรวมชุดฟังก์ชันสำหรับปัญหาโดเมนข้างนอก (exterior domain problem) ซึ่งจะมีจำนวนชุดทั้งหมดเท่ากับจำนวนช่องเปิดที่มีอยู่ และแต่ละชุดจะมีระบบพิกัดเป็นของตัวมันเองและมีจุดกำเนิดอยู่ภายในแต่ละช่องเปิด ดูรูปที่ 6ง. แล้วมารวมกับชุดฟังก์ชันสำหรับปัญหาโดเมนข้างใน (interior domain problem)ซึ่งจะมีจุดกำเนิดของระบบพิกัดที่จุดใดจุดหนึ่ง เมื่อพิจารณาเช่นนี้แล้วก็จะได้ชุดฟังก์ชันสำหรับกรณีที่มีช่องเปิด n ช่อง คือ

$$\phi = C\left\{\begin{matrix} 1 & , & r^2 & & \\ r^j\cos(j\theta) & , & r^{2+j}\cos(j\theta) & & \\ r^j\sin(j\theta) & , & r^{2+j}\sin(j\theta) & | & j=1,2,\ldots \end{matrix}\right\}$$

$$+\sum_{k=1,2,\ldots}^{n} C\left\{\begin{matrix} 1 & , & \ln r_k & , & \theta_k & & & & \\ (\kappa-1)r_k(\ln r_k)\cos\theta_k & - & (\kappa+1)r_k\theta_k\sin\theta_k & & & & & & \\ (\kappa-1)r_k(\ln r_k)\sin\theta_k & + & (\kappa+1)r_k\theta_k\cos\theta_k & & & & & & \\ \cos\theta_k/r_k & , & \sin\theta_k/r_k & , & & , & & & \\ r_k^{-j}\cos(j\theta_k) & , & r_k^{2-j}\cos(j\theta_k) & , & r_k^{-j}\sin(j\theta_k) & , & r_k^{2-j}\sin(j\theta_k) & | & j=2,3,\ldots \end{matrix}\right\} \quad (2.2.23)$$

2.3 การประยุกต์ทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตี

ทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตี กล่าวไว้ว่า "*โครงสร้างใด ๆ ที่วัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น(linear elastic) ภายใต้อุณหภูมิคงที่ ระบบสองระบบใด ๆ ที่มีการกระจัดที่สอดคล้อง(compatible displacement) และแรงอยู่ในสภาวะสมดุล(force in equilibrium) แล้ว งานที่เกิดจากแรงในระบบที่หนึ่งคูณกับการกระจัดในระบบที่สอง จะเท่ากับงานที่เกิดจากแรงในระบบที่สองคูณกับการกระจัดในระบบที่หนึ่ง*"[6]

ทฤษฎีดังกล่าวนี้จะนำมาใช้ในการปรับชุดฟังก์ชันความเค้นของแอรีให้มีค่าที่สอดคล้องกับค่าที่ขอบ โดยมีวิธีการดังนี้

ก่อนอื่นเพื่อความสะดวกในการพิจารณาปัญหา จะกำหนดระบบพิกัดเฉพาะที่(local co-ordinates), (n,t) ให้หมายถึง พิกัดที่ตั้งฉากและสัมผัสกับขอบของโดเมน มีจุดกำเนิดอยู่ ณ จุดต่าง ๆ บนขอบของโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 7. ดังนั้น ค่าความเค้นและการกระจัด ที่ขอบของโดเมน ซึ่งอยู่ในระบบพิกัด (n,t) จะหาค่าได้จากสมการต่อไปนี้

$$\bar{u}_n = \bar{u}_r \cos\left(\bar{\theta}-\bar{\alpha}\right) - \bar{u}_\theta \sin\left(\bar{\theta}-\bar{\alpha}\right)$$

$$\bar{u}_t = \bar{u}_r \sin\left(\bar{\theta}-\bar{\alpha}\right) + \bar{u}_\theta \cos\left(\bar{\theta}-\bar{\alpha}\right) \tag{2.3.1}$$

$$\bar{\sigma}_{nn} = \frac{\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{2} + \frac{\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{2}\cos\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right) - \bar{\sigma}_{r\theta}\sin\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right)$$

$$\bar{\sigma}_{tt} = \frac{\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{2} - \frac{\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{2}\cos\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right) + \bar{\sigma}_{r\theta}\sin\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right) \tag{2.3.2}$$

$$\bar{\sigma}_{nt} = \bar{\sigma}_{r\theta}\cos\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right) + \frac{\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{2}\sin\left(2\bar{\theta}-2\bar{\alpha}\right)$$

โดยที่ $\bar{\theta}$ และ $\bar{\alpha}$ หมายถึง พิกัด θ ของระบบพิกัดเชิงขั้วที่อ้างอิงถึงตำแหน่งขอบของโดเมน และมุมที่แกน n ทำกับแกน $\theta = 0$ ในทิศบวก ตามลำดับ $\bar{\sigma}_{nn}$ $\bar{\sigma}_{tt}$ $\bar{\sigma}_{nt}$ $\bar{u}_n$ และ $\bar{u}_t$ หมายถึง ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน n ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน t ความเค้นเฉือน การกระจัดในแนวแกน n และการกระจัดในแนวแกน t ตามลำดับ ซึ่งทั้งความเค้นและการกระจัดนี้จะระบุที่ขอบของโดเมน ส่วน $\bar{\sigma}_{rr}$ $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ $\bar{\sigma}_{r\theta}$ $\bar{u}_r$ และ $\bar{u}_\theta$ ก็หมายถึง ความเค้นและการกระจัดในระบบพิกัดเชิงขั้วที่ขอบของโดเมนเช่นกัน

ในการหาผลเฉลยในการศึกษาครั้งนี้จะเลือกชุดของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับโดเมนแต่ละแบบตามที่ได้อธิบายไว้แล้วข้างต้น ถ้ากำหนดสัญลักษณ์ ϕ_j ให้หมายถึงฟังก์ชันที่ j ใด ๆ ที่อยู่ในชุดของฟังก์ชันที่เลือก และให้ A_j แทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันนั้น ก็อาจเขียนผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันความเค้นของแอรีได้เป็น

$$\phi = \sum_{j=1,2,\ldots}^{N} A_j \phi_j \tag{2.3.3}$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในสมการความสัมพันธ์ต่าง ๆ ก็จะได้สูตรของความเค้น ความเครียด และการกระจัดในรูปของอนุกรมตามต้องการ เช่น ถ้าใช้สมการ(2.1.17) ก็จะได้สูตรของความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วอยู่ในรูปของอนุกรม และสามารถทำให้อยู่ในระบบพิกัด (n,t) ด้วยสมการ(2.3.2) ส่วนการกระจัดก็สามารถหาได้ในระบบพิกัด (n,t) เช่นกัน ก็จะได้สูตรของความเค้นและการกระจัดในระบบพิกัด (n,t) ดังข้างล่างนี้

$$u_n = \sum_{j=1,2,\ldots}^{N} A_j u_{nj}$$

$$u_t = \sum_{j=1,2,\ldots}^{N} A_j u_{tj} \tag{2.3.4}$$

$$\sigma_{nn} = \sum_{j=1,2,...}^{N} A_j \sigma_{nnj}$$

$$\sigma_{tt} = \sum_{j=1,2,...}^{N} A_j \sigma_{ttj} \qquad (2.3.5)$$

$$\sigma_{nt} = \sum_{j=1,2,...}^{N} A_j \sigma_{ntj}$$

โดยที่ σ_{nnj} σ_{ttj} σ_{ntj} u_{nj} และ u_{tj} คือค่า ความเค้น และการกระจัดซึ่งคำนวณได้จากฟังก์ชัน ϕ_j

เนื่องจากทุก ๆ พจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมข้างบน ดังสมการ(2.3.3) ล้วนแล้วแต่ให้ค่า การกระจัดที่สอดคล้อง(compatible displacement) และความเค้นที่อยู่ในสภาวะสมดุล(stress in equilibrium) ดังนั้นตัวผลเฉลยในรูปอนุกรมเองซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของพจน์เหล่านั้นก็ย่อมจะมีสมบัติเดียวกันด้วย

เมื่อผลเฉลยในรูปอนุกรม และแต่ละพจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมมีสมบัติตามทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตีก็ย่อมที่จะนำทฤษฎีดังกล่าวมาประยุกต์ได้ โดยถือเอาผลเฉลยในรูปอนุกรมเป็นระบบที่หนึ่งเรียกว่าระบบผลเฉลย(solution system) และ แต่ละพจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมเป็นระบบที่สองเรียกว่าระบบทดสอบ(trial system) เมื่อนำแต่ละระบบทดสอบมาเทียบกับระบบผลเฉลย ก็จะได้สมการงานผกผัน(reciprocal work equation) หนึ่งสมการเสมอ ดังนั้นจึงสามารถสร้างสมการดังกล่าวได้ในจำนวนที่เท่ากับจำนวนของพจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมพอดี ทำให้สามารถแก้สมการเหล่านี้ซึ่งเป็นสมการพีชคณิตเชิงเส้น(linear algebraic equation) เพื่อหาค่าของสัมประสิทธิ์ A_j ออกมาได้ทั้งหมด

ในรูปที่ 8. ถ้ากำหนดให้ Γ แทนเส้นขอบเขตของปัญหา จะสามารถเขียนสมการงานผกผันระหว่างระบบผลเฉลยในรูปที่ 8ก. กับระบบทดสอบลำดับที่ i ใด ๆ ในรูปที่ 8ข. ได้ตามทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตี ดังนี้

$$\int_{\Gamma} (\overline{\sigma}_{nn}\overline{u}_{ni} + \overline{\sigma}_{nt}\overline{u}_{ti})\, d\Gamma = \int_{\Gamma} (\overline{\sigma}_{nni}\overline{u}_{n} + \overline{\sigma}_{nti}\overline{u}_{t})\, d\Gamma \qquad i = 1,2,3,...,N \qquad (2.3.6)$$

โดยที่ $\overline{\sigma}_{nn}$ $\overline{\sigma}_{nt}$ $\overline{u}_n$ และ $\overline{u}_t$ หมายถึง ความเค้นและการกระจัดของระบบผลเฉลยที่ขอบของโดเมน ส่วนพจน์ที่มีดรรชนี i พ่วงอยู่ด้วยจะหมายถึงค่าดังกล่าวของระบบทดสอบลำดับที่ i

ในทางกลศาสตร์ของวัสดุแข็ง สภาพบังคับของขอบที่ยอมรับได้(admissible boundary condition) จะต้องสอดคล้องกับความเป็นไปได้ที่พลังงานศักย์รวม(total potential energy) ของทั้งโดเมนจะมีค่าต่ำสุดซึ่งเป็นเงื่อนไขของสภาวะสมดุลที่ระบุไว้ใน principle of stationary total potential energy [9]

สำหรับปัญหาระนาบ(plane problem)สภาพของขอบที่ยอมรับได้ดังกล่าวที่พบเห็นทั่ว ๆ ไปในทางวิศวกรรม คือ ณ.ตำแหน่งเดียวกันที่ขอบโดเมนอาจจะ *บังคับ(prescribe)ค่าของ* $\bar{\sigma}_{nn}$ *หรือค่าของ* $\bar{u}_n$ *และบังคับค่าของ* $\bar{\sigma}_{nt}$ *หรือค่าของ* $\bar{u}_t$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้นถ้าใช้ดรรชนีบน 0 ให้หมายถึงค่าบังคับ ก็อาจเขียนสมการแสดงค่าที่ขอบของความเค้นและการกระจัดที่เป็นไปได้ ดังสมการข้างล่างนี้

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{nn} &= H_n\bar{\sigma}^0_{nn} + (1-H_n)\sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} A_j\bar{\sigma}_{nnj} \\
\bar{\sigma}_{nt} &= H_t\bar{\sigma}^0_{nt} + (1-H_t)\sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} A_j\bar{\sigma}_{ntj} \\
\bar{u}_n &= (1-H_n)\ \bar{u}^0_n + H_n\sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} A_j\bar{u}_{nj} \\
\bar{u}_t &= (1-H_t)\ \bar{u}^0_t + H_t\sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N} A_j\bar{u}_{tj}
\end{aligned}
\qquad (2.3.7)
$$

โดยที่ H_n และ H_t อาจมีค่าเป็นศูนย์หรือหนึ่งตามสภาพ กล่าวคือ

$$
H_n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อบังคับให้ } \bar{u}_n \text{ มีค่าเป็น } \bar{u}^0_n \\ 1 & \text{เมื่อบังคับให้ } \bar{\sigma}_{nn} \text{ มีค่าเป็น } \bar{\sigma}^0_{nn} \end{cases}
$$

$$
H_t = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อบังคับให้ } \bar{u}_t \text{ มีค่าเป็น } \bar{u}^0_t \\ 1 & \text{เมื่อบังคับให้ } \bar{\sigma}_{nt} \text{ มีค่าเป็น } \bar{\sigma}^0_{nt} \end{cases}
$$

แทนค่า $\bar{\sigma}_{nn}$ $\bar{\sigma}_{nt}$ $\bar{u}_n$ และ $\bar{u}_t$ จากสมการ(2.3.7) ลงในสมการ(2.3.6) จะได้สมการงานผกผันซึ่งเป็นสมการพีชคณิตเชิงเส้น จำนวน N สมการ สามารถแก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่า A_j จำนวน N ค่าได้พอดี ดังนี้

$$
\sum_{j=1,2,3,\ldots}^{N}\left\{ \int_\Gamma \left[(1-H_n)\bar{\sigma}_{nnj}\bar{u}_{ni} + (1-H_t)\bar{\sigma}_{ntj}\bar{u}_{ti} - H_n\bar{\sigma}_{nni}\bar{u}_{nj} - H_t\bar{\sigma}_{nti}\bar{u}_{tj} \right] d\Gamma \right\} A_j
$$

$$
= \int_\Gamma \left[(1-H_n)\bar{\sigma}_{nni}\bar{u}^0_n + (1-H_t)\bar{\sigma}_{nti}\bar{u}^0_t - H_n\bar{\sigma}^0_{nn}\bar{u}_{ni} - H_t\bar{\sigma}^0_{nt}\bar{u}_{ti} \right] d\Gamma \ , \quad i=1,2,3,\ldots,N \qquad (2.3.8)
$$