กึ่งกลุ่มการแปลงรักษาอันดับซึ่งปกติ

นายธวัช ช่างผัส

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2541

ISBN 974-639-538-6

REGULAR ORDER – PRESERVING TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Mr. Thawhat Changphas

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
Academic Year 1998

ISBN 974-639-538-6

Thesis Title	Regular Order – Preserving Transformaion Semigroups
By	Mr. Thawhat Changphas
Department	Mathematics
Thesis advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements of the Master's Degree.

.....Dean of Graduate School

(Professor Supawat Chutivongse, M.D.)

Thesis Committee

.....Chairman

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

.....Thesis Advisor

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

.....Member

(Dr. Yati Krisnangkura Ph.D.)

ธวัช ช่างผัส : กึ่งกลุ่มการแปลงรักษาอันดับซึ่งปกติ
(REGULAR ORDER – PRESERVING TRANSFORMATION SEMIGROUPS)
อ. ที่ปรึกษา : รศ. ดร. ชุพาภรณ์ เจียมประสิทธิ์, 35 หน้า. ISBN 974-639-538-6

กึ่งกลุ่ม S เป็น*กึ่งกลุ่มปกติ* ถ้าทุกสมาชิก $a \in S$ มี $b \in S$ ซึ่ง $a = aba$ การแปลงบางส่วน α บนเซตเป็น *การแปลงบางส่วนเกือบเป็นเอกลักษณ์* ถ้าเซตของ x ในโดเมนของ α ซึ่ง $x\alpha \neq x$ เป็นเซตจำกัด ให้ X เป็นเซตอันดับบางส่วน ให้ $PT_{OP}(X)$, $T_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$, $V_{OP}(X)$ และ $W_{OP}(X)$ แทนกึ่งกลุ่มการแปลงบางส่วนรักษาอันดับบน X, กึ่งกลุ่มการแปลงเต็มรักษาอันดับบน X, กึ่งกลุ่มการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่งรักษาอันดับบน X, กึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งรักษาอันดับของ X ทั้งหมด, กึ่งกลุ่มของการแปลงเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งรักษาอันดับของ X ทั้งหมด และกึ่งกลุ่มของการแปลงบางส่วนหนึ่งต่อหนึ่งเกือบเป็นเอกลักษณ์ซึ่งรักษาอันดับของ X ทั้งหมด

ให้ Z และ R แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด และเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ตามลำดับ ในบทคัดย่อนี้ อันดับบางส่วนบนสับเซตของ R หมายถึงอันดับบางส่วนปกติบน R ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

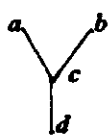
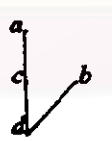
ทฤษฎีบท 1. ถ้า X เป็นเซตซึ่งสอดสัญฐานอันดับกับสับเซตของ Z แล้ว $T_{OP}(X)$ เป็นกึ่งกลุ่มปกติ

ทฤษฎีบท 2. สำหรับช่วง X ใดๆของ R, $T_{OP}(X)$ เป็นกึ่งกลุ่มปกติ ก็ต่อเมื่อ X เป็นช่วงปิดและมีจอมเซต

ทฤษฎีบท 3. ถ้า X เป็นเซต แล้ว $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$, $V_{OP}(X)$ และ $W_{OP}(X)$ ทั้งหมดเป็นกึ่งกลุ่มปกติ

ทฤษฎีบท 4. ให้ X เป็นเซตอันดับบางส่วนซึ่งไม่เป็นเซต และให้ S เป็นกึ่งกลุ่มหนึ่งของ $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$ และ $W_{OP}(X)$ ดังนั้น S เป็นกึ่งกลุ่มปกติ ก็ต่อเมื่อ X เป็นเซตอันดับบางส่วนที่เป็นเอกเทศ

ทฤษฎีบท 5. ถ้า X เป็นเซตอันดับบางส่วนซึ่งมี (i) ส่วนประกอบ C_1 และ C_2 ที่ไม่มีส่วนร่วมและ $|C_1| > 1$ หรือสับโพเซตในรูปแบบ

(ii)  หรือ  หรือ (iii)  หรือ  หรือ

(iv)  โดยที่ $\{a, e\}$ ไม่มีจอมเซตล่างใน X หรือ

 โดยที่ $\{a, e\}$ ไม่มีจอมเซตบนใน X

แล้ว $T_{OP}(X)$ ไม่เป็นกึ่งกลุ่มปกติ

ทฤษฎีบท 6. ให้ X เป็นเซตอันดับบางส่วน และ $M(X)$ และ $m(X)$ เป็นเซตของสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ X ทั้งหมด และเซตของสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มของ X ทั้งหมด ตามลำดับ ถ้า (i) $X = M(X) \cup m(X)$ และ (ii) สำหรับ $x \in m(X)$ และ $y \in M(X)$, $x < y$ แล้ว $T_{OP}(X)$ เป็นกึ่งกลุ่มปกติ

ทฤษฎีบท 7. ให้ X เป็นเซตอันดับบางส่วน ถ้า X มีสมาชิกสูงสุด a และสมาชิกต่ำสุด b ซึ่งสำหรับ $x, y \in X - \{a, b\}$ ที่ต่างกัน, x และ y ไม่เปรียบเทียบกัน แล้ว $T_{OP}(X)$ เป็นกึ่งกลุ่มปกติ

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ธวัช ช่างผัส
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ชุพาภรณ์ เจียมประสิทธิ์
ปีการศึกษา 2541 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

#3970683823 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: REGULAR / ORDER – PRESERVING / TRANSFORMATION / SEMIGROUPS
THAWHAT CHANGPHAS : REGULAR ORDER – PRESERVING
TRANSFORMATION SEMIGROUPS. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF.
YUPAPORN KEMPRASIT, Ph. D. 35 pp. ISBN 974-639-538-6

A semigroup S is said to be *regular* if for each $a \in S$, $a = aba$ for some $b \in S$. A partial transformation α on a set is said to be *almost identical* if $x\alpha \neq x$ for at most a finite number of elements x in the domain of α.

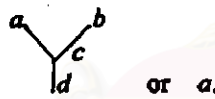
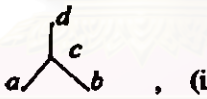
Let X be a partially ordered set. Let $PT_{OP}(X)$, $T_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$, $V_{OP}(X)$ and $W_{OP}(X)$ denote the order-preserving partial transformation semigroup on X, the full order-preserving transformation semigroup on X, the order-preserving 1-1 partial transformation semigroup on X, the semigroup of all order-preserving almost identical partial transformations of X, the semigroup of all order-preserving almost identical transformations of X and the semigroup of all order-preserving almost identical 1-1 partial transformations of X, respectively.

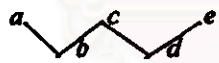
Let Z and R denote the set of integers and the set of real numbers, respectively.

In this abstract, the partial order on any subset of R is the usual partial order on R.

The main results of this research are as follows:

Theorem 1. If X is a chain which is order – isomorphic to a subset of Z, then $T_{OP}(X)$ is regular.
Theorem 2. For any interval X of R, $T_{OP}(X)$ is regular if and only if X is closed and bounded.
Theorem 3. If X is a chain, then all of $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$, $V_{OP}(X)$ and $W_{OP}(X)$ are regular.
Theorem 4. Let X be a partially ordered set which is not a chain and let S be one of $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$ and $W_{OP}(X)$. Then S is regular if and only if X is isolated.
Theorem 5. If X is a partially ordered set containing (i) disjoint components C_1 and C_2 with $|C_1| > 1$ or a subposet of the forms

(ii)  or  , (iii)  or  or

(iv)  where $\{a, e\}$ has no lower bound in X or

 where $\{a, e\}$ has no upper bound in X,

then $T_{OP}(X)$ is not regular.
Theorem 6. Let X be a partially ordered set and $M(X)$ and $m(X)$ denote the set of all maximal elements of X and the set of all minimal elements of X, respectively. If (i) $X = M(X) \cup m(X)$ and (ii) for $x \in m(X)$ and $y \in M(X)$, $x < y$, then $T_{OP}(X)$ is regular.
Theorem 7. Let X be a partially ordered set. If X has a maximum element a and a minimum element b such that for all distinct $x, y \in X - \{a, b\}$, x and y are not comparable, then $T_{OP}(X)$ is regular.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ธวัช ช่างผัส

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุพาพร เข็มประสิทธิ์

ปีการศึกษา 2541 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis advisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. I would like to thank all of the lectures for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my gratitude to my family, teachers and friends for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

INTRODUCTION

The partial transformation semigroup on a set, the full transformation semigroup on a set, the 1-1 partial transformation semigroup on a set, the semigroup of all almost identical partial transformations of a set, the semigroup of all almost identical transformations of a set and the semigroup of all almost identical 1-1 partial transformations of a set are well - known transformation semgroups and they are all regular. Transformation semigroups on partially ordered sets have long been studied (see [4]). Order - preserving transformation semigroups are one kind of these interesting transformation semigroups. Study of the full order-preserving transformation semigroup on a partially ordered set can be found in [3] and [4] and those of the order - preserving 1-1 partial transformation semigroup on a partially ordered set can be found in [1] and [2]. These transformation semigroups need not be regular. However, the full order - preserving transformation semigroups and the order - preserving 1-1 partial transformation semigroup on a finite chain are regular, see [3] and [1], respectively. We feel that, regularity of order - preserving transformation semigroups on partially ordered sets remains a lot to study need to be study more and it is to be known.

Let X be a partially ordered set and let

$PT_{OP}(X)$ = the order - preserving partial transformation semigroup on X,

$T_{OP}(X)$ = the full order - preserving transformation semigroup on X,

$I_{OP}(X)$ = the order - preserving 1-1 partial transformation semigroup on X,

$U_{OP}(X)$ = the semigroup of all order - preserving almost identical partial transformations of X,

$V_{OP}(X)$ = the semigroup of all order - preserving almost identical transformations of X

and

$W_{OP}(X)$ = the semigroup of all order - preserving almost identical 1-1 partial transformations of X.

These six transformation semigroups seem to be standard order - preserving transformation semigroups on partially ordered sets. As mentioned above, if X is a finite chain, then $T_{OP}(X)$ and $I_{OP}(X)$ are regular. The purpose of this research is to study regularity of these order - preserving transformation semigroups for certain X. Preliminaries for this research are given in Chapter I. In Chapter II, we study regularity of these six order - preserving transformation semigroups for the case that X is a chain. It is proved that if X is order - isomorphic to any set of integers, then $T_{OP}(X)$ is regular, for any interval X of real numbers, $T_{OP}(X)$ is regular if and only if X is closed and bounded and if X is a chain, then $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$, $V_{OP}(X)$ and $W_{OP}(X)$ are all regular. The study of regularity of these semigroups for the case that X is not a chain is given in Chapter III. We prove that if X is not a chain and S is one of $PT_{OP}(X)$, $I_{OP}(X)$, $U_{OP}(X)$ and $W_{OP}(X)$, then S is regular if and only if X is isolated. Finally, we give some necessary conditions and some sufficient conditions for X such that $T_{OP}(X)$ is regular.