

บทที่ 3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบาย กรณีของการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสน้ำ

ในการอธิบายปรากฏการณ์ของการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสน้ำโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะอาศัยชุดของสมการอนุรักษ์ (conservation equations) ซึ่งประกอบด้วย สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (momentum equations) สมการอนุรักษ์พลังงาน (energy equation) และแบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent model) เมื่อสภาวะการไหลของของไหลในระบบเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งมีรายละเอียดของส่วนต่างๆ ดังต่อไปนี้

3.1 รูปแบบทั่วไปของสมการอนุรักษ์

สมการอนุรักษ์ในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) ในรูปแบบ 3 มิติ

สมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

เมื่อ x, y, z แทนแกนต่างๆ ในระบบพิกัดฉาก

u, v, w แทนความเร็วตามแนวแกนพิกัดฉาก x, y, z ตามลำดับ

ρ คือ ความหนาแน่นของระบบ

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (momentum equations)

x - component

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3.2)$$

y - component

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho wv}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (3.3)$$

z - component

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (3.4)$$

เมื่อ P คือ ความดัน

τ คือ ความเค้น (stress)

f_x, f_y, f_z คือ แรงที่กระทำบนทุกๆ จุดในระบบต่อหน่วยมวล (body force) ในทิศทางตามแนวพิกัด

สมการอนุรักษ์พลังงาน (energy equation)

$$\frac{\partial(\rho \hat{C}_p T)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho \hat{C}_p u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho \hat{C}_p v T}{\partial y} + \frac{\partial \rho \hat{C}_p w T}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

เมื่อ \hat{C}_p คือ ค่าความจุความร้อนเชิงความดันต่อหน่วยมวล

T คือ อุณหภูมิ

q_x, q_y, q_z คือ อัตราการนำความร้อนต่อพื้นที่ที่ตั้งฉากในทิศทางตามแนวพิกัด

3.2 สมมติฐานที่ใช้ในงานวิจัย

ในการศึกษากรณีของการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสน้ำ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณจะตั้งอยู่บนสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. ระบบที่ทำการศึกษายู่ในสภาวะคงตัว (steady state)

2. ของไหลในระบบเป็นแบบ นิวโทเนียน (Newtonian fluid)

จากกฎของนิวตันที่เกี่ยวข้องกับความหนืด (Newton's law of viscosity) กล่าวว่าไว้ว่าแรงเฉือน (shear force) ต่อพื้นที่หรือความเค้นเฉือนเป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์ (gradient) ของความเร็ว โดยจะเรียกของไหลที่มีพฤติกรรมแบบนี้ว่า ของไหลนิวโทเนียน ดังนั้นความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในทิศทางต่างๆ จึงสามารถอธิบายได้ในรูปของความแตกต่างของความเร็วและคุณสมบัติของของไหล ดังนี้

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.6)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.9)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

เมื่อ μ คือ ความหนืดของของไหลในระบบ

λ คือ สัมประสิทธิ์อันดับที่สองของความหนืด (second viscosity coefficient) กำหนดให้มีค่าเท่ากับ [8]

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.12)$$

3. กำหนดให้แรงที่กระทำบนทุกๆ จุดในระบบต่อหน่วยมวล (body forces) มีค่าเฉพาะในแนวแกนพิกัด y เท่านั้น โดยมีค่าเท่ากับแรงลอยตัว (buoyant force) ที่เกิดจากความแตกต่างระหว่างความหนาแน่นของของไหล ดังนี้

$$f_x = 0 \quad (3.13a)$$

$$f_y = \left(\frac{\rho_{ref} - \rho}{\rho} \right) g \quad (3.13b)$$

$$f_z = 0 \quad (3.13c)$$

เมื่อ ρ_{ref} คือ ค่าความหนาแน่นอ้างอิง

g คือ ค่าแรงโน้มถ่วงของโลก มีทิศทางทางกับแกน y

4. กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวของปริมาตร (β) มีค่าเท่ากับ

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (3.14)$$

ดังนั้นจึงสามารถประมาณค่าของผลต่างของความหนาแน่นได้ในรูปแบบของสัมประสิทธิ์การขยายตัวของปริมาตรได้ดังนี้

$$(\rho_{ref} - \rho) \approx \rho \beta (T - T_{ref}) \quad (3.15)$$

เมื่อ T_{ref} คือ ค่าอุณหภูมิ ณ จุดที่ความหนาแน่นมีค่าเท่ากับ ρ_{ref}

5. คุณสมบัติของของไหลในระบบเป็นไปตามกฎของฟูเรียร์ (Fourier's law)

จากกฎของฟูเรียร์ที่เกี่ยวกับการนำความร้อน (Fourier's law of heat conduction) กล่าวว่า ฟลักซ์ของความร้อน (heat flux) เนื่องจากการนำความร้อนจะเป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์ของอุณหภูมิดังนั้นจะได้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.16a)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.16b)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.16c)$$

เมื่อ k คือค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล

6. กำหนดให้ ความหนาแน่นของของไหลในระบบ (ρ), ความหนืดของของไหลในระบบ (μ), ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหลในระบบ (k) และค่าความจุความร้อนของของไหลในระบบ (\hat{C}_p) มีค่าคงที่ โดยประมาณค่าจาก T_{ave} ดังนี้

$$T_{ave} = \left(\frac{\rho_0 w_0 A_0}{\rho_0 w_0 A_0 + \rho_j u_j A_j} \right) T_0 + \left(\frac{\rho_j u_j A_j}{\rho_0 w_0 A_0 + \rho_j u_j A_j} \right) T_j \quad (3.17)$$

เมื่อ ตัวห้อย j คือ คุณสมบัติเริ่มต้นของของไหลอุณหภูมิสูง

ตัวห้อย o คือ คุณสมบัติเริ่มต้นของกระแสน้ำ

A_o, A_j คือ พื้นที่หน้าตัดที่กระแสน้ำและของไหลอุณหภูมิสูงไหลผ่าน ตามลำดับ

สำหรับค่า T_{avg} ทางด้านขวามือของสมการ 3.15 จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ T_{ave} ในสมการ 3.17

ด้วยสมมติฐานข้างต้น สมการอนุพันธ์ที่กล่าวมาในหัวข้อ 3.1 จะสามารถแสดงในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

สมการอนุพันธ์โมเมนตัม

x - component

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.19)$$

y - component

$$\rho \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (3.20)$$

z - component

$$\rho \left(\frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.21)$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho \bar{C}_p \left(\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.22)$$

3.3 การไหลแบบปั่นป่วนและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสแม่น้ำ

ในกรณีที่ระบบมีการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) จะทำให้เกิดการผสมหรือการเคลื่อนที่คล้ายวงน้ำวน (Eddy motion) ในสายหลักของการไหล การเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายในระบบจะมีการเคลื่อนที่สั้นไปมาเมื่อเทียบกับเวลา สมการอนุรักษ์ที่ใช้จึงจะต้องขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent form) ดังนั้นเมื่อจะทำการพิจารณาการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสแม่น้ำในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วนจึงต้องทำการเปลี่ยนสมการ (3.18)-(3.22) ให้อยู่ในรูปของเวลาเฉลี่ย (time-average) โดยทำการกำหนดให้ค่าความเร็วขณะใดๆ (instantaneous velocity), (u, v, w) มีค่าเท่ากับผลรวมของความเร็วเฉลี่ย (time-smoothed velocity), $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ กับความเร็วที่แปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ย (fluctuation velocity), (u', v', w') ดังนี้

$$u = \bar{u} + u' \quad (3.23a)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (3.23b)$$

$$w = \bar{w} + w' \quad (3.23c)$$

เช่นเดียวกับความดันและอุณหภูมิ

$$P = \bar{P} + P' \quad (3.23d)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (3.23c)$$

เมื่อ \bar{u} คำนวณได้จาก

$$\bar{u} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} u \, dt \quad (3.24)$$

$\bar{v}, \bar{w}, \bar{P}$ และ \bar{T} ก็สามารรถคำนวณได้จากสมการในรูปแบบเดียวกับสมการ (3.24)

เมื่อแทนค่าต่างๆ เหล่านี้ลงในสมการ (3.18) – (3.22) ประกอบกับความสัมพันธ์เนื่องจากค่าความเร็วที่แปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ยมิได้ทั้งค่าที่เป็นบวกและค่าที่เป็นลบจึงทำให้ค่าเฉลี่ยของความเร็วจึงทำให้ค่าเฉลี่ยของความเร็วจึงแปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ยมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังสมการ

$$\bar{u}' = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} u' \, dt = 0 \quad (3.25)$$

เช่นเดียวกันกับ $\bar{v}', \bar{w}', \bar{P}'$ และ \bar{T}'

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์ (3.18)–(3.22) ที่อยู่ในรูปของเวลาเฉลี่ยในรูปแบบดังนี้

3.3.1 สมการความต่อเนื่องในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

พบว่าสมการ (3.26) จะอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (3.18) เพียงแต่ u, v, w ที่อยู่ในสมการ (3.18) จะถูกแทนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ตามลำดับ

3.3.2 สมการอนุพันธ์โมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

x - component

$$\left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'\bar{u}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'\bar{u}'}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (3.27)$$

y - component

$$\left(\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{v}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}' \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w}' \bar{v}'}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \quad (3.28)$$

z - component

$$\left(\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w}^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{w}'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}' \bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w}' \bar{w}'}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} \quad (3.29)$$

พบว่าสมการ (3.27) - (3.29) จะมีหน้าตาเหมือนกับสมการอนุพันธ์โมเมนต์ในสมการ (3.19) - (3.21) ตามลำดับ เพียงแต่มีเทอม $\rho \bar{u}' \bar{u}'$, $\rho \bar{u}' \bar{v}'$... ฯลฯ เพิ่มขึ้นมา ซึ่งจะเรียกเทอมเหล่านี้ว่า ความเค้นเรย์โนลด์ (Reynolds stresses) [9] และเมื่อพิจารณาจากหน่วยของเทอมดังกล่าวจะสามารถให้นิยามได้ใหม่ดังนี้

$$\bar{\tau}_{xx}^{(t)} = \rho \bar{u}' \bar{u}' \quad (3.30a)$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{(t)} = \rho \bar{u}' \bar{v}' \quad (3.30b)$$

ฯลฯ

เพื่อที่จะทำให้สมการ (3.27) - (3.29) สามารถที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าในรูปแบบของความเร็ว จึงได้ทำการประมาณค่าของเทอม $\bar{\tau}^{(t)}$ ให้อยู่ในรูปของความเร็วดังตัวอย่าง [9]

$$\bar{\tau}_{xy}^{(t)} = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.31)$$

เมื่อ μ_t คือความหนืดในสถานะที่ของไหลมีการไหลแบบปั่นป่วน (eddy viscosity) ซึ่งไม่ใช่สมบัติทางกายภาพของของไหลที่แท้จริงแต่เป็นค่าที่สมมุติขึ้น ซึ่งจะขึ้นอยู่กับตำแหน่ง ทิศทางและลักษณะของการไหลแบบปั่นป่วน

ดังนั้นเมื่อแทนค่าของ $\bar{\tau}^{(t)}$ ต่างๆ ในลักษณะเดียวกับสมการ (3.31) จะได้สมการอนุพันธ์โมเมนต์ของระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วนอยู่ในรูปแบบดังนี้

x - component

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \mu_t \nabla^2 \bar{u} \quad (3.32)$$

y - component

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} + \mu_t \nabla^2 \bar{v} + \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \quad (3.33)$$

z - component

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} + \mu_t \nabla^2 \bar{w} \quad (3.34)$$

ในการแก้สมการอนุพันธ์โมเมนต์ของระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วนจำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วนเพื่อใช้คำนวณค่า μ_t ที่เพิ่มขึ้นมาในสมการ สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน $k - \varepsilon$

3.3.2.1 แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน $k - \varepsilon$ โดย Launder, B.E. และ Spalding, D.B

Launder, B.E. และ Spalding, D.B [10] ได้เสนอแบบจำลองที่ใช้ในการประมาณค่าความหนืดในสถานะที่ของไหลมีการไหลแบบปั่นป่วนหรือค่า μ_t โดยกำหนดให้ μ_t มีความสัมพันธ์ในรูปแบบของสมการดังนี้

$$\mu_t = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (3.35)$$

เมื่อ k แทนพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความปั่นป่วน (turbulence kinetic energy) และ ε แทนอัตราการกระจายตัวของพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความปั่นป่วน (rate of dissipation of turbulence kinetic energy) ซึ่งตัวแปรทั้งสองสามารถหาค่าได้จากสมการต่อไปนี้ [11]

k - equation

$$\left(\frac{\partial \bar{u}k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}k}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}k}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{\rho \sigma_k} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{\rho} - \varepsilon \quad (3.36)$$

ε - equation

$$\left(\frac{\partial \bar{u}\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\varepsilon}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{\rho \sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{\rho k} G - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.37)$$

เมื่อ

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

ภายหลังจากการทดลองใช้แบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการทดลองที่ได้จากหลายกรณี พบว่าค่าคงที่ที่เหมาะสมสำหรับสมการ (3.35)-(3.37) จะมีค่าดังต่อไปนี้ [12]

C_μ	σ_k	σ_ε	C_1	C_2
0.09	1.0	1.32	1.44	1.92

แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมในการนำไปใช้งานมาก เนื่องจากด้วยชุดของค่าคงที่ข้างต้นสามารถที่จะนำแบบจำลองนี้ไปใช้ได้หลากหลายกรณีโดยไม่ต้องทำการเปลี่ยนแปลงค่าคงที่ [13] แต่สำหรับระบบที่มีอิทธิพลของแรงลอยตัวกลับพบว่ารูปแบบของสมการดังกล่าวไม่สามารถใช้ในการอธิบายได้ดีนัก เพราะในแบบจำลองไม่ได้มีการคิดอิทธิพลที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงลอยตัว ดังนั้นในงานวิจัยนี้ซึ่งมีอิทธิพลของแรงลอยตัวที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิเข้ามาเกี่ยวข้องจึงเลือกใช้แบบจำลอง $k - \varepsilon$ ที่มีการเพิ่มอิทธิพลของแรงลอยตัว ซึ่งเป็นแบบจำลองที่พัฒนาต่อเนื่องมาจากแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้น ดังมีรูปแบบดังนี้ [14]

k - equation

$$\left(\frac{\partial \bar{u}k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}k}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}k}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{\rho \sigma_k} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{\rho} - \varepsilon + G_b \quad (3.38)$$

ε - equation

$$\left(\frac{\partial \bar{u} \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w} \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{\mu}{\rho \sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{\rho k} G - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + C_3 G_b \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.39)$$

เมื่อ

$$G = \mu_i \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

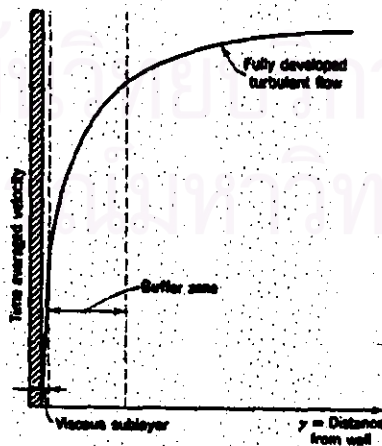
$$G_b = \mu_i \beta g \frac{(\partial T / \partial x_i)}{Pr} \quad \text{โดยที่ } Pr \text{ คือตัวเลขพองเดก (Prandtl number), } Pr = \hat{C}_p \mu / k$$

สำหรับค่าคงที่ที่ปรากฏในสมการ (3.38)–(3.39) จะมีค่าดังนี้ [14]

σ_k	σ_ε	C_1	C_2	C_3
1.0	1.32	1.44	1.92	1.0

3.3.2.1.1 ฟังก์ชันผนัง (wall function)

จากรูปแบบการกระจายตัวของความเร็ว (velocity distribution) ของการไหลของของไหลภายในท่อในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน ดังแสดงในรูป 3.1 พบว่าจะสามารถแบ่ง



รูปที่ 3.1 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในท่อของระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน [8]

การไหลของของไหลออกเป็นสามบริเวณ คือ บริเวณที่อยู่ติดกับผนังท่อจะมีชื่อเรียกว่า "Viscous Sublayer" ที่บริเวณนี้การไหลของของไหลจะมีลักษณะเป็นการไหลเป็นชั้น (Laminar Flow) บริเวณถัดไปเป็นบริเวณที่มีการไหลทั้งเป็นชั้นและกึ่งปั่นป่วนเรียกบริเวณนี้ว่า "Buffer Zone" ถัดจากบริเวณบัฟเฟอร์ห่างออกไปจากผนังท่อจะเป็นบริเวณที่มีการไหลอย่างปั่นป่วนที่เกิดขึ้นอย่างสมบูรณ์เรียกว่า "Fully Developed Turbulent Zone" ที่บริเวณนี้จะสามารถตัดผลของการไหลเป็นชั้นออกได้ ทั้งนี้เพราะผลของการไหลอย่างปั่นป่วนมีมากกว่ามาก

เนื่องจากแบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน $k-\epsilon$ เป็นแบบจำลองที่สามารถอธิบายการไหลในบริเวณ Fully Developed Turbulent Zone ได้เป็นอย่างดี แต่สำหรับบริเวณ Viscous Sublayer และบริเวณ Buffer Zone หรือที่เรียกกันว่า บริเวณใกล้ผนัง (near-wall region) พบว่าแบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน $k-\epsilon$ ไม่สามารถอธิบายได้ดีนัก ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องมีชุดสมการเพื่อใช้ในการอธิบายรูปแบบการไหลของของไหลในบริเวณดังกล่าว โดยจะเรียกชุดสมการนี้ว่า "ฟังก์ชันผนัง" ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้ [11]

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (3.40)$$

โดยที่

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (3.41)$$

และ

$$y^+ = \frac{yu^* \rho}{\mu} \quad (3.42)$$

เมื่อ y คือ ระยะทางที่ห่างจากผนังในแนวตั้งฉากกับผนัง

u คือ ความเร็วที่ขนานกับผนัง

u^* คือ friction velocity มีค่าเท่ากับ $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ เมื่อ $\tau_w = \frac{1}{2} f \rho u^2$; f คือ friction factor

κ คือ ค่าคงที่ของ Von Karman ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามความขรุขระของผนัง

E คือ ค่าบ่งบอกถึงความขรุขระของผนัง

ในกรณีของผนังเรียบค่า κ จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.42 และ E มีค่าเท่ากับ 9

สมการ (3.40) เป็นสมการที่รู้จักในนาม “logarithmic law of the wall” ซึ่งจะใช้ได้ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

$$5 < y^+ < 70$$

สำหรับพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความปั่นป่วน บริเวณใกล้ๆ ผนัง สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$k_w = C_\mu^{1/2} u \quad (3.43)$$

เมื่อ k_w คือพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความปั่นป่วน บริเวณใกล้ๆ ผนัง

อัตราการกระจายตัวของพลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความปั่นป่วนที่บริเวณใกล้ๆ ผนัง สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_w^{3/2}}{\kappa y} \quad (3.44)$$

3.3.3 สมการอนุรักษ์พลังงานในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

$$\left(\frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{u} \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{v} \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{w} \bar{T}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{u}' T'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{v}' T'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{C}_p \bar{w}' T'}{\partial z} \right) = k \nabla^2 \bar{T} \quad (3.45)$$

พบว่าสมการ (3.45) จะมีหน้าตาเหมือนกับสมการอนุรักษ์พลังงานดังสมการ (3.22) แต่มีเทอม $\rho \bar{u}' T'$, $\rho \bar{v}' T'$, $\rho \bar{w}' T'$ เพิ่มขึ้นมา ซึ่งสามารถให้นิยามได้ดังนี้

$$\rho \bar{u}' T' = - \frac{\mu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (3.46a)$$

$$\rho \bar{v}' T' = - \frac{\mu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (3.46b)$$

$$\rho \bar{w}' T' = - \frac{\mu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (3.46c)$$

ดังนั้นสมการอนุพันธ์พลังงานในกรณีการไหลแบบบีบอัดจะมีรูปแบบดังนี้

$$\rho \hat{C}_p \left(\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} \right) = \left(k + \frac{\mu \hat{C}_p}{Pr} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.47)$$

จากสมการที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นสามารถสรุปได้ว่าการอธิบายปรากฏการณ์ของการปล่อยน้ำร้อนลงสู่กระแสน้ำโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะใช้สมการความต่อเนื่องดังสมการที่ (3.26) สมการอนุพันธ์โมเมนตัมดังสมการที่ (3.32)-(3.34) แบบจำลองการไหลแบบบีบอัด $k-\epsilon$ ดังสมการที่ (3.38)-(3.39) และสมการอนุพันธ์พลังงานดังสมการที่ (3.47) ซึ่งสมการทั้งหมดจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ ในการแก้ชุดสมการในลักษณะดังกล่าวจะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical) ซึ่งจะมีรายละเอียดของวิธีการคำนวณและเทคนิคที่ใช้ในบทถัดไป

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย