บทที่ 1

บทนำ

1.1 บทนำและงานวิจัยที่ผ่านมา

ในช่วงหลาย ๆ ปีที่ผ่านมาระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์(Boundary Element method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์(Finite Element method) เป็นวิธีที่นิยมในการนำมาวิเคราะห์ปัญหาในทางกลศาสตร์วัสดุแข็ง(solid mechanics) ซึ่งรวมถึงปัญหาระนาบ(plane problem) ไม่ว่าจะเป็นปัญหาระนาบทางความเครียด(plane strain problem) หรือปัญหาระนาบทางความเค้น(plane stress problem) ทั้งสองวิธีต่างก็มีหลักการที่แตกต่างกันไป กล่าวคือ ระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์เป็นวิธีการประมาณที่ขอบ(boundary) เป็นหลัก ส่วนระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์จะอาศัยการประมาณบนโดเมน(domain) [1]

ระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์มีหลักการโดยสังเขป คือ นำฟังก์ชันหรืออนุกรมของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการควบคุม(governing equation) ไปปรับเข้าที่สภาพขอบ(boundary condition) ของปัญหาโดยประมาณ ด้วยการทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (total absolute error) รอบขอบมีค่าน้อยที่สุดโดยการสร้างสมการบาวดารีอินทิกรัล(boundary integral equation) แต่ในบางครั้งระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์อาจมีการใช้ฟังก์ชันพื้นฐาน (fundamental function) ที่มาจากผลเฉลยเฉพาะของแรงเดี่ยวกระทำ มาเป็นฟังก์ชันทดสอบ(trial function) ในการหาผลเฉลย ซึ่งทำให้เกิดปัญหาในการอินทิเกรต(integrate)ผ่านจุดเอกฐาน(singular point)เสมอ

ประเด็นที่น่าสนใจ คือ การใช้ชุดของฟังก์ชันบริบูรณ์(complete function set)[2] ซึ่งปรากฏจากฟังก์ชันพื้นฐานหรือฟังก์ชันทดสอบ(fundamental function or trial function)ที่มีภาวะเอกฐาน(singularity) ในการหาผลเฉลยของปัญหา โดยผู้ที่ชี้ให้เห็นประเด็นปัญหาดังกล่าวคือ Zielinski และ Zienkiewicz[3] ซึ่งเสนอให้ใช้ชุดของฟังก์ชันบริบูรณ์ (complete function set) ซึ่งปรากฏจากฟังก์ชันเอกฐาน เป็นฟังก์ชันทดสอบ และใช้ระเบียบวิธีเศษตกค้างถ่วงน้ำหนัก (weighted residual) ในการปรับชุดของฟังก์ชันดังกล่าวให้สอดคล้องกับสภาพขอบ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก(weight function) ที่เหมาะสม จากการศึกษาเขาพบว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ที่เหมาะสมจะมีความเกี่ยวข้องกับแต่ละพจน์ในชุดฟังก์ชันนั่นเอง เมื่อนำแต่ละฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก มาใช้ในการปรับแก้สภาพขอบ ก็จะได้สมการพีชคณิตเชิงเส้น(linear algebraic equation) หนึ่งสมการเสมอ ดังนั้นจึงสามารถสร้างสมการดังกล่าวได้ในจำนวนที่เท่ากับจำนวนพจน์ในชุดของฟังก์ชันผลเฉลยพอดี ซึ่งสามารถแก้สมการเหล่านี้เพื่อหาค่าของสัมประสิทธิ์(coefficient)ของแต่ละพจน์ในชุดของฟังก์ชันดังกล่าวได้ ในงานวิจัยเขาได้ยกตัวอย่างการแก้ปัญหาของการบิด(torsion) ซึ่งมีผลเฉลยของสมการควบคุมเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก(harmonic function) พร้อมทั้งได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีของเขากับผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) พบว่าวิธีของเขาให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง

วิธีการของ Zielinski และ Zienkiewicz [3] เป็นวิธีการสำหรับปัญหาค่าขอบโดยทั่วไป แต่เมื่อพิจารณาเฉพาะปัญหาระนาบ Jin,Cheung และ Zienkiewicz [4] ได้เสนอชุดของฟังก์ชันที่บริบูรณ์ขึ้นมา 3 ชุด สำหรับปัญหาระนาบที่มีโดเมนแตกต่างกัน 3 แบบ คือ ปัญหาโดเมนข้างใน(interior domain problem) ปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) และ ปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) ในการวิเคราะห์ปัญหา เขาได้ใช้ระเบียบวิธีเศษตกค้างถ่วงน้ำหนัก(weighted residual) ในการปรับชุดของฟังก์ชันให้สอดคล้องกับสภาพขอบ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ที่เหมาะสม เช่นเดียวกับผลงานของ Zielinski และ Zienkiewicz [3] เขาได้ยกตัวอย่างการใช้ชุดฟังก์ชันสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโดเมนข้างนอก(exterior domain problem) โดยแสดงการวิเคราะห์ 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาของโพรงรูปวงกลมอยู่ในโดเมนที่เป็นอนันต์และได้รับความดันค่าหนึ่งในโพรงดังกล่าว และปัญหาของแผ่น (plate)ที่มีพื้นที่อนันต์มีรูเจาะรูปวงกลมอยู่หนึ่งรู รับแรงดึงที่ระยะอนันต์ พบว่าชุดฟังก์ชันที่ใช้ให้ผลเฉลยที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างมาก อัตราการลู่เข้า(convergence)ของผลเฉลยรวดเร็ว ให้ผลเฉลยที่แม่น (accurate)กว่าระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์ทั่วไป ผลเฉลยยังคงมีค่าที่ดีแม้จะอยู่ที่ขอบของโดเมน เขาจึงกล่าวสรุปว่าวิธีการของเขาให้ผลเฉลยที่ดีสำหรับปัญหาระนาบที่มีโดเมนเป็นอนันต์ อย่างไรก็ตาม Jin,Cheung และ Zienkiewicz[4] ไม่ได้แสดงให้เห็นว่าชุดฟังก์ชันที่เขาเสนอสำหรับปัญหาโดเมนข้างใน(interior domain problem) และปัญหาโดเมนวงแหวน(ring domain problem) ให้ผลเฉลยที่ดีเพียงใด

การปรับชุดฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยในรูปอนุกรมของสมการควบคุมให้สอดคล้องกับสภาพขอบของปัญหา ด้วยระเบียบวิธีเศษตกค้างถ่วงน้ำหนัก(weighted residual) เมื่อนำมาพิจารณาเฉพาะปัญหาในทางกลศาสตร์วัสดุแข็ง แล้วพบว่ามีส่วนคล้ายคลึงกับสมการงานผกผันตามทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตี (Maxwell-Betti's reciprocal problem)เป็นอย่างมาก ดังแสดงให้เห็นได้จากผลงานของสมศักดิ์[5] ซึ่งได้ประยุกต์ทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตีร่วมกับทฤษฎีฟังก์ชันที่บริบูรณ์ในการแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบาง(thin elastic plate) ในงานดังกล่าว สมศักดิ์ได้ทดลองใช้ชุดฟังก์ชันชุดหนึ่งที่สอดคล้องกับสมการควบคุมของโครงสร้างแผ่นบาง และตั้งสมมุติฐานไว้ว่าชุดฟังก์ชันที่ทดลองใช้มีความบริบูรณ์เพียงพอสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบาง เมื่อนำชุดฟังก์ชันดังกล่าวมาใช้ร่วมกับสมการงานผกผัน (reciprocal work equation) เพื่อปรับผลเฉลยในรูปอนุกรมให้สอดคล้องกับโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขสภาพขอบแบบต่าง ๆ แล้วก็พบว่าให้ผลเฉลยที่ถูกต้องเพียงพอเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงเท่าที่มีปรากฏอยู่ ผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ และผลเฉลยจากระเบียบวิธีบาวดารีเอเลเมนต์

ตามทฤษฎีบทผกผันของแมกซ์เวลล์และเบตตีนั้นสำหรับระบบสองระบบใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยแรงที่อยู่ในสภาวะสมดุล(equilibrium) และการกระจัดที่สอดคล้อง(compatible displacement) งานที่เกิดจากแรงในระบบที่หนึ่งคูณกับการกระจัดในระบบที่สอง จะมีค่าเท่ากับงานที่เกิดจากแรงในระบบที่สองคูณกับการกระจัดในระบบที่หนึ่ง ทำให้เกิดเป็นสมการที่เรียกว่า "สมการของงานผกผัน(reciprocal work equation)" ถ้าเรากำหนดให้ระบบผลเฉลย(solution system) อยู่ในรูปของอนุกรมของฟังก์ชันซึ่งล้วนแต่เป็นผลเฉลย(solution)ของสมการควบคุม(governing equation) ของปัญหา ก็หมายความว่าแต่ละพจน์ของอนุกรมรวมทั้งตัวอนุกรมเองด้วย ล้วนแต่ให้แรงที่สมดุลและการกระจัดที่สอดคล้องทั้งสิ้น ดังนั้นแต่ละพจน์ของอนุกรมก็สามารถจะนำมาพิจารณาประกบกับตัวอนุกรมนั้นเองได้ตามทฤษฎีดังกล่าว หรืออาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า แต่ละพจน์ของอนุกรมสามารถทำหน้าที่เป็นระบบทดสอบ(trial system) ของอนุกรมก็จะได้ผลเฉลยในรูปของสมการของงานผกผัน(reciprocal work equation) ซึ่งเป็นสมการพีชคณิตเชิงเส้นหนึ่ง

สมการเสมอ ดังนั้นถ้านำทุกพจน์ของผลเฉลยในรูปอนุกรมมาทำหน้าที่ทดสอบก็จะได้จำนวนสมการเท่ากับจำนวนพจน์ในอนุกรมพอดี ทำให้แก้หาค่าของสัมประสิทธิ์สำหรับผลเฉลยในรูปอนุกรมได้

ในการศึกษาครั้งนี้จะนำแนวคิด และ ทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาระนาบยืดหยุ่นเชิงเส้น(plane linear elastic problem) โดยจะศึกษาทั้งกรณีของ โดเมนข้างใน(interior domain) โดเมนข้างนอก (exterior domain) และ โดเมนวงแหวน(ring domain) ตลอดจนกระทั่งกรณีของโดเมนวงแหวนหลายวง(multiple-ring domain) ด้วย ผลที่ได้จะเปรียบเทียบกับ สภาพความเป็นจริงที่ขอบ(boundary) ผลเฉลยแม่นตรง(exact solution)เท่าที่มีอยู่ในปัจจุบัน และกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย