บทที่ 2

ทฤษฎีสถิติที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

การวิเคราะห์อนุกรมเวลา(Time Series Analysis)เป็นการศึกษาข้อมูลที่ให้ความสำคัญต่อ ลำดับเวลาที่เกิดขึ้นของข้อมูลนั้น และ จะเน้นถึงความสำคัญที่ขึ้นต่อกัน(Depence) ของข้อมูล จากลักษณะทั้ง 2 ประการนี้เองที่ทำให้การวิเคราะห์อนุกรมเวลาแตกต่างจากกรรมวิธีทางสถิติอื่นๆ ที่มีข้อสมมติเกี่ยวกับความเป็นอิสระ(Independence) ต่อกัน และการเกิดสุ่ม(Randomization) ของข้อมูล จุดมุ่งหมายที่สำคัญของการวิเคราะห์อนุกรมเวลา คือการพยายามอธิบายขบวนการที่ก่อให้เกิดอนุกรมเวลาชุดนั้นๆ และพยากรณ์ค่าของตัวแปรในอนาคต โดยถือว่าค่าพยากรณ์ในอนาคตเป็นผลที่พิจารณาได้จากข้อมูลในอดีต

วิธีการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ศึกษาครั้งนี้มีวิธีวิเคราะห์ที่ใช้ 3 วิธีคือวิธีพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการปรับให้เรียบ, วิธีพยากรณ์ของบอกซ์และเจนกินส์, วิธีพยากรณ์ของแผนกวางแผนการผลิตไฟฟ้าระยะสั้น กฟผ. ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

2.1 ทฤษฎีวิธีการปรับให้เรียบ

วิธีการปรับให้เรียบสำหรับการพยากรณ์ ข้อมูลอนุกรมเวลามีหลายวิธีด้วยกัน วิธีการเหล่านี้โดยทั่วไปเป็นวิธีการที่ไม่ซับซ้อนใช้เวลาไม่มากในการคำนวณและสำหรับความถูกต้องของค่าพยากรณ์จะมากน้อยขึ้นอยู่กับเทคนิคพยากรณ์ที่เลือกใช้สอดคล้องกับลักษณะข้อมูลอนุกรมเวลาเพียงใดส่วนการทำการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีการปรับให้เรียบครั้งเดียวแบบเอกซโพเนนเชียล (Single Exponential Smoothing Method) วิธีการปรับให้เรียบสองครั้งแบบเอกซโพเนนเชียล(double Exponential Smoothing Method) วิธีพารามิเตอร์สองตัวของโฮลท์(Holt's two Parameter Method) วิธีการพยากรณ์ของวินเตอร์ (Winters' Forcast Method)

2.1.1. การปรับให้เรียบครั้งเดียวแบบเอกซโพเนนเชียล (Single Exponential Smoothing)

วิธีพยากรณ์วิธีหนึ่งสำหรับอนุกรมเวลาที่มีค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงน้อยๆเป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก คือวิธีการปรับให้เรียบครั้งเดียวแบบเอกซโพเนนเชียล วิธีนี้จะให้น้ำหนักกับข้อมูลปัจจุบันมากที่สุด และให้น้ำหนักลดลงเรื่อยๆ สำหรับข้อมูลอดีตตามลำดับ ซึ่งเมื่อเขียน

กับข้อมูลปัจจุบันมากที่สุด และให้น้ำหนักลดลงเรื่อยๆ สำหรับข้อมูลอดีตตามลำดับ ซึ่งเมื่อเขียนกราฟแสดงการลดลงของน้ำหนักจะมีรูปแบบเอกซโพเนนเชียล และวิธีนี้เหมาะสมสำหรับการพยากรณ์ในระยะสั้น

ตัวแบบพยากรณ์ค่าในอนาคต Y_{T+l} (l=1,2,...) จากเวลาปัจจุบัน T :

$$\hat{Y}_T(l) = S_T = \alpha Y_T + (1-\alpha)S_{T-1}, l = 1,2,...$$

ซึ่ง α คือ ค่าคงที่หรือสัมประสิทธิ์ปรับให้เรียบ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 นักพยากรณ์จะต้องเลือกกำหนดค่า α ซึ่งโดยทั่วไปจะเลือกค่า α อยู่ระหว่าง 0.05 และ 0.3 ซึ่งถ้าระดับค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงช้าๆ ควรเลือก ค่าเล็ก สำหรับ S_t มีชื่อเรียกว่า "ตัวสถิติปรับให้เรียบ" ซึ่งการคำควณหาค่า S_t จะต้องใช้ค่า S_{t-1} , S_{t-2} ,..., S_1 ,S_0 นั่นคือ เมื่อทราบค่าเริ่มต้น S_0 จะสามารถหาค่า S ตัวต่อๆ ไปได้ ฉะนั้นนักพยากรณ์จะต้อง
กำหนดค่าเริ่มต้น S_0 และตัวอย่างการเลือกกำหนดค่าS_0เช่น ใช้ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาที่มีอยู่

$$S_0 = \overline{Y} = (1/T)(Y_1 + Y_2 + ... + Y_T)$$

โดยเฉพาะกรณีที่ระดับค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาเปลี่ยนแปลงช้าๆ

อีกหนทางหนึ่งในการเลือกค่าα คือทดลองแปรเปลี่ยนค่า α เช่น α เริ่มจากα=0.01 ต่อไปเป็น 0.020,0.03,... และแต่ละค่า α คำนวณค่า S_t และหาค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง(MSE)จากนั้นเปรียบเทียบค่า MSE ทั้งหมดและเลือกค่า α ที่ให้ MSE ต่ำสุด

2.1.2. วิธีการปรับให้เรียบสองครั้งแบบเอกซโพเนนเชียล(Double Exponential Smoothing Method)

จากแนวคิดการปรับให้เรียบครั้งเดียวแบบเอกซโพเนนเชียล นำมาขยายผลใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มเชิงเส้นไม่คงที่ตลอดช่วงเวลา T มีสูตรพยากรณ์ค่าจริง Y_{T+l} ที่เวลา T+l จากเวลาปัจจุบัน T ดังนี้

$$\hat{Y}_T(l) = (2 + \frac{\alpha\, l}{1-\alpha})S^{[1]}_T - (1 + \frac{\alpha\, l}{1-\alpha})S^{[2]}_T$$

ซึ่ง

$$S_T^{[1]} = \alpha Y_T + (1-\alpha)S_{T-1}^{[1]}$$
$$S_T^{[2]} = \alpha S_T^{[1]} + (1-\alpha)S_{T-1}^{[2]}$$

การคำนวณ $S_T^{[1]}$ และ $S_T^{[2]}$ ต้องการทราบค่า $S_{T-2}^{[1]}, S_{T-2}^{[2]}, S_{T-3}^{[1]}, \ldots, S_0^{[1]}; S_0^{[2]}$ และดังนั้นต้องเริ่มด้วยค่า $S_0^{[1]}$และ$S_0^{[2]}$ เราประมาณค่า $S_0^{[1]}$และ$S_0^{[2]}$ ได้ดังนี้

$$S_0^{[1]} = \hat{\beta}_0 - (\frac{1-\alpha}{\alpha})\hat{\beta}_1$$

$$S_0^{[2]} = \hat{\beta}_0 - 2(\frac{1-\alpha}{\alpha})\hat{\beta}_1$$

ซึ่ง

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - (\frac{T+1}{2})\hat{\beta}_1$$

$$\hat{\beta}_1 = 12\sum_{t=1}^{T}\frac{(t-(T+1)/2)Y_t}{T^3 - T}$$

2.1.3.วิธีพารามิเตอร์สองตัวของโฮลท์ (Holt's Two Parameter Method)

วิธีการของโฮลท์มีลักษณะคล้ายกับวิธีการปรับให้เรียบสองครั้งแบบเอกซโพเนนเชียล แต่มีลักษณะทั่วไปมากกว่า มีสูตรพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{Y}_T(I) = S_T + I\hat{\beta}_T$$

ซึ่ง

ตัวสถิติปรับระดับ $S_T = \alpha Y_T + (1-\alpha)(S_{T-1} + \hat{\beta}_{T-1})$

ตัวสถิติปรับแนวโน้ม $\hat{\beta}_T = \gamma(S_T - S_{T-1}) + (1-\gamma)\hat{\beta}_{T-1}$

เห็นได้ว่าวิธีการของโฮลท์ใช้พารามิเตอร์ปรับให้เรียบสองตัวคือ α $(0<\alpha<1)$ และ γ $(0<\gamma<1)$ซึ่งนักพยากรณ์จะต้องกำหนดค่าทั้งสองนี้ ในการกำหนดผู้วิเคราะห์สามารถกำหนดเองหรืออาจให้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการพยากรณ์ค้นหาให้เพื่อให้การพยากรณ์มีความคาดเคลื่อนน้อยที่สุดและผู้วิเคราะห์ต้องกำหนดค่าเริ่มต้น S_1และ $\hat{\beta}_1$

2.1.4. วิธีการของวินเตอร์ (Winter's Forecast Method)

เมื่ออนุกรมเวลามีองค์ประกอบฤดูกาล การใช้วิธีการพยากรณ์ที่กล่าวมาทั้งหมดสำหรับการพยากรณ์จะไม่เหมาะสม ควรจะใช้วิธีการพยากรณ์ที่พิจารณาองค์ประกอบฤดูกาลร่วมด้วย วิธีการพยากรณ์ของวินเตอร์ เป็นการขยายผลของวิธีการพารามิเตอร์สองตัวของโฮลท์โดยเพิ่มพารามิเตอร์หรือค่าคงที่อีกหนึ่งตัวรวมเป็นสามตัวคือ ค่าคงที่ปรับให้เรียบระดับ(α_1) ค่าคงที่ปรับ

ให้เรียบสำหรับแนวโน้มหรือ ความชัน(α_2)และค่าคงที่ปรับให้เรียบสำหรับฤดูกาล (α_3) ค่าทั้งสามมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

ตัวแบบอนุกรมเวลาตัวแบบหนึ่งของวินเตอร์ ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบแนวโน้มและฤดูกาลมีสมการดังนี้ และมีชื่อเรียกว่าตัวแบบผลคูณของวินเตอร์

$$Y_t = (\mu_t + \beta_t t)I_t + \varepsilon_t$$

ซึ่ง μ_t, β_t, I_t เป็นพารามิเตอร์แสดงระดับ ความชัน และฤดูกาล ของอนุกรมเวลาตามลำดับ และ ε_t คือความคลาดเคลื่อนสุ่ม โดยมีข้อสมมติพื้นฐานคือ มีค่าเฉลี่ยศูนย์ ความแปรปรวนคงที่ และไม่มีสหสัมพันธ์

ตัวแบบข้างต้นเหมาะสมกับอนุกรมเวลามีการแกว่งหรือการผันแปรของฤดูกาลเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระดับของอนุกรม(ค่าเฉลี่ยของอนุกรม) กล่าวคือ การแกว่งจะมากขึ้นขณะที่ระดับของอนุกรม เพิ่มขึ้นส่วนการผันแปรของ ε_t ไม่ขึ้นอยู่กับระดับของอนุกรม

จากตัวแบบข้างต้น ได้สูตรพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{Y}_t = (\hat{\mu}_t + \hat{\beta}_t t)\hat{I}_{t+1-m}, t = m, m+1, \ldots$$

ซึ่ง

$$\hat{\mu}_t = \alpha_1(Y_t / \hat{I}_{t-m}) + (1-\alpha_1)(\hat{\mu}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1})$$
$$\hat{\beta}_t = \alpha_2(\hat{\mu}_t - \hat{\mu}_{t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{\beta}_{t-1}$$
$$\hat{I}_t = \alpha_3(Y_t / \hat{\mu}_t) + (1-\alpha_3)\hat{I}_{t-m}$$

m = ความยาวของคาบฤดูกาล การคำนวณค่าพยากรณ์ $\hat{Y}_t(I)$ ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของ $\hat{\mu}_t$,$\hat{\beta}_t$ และ $\hat{I}_t$ นอกเหนือจากการกำหนดค่าคงที่ปรับให้เรียบ α_1 ,α_2 ,α_3 และหนทางหนึ่งในการกำหนดค่าเริ่มต้นคือให้

$$\hat{\mu}_m = (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m)/m$$
$$\hat{I}_t = Y_1 / \hat{\mu}_m \qquad \text{สำหรับ } t = 1,2,\ldots,m$$
$$\hat{\beta}_m = 0$$

2.2 <u>วิธีการตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์</u>

วิธีการพยากรณ์อนุกรมเวลาโดยทั่วไป จะมีข้อสมมติฐานข้อหนึ่งคือ อนุกรมเวลา $\{..., Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, ...\}$ ไม่มีสหสัมพันธ์ ดังเช่นวิธีการปรับให้เรียบที่ว่าไม่เป็นจริง นั่นคือ มี หลายกรณีที่อนุกรมเวลา $\{..., Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, ...\}$ มีสหสัมพันธ์ถ้าเป็นเช่นนี้ การใช้วิธีการปรับให้เรียบ หรือวิธีอื่นที่มีข้อสมมติตัวแปรอนุกรมเวลาไม่มีสหสัมพันธ์อาจจะไม่เหมาะสม ทั้งนี้เพราะวิธีการเหล่านี้ไม่ได้นำเอาสหสัมพันธ์ ที่ปรากฏไปใช้ประโยชน์ ในการสร้างตัวแบบพยากรณ์ ฉะนั้นได้มีผู้คิดค้นหาวิธีการสร้างตัวแบบพยากรณ์สำหรับอนุกรมเวลาที่ได้นำเอาสหสัมพันธ์ที่ปรากฏไปวิเคราะใช้ประโยชน์ และโดยทั่วไปวิธีเหล่านี้จะให้ผลพยากรณ์ที่ดีกว่า ในหลายวิธีหล่านี้ วิธีหนึ่งที่เป็นที่รู้จักและใช้กันมากคือวิธี บอกซ์-เจนกินส์

โดยวิธีการบอกซ์-เจนกินส์ จะหาตัวแบบอนุกรมเวลาโดยพิจารณาสหสัมพันธ์ระหว่าง Y ที่ตำแหน่งเวลาหรือคาบเวลา t (Y_t) และ Y ที่ตำแหน่งเวลา หรือคาบเวลาต่างๆ ที่ผ่านมา (Y_{t-2} , Y_{t-1} ,....)เมื่อได้ตัวแบบแล้วตัวแบบนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_t กับY_{t-1} ,Y_{t-2}และจะใช้ตัวแบบนี้พยากรณ์ค่าY_{t+1},Y_{t+2},....ในอนาคต ตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์โดยทั่วไป จะใช้พยากรณ์ค่าในช่วงเวลาข้างหน้าที่เป็นระยะสั้นหรือปานกลาง ทั้งนี้เพราะตัวแบบโดยทั่วไปจะให้ความสำคัญ หรือน้ำหนักมากกว่าข้อมูลอดีตที่ห่างไกลออกไปมากๆ เราอาจจะไม่เคยพบตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์ ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_t กับ Y ที่ห่างไกลกันมากๆ

ลักษณะตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์มาจากการศึกษาวิเคราะห์กระบวนการเชิงเส้นหรือตัวกรองเชิงเส้น(linear filter):

$$Y_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + ... \qquad (2.1)$$

นั้นคือ พิจารณาอนุกรมเวลาหรือค่าสังเกตุ Y_t เกิดจากผลบวกเชิงเส้นของอนุกรมเวลาค่าผิดพลาดสุ่มa_t ,a_{t-1} ,a_{t-2}ซึ่งสมมติว่าแต่ละตัวมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ มีความแปรปรวนคงที่ และไม่มีสหสัมพันธ์กัน หรือมีความแปรปรวนร่วม $Cov(a_t, a_{t-k}) = 0$สำหรับทุกค่า $k \neq 0$และโดยทั่วไปสมมติด้วยว่ามีการแจกแจงแบบปกติ

ในตัวกรองเชิงเส้น หรือตัวแบบเชิงเส้น (2.1)พารามิเตอร์ μ คือค่าระดับค่าเฉลี่ยของ Y_t เมื่ออนุกรมเวลาอยู่ในสภาพคงที่และพารามิเตอร์ $\psi_1, \psi_2, ...$เป็นน้ำหนักที่ให้กับตัวแปรสุ่มa_{t-1} ,a_{t-2},...กระบวนการหรือตัวแบบเชิงเส้น(2.1)จะไม่ให้ประโยชน์ถ้ามีพารามิเตอร์จำนวนอนันต์เพราะฉะนั้นจะสร้างตัวแบบที่ประกอบด้วยพารามิเตอร์จำนวนจำกัด และเพียงพอที่จะอธิบายอนุกรมเวลาที่พิจารณา

2.2.1 ตัวแบบภายใต้ภาวะคงที่ (Stationary Models)

2.2.1.1 ตัวแบบอัตถดถอย[Autoregressive (AR) Models]

จากตัวแบบเชิงเส้น (2.1)พัฒนาตัวแบบเฉพาะกลุ่มหนึ่งเรียกว่า " ตัวแบบอัตถดถอยอันดับ p"หรือกระบวนการอัตถดถอยอันดับp"[Autoregressive Process of order p]แทนด้วยตัวอักษร AR(p)และมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

หรือ

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + a_t \qquad (2.2)$$

โดยให้ $Z_t = Y_t - \mu, Z_{t-1} = Y_{t-1} - \mu, \ldots, c = \mu(1 - \phi_1, -\phi_2 - \ldots \phi_p)$

และ $\phi_1 \phi_2, \ldots, \mu$ เป็นพารามิเตอร์ซึ่งโดยทั่วไปไม่ทราบค่า ต้องประมาณจากข้อมูล

จากตัวแบบ AR(p) ข้างต้นอาจเขียนใหม่ในรูปแบบสั้นๆ :

$$\phi_p(B) Z_t = a_t \qquad (2.3)$$

โดยที่ $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \ldots \phi_p B^p)$

และ $BZ_t = Z_{t-1}, B^2 Z_t = Z_{t-2}, \ldots, B^p Z_t = Z_{t-p}$

เราเรียก B ว่า "ตัวถอยหลังเวลา"

โดยทั่วไปในทางปฏิบัติ อันดับ p จะไม่สูงมากถ้า p = 1,2 เขียนกระบวนการคงที่หรือตัวแบบคงที่ AR(1) และ AR(2)ได้ดังนี้

ตัวแบบ AR(1): $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t$

โดยมีเหงื่อนไขของการเป็นตัวแบบคงที่ ดังนี้ $-1 < \phi_1 < 1$

ตัวแบบ AR(2) $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$

โดยมีเหงื่อนไขของการเป็นตัวแบบคงที่ ดังนี้

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_1 - \phi_2 < 1$$
$$-1 < \phi_2 < 1$$

2.1.2 ตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่[Moving Average (MA) Model]

จากตัวแบบเชิงเส้น(2.1) พัฒนาตัวแบบเฉพาะอีกกลุ่มหนึ่งเรียกว่า "ตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อันดับ q"หรือ"กระบวนการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อันดับ q"[Moving Average Process of order q] แทนด้วยอักษรย่อ MA(q)และมีตัวแบบทั่วไปดังนี้

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (2.6)$$

ตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์มีเงื่อนไขที่ต้องสอดคล้องอีกเงื่อนไขหนึ่งนอกเหนือจากเงื่อนไขคงที่ "ผกผันได้"(invertibility) ซึ่งพบว่าตัวแบบARมีคุณสมบัติผกผันได้เสมอ แต่อาจไม่คงที่ขณะที่ตัวแบบMAมีคุณสมบัติคงที่เสมอแต่อาจจะผกผันไม่ได้ เพราะฉะนั้น ต้องตรวจสอบคุณสมบัติคงที่ในตัวแบบ AR และตรวจสอบคุณสมบัติผกผันได้ในตัวแบบMA

ตัวแบบ MA(1):

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} \text{ โดยมีเงื่อนไขผกผันได้} \qquad -1 < \theta_1 < 1$$

ตัวแบบ MA(2):

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad \text{โดยมีเงื่อนไขผกผันได้}$$

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$_1 - \theta_2 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

2.1.3 ตัวแบบอัตถดถอย-ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ [Autoregressive-Moving Average (ARMA) Model]

ในบางกรณี การใช้ตัวแบบหรือกระบวนการผสมระหว่างตัวแบบ AR และ MA จะเป็นตัวแบบที่ประหยัด แทนการใช้ตัวแบบ AR อันดับสูงๆ ตัวแปรเดียว หรือแทนการใช้ตัวแบบ MAอันดับสูงๆ ตัวแบบเดียวเราจะใช้สัญลักษณ์ARMA (p,q) หมายถึงตัวแบบผสมอัตถดถอยอันดับ p และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อันดับ q และมีรูปแบบดังนี้

$$Y_t = \mu + \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \phi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p (Y_{t-p} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

อันดับ p และ q สำหรับตัวแบบ ARMA จะไม่สูงมากในทางปฏิบัติถ้า p=1 และ q=1 จะได้ตัวแบบ ARMA(1,1) :

$$Y_t = \mu + \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

หรือ

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

โดยมีเงื่อนไขของความคงที่และผกผันได้ดังนี้

$$-1<\phi_1<1,-1<\theta_1<1$$

2.3 ตัวแบบภายใต้ภาวะไม่คงที่ (Nonstationary Models) และตัวแบบ ARIMA

ถ้าข้อมูลอนุกรมเวลาหรือกระบวนการ Y_t ไม่อยู่ในสภาพคงที่ในค่าเฉลี่ย และหรือความแปรปรวน นักพยากรณ์จะต้องแปลงข้อมูลนั้นให้อยู่ในสภาพคงที่ก่อนพิจารณากำหนดตัวแบบ

การแปลงข้อมูลอนุกรมเวลาที่ไม่คงที่ในค่าเฉลี่ย จะใช้วิธีการทำผลต่าง โดยนำข้อมูลมาลบกันได้เป็นข้อมูลชุดใหม่ นอกจากนี้การทำผลต่างดังกล่าว อาจจะต้องทำมากกว่าหนึ่งครั้ง จึงจะทำให้อนุกรมเวลามีค่าเฉลี่ยคงที่ ซึ่งโดยทั่วไปถ้าอนุกรมมีแนวโน้มมักจะทำผลต่างสองครั้งจึงจะคงที่ การทำผลต่างไม่ควรทำหลายครั้งมากเกินความจำเป็น เพราะจะมีผลทำให้ค่าพยากรณ์มีความคลาดเคลื่อนสูง

เมื่ออนุกรมเวลามีสภาพไม่คงที่ หรือไม่เคลื่อนไหวรอบค่าเฉลี่ยคงที่ค่าหนึ่งค่าเดียวจะต้องแปลงข้อมูลที่กล่าวไปแล้ว ฉะนั้น ถ้ามีการทำผลต่าง d ครั้ง จะเขียนตัวแบบผสมเป็นARIMA(Autoregressive Integrated Moving Model) ด้วยอันดับ (p,d,q)มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

ตัวแบบ ARIMA (p,d,q):

$$\phi_p(B)(1-B)^d Y_t = \delta + \theta_q(B)a_t$$

หรือ

$$\phi_p(B)W_t = \delta + \theta_q(B)a_t$$

ซึ่งให้ $W_t = (1-B)^d Y_t$ และ δ (อาจจะมีค่าเท่ากับศูนย์) เป็นพารามิเตอร์แสดงระดับค่าเฉลี่ยคงที่ของอนุกรม W_t และ Y_tเป็นอนุกรมที่ถูกแปลงให้มีความแปรปรวนคงที่แล้ว ถ้าอนุกรมแรกเริ่มไม่คงที่ในความแปรปรวนตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างตัวแบบ ARIMA(p,d,q):

ตัวแบบ ARIMA (1,1,1);

$$(1-\phi_1 B)(1-B)Y_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$

หรือ

$$Y_t = \delta + (1+\phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

หรือ

$$W_t = \delta + \phi_1 W_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, W_t = Y_t - Y_{t-1}$$

ตัวแบบ ARIMA (2,1,0) มีรูปแบบดังนี้

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)(1-B)Y_t = \delta + a_t$$

หรือ

$$W_t = \delta + \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + a_t, W_t = Y_t - Y_{t-1}$$

ตัวแบบ ARIMA (1,2,1) มีรูปแบบดังนี้

$$(1-\phi_1 B)(1-B^2)Y_t = \delta + (1-\theta_1)a_t$$

หรือ $$W_t = \delta + \phi_1 W_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, W_t = (1-B)^2 Y_t$$

2.4 ตัวแบบ ARIMA เมื่อมีองค์ประกอบฤดูกาล

องค์ประกอบที่เป็นฤดูในที่นี้ จะไม่จำกัดเฉพาะการแปรผันของข้อมูลคล้ายคลึงกันในระยะเวลาห่างกัน 1 ปี (คล้ายคลึงกันจากปีหนึ่งไปยังปีหนึ่ง)แต่จะรวมถึงความแปรผันคล้ายคลึงกันในช่วงเวลาห่างอื่นๆ ด้วย

สำหรับอนุกรมเวลาที่มีองค์ประกอบฤดูกาลโดยมีคาบเวลาของฤดูกาล s>1 ตัวแบบอนุกรมเวลาในส่วนที่เป็นฤดูกาลจะมีโครงสร้างเป็นไปได้เหมือนกับองค์ประกอบที่ไม่ใช่ฤดูกาลนั่นคือจะมีตัวแบบ ARIMA ด้วยอันดับ $(P,D,Q)_s$ ซึ่ง P คืออันดับในส่วนของกระบวนการ AR ,Qคืออันดับในส่วนของกระบวนการ MA,และ D คือจำนวนครั้งทำผลต่างอนุกรมเวลาห่างกัน $_s$ คาบเวลา

เมื่อนำองค์ประกอบในส่วนที่ไม่ใช่ฤดูกาล และส่วนที่เป็นฤดูกาลมาผนวกเข้าด้วยกันจะได้ตัวแบบ ARIMA ที่แสดงส่วนประกอบทั่วไป เขียนเป็นสมการได้ดังนี้ ตัวแบบหนึ่งคือตัวแบบในรูปผลคูณ ARIMA $(p,d,q)\,(P,D,Q)_s$

ตัวแบบ ARIMA $(p,d,q)\,(P,D,Q)_s$

$$\phi_p(B)\phi_p(B^S)(1-B)^d(1-B)^D Y_t = \delta + \theta_q(B)\theta_q(B^S)a_t$$

โดยที่ $$\phi_p(B^s) = (1-\phi_s B^s - \phi_{2s} B^{2s} - \ldots - \phi_p B^{Ps})$$

$$\theta_q(B^s) = (1-\theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s} - \ldots - \theta_{qs} B^{qs})$$

4. ขั้นตอนการสร้างตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์ หรือตัวแบบ ARIMA

กรรมวิธีสร้างตัวแบบบอกซ์-เจนกินส์ หรือ ตัวแบบ ARIMA จะมีขั้นตอนใหญ่ๆ ทำนองเดียวกันกับวิธีสร้างตัวแบบการถดถอย กล่าวคือ ประกอบด้วยขั้นตอน

1) กำหนดตัวแบบทดลอง (Identification)

คือ กำหนดตัวแบบที่พิจารณาว่าจะเป็นตัวแบบที่เหมาะสมหรือมีความเพียงพอในเชิงสถิติ

2) จากตัวแบบที่เลือก ประมาณค่าองค์ประกอบหรือค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ (Estimation)

3) วินิจฉัยตัวแบบ (Diagnostic checking) ตัวแบบที่เลือกและประมาณค่าพารามิเตอร์แล้ว อาจยังไม่มีความเหมาะสมเพียงพอในเชิงสถิติจึงควรตรวจสอบวินิจฉัยตัวแบบ

4.1 การกำหนดตัวแบบ ARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$

การกำหนดตัวแบบ ARIMA นักพยากรณ์จะต้องพิจารณากำหนดอันดับ p,d,และq และต้องกำหนดอันดับ P,D,Q ,และ s ด้วยถ้าตรวจพบว่าข้อมูลอนุกรมเวลามีองค์ประกอบฤดูกาล ด้วยคาบฤดูกาล s

อันดับ p และ q คืออันดับของกระบวนการ AR และ MA ในส่วนที่ไม่ใช่ฤดูกาล และ P และ Q คืออันดับของกระบวนการ AR และ MA ในส่วนที่เป็นฤดูกาลสำหรับ d คือ จำนวนครั้งทำผลแตกต่างอนุกรมเวลาเมื่ออนุกรมเวลาในส่วนที่ไม่ใช่ฤดูกาลมีสภาพไม่คงที่ในค่าเฉลี่ย

การพิจารณากำหนดอันดับ (p,d,q) และ $(P,D,Q)_s$ จะพิจารณาแยกจากกันแต่ใช้หลักการพิจารณาเหมือนกันกระบวนการ AR และ MA ต่างมีรูปแบบโครงสร้างเฉพาะสำหรับอันดับ p และ q ของฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ ACF(Autocorrelation Funtion) แทนด้วย ϕ_{kk} ซึ่ง k หมายถึงคาบเวลาห่างระหว่างอนุกรม และเรียกคาบเวลานี้ว่าแล็ก"(lag k) ฉะนั้น ρ_1 หมายถึงอัตสหสัมพันธ์ที่แล็ก 1 หรือ อัตสหสัมพันธ์ของอนุกรมเวลาที่ห่างกัน 1 หน่วย หรือ 1 คาบเวลา (Y_t, Y_{t+1}) ,t=1,2,...,ซึ่งวัดความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างอนุกรมเวลาที่ห่างกัน 1 คาบเวลา และ ρ_2 คืออัตสหสัมพนธ์ของอนุกรมเวลาที่ห่างกัน 2 คาบเวลาสำหรับ (Y_t, Y_{t+2}), t=1,2,...,สำหรับ ϕ_{kk} เป็นอัตสหสัมพนธ์ที่วัดความสัมพันธ์ระหว่างอนนุกรมเวลาที่ห่างกัน k คาบเวลา (Y_t, Y_{t+k}) โดยพิจารณาจากผลกระทบจากอนุกรมเวลา $Y_t, Y_{t+2}, \ldots, Y_{t+k-1}$ เข้ามาด้วย ค่าของ ρ_k และ 0 ต่างมีค่าอยู่ระหว่าง-1 และ 1 ตัวอย่างสูตรของฟังก์ชันเหล่านี้เช่น

กระบวนการ AR(1) :

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + a_t$$
$$\rho_k = \phi^k, \qquad k = 0,1,\ldots$$
$$\phi_{11} = \rho_1 = 0, \phi_{kk}, \qquad k = 2,3,\ldots$$

กระบวนการ MA(1) :

$$Y_t = \mu + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}, \rho_k = 0 \qquad ,k = 2,3,...$$

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}} \qquad ,k = 1,2,...$$

เพราะฉะนั้นการกำหนดอันดับจะประมาณค่า ρ_k และ ϕ_{kk} โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาที่นำมาวิเคราะห์ แทนค่าประมาณด้วย $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ และเรียกว่า "ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ตัวอย่าง"และ "ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ย่อยตัวอย่าง"SACF(Sample Autocorrelation Function)และ "ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ย่อยตัวอย่าง"SPACF Sample Partial Autocorrelation Funtion)

ค่าประมาณ $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ ซึ่งจะคำนวณค่าโดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลามีสูตรทั่วไปดังนี้

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} \qquad ,k = 0,1,2,...$$

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}(\hat{\rho}_{k-j})}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}(\hat{\rho}_j)} \qquad ,k = 2,3,...$$

$$:\hat{\phi}_{k,j} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\hat{\phi}_{k-1,k-j} \qquad (k = 3,4,...; j = 1,2,...,k-1)$$

Y_t =ข้อมูลที่เวลา t

การคำนวณค่าที่ $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ แล็ก k=1,2,...,m เพื่อให้มีจำนวนค่ามากพอที่จะพิจารณาโครงสร้างการแปรผันของอัตสหสัมพันธ์ได้ง่าย จะคำนวณค่า $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ แต่ละประเภทจำนวน m=n/4 โดยประมาณจากค่าประมาณเหล่านี้จะเปรียบเทียบลักษณะแปรผันกับโครงสร้างแปรผันของ $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ ทางทฤษฎีและเลือกตัวแบบ ARIMA ที่โครงสร้างของ $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ เข้ากับโครงสร้าง ρ_k และ ϕ_{kk} ของ ARIMA นั้นมากที่สุด

ด้วยวิธีการเลือกตัวแบบดดยการเปรียบเทียบโครงสร้างแปรผันของค่าตัวอย่าง $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ กับโครงสร้างแปรผันของค่าทางทางทฤษฎี ρ_k และ ϕ_{kk} จึงจำเป็นที่นักพยากรณ์จะต้องทราบลักษณะโครงสร้างเชิงทฤษฎีของ ρ_k และ ϕ_{kk} ของกระบวนการAR,MA และ ARIMA ที่

อันดับต่างๆ เพื่อจะได้เลือกกระบวนการและอันดับ เป็นตัวแบบ ARIMA ทดลอง สำหรับข้อมูลอนุกรมเวลาที่พิจารณา

สรุปลักษณะแปรผันของ ACF และ PACF ของกระบวนการอนุกรมเวลาคงที่สำหรับกระบวนการพื้นฐานดังนี้

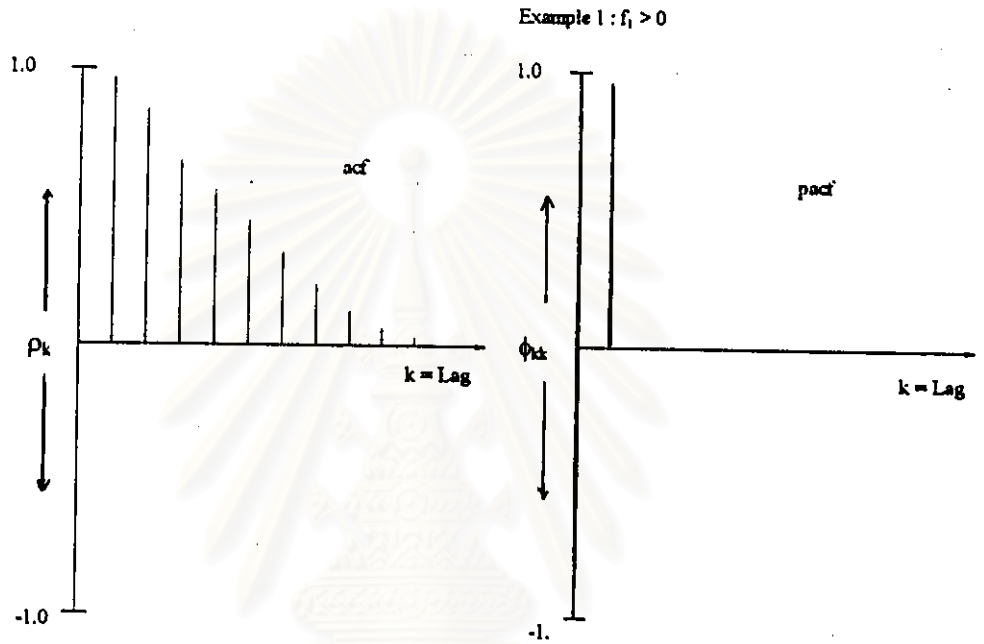
กระบวนการ	ACF	PACF
AR(1)	ค่า ρ_k ลดลงอย่างรวดเร็วขณะที่ k > 1	ค่า ϕ_{kk} จะมีค่าสูงที่ k=1 และเท่ากับ 0 เมื่อ k >1
AR(2)	ค่า ρ_k ลดลงอย่างรวดเร็วขณะที่ k > 1	ค่า ϕ_{kk} จะมีค่าสูงที่ k=1,2 และเท่ากับ 0 เมื่อ k >2
MA(1)	ค่า ρ_k จะมีค่าสูงที่ k = 1 และเท่ากับ 0 เมื่อ k > 1	ค่า ϕ_{kk} ลดลงอย่างรวดเร็ว ขณะที่ k > 1
MA(2)	ค่า ρ_k จะมีค่าสูงที่ k = 1 ,2 และเท่ากับ 0 เมื่อ k > 2	ค่า ϕ_{kk} ลดลงอย่างรวดเร็ว ขณะที่ k > 1
ARMA(1,1)	ค่า ρ_k ลดลงอย่างรวดเร็วหลังจาก แล็ก k = 1	ค่า ϕ_{kk} ลดลงอย่างรวดเร็วหลัง แล็กk=1

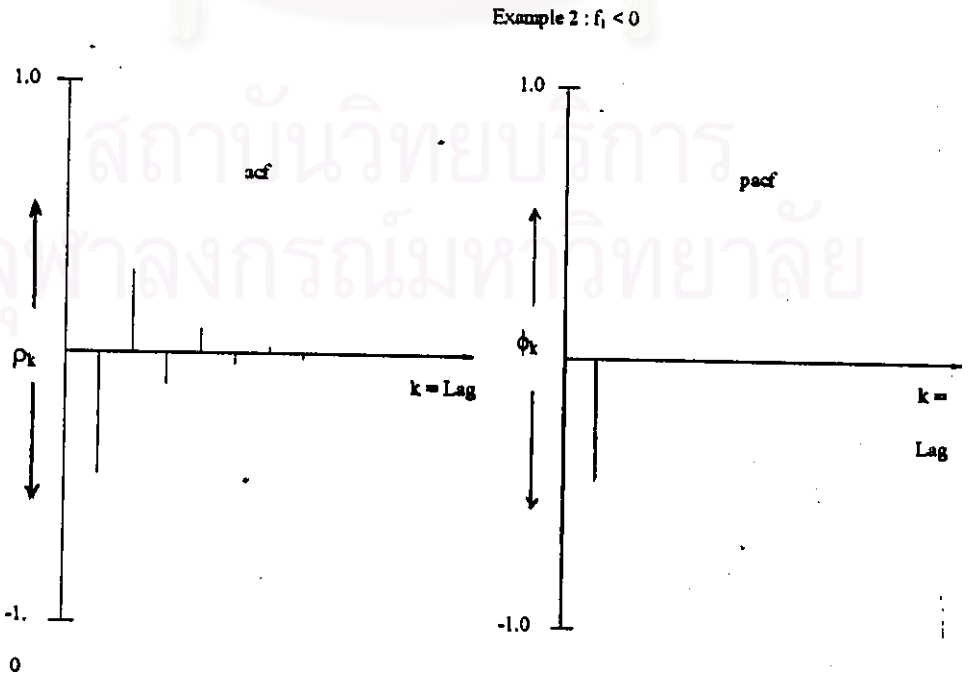
สำหรับกระบวนการ AR,MA, และ ARIMA ที่อันดับอื่นๆ พิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สำหรับกระบวนการ AR,MA และARIMA ที่อันดับอื่นพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน
ลักษณะแปรผันของ ACF และ PACF ของกระบวนการอนุกรมเวลาคงที่สำหรับกระบวนการพื้นฐาน
ดังแสดงด้วยรูปข้างล่างนี้

AR (1)

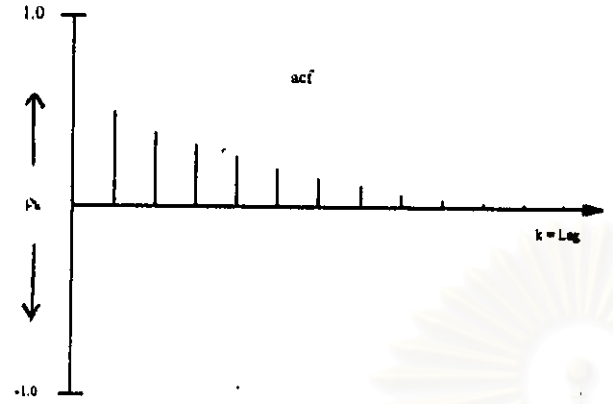


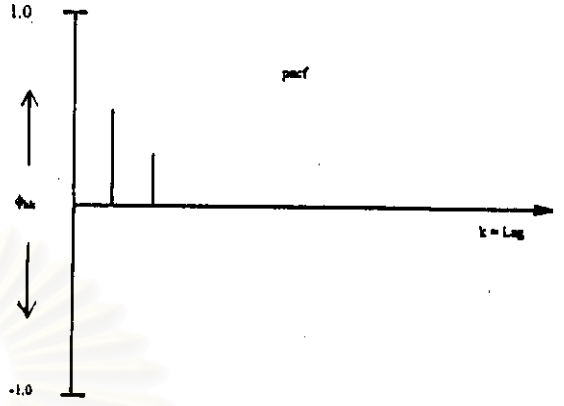


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

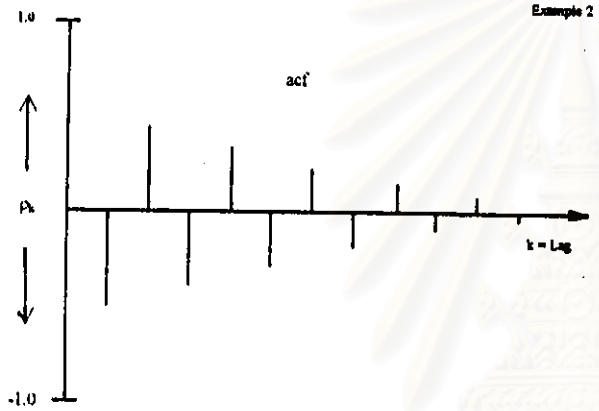
AR (2)

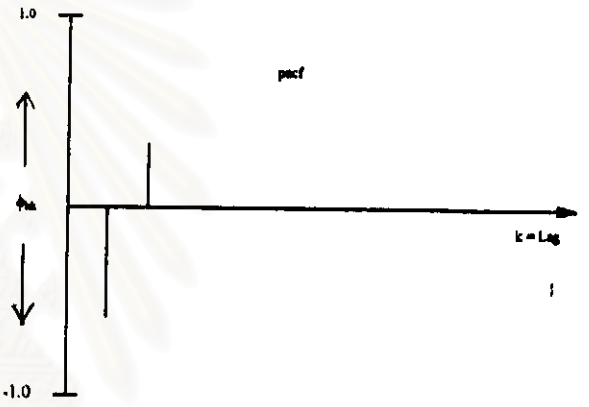
Example 1



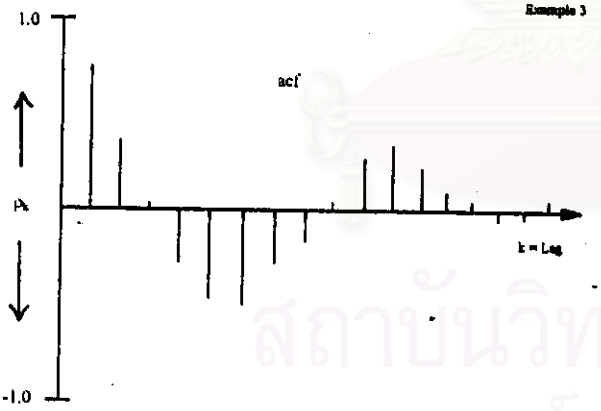


Example 2

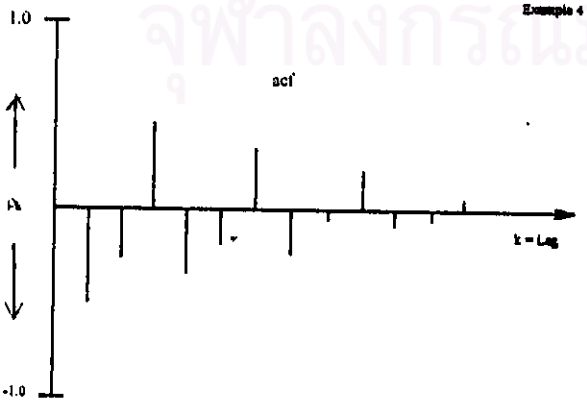


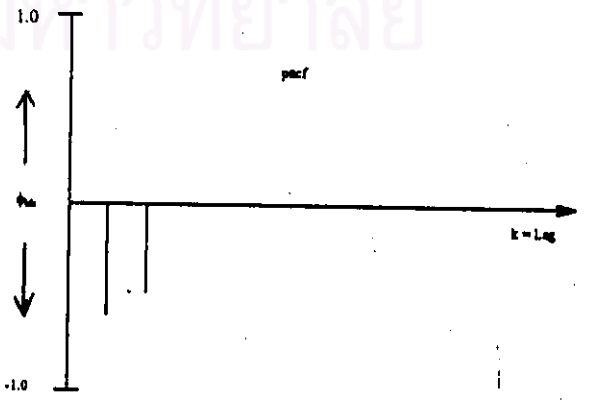


Example 3



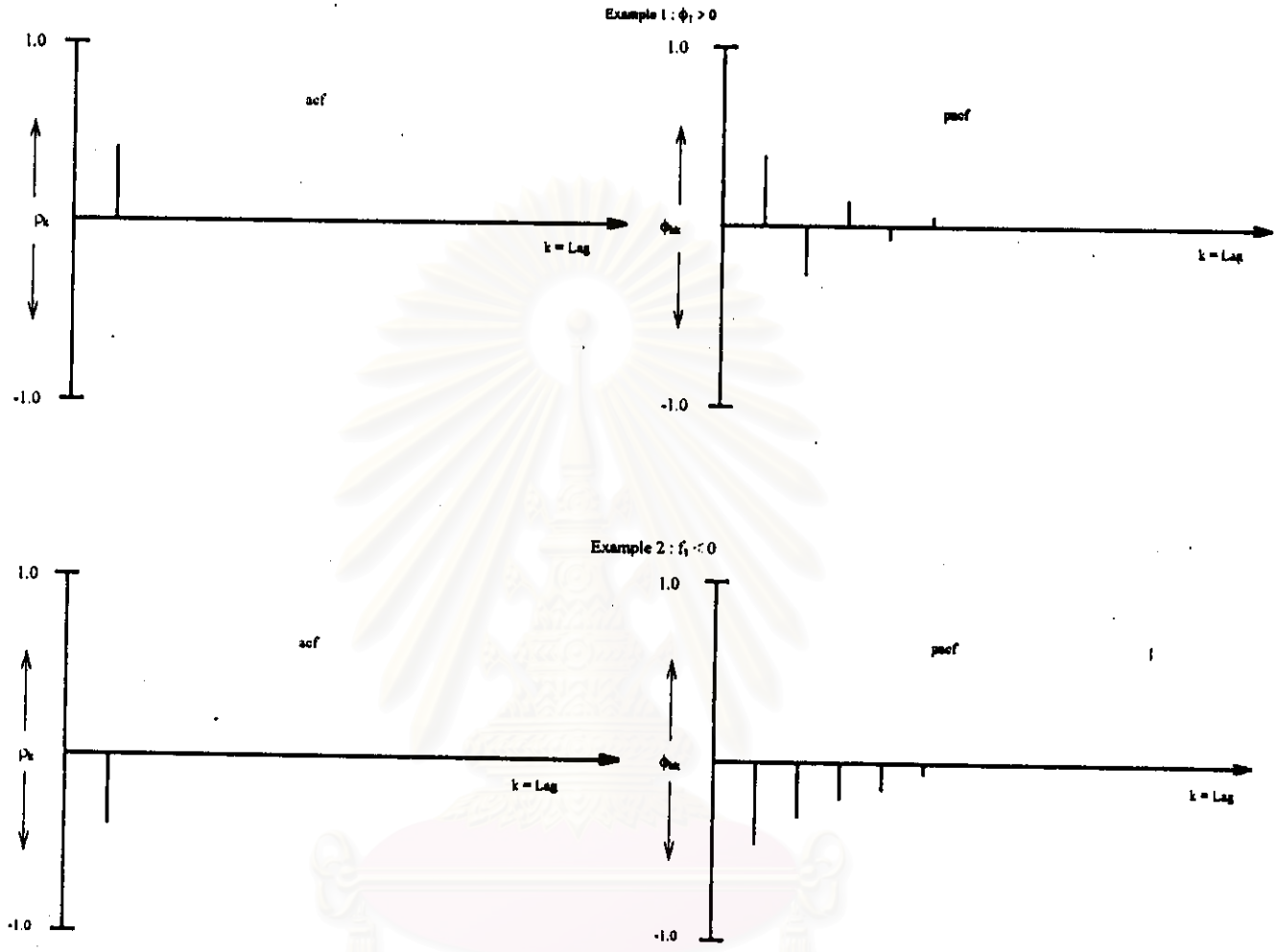
Example 4





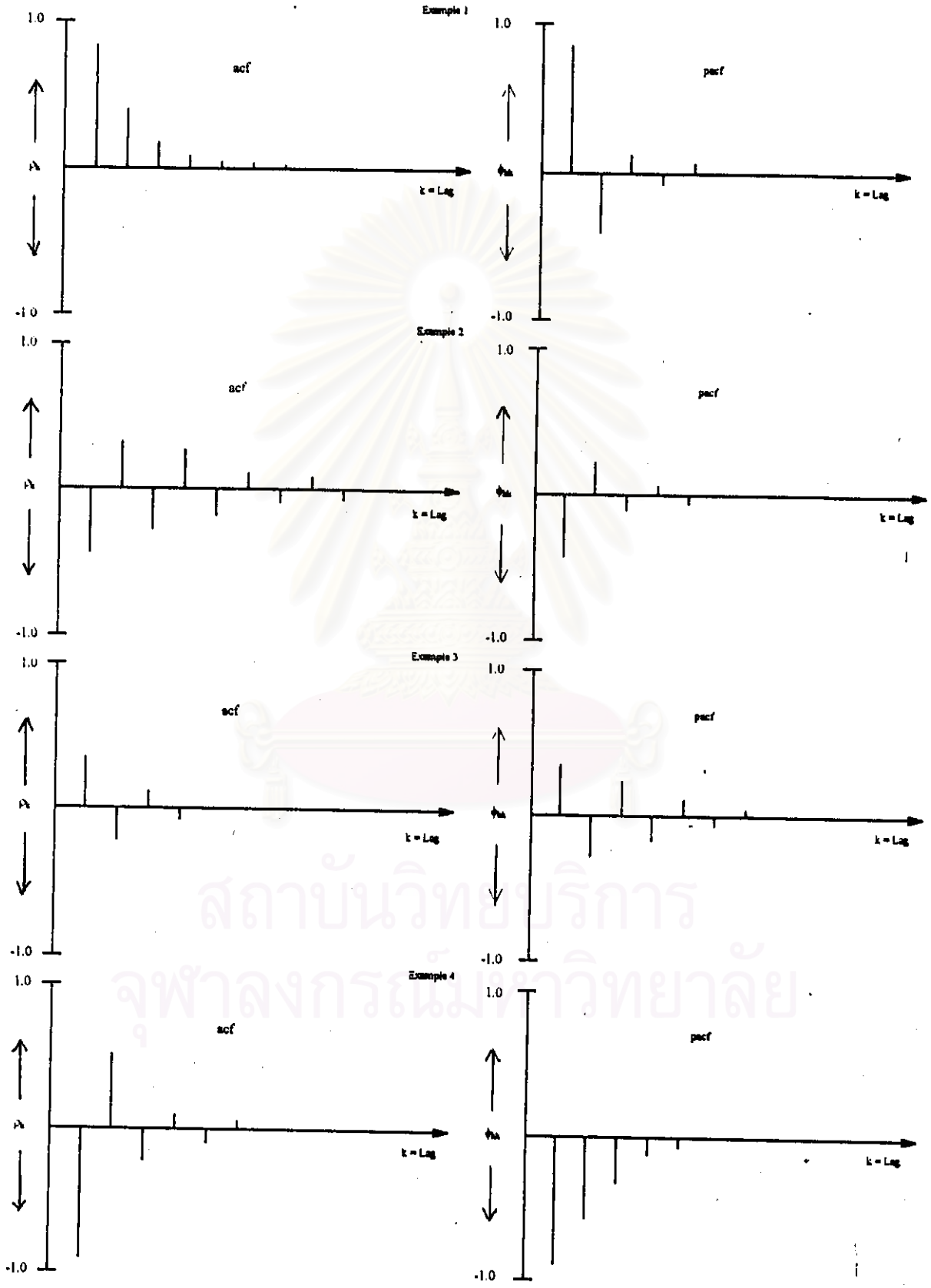
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

MA (1)



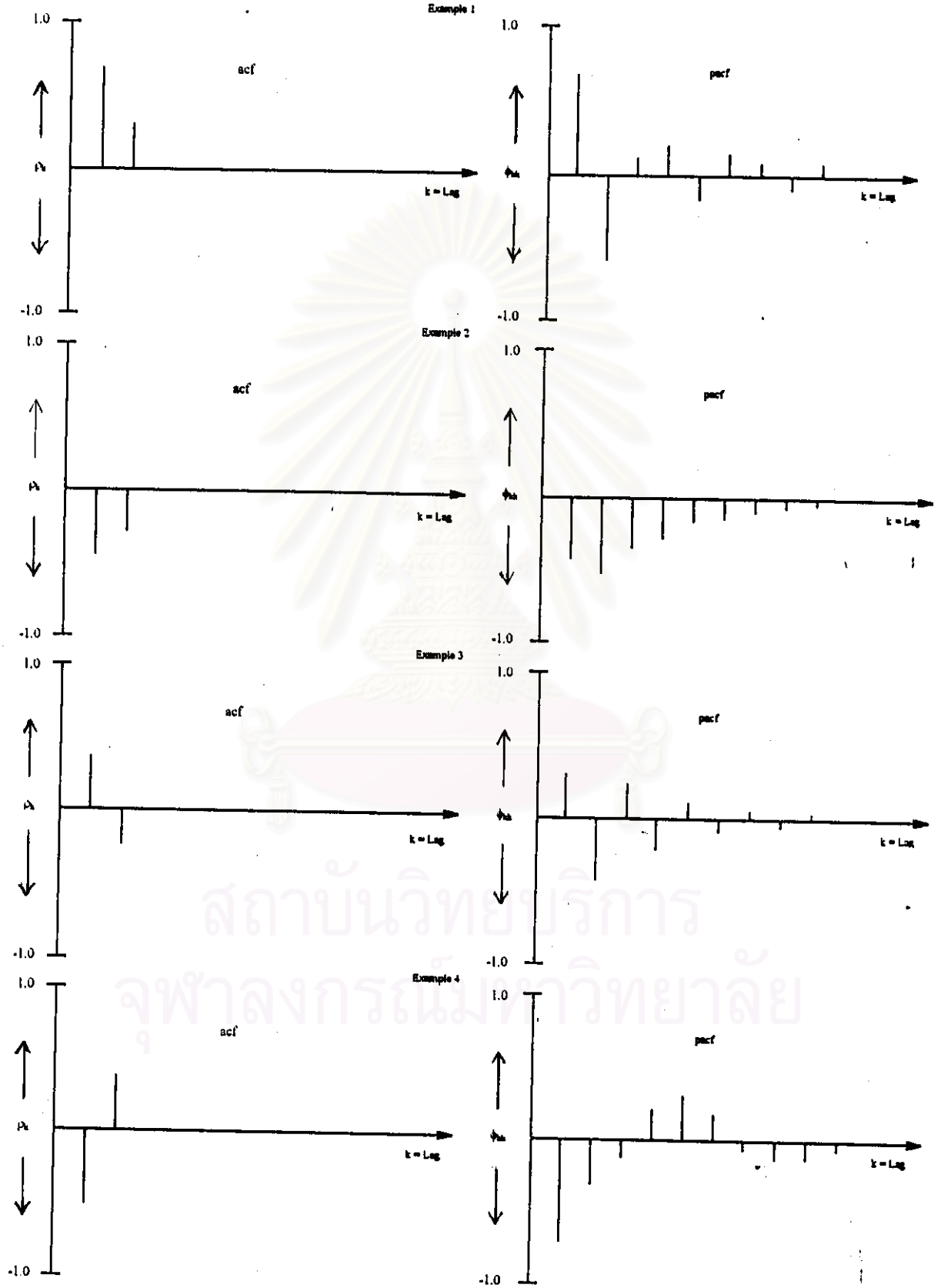
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ARMA (1, 1)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

MA (2)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ในองค์ประกอบที่เป็นฤดูกาลมีคาบเวลา s การกำหนดอันดับ P และ Q พิจารณาทำนองเดียวกันกับองค์ประกอบที่ไม่เป็นฤดูกาล โดยพิจารณาโครงสร้างแปรผันของอัตสหสัมพันธ์ $\hat{\rho}_k$ และ $\hat{\phi}_{kk}$ ที่แล็ก ฤดูกาล s, 2s. 3s,... เปรียบเทียบกับโครงสร้างของ ρ_k และ ϕ_{kk} ทางทฤษฎี ซึ่งมีลักษณะตามที่กล่าวไปแล้วข้างต้น

4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ ARIMA

เมื่อนักพยากรณ์เลือกตัวแบบ ARIMA ทดลองได้แล้ว ขั้นต่อไปคือประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่ปรากฏในตัวแบบ วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์มีด้วยกันหลายวิธี วิธีหนึ่งที่ใช้กันมากคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear least-squares method)

เมื่อใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในเรื่อง ARIMA ในขั้นประมาณค่าพารามิเตอร์นอกจากจะได้ค่าประมาณของพารามิเตอร์แล้ว จะมีค่าของตัวสถิติต่างๆ ปรากฏออกมาด้วยซึ่งจะใช้ประโยชน์ในการทดสอบทางสถิติว่า องค์ประกอบหรือพารามิเตอร์นั้นควรมีอยู่ในตัวแบบหรือไม่ ซึ่งนั่นคือเป็นหนทางหนึ่งในการพิจารณาว่า ตัวแบบที่พิจารณานั้นเหมาะสมเพียงพอหรือไม่ในทางสถิติ

4.3 การวินิจฉัยตัวแบบ ARIMA

ภายหลังที่ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ ARIMA แล้ว นักพยากรณ์ควรจะตรวจสอบตัวแบบก่อนที่จะตัดสินใจนำตัวแบบนั้นไปใช้พยากรณ์ เนื่องจากตัวแบบที่พิจารณาคัดเลือกในขั้นแรกนั้นอาจยังเลือกไม่ถูกต้องเหมาะสม จึงควรวินิจฉัย และถ้าพบว่ายังไม่เหมาะสมควรกลับไปขั้นที่ 1 พิจารณาปรับปรุงแก้ไขตัวแบบใหม่ และดำเนินการขั้นที่ 2 ประมาณค่าและวินิจฉัยในขั้นที่ 3 กรรมวิธีกระทำซ้ำ ๆ เช่นนี้จนกว่าจะได้ตัวแบบที่เหมาะสมเพียงพอในเชิงสถิติ

การวินิจฉัยตัวแบบจะกระทำการตรวจสอบคุณสมบัติเชิงสถิติของค่าผิดพลาดสุ่ม (a_t)และการทดสอบว่า ค่าผิดพลาดสุ่มมีอัตสัมพันธ์หรือไม่ จะเป็นการตรวจสอบที่สำคัญ มากที่สุดในการวินิจฉัยความเพียงพอในเชิงสถิติของตัวแบบ ARIMA ฉะนั้นการตรวจสอบจะคำนวนค่า SACF และ SPACF ของค่าเศษเหลือตกค้าง $e_t = y_t - \hat{y}_t$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ a_t ที่แล็ก k ต่างๆ และทดสอบด้วยค่าของตัวสถิติที t สำหรับทดสอบว่าค่าผิดพลาดสุ่มมีอัตสหสัมพันธ์หรือไม่ที่แต่ละแล็ก k= 1,2,3,...,m และทดสอบอัตสหสัมพันธ์รวมหรือพร้อมกัน k แล็ก ด้วยตัวสถิติไคกำลังสอง (chi-sqquared test) ว่าค่าผิดพลาดไม่มีอัตสหสัมพันธ์ k แล็กแรก นอกจากการวินิจฉัยตัวแบบด้วยการทดสอบเชิงสถิติแล้ว นักพยากรณ์อาจดำเนินการตรวจสอบ

ด้วยวิธีอื่นๆ ด้วยเช่นกัน การเขียนกราฟของเศษเหลือตกค้างกับแกนเวลา ถ้าพบว่าค่าของเศษเหลือตกค้างกระจายเป็นแนวในลักษณะขนานรอบค่าเฉลี่ยศูนย์แสดงเหตุผลได้ว่า ค่าผิดพลาดมีค่าเฉลี่ยศูนย์ และมีค่าแปรปรวนคงที่ แต่ถ้าการกระจายของค่าเศษเหลือตกค้างมีรูปแบบต่างไปจากแนวขนาน ควรพิจารณาปรับปรุงแก้ไขตัวแบบซึ่งอาจจะพบว่าความแปรปรวนยังไม่คงที่ต้องปรับให้คงที่ด้วยวิธีการแปลงข้อมูล เป็นต้น

ผลจากการวินิจฉัยตัวแบบนอกจากจะช่วยตรวจสอบว่าตัวแบบที่กำลังพิจารณาเหมาะสมเพียงพอในเชิงสถิติหรือไม่แล้ว ยังมีแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขตัวแบบด้วยถ้าพบว่าตัวแบบยังไม่เหมาะสม กล่าวคือจากลักษณะของ SACF และ SPACF ของเศษเหลือตกค้างอาจพบว่าควรเพิ่มองค์ประกอบ MA เข้าในตัวแบบ ถ้ายังไม่มีองค์ประกอบ MA หรืออันดับของ MA ในตัวแบบ ให้มากขึ้น หรืออาจพบว่าควรเพิ่มองค์ประกอบ AR หรืออันดับของ AR ในตัวแบบเป็นต้น

จากรายละเอียดที่กล่าวมาแล้วเราสามารถสรุปแผนภูมิโครงสร้างของระบบการพยากรณ์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย