การคำนวณเชิงตัวเลขของการไหลแบบราบเรียบโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม
ในพิกัดกระชับขอบเขต

นายณัฐพล โชคบุญมงคล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2551

NUMERICAL CALCULATION OF LAMINAR FLOW USING FINITE VOLUME METHOD
IN BODY-FITTED COORDINATES

Mr. Nattapol Chokeboonmongkol

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2008

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคำนวณเชิงตัวเลขของการไหลแบบราบเรียบโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในพิกัดกระชับขอบเขต
โดย	นายณัฐพล โชคบุญมงคล
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อศิ บุญจิตราดุลย์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

ณัฐพล โชคบุญมงคล : การคำนวณเชิงตัวเลขของการไหลแบบราบเรียบโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในพิกัดกระชับขอบเขต. (NUMERICAL CALCULATION OF LAMINAR FLOW USING FINITE VOLUME METHOD IN BODY-FITTED COORDINATES) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ. ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์, 76 หน้า

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านช่องทางไหลที่มีลักษณะซับซ้อน การคำนวณแบ่งเป็นสองขั้นตอนได้แก่ การสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ในส่วนของการสร้างกริดนั้น กริดเริ่มต้นจะถูกสร้างด้วยวิธีเชิงพีชคณิตจากการประมาณค่าในช่วงแบบ Transfinite interpolation methods (TFI) จากกริดที่สร้างได้ในขั้นตอนแรกนี้ จะสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของรูปร่าง (Geometric coefficient) เพื่อใช้ในการคำนวณในขั้นตอนต่อไป และในส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนั้นจะทำการคำนวณบนพื้นที่การคำนวณ (Computational space) โดยการแปลงสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้มาอยู่บนพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) จากนั้นทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อแปลงให้อยู่ในรูปสมการเชิงพีชคณิต สุดท้ายทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี Tri-diagonal matrix algorithm (TDMA)

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง หรือผลการคำนวณของผู้ที่ทำมาแล้ว สำหรับปัญหาที่นำมาเปรียบเทียบคือปัญหาของไหลในแผ่นคู่ขนาน การไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channel การไหลแบบราบเรียบผ่าน Sinusoidal wall และสุดท้ายการไหลแบบราบเรียบผ่านผนังรูปคลื่น เนื้อหาในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างแม่นยำ

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ณัฐพล โชคบุญมงคล
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2551

4870584521 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS : BODY-FITTED / FINITE VOLUME / TFI

NATTAPOL CHOKEBOONMONGKOL : NUMERICAL CALCULATION OF LAMINAR FLOW USING FINITE VOLUME METHOD IN BODY-FITTED COORDINATES. ADVISOR : ASST. PROF. SOMPONG PUTIVISUTISAK, Ph.D., 76 pp.

This thesis presents a finite volume method based on the body-fitted coordinates (BFC) for solving laminar flow problems with complex geometries. The work can be divided into two parts : grid generation and the finite volume method. For the grid generation part, the initial grid is generated by the transfinite interpolation (TFI). Geometric coefficients are calculated from this part. For the finite volume method, the computational space is used for calculation. The governing equations in Cartesian coordinates must be transformed into those in body-fitted coordinates and then discretized by the finite volume method. Finally, the algebraic equation system is solved by the line-by-line TDMA method.

The computer program is validated by solving simple problems, of which exact solutions or other numerical results are available. The validate cases are flow in parallel channel, flow in gradual-expansion channel, flow in sinusoidal and flow in wave-wall. The accurate results show that the finite volume method based on body-fitted coordinates can accurately solve problems in complex geometries.

Department : Mechanical Engineering	Student's Signature ....
Field of Study : Mechanical Engineering	Advisor's Signature ....
Academic Year : 2008	

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.อศิ บุญจิตราดุล และรองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$\vec{A}^{(i)}$	เวกเตอร์พื้นที่
A_j^i	ตัวประกอบพื้นที่พิกัดคาร์ทีเซียน
a	แอมพลิจูด
a_{nb}, a_P	สัมประสิทธิ์สมการดิสครีไทซ์
b	พจน์ไม่ตั้งฉากในสมการพีชคณิต
C_f	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน
D	ความกว้างของช่องทางการไหล
$\vec{e}_i$	เวกเตอร์ Covariant 1 หน่วย, $\vec{e}_1 = \vec{e}_\xi$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\eta$
$\vec{e}^i$	เวกเตอร์ Contravariant 1 หน่วย, $\vec{e}^1 = \vec{e}^\xi$, $\vec{e}^2 = \vec{e}^\eta$
$\vec{e}_{(i)}$	Contravariant basis vector
$\vec{e}^{(i)}$	Covariant basis vector
F_{nn}, F_{nn}^i	$\left(\rho\hat{U}^i\right)_{nn}$ การไหลเชิงมวลด้วยวิธีการพาที่ผิว nn
G^{ij}	สัมประสิทธิ์ Geometric diffusion
g_j^i	Mixed metric tensor component
g_{ij}	Covariant metric tensor component
g^{ij}	Contravariant metric tensor component
h_i	$\sqrt{g_{ii}}$
$\vec{i}_k, \vec{i}^k$	เวกเตอร์ 1 หน่วย ในพิกัดคาร์ทีเซียน
$\hat{I}$	เวกเตอร์ฟลักซ์ Convective and diffusive
$\hat{I}_O^i$	Orthogonal flux
$\hat{I}_{NO}^i$	Non-orthogonal flux
J	จาโคเบียนเมตริกซ์, $\sqrt{g}$
J_i^j	$\dfrac{\partial x_j}{\partial \xi_i}$

$\bar{J}_i^j$	$\dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$
L	ความยาวของโดเมน
$\vec{n}$	Normal vector
p	ความดัน
$\overline{PE}$	ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด E
$\overline{Pe}$	ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด e
Re	Renolds number
S_ϕ	Source term
$\vec{U}$	เวกเตอร์ความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน $\vec{U}=u\vec{i}+v\vec{j}$
$\hat{U}^i$	ตัวประกอบ normal flux
U_i'	Covariant component ของ $\vec{U}$
U'^i	Contravariant component ของ $\vec{U}$
V_i	Physical covariant velocity projection
V^i	Physical contravariant velocity projection
V_i'	$\vec{U}_{nb} \cdot \vec{e}_{i_P}$
x_i	พิกัดคาร์ทีเซียน, $x_1 = x,\ x_2 = y$
α	under-relaxation factor
α^{ij}	$Jg^{ij}\sqrt{g_{jj}}$
δ_j^i, δ_{ij}	Kronecker delta
Γ	สัมประสิทธิ์การแพร่
ξ	ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระชับขอบเขต
η	ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระชับขอบเขต
μ	Dynamic viscosity

τ	Skin-friction
ρ	ความหนาแน่น
ψ	Stream function
Σ	สัญลักษณ์การบวก

บทที่ 1

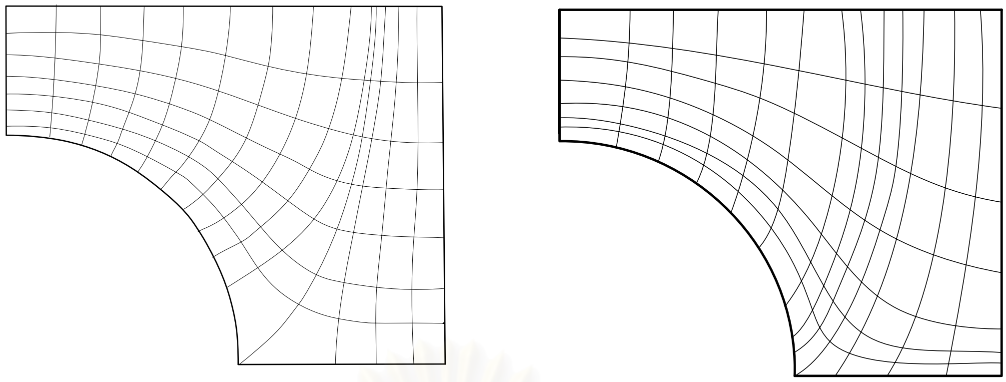
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันปัญหาการไหลต่างๆในทางวิศวกรรม มักจะเกิดขึ้นในโดเมนที่มีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อน การนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) มาใช้ร่วมกับการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) หรือที่เรียกว่า พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational fluid dynamics, CFD) สามารถลดค่าใช้จ่ายและลดระยะเวลาในการแก้ปัญหาลงไปอย่างมากเมื่อเทียบกับวิธีการทดลอง อีกทั้งสามารถทำนายผลในกรณีที่ไม่สามารถทำการทดลองได้ หรือทำได้ยาก อาทิเช่น การไหลของเลือดในเส้นเลือด และการไหลที่เกิดขึ้นในที่ที่อันตรายหรือในสถานที่ที่มีอุณหภูมิสูงในงานอุตสาหกรรม การใช้พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณช่วยให้การออกแบบอุปกรณ์ต่างๆ มีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้น ทั้งนี้ การที่เครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันมีความสามารถในการคำนวณที่รวดเร็วขึ้นและมีหน่วยความจำที่มากขึ้น ก็มีส่วนช่วยให้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีทางตัวเลขนี้ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวาง

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (Finite volume method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขชนิดหนึ่งที่นิยมนำไปใช้ในการแก้ปัญหาการไหล และการถ่ายเทความร้อน เนื่องจากจุดเด่นในเรื่องของความสะดวกและความเหมาะสมในการแก้สมการแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งแต่เดิมนั้นไม่นิยมนำมาใช้ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อน เนื่องจากข้อจำกัดของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมซึ่งต้องที่ทำการคำนวณบนพิกัดมาตรฐาน (Conventional coordinates) เช่น พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinates) หรือพิกัดทรงกลม (Spherical coordinates) จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ไขได้ โดยการประยุกต์ใช้พิกัดกระชับขอบเขต (Body-fitted coordinates) ซึ่งวิธีนี้ถูกเลือกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

ลักษณะของกริดบนพิกัดกระชับขอบเขตที่ประยุกต์ใช้กับโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อนสามารถแบ่งได้สองลักษณะคือ กริดที่มีลักษณะโค้งแบบตั้งฉากกัน (Orthogonal curvilinear) และกริดที่มีลักษณะโค้งแบบไม่ตั้งฉากกัน (Non-orthogonal curvilinear) ดังแสดงในรูปที่ 1.1



(a)ลักษณะโค้งแบบตั้งฉากกัน (Orthogonal curvilinear)

(b)ลักษณะโค้งแบบไม่ตั้งฉากกัน (Non-orthogonal curvilinear)

รูปที่ 1.1 กริดที่สร้างบนพิกัดกระชับขอบเขต

กริดที่มีลักษณะโค้งแบบตั้งฉากกัน มีขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยาก และใช้เวลามากกว่าการสร้างกริดบนพิกัดทั่วไป (Regular coordinates) ซึ่งกริดลักษณะนี้สามารถสร้างขึ้นโดยใช้พิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งตั้งฉากกัน (Orthogonal curvilinear coordinates) ซึ่งกริดลักษณะนี้มีข้อดีคือ ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความแม่นยำมากกว่ากริดที่สร้างโดยพิกัดทั่วไป แต่มีข้อเสียคือบริเวณที่เป็นมุม เส้นกริด (Grid line) จะไม่สามารถโค้งเข้าสู่มุมได้เนื่องจากข้อจำกัดของกริดที่ต้องตั้งฉากกัน (Orthogonality constraint) ทำให้ผลการคำนวณบริเวณดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนมาก และเสียเวลาในการคำนวณ เนื่องจากการกระจุกตัวกันของกริดในบริเวณอื่นที่ไม่ต้องการความละเอียด

กริดที่มีลักษณะโค้งแบบไม่ตั้งฉากกันซึ่งมีข้อดีคือมีขั้นตอนการสร้างกริดที่ง่ายและใช้เวลาน้อยกว่ากริดแบบตั้งฉากเนื่องจากไม่มีข้อจำกัดของกริดที่ต้องตั้งฉากกัน ทำให้กริดลักษณะนี้มีความยืดหยุ่นสูง จึงสามารถโค้งตามโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อนได้ ดังนั้น บริเวณที่เป็นมุมเส้นกริดจะสามารถโค้งเข้าไปหาได้ จึงทำให้ผลการคำนวณมีความแม่นยำมากขึ้น ส่วนข้อเสียคือ สมการครอบคลุมที่ประยุกต์ใช้จะมีความซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากต้องเพิ่มพจน์ของความโค้งเข้าไปในสมการ

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมร่วมกับพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากกัน โดยมีขั้นตอนหลักๆ 4 ขั้นตอนคือ การสร้างกริด การแปลงพิกัด การดิสครีไทซ์ และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ขั้นตอนแรกคือการสร้างกริดเพื่อแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมเล็กๆ โดยวิธีการสร้างกริดเชิงพีชคณิต (Algebraic method) ขั้นตอน

ที่สองคือ การแปลงสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้เป็นพิกัดกระชับขอบเขต ขั้นตอนที่สามคือ การดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมด้วยวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต ส่วนขั้นตอนสุดท้ายคือ การหาผลเฉลยของสมการพีชคณิตโดยพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขเริ่มต้นต่างๆ

1.2 การศึกษาผลงานวิจัยที่ผ่านมา

การใช้พิกัดกระชับขอบเขตเริ่มได้รับความนิยมตั้งแต่ 20 ปีที่แล้ว โดยมีผู้ศึกษาและประยุกต์ใช้พิกัดกระชับขอบเขตกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในหลายๆ วิธี ซึ่งในช่วงแรกนั้น Thompson et al. (1974, 1975, 1982a) และ Thompson (1982b) ได้เสนอแนวความคิดพื้นฐานและหลักการเกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขตว่าสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ ต่อมาได้มีการพัฒนาวิธีการสร้างกริดขึ้นมามากมายเพื่อให้มีความเหมาะสมกับปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ การสร้างกริดสามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีมีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง โดยวิธีเชิงพีชคณิต และวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมนำมาใช้ในการสร้างกริดมาก ซึ่ง Gordon and Hall (1973) ได้เริ่มใช้วิธีนี้ในการสร้างกริดบนพิกัดโค้งเป็นคนแรก จากนั้นมีผู้วิจัยหลายท่านนำวิธีนี้ไปใช้ในการสร้างกริด ต่อมา มีการกำหนดตัวประกอบความเร็วขึ้น นั่นคือการใช้ตัวประกอบความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นตัวแปรตามทำให้สามารถแก้สมการโมเมนตัมได้โดยตรง โดยที่ตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียนจะถูกระบุไว้ที่มุมของปริมาตรควบคุมส่วนค่าความดันจะอยู่ตรงกลางซึ่งวิธีดังกล่าวมีนักวิจัยหลายท่านได้นำไปใช้ เช่น Vanka et al. (1980), Shyy and Correa (1985), Shyy et al. (1985), Shyy and Vu (1986), Shyy and Braaten (1986), Braaten and Shyy (1986a, 1986b) , Correa and Shyy (1987) และ Shyy (1987) เป็นต้น สำหรับการใช้ตัวประกอบความเร็ว Contravariant ร่วมกับกริดแบบเยื้อง (Staggered-grid) บนพิกัดกระชับขอบเขต อาทิเช่น Maliska and Raithby (1986) ได้ทำการคำนวณการไหลโดยใช้พิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากกัน Demirdzic et al. (1987) และ Dvinsky (1987) ทำการคำนวณการไหลแบบราบเรียบ และการไหลแบบปั่นป่วน ใน 2 มิติ Malin et al. (1985) คำนวณการไหลแบบราบเรียบ และการไหลแบบปั่นป่วนใน 3 มิติ Karki (1986) และ Karki and Patankar (1988a, 1988b) ทำการคำนวณการไหลแบบราบเรียบทั้งแบบอัดตัวได้และแบบอัดตัวไม่ได้รวมไปถึงการไหลแบบ Transonic และ Supersonic

Peric (1985) ได้ใช้ตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียนร่วมกับกริดแบบไม่เยื้อง เพื่อประหยัดหน่วยความจำในการคำนวณ โดยใช้วิธีการประมาณค่าของพจน์การพาที่บริเวณผิวรอยต่อของปริมาตรควบคุมของ Rhie and Chow (1983) เพื่อหลีกเลี่ยงปรากฏการณ์ Checkerboard effect ซึ่งวิธีที่คล้ายกันนี้ ได้ถูกนำไปพัฒนาต่อโดย Burns and Wilkes (1987) จากนั้น Karki (1985) ได้เริ่มใช้ตัวประกอบความเร็วที่เปลี่ยนทิศไปตาม

ทิศทางของพิกัดที่เปลี่ยนไป ซึ่งเรียกว่า ตัวประกอบความเร็วแบบ Physical covariant ร่วมกับกริดแบบเยื้องในการคำนวณ วิธีดังกล่าวเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและถูกนำไปพัฒนาต่อโดย Melaaen (1990)

ปัจจุบันการใช้พิกัดกระชับขอบเขตยังเป็นที่นิยมอยู่ เช่น Rosa and Pinho (2005) ได้ทำการคำนวณการไหลแบบราบเรียบผ่าน Diffuser โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ร่วมกับพิกัดกระชับขอบเขตแบบไม่ตั้งฉากกัน Oztop (2005) ทำการคำนวณการถ่ายเทความร้อนและการไหลผ่านผนังรูปคลื่น และปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางในท่อโดยใช้กริดแบบอิลิปติกควบคู่กับการใช้ขั้นตอน SIMPLEM ในการแก้ปัญหา

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.3.1 เพื่อศึกษาวิธีการสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้ในระบบพิกัดกระชับขอบเขต

1.3.2 พัฒนาแบบจำลองเพื่อใช้สำหรับการคำนวณการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดกระชับขอบเขต

1.3.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุมเพื่อให้สามารถทำนายการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดกระชับขอบเขตได้

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 ศึกษาวิธีการสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้ในระบบพิกัดกระชับขอบเขต

1.4.2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแก้ปัญหาการไหลแบบราบเรียบ 2 มิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตได้

1.4.3 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาการไหลแบบราบเรียบแบบง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการทดลอง หรือผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 เพิ่มความรู้ความเข้าใจในระบบพิกัดกระชับขอบเขต การสร้างกริด และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้สำหรับพิกัดกระชับขอบเขต

1.5.2 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นไปใช้แก้ปัญหาการไหล และสามารถนำไปประยุกต์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาอื่นๆ ในรูปร่างที่ซับซ้อนได้

1.6 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.6.1 ศึกษาพฤติกรรมการไหล ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วย สมการนาเวียร์-สโตกส์ และสมการความต่อเนื่อง สำหรับการไหลแบบราบเรียบ ที่อัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติที่มีสภาวะคงตัว

1.6.2 ศึกษาระบบพิกัดกระชับขอบเขตและการสร้างกริดสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน

1.6.3 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมที่สามารถนำมาใช้ในระบบพิกัดกระชับขอบเขต

1.6.4 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยนำไปแก้ปัญหาการไหลแบบราบเรียบที่มีผลเฉลยแม่นตรง และผลจากการทดลองที่มีผู้ศึกษามาก่อน เพื่อให้มั่นใจว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นมีความถูกต้องและน่าเชื่อถือ

1.6.5 วิเคราะห์และสรุปผล ที่เกิดขึ้นจากการคำนวณพร้อมทั้งข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นแนวทางในการประยุกต์ใช้ในงานวิจัยระดับสูงต่อไป

1.6.6 จัดพิมพ์วิทยานิพนธ์

บทที่ 2
ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขต

ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตคือการสร้างกริด ซึ่งกริดที่ต้องการนั้นจะต้องมีระยะห่างที่เหมาะสม จากนั้นจึงนำสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบจากพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขต โดยการใช้กฎลูกโซ่ จากนั้นจึงทำการดิสครีไทซ์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม สุดท้ายจึงเป็นการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี TDMA

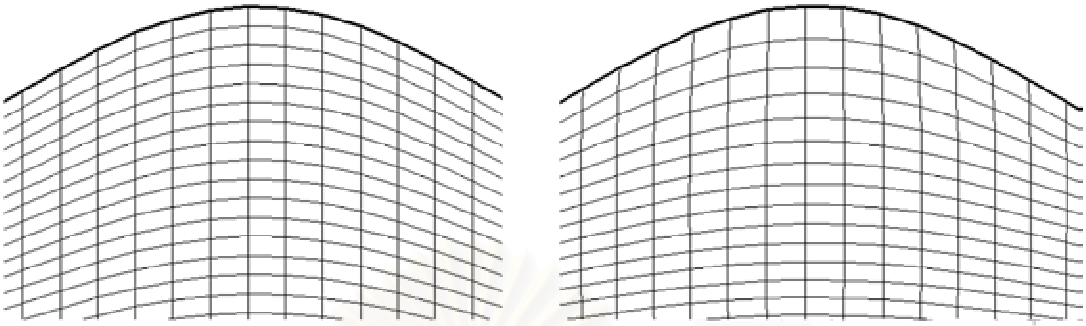
2.1 การสร้างกริด

การสร้างกริด (Grid generation) คือกระบวนการแบ่งพื้นที่โดเมนที่สนใจออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยๆ จำนวนมากที่เรียกว่าเซลล์ (Grid cell) เชื่อมต่อระหว่างจุดกริด (Grid points) ด้วยเส้นกริด (Grid lines) ซึ่งกระบวนการสร้างกริดนี้มีความสำคัญเนื่องจากเป็นขั้นตอนแรกสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้วิธีการสร้างกริด ด้วยวิธีเชิงพีชคณิต (Algebraic method) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้ เริ่มแรก กำหนดจุดกริดลงบนเส้นขอบของโดเมนที่คำนวณ หลังจากนั้นจึงหาตำแหน่งจุดกริดที่อยู่ภายในโดเมน โดยการใช้การประมาณค่าแบบ Transfinite interpolation methods (TFI) ซึ่งข้อดีของการสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิต และการประมาณค่าแบบ TFI คือ สามารถสร้างกริดได้ง่ายและรวดเร็ว เนื่องจากไม่ต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ และสามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้อย่างเหมาะสม สำหรับรายละเอียดการสร้างกริดด้วยวิธี TFI สามารถหาดูได้จากหนังสือที่เกี่ยวข้องกับ Computational Techniques for Fluid Dynamics เช่น Fletcher (2003), Ferziger and Peric (1999) หรือจากงานวิจัยที่ผ่านมา เช่น Melaaen (1990), จุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์ (2549) เป็นต้น

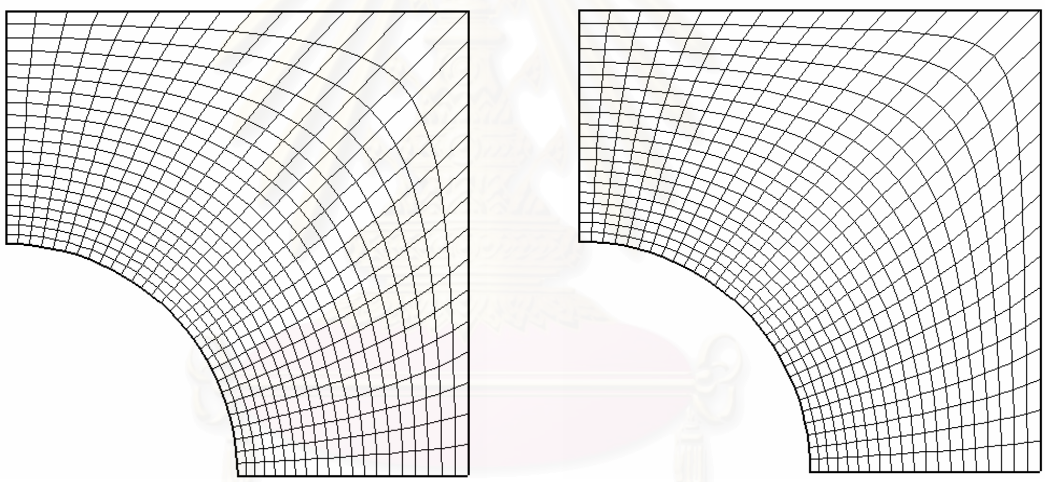
การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก สามารถทำได้โดยใช้สมการลาปลาซ (Laplace equation) หรือสมการปัวส์ซอง (Poisson equation) ซึ่งการสร้างกริดด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกนี้มีข้อเสียที่เห็นได้ชัดคือ การกระจายของเส้นกริดบริเวณที่เป็นมุมของโดเมน หรือบริเวณที่เป็นส่วนโค้ง จะมีความห่างจากขอบของโดเมนปัญหา ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ทำให้การคำนวณบริเวณนั้นไม่แม่นยำ ซึ่งเมื่อเทียบกับการสร้างกริดด้วยวิธี TFI จะเห็นได้ว่า กริดแบบ TFI สามารถเข้าใกล้ขอบของโดเมนได้ดีกว่า สำหรับกรณีการสร้าง

กริดแบบอิลิปติกที่ใช้สมการปัวส์ซองมาช่วยในการควบคุมเส้นกริด ซึ่งทำให้การสร้างกริดเข้ามุมได้ดีมากขึ้น แต่ก็ยังไม่เป็นที่น่าพอใจ ดังแสดงในรูปที่ 2.2



(a) กริดแบบ TFI (b) กริดแบบอิลิปติก

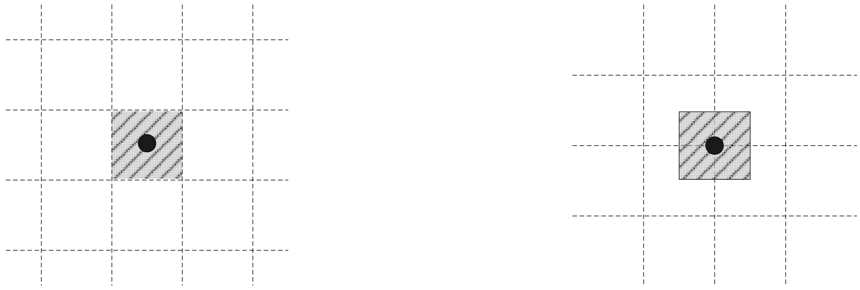
รูปที่ 2.1 การสร้างกริด



(a) สมการลาปลาซ (b) สมการปัวส์ซอง

รูปที่ 2.2. ลักษณะของกริดแบบอิลิปติก

การวางตัวของปริมาตรควบคุมย่อยบนโดเมนสามารถทำได้ 2 วิธีด้วยกัน ได้แก่ การวางตัวแบบ Cell-centered และการวางตัวแบบ Vertex-centered ซึ่งการวางตัวแบบ Cell-centered นั้นปริมาตรควบคุมจะวางบนเส้นกริดและ Node จะวางไว้ตรงกลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ตรงกลางระหว่างเส้นกริดดังแสดงในรูปที่ 2.3(a) ซึ่งจะต่างกับการวางตัวแบบ Vertex-centered ที่มีการวาง Node ไว้ตรงจุดตัดกันของเส้นกริด และขอบของปริมาตรควบคุมจะอยู่ตรงกลางระหว่างเส้นกริด ดังแสดงในรูปที่ 2.3(b) โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะเลือกใช้การวางตัวแบบ Cell-centered เนื่องจากวิธีนี้มีข้อดีคือสามารถประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ง่าย เนื่องจากเงื่อนไขขอบของโดเมนจะตรงกันกับเงื่อนไขขอบของปริมาตรควบคุม

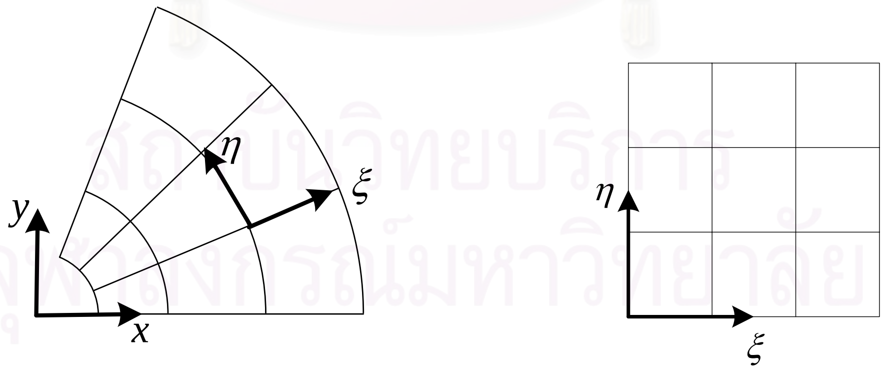


(a) แบบ Cell-centered (b) แบบ Vertex-centered

รูปที่ 2.3 การวางตัวของปริมาตรควบคุม (a) (b)

2.2 การแปลงพิกัด

สำหรับในระบบพิกัดกระชับขอบเขต การคำนวณเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สามารถทำได้ทั้งบนพื้นที่ทางกายภาพ (Physical space) ดังแสดงในรูปที่ 2.4(a) และบนพื้นที่ที่ทำการแปลงพิกัดแล้วซึ่งเรียกว่า พื้นที่การคำนวณ (Computational space) ดังแสดงในรูปที่ 2.4(b) โดยทั้ง 2 วิธีนี้มีความแตกต่างกันคือ การคำนวณบนพื้นที่ทางกายภาพกริดจะมีลักษณะที่โค้ง ทำให้การดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมต้องทำในเซลล์ที่บิดเบี้ยว ซึ่งยากต่อการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหา แต่พื้นที่ ปริมาตร และเวกเตอร์ตัวแปรอิสระจะสามารถอธิบายความหมายทางกายภาพได้ ในขณะที่การคำนวณบนพื้นที่การคำนวณจะกระทำบนเซลล์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจะทำการคำนวณได้กว่า



(a) พื้นที่ทางกายภาพ (Physical space) (b) พื้นที่การคำนวณ (Computational space)

รูปที่ 2.4 การแปลงพิกัดจากพื้นที่กายภาพเป็นพื้นที่การคำนวณ

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะคำนวณหาผลเฉลยบนพื้นที่การคำนวณ โดยหลังจากสร้างกริดแล้ว เราจะคำนวณค่าตัวประกอบของรูปร่าง (Geometric coefficient) จากลักษณะของ กริด จากนั้นจึงทำการแปลงสมการครอบคลุมจากพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ $(x_i)=(x,y)$ ไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขตมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i)=(\xi,\eta)$ โดยอาศัยกฎลูกโซ่ แล้วทำการดิสครีไทซ์และแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตบนกริดสี่เหลี่ยมธรรมดา เมื่อได้ผลเฉลยแล้วสามารถส่งค่ากลับไปยังตำแหน่งต่างๆ ของจุดกริดบนพิกัดคาร์ทีเซียนได้ทันที ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

รูปแบบทั่วไปของสมการครอบคลุมพื้นฐาน (Governing equations) สำหรับปัญหาการไหลแบบสองมิติในพิกัดคาร์ทีเซียนสามารถแสดงได้ในรูปของตัวแปร ϕ ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}}_{\text{Convection Term}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}_{\text{Diffusion Term}}+\underbrace{S_\phi}_{\text{Source Term}} \tag{2.2}$$

โดยที่ Γ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ (Diffusion coefficient)

ซึ่งมีสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ในแนวแกน y และสมการความต่อเนื่อง คือ

x-momentum equation

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+S_u \tag{2.3}$$

y-momentum equation

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+S_v \tag{2.4}$$

Continuity equation

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{2.5}$$

พิจารณาสองพจน์แรกทางด้านขวาของสมการ (2.2) คือพจน์การแพร่ (Diffusion term) เมื่อใช้กฎลูกโซ่สามารถแปลงพิกัดสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{2.6}$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อแปลงพิกัดแล้วก็ยังติดตัวแปร x ($\frac{\partial\xi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial\eta}{\partial x}$) อยู่จึงใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง Physical space และ Computational space ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\xi} \tag{2.7}$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่าง Physical space และ Computational space คือ

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x}\\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial\eta} & -\frac{\partial y}{\partial\xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\xi}\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

โดยที่ J คือเมตริกซ์จาโคเบียน ซึ่งมีค่าดังนี้

$$J(\xi,\eta)=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} \tag{2.9}$$

และในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาพจน์การแพร่พจน์ที่สองของสมการ (2.2) โดยใช้กฎลูกโซ่แปลงสมการ พร้อมทั้งใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง Physical space และ Computational space ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\xi} \tag{2.10}$$

พิจารณาพจน์เชิงอนุพันธ์ $\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}$ และ $\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}$ ในสมการ (2.7) และ (2.10) ทำการแปลงพิกัดตามขั้นตอนเดิม ได้ดังนี้

$$\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{J}\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{1}{J}\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} \tag{2.11}$$

$$\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{1}{J}\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{1}{J}\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi} \tag{2.12}$$

แทนค่าสมการ (2.11) และ (2.12) กลับลงในสมการ (2.7) และ (2.10) จะได้สมการพจน์การแพร่ของสมการครอบคลุมพื้นฐานที่ผ่านการแปลงพิกัดแล้วดังนี้

$$\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}+\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu C_1}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu C_3}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) \tag{2.13}$$

โดยที่ค่า C_1, C_2 และ C_3 คือ

$$C_1=\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 \tag{2.14}$$

$$C_2=\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi} \tag{2.15}$$

$$C_3=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 \tag{2.16}$$

สำหรับพจน์ที่ยังไม่ได้แปลงพิกัดคือ พจน์การพา (Convection term) ทางซ้ายมือของสมการ (2.2) ทั้ง 2 พจน์ สามารถแปลงพิกัดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial x}=\\&\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\rho u\phi)\frac{\partial y}{\partial\eta}-(\rho v\phi)\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left((\rho v\phi)\frac{\partial x}{\partial\xi}-(\rho u\phi)\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

สำหรับพจน์ความดันของสมการโมเมนตัมในแนวแกน x และ y สามารถแปลงพิกัดได้ดังนี้

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\left(\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\left(\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\left(\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) \tag{2.19}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าพจน์การแพร่สมการ (2.13) และพจน์การพาสมการ (2.17) กลับลงในสมการ (2.2) จะได้สมการครอบคลุมการไหลสำหรับสองมิติในรูปตัวแปร ϕ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(pu\phi\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\left(pv\phi\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(pv\phi\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\left(pu\phi\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\Gamma C_1}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\frac{\Gamma C_2}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\Gamma C_3}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}-\frac{\Gamma C_2}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)+JS_\phi \quad (2.19)$$

ด้วยวิธีการแปลงพิกัดนี้ จะสามารถแปลงพิกัดสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x แนวแกน y และสมการความต่อนเนื่องได้ดังนี้

x-momentum equation

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(puu\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\left(pvu\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(pvu\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\left(puu\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mu C_1}{J}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu C_3}{J}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) -\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)+JS_u \quad (2.20)$$

y-momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\rho uv\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\left(\rho vv\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(\rho vv\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\left(\rho uv\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mu C_1}{J}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu C_3}{J}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{\mu C_2}{J}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) +\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)+JS_v \quad (2.21)$$

และสมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(pu\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\left(pv\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(pv\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\left(pu\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)=0 \quad (2.22)$$

2.3 สัมประสิทธิ์ของรูปร่างและตัวประกอบของความเร็ว

สัมประสิทธิ์ของรูปร่างและตัวประกอบของความเร็วนี้ มีความเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดซึ่งสัมประสิทธิ์เหล่านี้คือ Covariant metric tensor component $\left(g_{ij}\right)$, Contravariant metric tensor component $\left(g^{ij}\right)$ และ Mixed tensor component $\left(g^{i}_{j}\right)$ ซึ่งสามารถนิยามสัมประสิทธิ์ทั้งสามในรูปของเทนเซอร์ได้ดังนี้

Covariant metric tensor component

$$g_{ij} = \vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = J_i^k J_j^k \tag{2.23}$$

Contravariant metric tensor component

$$g^{ij} = \vec{e}^{(i)} \cdot \vec{e}^{(j)} = \bar{J}_k^i \bar{J}_k^j \tag{2.24}$$

Mixed tensor component

$$g^i_j = \vec{e}^{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = \bar{J}_k^i J_j^k = \delta_j^i \tag{2.25}$$

เมื่อ $\vec{e}_{(i)}$ คือ Covariant basis vector โดย $\vec{e}_{(i)} = \dfrac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \vec{i}_k = J_i^k \vec{i}_k$

$\vec{e}^{(i)}$ คือ Contravariant basis vector โดย $\vec{e}^{(i)} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \vec{i}_k = \bar{J}_k^i \vec{i}_k$

และ δ_j^i คือ Kronecker delta $\left(\delta_j^i = 0; i \neq j\right)$ และ $\left(\delta_j^i = 1; i = j\right)$

สำหรับเวกเตอร์ความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียนสามารถแยกตัวประกอบเป็นเวกเตอร์ความเร็ว Covarian หรือ Contravariant ได้โดยใช้นิยามของ Basis vector ดังนี้

$$\vec{U} = U_i' \vec{e}^{(i)} = U'^i \vec{e}_{(i)} \tag{2.26}$$

เมื่อ $\vec{U}$ คือเวกเตอร์ความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน โดย $\vec{U} = u_i \vec{i} = u\vec{i} + v\vec{j}$

U_i' คือตัวประกอบ Covariant ของ $\vec{U}$

U'^i คือตัวประกอบ Contravariant ของ $\vec{U}$

ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบความเร็วแบบต่างๆ (คาร์ทีเซียน, Covariant และ Contravariant) สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

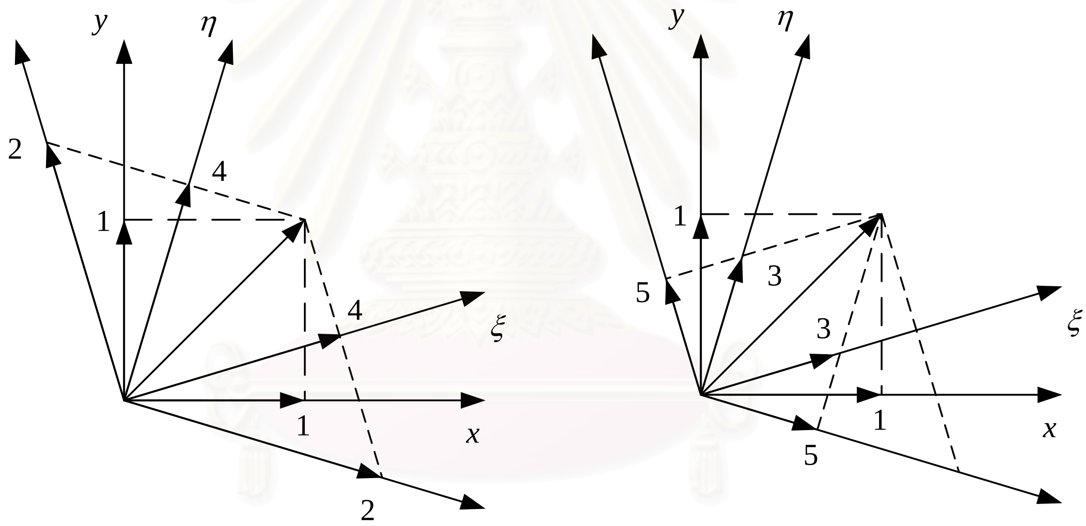
$$U'_i = J_i^j u_j = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} u_j \tag{2.27}$$

$$U'^i = \bar{J}_j^i u_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} u_j \tag{2.28}$$

$$U'_i = g_{ij} U'^j = J_i^k J_j^k U'^j \tag{2.29}$$

$$U'^i = g^{ij} U'_j = \bar{J}_k^i \bar{J}_k^j U'_j \tag{2.30}$$

ซึ่งทิศทางและขนาดของตัวประกอบความเร็วเหล่านี้แสดงในรูปที่ 2.5



1. Cartesian component, u_i
2. Covariant component, U'_i
3. Contravariant component, U'^i
4. Covariant projection, V_i
5. Contravariant projection, V^i

รูปที่ 2.5 ทิศทางและขนาดของตัวประกอบความเร็วแบบต่างๆ ใน 2 มิติ

เมื่อนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{e}_i = \dfrac{\vec{e}_{(i)}}{\left|\vec{e}_{(i)}\right|}$ และ $\vec{e}^i = \dfrac{\vec{e}^{(i)}}{\left|\vec{e}^{(i)}\right|}$ มาช่วยในการนิยามตัวประกอบความเร็วแบบ Covariant และ Contravariant จากนั้นจึงแทนค่าตัวประกอบความเร็ว Velocity component ด้วย Velocity projection ตามแนวแกน (เส้นหมายเลข 4 ในรูปที่ 2.5) หรือตั้งฉากกับพื้นผิว (เส้นหมายเลข 5 ในรูปที่ 2.5) จะได้

Covariant projection

$$V_i = \vec{U} \cdot \vec{e}_i = \left(\frac{u_k J_i^k}{\sqrt{g_{ii}}} \right)_{\text{no summation over } i} \tag{2.31}$$

Contravariant projection

$$V^i = \vec{U} \cdot \vec{e}^i = \frac{\vec{U} \cdot \vec{A}^{(i)}}{\left|\vec{A}^{(i)}\right|} = \left(\frac{u_k \cdot A_k^i}{\left|\vec{A}^{(i)}\right|} \right)_{\text{no summation over } i} \tag{2.32}$$

เมื่อ $\vec{A}^{(i)}$ คือเวกเตอร์พื้นที่

$\sqrt{g_{ii}}$ คือ $\left|\vec{e}^{(i)}\right|$ ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์ h_i

A_k^i คือ $J \cdot \bar{J}_k^i$

เมื่อนำค่า U_i' จากสมการ (2.27) ลงไปแทนค่า $u_k J_i^k$ ในสมการ (2.32) จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่าง Physical covariant velocity projection กับ Covariant velocity components ได้ดังนี้

$$V_i = \frac{u_k J_i^k}{\sqrt{g_{ii}}} = \left(\frac{U_i'}{\sqrt{g_{ii}}} \right)_{\text{no summation over } i} \tag{2.33}$$

จากความสัมพันธ์ V_i ในสมการ (2.33) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$U_i' = \left(V_i \sqrt{g_{ii}} \right)_{\text{no summation over } i} \tag{2.34}$$

จากสมการ (2.26), (2.34) และค่า $\vec{e}^{(i)}$ ในสมการ (2.25) จะสามารถหาค่าตัวประกอบความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียนได้ดังนี้

$$\vec{U} = \left(V_i \sqrt{g_{ii}} \right) \left(\bar{J}_k^i \cdot \vec{i}_k \right) \tag{2.35}$$

และแทนค่า $\bar{J}_k^i = \frac{A_k^i}{J}$ จะสามารถหาค่าตัวประกอบความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียนจาก Physical covariant velocity projections ได้ดังนี้

$$u_k = V_i \sqrt{g_{ii}} \frac{A_k^i}{J} \tag{2.36}$$

ตัวประกอบ Normal flux $\left(\hat{U}^i\right)$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\hat{U}^i = \vec{\mathrm{U}} \cdot \vec{\mathrm{A}}^{(i)} = JU'^i \tag{2.37}$$

หรือ

$$\hat{U}^i = \vec{\mathrm{U}} \cdot \vec{\mathrm{A}}^{(i)} = u_j A_j^i \tag{2.38}$$

ค่า $\hat{U}^i$ ในรูปของความเร็ว Covariant projection สามารถหาได้จากการนำค่า U'^i จากการแทนค่าสมการ (2.30) ลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\hat{U}^i = Jg^{ij}U'_j \tag{2.39}$$

และนำค่า U'_j ในสมการ (2.34) ลงในสมการ (2.39) จะได้ค่า $\hat{U}^i$ ในรูปของความเร็ว Covariant projection ดังนี้

$$\hat{U}^i = \alpha^{ij} V_j \tag{2.40}$$

เมื่อ $\alpha^{ij} = \left(Jg^{ij}\sqrt{g_{jj}}\right)_{\text{no summation over } j}$

2.4 สมการครอบคลุมสำหรับการแก้ปัญหาการไหล

ในหัวข้อที่ 2.2 ได้ทำการแปลงพิกัดเสร็จเรียบร้อยแล้ว ดังนั้นสมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการไหลที่แปลงให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตแล้วสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ได้ ดังต่อไปนี้

จากสมการ (2.22) คือสมการความต่อเนื่องที่ทำการแปลงพิกัดแล้ว

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left((\rho u)\frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho v)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((\rho v)\frac{\partial x}{\partial \xi} - (\rho u)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{2.22}$$

ใช้ความสัมพันธ์ของ $A_k^i = J \cdot \bar{J}_k^i$ ซึ่งสามารถกระจายออกมามีค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$A_1^1 = J \cdot \bar{J}_1^1 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{2.41}$$

$$A_2^2 = J \cdot \bar{J}_2^2 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{2.42}$$

$$A_2^1 = J \cdot \bar{J}_2^1 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \tag{2.43}$$

$$A_1^2 = J \cdot \bar{J}_1^2 = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{2.44}$$

แทนค่าลงในสมการ (2.22) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\rho u\right) A_1^1 + \left(\rho v\right) A_2^1\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(\rho v\right) A_2^2 + \left(\rho u\right) A_1^2\right) = 0 \tag{2.45}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\left(uA_1^1 + vA_2^1\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\left(vA_2^2 + uA_1^2\right)\right) = 0 \tag{2.46}$$

และใช้ความสัมพันธ์ของสมการ (2.38) คือ $\hat{U}^i = u_j A_j^i$ แทนค่าในสมการ (2.46) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \hat{U}^1\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho \hat{U}^2\right) = 0 \tag{2.47}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\rho \hat{U}^i\right) = 0 \tag{2.48}$$

ในทำนองเดียวกันพจน์การพาของสมการโมเมนตัมที่อยู่ในรูปทั่วไปของตัวแปร ϕ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\phi\left(u\frac{\partial y}{\partial \eta}-v\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\phi\left(v\frac{\partial x}{\partial \xi}-u\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\phi\left(uA_1^1+vA_2^1\right)\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\phi\left(uA_2^2+vA_1^2\right)\right) \tag{2.49}$$
$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\phi\hat{U}^1\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\phi\hat{U}^2\right)$$

สำหรับพจน์การแพร่ของสมการ (2.19) ซึ่งมีตัวแปร C_1, C_2 และ C_3 จะถูกนำไปเขียนให้อยู่ในรูปของ $\vec{A}^{(i)}$ ในสมการ (2.14) ถึง (2.16) ได้ดังนี้

$$C_1=\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2=\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{A}^{(1)} \tag{2.50}$$

$$C_2=\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}=-\left(\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{A}^{(2)}\right) \tag{2.51}$$

$$C_3=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2=\vec{A}^{(2)}\cdot\vec{A}^{(2)} \tag{2.52}$$

กำหนดให้สัมประสิทธิ์ Geometric diffusion มีนิยามดังนี้

$$G^{ij}=\frac{A_k^iA_k^j}{J}=\frac{\vec{A}^{(i)}\cdot\vec{A}^{(j)}}{J} \tag{2.53}$$

จากสมการ (2.19) พจน์การแพร่สามารถแทนค่าตัวแปร $\vec{A}^{(i)}$ และ G^{ij} ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\Gamma C_1}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\frac{\Gamma C_2}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\Gamma C_3}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}-\frac{\Gamma C_2}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Gamma G^{11}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\Gamma G^{12}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}+\Gamma G^{21}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) \tag{2.54}$$

ดังนั้น สมการครอบคลุมพื้นฐานหลังจากแทนค่าพจน์การพาสมการ (2.49) และพจน์การแพร่สมการ (2.54) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\phi\hat{U}^1\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\phi\hat{U}^2\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Gamma G^{11}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}+\Gamma G^{12}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}+\Gamma G^{21}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)+S_\phi J \tag{2.55}$$

และสามารถเขียนสมการโมเมนตัมให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\rho \hat{U}^i \phi\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\Gamma G^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}\right) + S_\phi J \tag{2.56}$$

จัดรูปสมการ (2.56) ใหม่ได้ดังนี้

$$\hat{I}^i = S_\phi J \tag{2.57}$$

เมื่อ

$$\hat{I}^i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\rho \hat{U}^i \phi\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\Gamma G^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}\right) \tag{2.58}$$

เมื่อใดที่พิกัดมีความเป็นมุมฉากค่าพจน์ $\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\Gamma G^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}\right) = 0$ เนื่องจาก $G^{ij} = 0 \left(i \neq j\right)$ ดังนั้น ค่าฟลักซ์ทั้งหมดที่ผ่านผิวจะถูกแยกออกเป็น 2 ส่วนคือ Orthogonal $\left(\hat{I}_O^i\right)$ และ Non-orthogonal $\left(\hat{I}_{NO}^i\right)$ ดังนั้นสมการ (2.58) จะถูกแยกออกเป็น 2 ส่วนดังนี้

$$\hat{I}^i = \hat{I}_O^i + \hat{I}_{NO}^i \tag{2.59}$$

เมื่อ

$$\hat{I}_O^i = \left(\rho \hat{U}^i \phi - \Gamma G^{ii} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^i}\right)_{\text{No summation over } i} \tag{2.60}$$

$$\hat{I}_{NO}^i = -\left(\Gamma G^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j}\right)_{i \neq j} \tag{2.61}$$

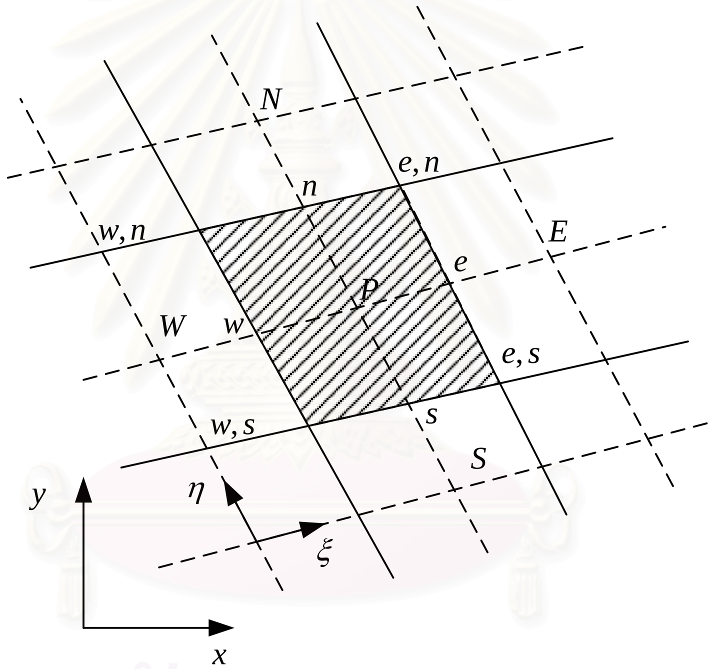
2.5 การดิสครีไทซ์สมการ

จากสมการ (2.55) ประกอบด้วยพจน์ต่างๆ คือ พจน์การพา พจน์การแพร่ และ Source term ที่ผ่านการแปลงพิกัดมาแล้ว ซึ่งแต่ละพจน์สามารถทำการดิสครีไทซ์ได้ดังนี้

2.5.1 พจน์การพา

$$\rho\hat{U}^1\phi\Big|_w^e + \rho\hat{U}^2\phi\Big|_s^n = \left(\rho\hat{U}^1\right)_e\phi_e - \left(\rho\hat{U}^1\right)_w\phi_w + \left(\rho\hat{U}^2\right)_n\phi_n - \left(\rho\hat{U}^2\right)_s\phi_s \qquad (2.62)$$

เมื่อกำหนดให้ฟลักซ์การพา (Convection flux) คือ $F_{nn} = \left(\rho\hat{U}^i\right)_{nn}$ เมื่อตัวห้อย nn คือตัวบ่งบอกแต่ละผิวของปริมาตรควบคุมคือ e, w, n และ s ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ตำแหน่งจุดต่างๆ บนปริมาตรควบคุม

$$\rho\hat{U}^1\phi\Big|_w^e + \rho\hat{U}^2\phi\Big|_s^n = F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s \qquad (2.63)$$

ค่า ϕ ของแต่ละผิวปริมาตรควบคุมจะต้องทำการประมาณค่าจากจุดกริดที่ติดกันโดยที่ความถูกต้องของการประมาณค่าจะขึ้นอยู่กับ Numerical scheme

2.5.2 พจน์การแพร่ส่วน **Orthogonal**

$$\left[\Gamma G^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_w^e+\left[\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]_s^n= \left(\Gamma G^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_e-\left(\Gamma G^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_w+\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_n-\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_s \tag{2.64}$$

เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์การแพร่คือ $D=\dfrac{\Gamma G}{\delta}$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (2.64) จะสามารถลดรูปสมการได้ และค่าของพจน์การแพร่แต่ละทิศมีค่าดังนี้

$$\left(\Gamma G^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_e=\left(\Gamma G\right)_e\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta\xi_e}\right)=D_e\phi_E-D_e\phi_P \tag{2.65}$$

$$\left(\Gamma G^{11}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_w=\left(\Gamma G\right)_w\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta\xi_w}\right)=D_w\phi_P-D_w\phi_W \tag{2.66}$$

$$\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_n=\left(\Gamma G\right)_n\left(\frac{\phi_N-\phi_P}{\delta\eta_n}\right)=D_n\phi_N-D_n\phi_P \tag{2.67}$$

$$\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_s=\left(\Gamma G\right)_s\left(\frac{\phi_P-\phi_S}{\delta\eta_s}\right)=D_s\phi_P-D_s\phi_S \tag{2.68}$$

2.5.3 พจน์การแพร่ส่วน **Non-orthogonal**

$$\left[\Gamma G^{12}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]_w^e+\left[\Gamma G^{21}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_s^n= \left(\Gamma G^{12}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_e-\left(\Gamma G^{12}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_w+\left(\Gamma G^{21}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_n-\left(\Gamma G^{22}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_s \tag{2.69}$$

ซึ่งสามารถลดรูปได้ดังนี้

$$\left[\Gamma G^{12}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]_w^e+\left[\Gamma G^{21}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_s^n=b_{\phi_e}-b_{\phi_w}+b_{\phi_n}-b_{\phi_s} \tag{2.70}$$

สำหรับการหาค่าพจน์การแพร่ส่วนที่เป็น Non-orthogonal ยกตัวอย่างเช่นพจน์ b_{ϕ_e} มีวิธีการหาค่าดังนี้

$$b_{\phi_e} = \Gamma G^{12} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e \tag{2.71}$$

$$b_{\phi_e} = \Gamma G^{12} \left(\frac{\phi_{e,n} - \phi_{e,s}}{\delta \eta_{e,n-e,s}} \right) \tag{2.72}$$

ซึ่งค่า $\phi_{e,n}$ และ $\phi_{e,s}$ จะมีตำแหน่งอยู่บริเวณมุมขวาบนและมุมขวาล่างของปริมาตรควบคุมตามลำดับ ซึ่งแสดงได้ดังในรูปที่ 2.6 ค่าตามมุมต่างๆ ของปริมาตรควบคุม สามารถหาได้จากการประมาณค่าในช่วงโดยถ่วงน้ำหนักแบบเชิงเส้น (Weighted linear interpolation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$u_e = (1 - f_{1P}) + f_{1P} u_E \tag{2.73}$$

โดย f_{1P} คืออัตราส่วนระหว่างระยะจาก Node ไปยังขอบของปริมาตรควบคุม$\left(\overline{Pe}\right)$ กับระยะจาก Node ไปยัง Node ที่อยู่ติดกันในทิศตะวันออก$\left(\overline{PE}\right)$ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ 2.74

$$f_{1P} = \frac{\overline{Pe}}{\overline{PE}} \tag{2.74}$$

ดังนั้น การหาค่าที่มุมของปริมาตรควบคุมหนึ่งจุดจะใช้การประมาณค่าในช่วงทั้งหมด 3 ครั้ง ซึ่งการประมาณค่าโดยถ่วงน้ำหนักแบบเชิงเส้นนี้เป็นวิธีที่มีความแม่นยำสูงกว่าการประมาณค่าในช่วงแบบอื่นๆ และสำหรับในทิศอื่นๆ ก็สามารถหาค่าในทำนองเดียวกัน

2.5.4 Source term

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะแยก Source term ออกเป็นสองส่วนโดยใช้การประมาณแบบเชิงเส้นดังนี้

$$S_\phi = S_u + S_P \phi_P \tag{2.75}$$

โดย S_u คือพจน์ที่มีค่าคงที่

S_P คือพจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ ϕ_P

นำค่าต่างๆ ที่ผ่านการดิสครีไทซ์มาแล้วคือ พจน์การพา สมการ (2.63) พจน์การแพร่ส่วน Orthogonal สมการ (2.65) ถึง (2.68) พจน์การแพร่ส่วน Non orthogonal สมการ (2.70) และSource term สมการ (2.75) ลงในสมการ (2.55) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้รูปทั่วไปของระบบสมการพีชคณิต ได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_\phi \tag{2.76}$$

หรือ

$$a_P\phi_P = \sum_{NB} a_{NB}\phi_{NB} + S_\phi \tag{2.77}$$

เมื่อ

$$a_P = \sum_{NB} a_{NB} + \left(F_e - F_w + F_n - F_s\right) - S_P \tag{2.78}$$

$$S_\phi = b_{NO} + S_u \tag{2.79}$$

$$b_{NO} = b_{\phi_e} - b_{\phi_w} + b_{\phi_n} - b_{\phi_s} \tag{2.80}$$

2.6 เงื่อนไขขอบ **(Boundary conditions)**

ในการแก้ปัญหาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนั้น การกำหนดเงื่อนไขขอบเป็นสิ่งหนึ่งที่มีความสำคัญซึ่งจะเป็นตัวกำหนดลักษณะของแต่ละปัญหา โดยทั่วไปแล้วจะประกอบด้วย เงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้า (Inlet boundary condition) เงื่อนไขขอบบริเวณทางออก (Outlet boundary condition) เงื่อนไขขอบบริเวณผนัง (Wall boundary condition) และเงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetric boundary condition) เป็นต้น

2.6.1 เงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้า **(Inlet boundary condition)**

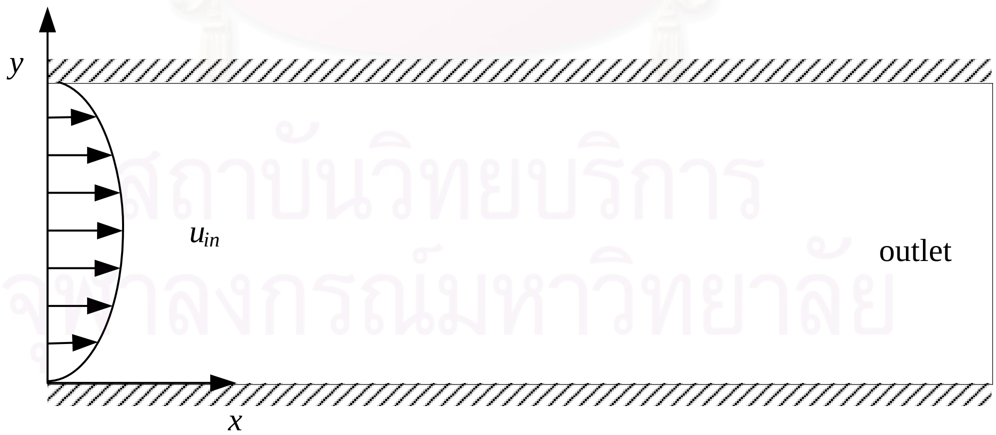
สำหรับเงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้าของค่าปริมาณ ϕ ใดๆ จำเป็นต้องถูกกำหนดหรือทราบค่า โดยค่าของปริมาณ ϕ อาจได้มาจากผลการทดลองหรือการประมาณค่า ดังเช่นตัวอย่างการไหลในปัญหาของรูปที่ 2.6 จะเห็นว่าของไหลที่บริเวณทางเข้าของท่อ จะมีการกระจายตัวของความเร็วแบบสม่ำเสมอ ซึ่งกำหนดได้โดยให้ความเร็วของทางไหลตามแนวแกน x บริเวณทางเข้ามีค่าคงที่เท่ากับ u_{in} และความเร็วของของทางไหลตามแนวแกน y ที่ทางเข้ามีค่าเท่ากับศูนย์

$$u = u_{in} \tag{2.81}$$

$$v = 0 \tag{2.82}$$

รูปที่ 2.7 การกำหนดให้ความเร็วบริเวณทางเข้ามีค่าคงที่เท่ากับ u_{in}

หรืออาจจะกำหนดให้ความเร็วของของไหลตามแนวแกน x มีรูปร่างเป็นรูปพาราโบลาบริเวณทางเข้าด้วยการใช้สมการพาราโบลาเป็นตัวกำหนด และกำหนดให้ความเร็วของของไหลตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 การกำหนดให้รูปร่างความเร็วที่ทางเข้ามีรูปร่างพาราโบลา

2.6.2 เงื่อนไขขอบบริเวณทางออก **(Outlet boundary condition)**

เงื่อนไขขอบบริเวณทางออกโดยปกติแล้วจะไม่ทราบค่า ในกรณีที่ทางออกของของไหลมีการพัฒนาเต็มที่แล้ว (Fully developed flow) สามารถกำหนดให้ปริมาณ ϕ ใดๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Zero gradient) ตามแนวแกน x ยกเว้นค่า u บริเวณทางออกเท่านั้นจะถูกนำไปปรับค่าเพื่อให้สอดคล้องกับกฎสมดุลมวล

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{out} = 0 \tag{2.83}$$

แต่ในกรณีที่ทางออกของไหลยังไม่มีการพัฒนาเต็มที่ สำหรับการประมาณค่าจะใช้วิธีการประมาณค่านอกช่วงเชิงเส้น (Linear extrapolation)

2.6.3 เงื่อนไขขอบบริเวณผนัง **(Wall boundary condition)**

เงื่อนไขขอบบริเวณผนังที่พบในปัญหาการไหลทั่วไปจะสามารถแบ่งได้เป็นเงื่อนไขขอบที่ไม่มีการลื่นไถล (No-slip boundary condition) และเงื่อนไขขอบบริเวณผนังสำหรับการไหลแบบราบเรียบ (Laminar boundary condition)

เงื่อนไขขอบที่ไม่มีการลื่นไถล **(No-slip boundary condition)** คือของไหลที่อยู่ติดกับผนังจะมีความเร็วเท่ากับผนัง ซึ่งในกรณีที่ผนังไม่มีการเคลื่อนที่จะทำให้ความเร็วตามแนวแกน x และ y ของของไหลบนผนังมีค่าเท่ากับศูนย์ และปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกับผนังมีค่า $a_s = 0$ (กรณีที่ผนังอยู่ด้านล่าง) เนื่องจากไม่มีการคำนวณ Pressure correction ที่ตำแหน่งนี้

$$u_{wall} = 0 \quad \text{และ} \quad v_{wall} = 0 \tag{2.84}$$

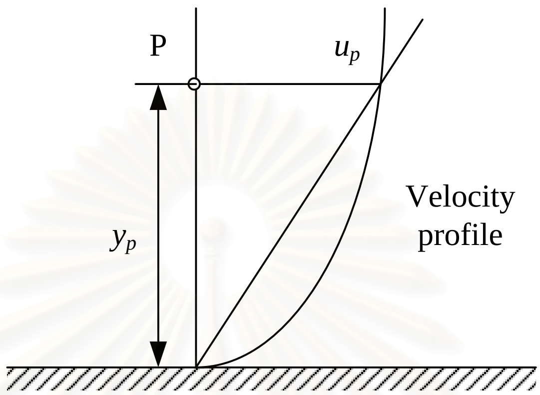
เงื่อนไขขอบผนังสำหรับการไหลแบบราบเรียบ **(Laminar boundary condition)** บริเวณผนังจะมีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นตามแนวแกน x มีค่าดังนี้

$$\tau_w = \mu \frac{u_P}{y_P} \tag{2.85}$$

โดย u_P เป็นค่าความเร็วที่ Node ดังแสดงในรูปที่ 2.9 ซึ่งเป็นการประมาณค่าที่พิจารณาบริเวณใกล้ผิว เมื่อให้ค่าความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเชิงเส้นเมื่อเทียบกับระยะทางจะได้แรงเฉือนมีค่าดังนี้

$$F_S = \tau_w A_{cell} \quad (2.86)$$

โดยที่ A_{cell} คือพื้นที่ผนังของปริมาตรควบคุม



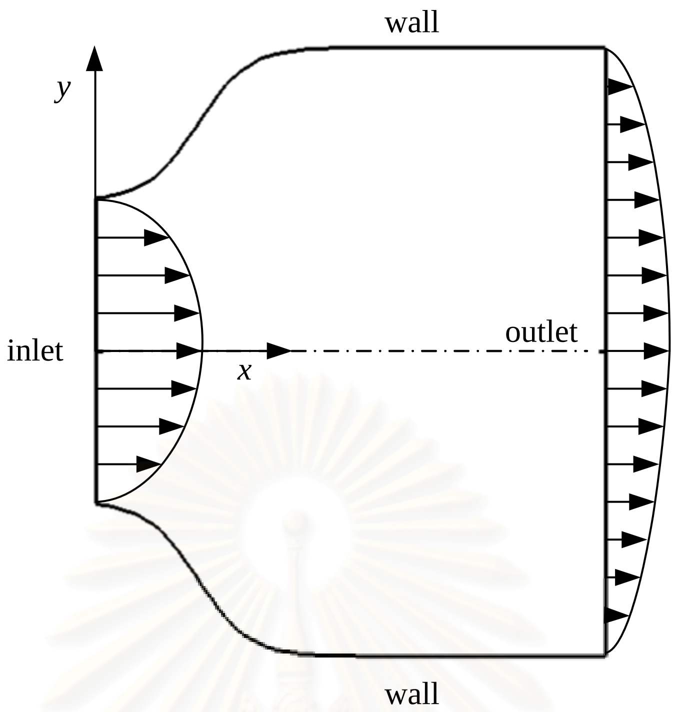
รูปที่ 2.9 ลักษณะของความเร็ว u บริเวณผนัง

2.6.4 เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร **(Symmetric boundary condition)**

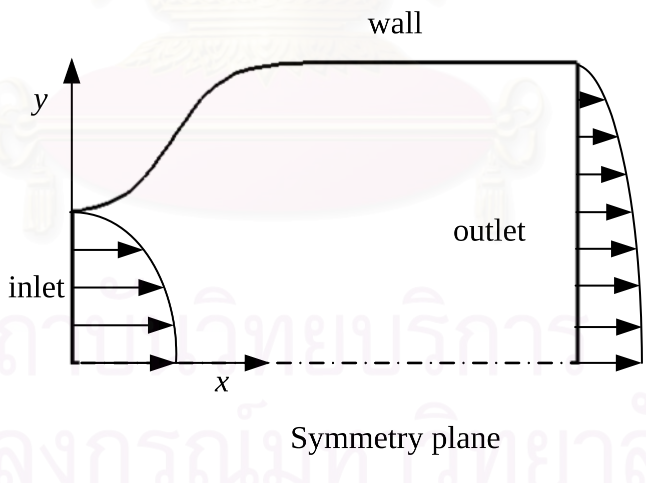
เงื่อนไขขอบแบบสมมาตรสามารถประยุกต์ใช้กับโดเมนของปัญหาที่มีความสมมาตรกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.10 การคำนวณโดยใช้โดเมนทั้งหมดของปัญหาจะทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำและเวลาการคำนวณ แต่เมื่อประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบแบบสมมาตรจะทำให้โดเมนการคำนวณลดลง ดังแสดงในรูปที่ 2.11 ซึ่งจะสามารถช่วยให้ประหยัดหน่วยความจำและลดเวลาในการคำนวณลง โดยกำหนดเงื่อนไขที่ว่าไม่มีการไหลและไม่มีฟลักซ์ผ่านขอบแบบสมมาตร นั่นก็คือ กำหนดค่าความเร็วในแนวตั้งฉากกับแนวขอบสมมาตรให้มีค่าเป็นศูนย์ และตัวแปร ϕ ที่ขอบสมมาตรไม่มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทางตั้งฉากดังนี้

$$v = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (2.88)$$



รูปที่ 2.10 รูปร่างช่องทางไหลที่มีลักษณะสมมาตรกัน



รูปที่ 2.11 โดเมนการคำนวณกรณีที่ใช้เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร

2.7 การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต

หลังจากทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์แล้วจะได้ระบบสมการพีชคณิต โดยหัวข้อนี้จะทำการแก้ระบบสมการพีชคณิตเพื่อหาผลเฉลยของปัญหา ซึ่งการแก้ระบบสมการพีชคณิตมีหลายวิธีด้วยกัน โดยในที่นี้ได้เลือกใช้วิธีทำซ้ำแบบ Tri-diagonal matrix algorithm (TDMA) ซึ่งมีความเหมาะสมในการนำมาใช้แก้ระบบสมการพีชคณิตที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์ วอลุมนั้น เนื่องจากวิธีดังกล่าวนี้มีข้อดีคือ สามารถหาผลลัพธ์จนลู่เข้าสู่คำตอบได้อย่างรวดเร็ว และยังประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ การแก้ระบบสมการพีชคณิตด้วยวิธี TDMA มีขั้นตอนหลัก 2 ขั้นตอนคือการกำจัดไปข้างหน้า และการแทนค่าย้อนกลับ ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดดังต่อไปนี้

สำหรับปัญหาการไหลสองมิติ หลังจากที่ได้ทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุม แล้วจะสามารถจัดรูปสมการครอบคลุมในรูปแบบที่สามารถใช้วิธี TDMA ได้ดังนี้

$$-a_S\phi_S + a_P\phi_P - a_N\phi_N = a_W\phi_W + a_E\phi_E + b \tag{2.89}$$

ระบบสมการ TDMA มีรูปทั่วไปดังนี้

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \tag{2.90}$$

เมื่อเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์สมการ (2.89) กับ (2.90) จะพบว่า

$$\beta_j = a_S \tag{2.91}$$

$$D_j = a_P \tag{2.92}$$

$$\alpha_j = a_N \tag{2.93}$$

$$C_j = a_E\phi_E + a_W\phi_W + b \tag{2.94}$$

ขั้นตอนการกำจัดไปข้างหน้า ทำโดยจัดสมการให้อยู่ในรูปสมการ (2.95)

$$\phi_j = A_j\phi_{j+1} + C'_j \tag{2.95}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ A_j และ C'_j สามารถหาได้จาก

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \tag{2.96}$$

$$C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \tag{2.97}$$

เนื่องจากค่าของจุดที่ขอบของโดเมน $j=1$ และ $j=n+1$ สามารถหาได้ ดังนั้นค่าที่จุดดังกล่าวคือ

$$A_1 = 0 \text{ และ } C'_1 = \phi_1 \tag{2.98}$$

$$A_{n+1} = 0 \text{ และ } C'_{n+1} = \phi_{n+1} \tag{2.99}$$

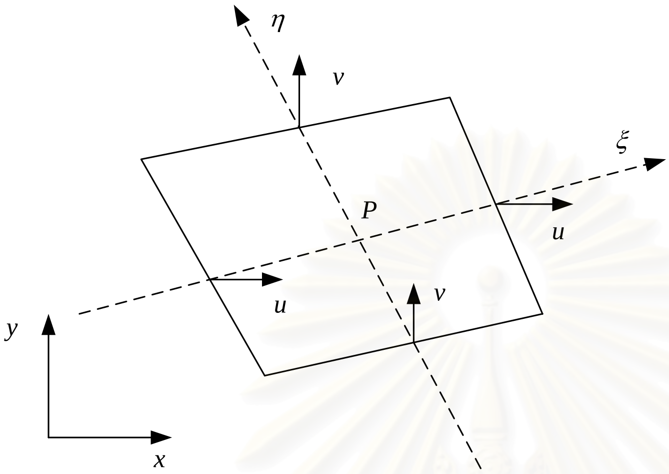
ดังนั้นเมื่อทราบค่าดังกล่าวแล้วเราสามารถแทนค่าย้อนกลับ แล้วจะได้ผลเฉลยของปัญหาโดยเริ่มจากการหาค่า A_j และ C'_j สำหรับค่า $j=1$ ถึง $j=n$ จากนั้นจึงหาค่า ϕ ของทุกๆ จุดที่ต้องการ โดยย้อนกลับจาก ϕ_n ไปหา ϕ_1

บทที่ 3

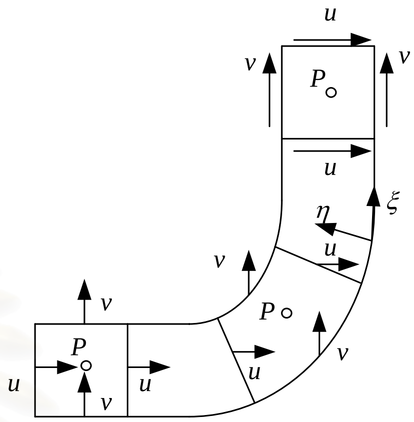
สมการโมเมนตัมและความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความดัน

ประเภทของตัวประกอบความเร็วที่เลือกใช้บนพิกัดกระชับขอบเขตมีความสำคัญอย่างยิ่ง เนื่องจากกริดในระบบพิกัดกระชับขอบเขตนั้นจะเปลี่ยนแปลงตามลักษณะของโดเมน ซึ่งถ้าเลือกใช้ตัวประกอบความเร็วที่ไม่เหมาะสมกับโดเมนที่พิจารณา อาจก่อให้เกิดปัญหาขึ้น เช่น เมื่อตัวประกอบความเร็วที่เลือกมีทิศทางขนานกับผิวของปริมาตรควบคุม ในบริเวณที่มีเกรเดียนท์ความเร็วสูงอาจส่งผลให้เกิดการลู่ออกของผลลัพธ์ ตัวประกอบความเร็วที่เลือกใช้มีหลายประเภท ซึ่งแต่ละประเภทก็มีข้อดีข้อเสียต่างกัน เช่น Braatan and Shyy (1986) กำหนดให้ตัวแปรตามบนแต่ละผิวของปริมาตรควบคุมเป็นตัวประกอบเวกเตอร์ความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียนเพียง 1 ทิศทาง ดังแสดงในรูปที่ 3.1(a) ซึ่งวิธีนี้มีข้อดีคือ การคำนวณของแต่ละผิวใช้หน่วยความจำน้อย และการสร้างสมการโมเมนตัมก็ไม่ยุ่งยาก จึงมีผู้วิจัยหลายท่าน นำไปใช้ในการคำนวณ อาทิเช่น Meakin et al. (1986a, 1986b, 1988), Hah (1983, 1984), Yung (1986), Yung et al. (1989) และ Hadjisphocleous (1988a, 1988b) แต่วิธีการวางตำแหน่งความเร็วแบบนี้ก็มีข้อเสียคือ เมื่อของไหลไหลผ่านช่องโค้งที่มีลักษณะดังรูปที่ 3.1(b) ตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียนจะมีทิศทางเกือบจะขนานกับผิวของปริมาตรควบคุม ทำให้ความดันและความเร็วมีความเกี่ยวข้องกันน้อย (Weak coupling) ทำให้ไม่มีผลของการพาผ่านผิวปริมาตรควบคุม เป็นสาเหตุที่ทำให้การคำนวณลู่ออก ต่อมา Shyy et al. (1986) ได้ทำการปรับปรุงโดยกำหนดให้แต่ละผิวของปริมาตรควบคุมมีตัวประกอบความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียน 2 ทิศทาง ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งสามารถช่วยแก้ปัญหาการลู่ออกได้ แต่วิธีการนี้ก็มีข้อเสียคือ การคำนวณสมการโมเมนตัมจะต้องเก็บค่าตัวประกอบความเร็ว 8 ค่าต่อ 1 ปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ ทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำในการคำนวณค่อนข้างมาก

การเลือกใช้ Covariant และ Contravariant velocity มาแทนตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน ดังแสดงในรูปที่ 3.3 เป็นอีกวิธีหนึ่งในการลดการใช้หน่วยความจำในการคำนวณโดยที่ไม่ก่อให้เกิดปัญหาที่ตัวประกอบความเร็วมีทิศทางขนานกับผิวของโดเมนการไหล ซึ่งค่า Contravariant velocity จะมีลักษณะตั้งฉากกับผิวของปริมาตรควบคุม ดังแสดงในรูปที่ 3.3(a) ส่วนค่า Covariant velocity จะมีทิศทางขนานไปกับแกน ξ และ η ดังแสดงในรูปที่ 3.3(b) ซึ่งในหัวข้อ 3.1 จะอธิบายการใช้ Covariant velocity projection กับสมการโมเมนตัม ซึ่งวิธีการนี้อาจจะใช้ Contravariant velocity projection แทนก็ได้ เช่น Karki and Patankar (1988a, 1988b) ได้เลือกใช้ Covariant velocity projection แทนตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียนของสมการโมเมนตัม และใช้ Contravariant velocity projection กับสมการความต่อเนื่อง และนำมาคำนวณการไหลที่อัดตัวได้และอัดตัวไม่ได้ผ่าน Bump บนพิกัดแบบเยื้อง

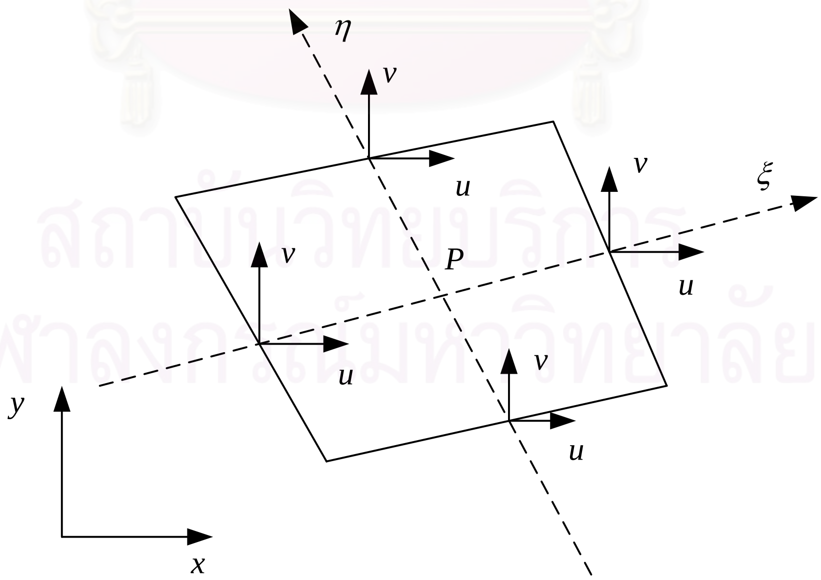


(a)

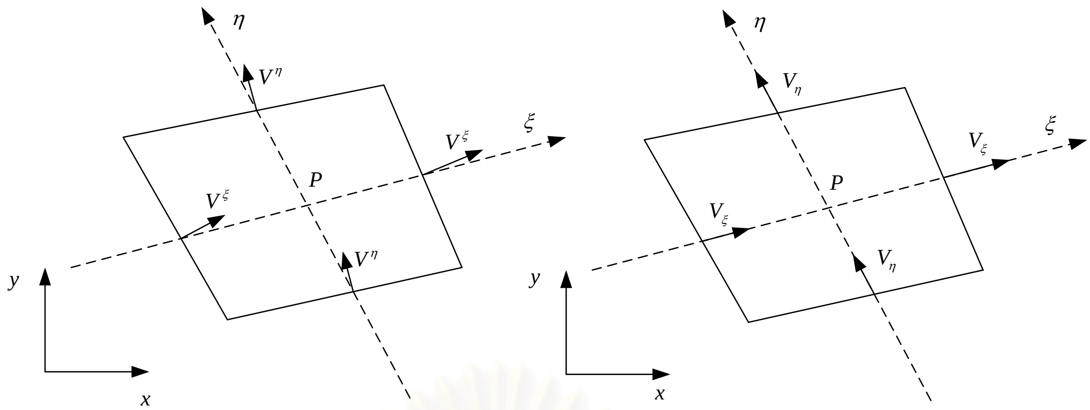


(b)

รูปที่ 3.1 การวางเวกเตอร์ความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียน 1 ทิศทาง บนกริดแบบเยื้อง



รูปที่ 3.2 การวางเวกเตอร์ความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียน 2 ทิศทาง บนกริดแบบเยื้อง



(a) Contravariant velocity (b) Covariant velocity

รูปที่ 3.3 การวางเวกเตอร์ Contravariant และ Covariant velocity บนกริดแบบเยื้อง

3.1 สมการโมเมนตัมร่วมกับ Physical covariant velocity projections

การใช้สมการโมเมนตัมที่ใช้ Covariant velocity projections เป็นตัวแปรตามเป็นวิธีแก้ปัญหาที่กล่าวไว้ในเบื้องต้น การดิสครีไทซ์สมการโมเมนตัมในกรณีนี้มีความยุ่งยากน้อยกว่าการดิสครีไทซ์สมการโมเมนตัมที่ใช้ตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้วิธีนี้ในการคำนวณหาค่าต่าง ๆ เนื่องจากมีความสะดวกในการดิสครีไทซ์สมการและมีขั้นตอนการคำนวณที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อน

จากบทที่ผ่านมาจะได้สมการโมเมนตัมในแนวแกน x และแนวแกน y ที่ผ่านการแปลงพิกัดและทำการดิสครีไทซ์สมการให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตแล้ว ดังนี้

x-momentum equation

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + S_v J \tag{3.1}$$

y-momentum equation

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_u J \tag{3.2}$$

นำค่า $\left(\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P$ คูณสมการโมเมนตัมในแนวแกน x และค่า$\left(\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P$ คูณสมการโมเมนตัมในแนวแกน y และเมื่อนำทั้งสองสมการมารวมกันจะได้สมการโมเมนตัมซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน

ξ และหากนำค่า $\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_P$ คูณสมการโมเมนตัมในแนวแกน x และค่า $\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_P$ คูณโมเมนตัมในแนวแกน y เมื่อนำทั้งสองสมการมารวมกันจะได้สมการโมเมนตัมซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน η ดังต่อไปนี้

x-momentum equation

$$a_P u_P \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P = \sum_{NB} a_{NB} u_{NB} \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P + S_u J \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P \tag{3.2}$$

y-momentum equation

$$a_P v_P \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P = \sum_{NB} a_{NB} v_{NB} \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P + S_v J \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P \tag{3.3}$$

นำสมการ (3.2) บวกกับสมการ (3.3)

$$\begin{aligned} a_P \left[u_p \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P + v_P \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P \right] = \\ \sum_{NB} a_{NB} \left[u_{NB} \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P + v_{NB} \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P \right] + J \left[S_u \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_P + S_v \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_P \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (2.31) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง Covariant velocity projection กับตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งมีค่าดังนี้

$$V_i = \vec{\mathrm{U}} \cdot \vec{\mathrm{e}}_i = \left(\frac{u_k J_i^k}{\sqrt{g_{ii}}}\right) = \frac{1}{h_i}\left(u\frac{\partial x}{\partial \xi^i} + v\frac{\partial y}{\partial \xi^i}\right)_{\text{No summation over } i} \tag{3.5}$$

แทนค่าสมการ (3.5) ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$a_P\left[V_1\right] = \sum_{NB} a_{NB}\left[V'_{1_{NB}}\right] + \left[\frac{1}{h_1}\left(b_u\frac{\partial x}{\partial \xi} + b_v\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]_P - \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_P \quad \text{No summation over } i \tag{3.6}$$

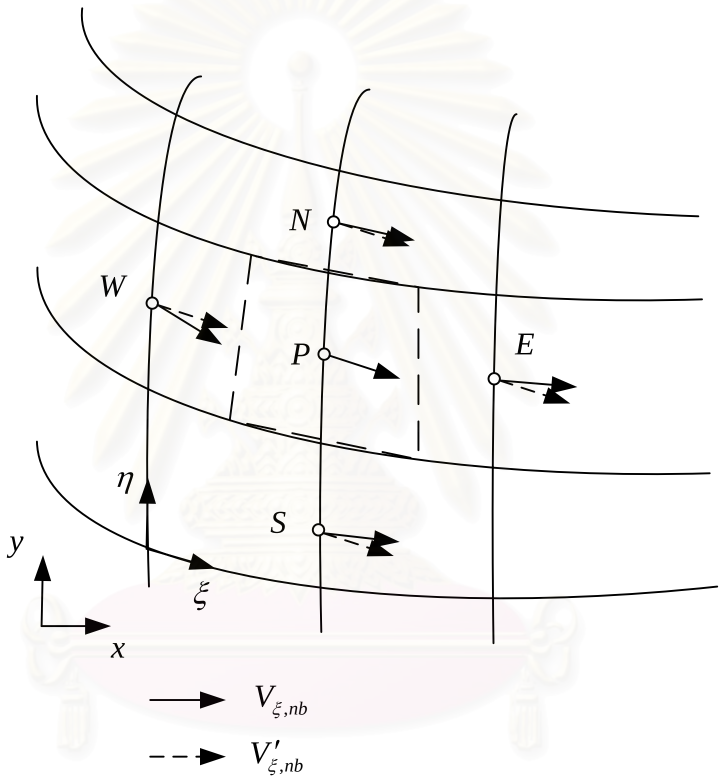
เมื่อ $b_u = b_{u_e} - b_{u_w} + b_{u_n} - b_{u_s}$ และ $b_v = b_{v_e} - b_{v_w} + b_{v_n} - b_{v_s}$

โดย $V'_{1_{NB}}$ คือค่า Covariant velocity projections ของจุดรอบๆ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับจุด P ดังแสดงในรูปที่ 3.4 และนิยามได้ดังนี้

$$V'_{i_{NB}} = \frac{1}{h_{i_P}}\left[u_{NB}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi^i}\right)_P + v_{NB}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi^i}\right)_P\right]_{\text{No summation over } i} \tag{3.7}$$

หรือ

$$V'_{i_{NB}} = \vec{\mathrm{U}}_{NB} \cdot \vec{\mathrm{e}}_{i_P} \tag{3.8}$$



รูปที่ 3.4 ทิศทางของ V'_{ξ} และ V_{ξ} บนกริดแบบเยื้อง

จากสมการ (3.8) คือสมการหาค่า Covariant velocity projection $\left(V'_{i_{nb}}\right)$ ของจุด NB คือจุด E, W, N และ S แต่ทิศทางของ $V'_{i_{nb}}$ จะมีทิศทางเหมือนกับ V_{i_P} ของจุด P ดังแสดงในรูปที่ 3.4 เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{\mathrm{e}}_{\xi}$ และ $\vec{\mathrm{e}}_{\eta}$ คือ Covariant basis vector ซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน ξ และ η ตามลำดับ เป็นตัวกำหนดทิศทางของเวกเตอร์โดยจะมีทิศทางตามโดเมนพื้นที่การคำนวณ

การที่ $V'_{i_{nb}}$ มีทิศทางตามจุด P นั้น อาจจะไม่ถูกต้องนักเนื่องจากไม่สอดคล้องกับโดเมนการคำนวณ จึงต้องมีการเพิ่มพจน์ $\sum_{NB} a_{NB} V_{i_{NB}}$ เพื่อให้มีทิศทางตามโดเมนของตัวเอง แล้วลบค่าดังกล่าวออกเพื่อให้สมการมีค่าเท่าเดิม แสดงได้ในสมการ (3.9)

$$a_P V_{i_P} = \sum_{NB} a_{NB} V_{i_{NB}} + \sum_{NB} a_{NB}\left(V'_{i_{NB}} - V_{i_{NB}}\right) + \left[\frac{1}{h_i}\left(b_u \frac{\partial x}{\partial \xi^i} + b_v \frac{\partial y}{\partial \xi^i}\right)\right]_P - \left(\frac{\delta V}{h_i}\frac{\partial p}{\partial \xi^i}\right)_P \qquad (3.9)$$

No summation over *i*

พจน์ $\sum_{NB} a_{NB}\left(V'_{i_{NB}} - V_{i_{NB}}\right)$ อาจเรียกได้ว่าเป็นพจน์ความโค้ง (Curvature term)

สำหรับพจน์ความดันสามารถหาได้เช่นเดียวกับการหาค่าในพิกัดคาร์ทีเซียนดังนี้

$$\left(\frac{J}{h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_P = \frac{J}{h_1}\frac{P_e - P_w}{\delta \xi} \qquad (3.10)$$

3.2 การประมาณค่าโดยใช้ **Numerical scheme**

สำหรับค่า V_{1e}, V_{1w}, V_{1n} และ V_{1s} ของสมการ (3.9) ซึ่งเป็นค่าที่ขอบของปริมาตรควบคุมจำเป็นต้องหาค่าจากการประมาณค่าด้วย Scheme ต่างๆ เช่น Central, Upwind, Hybrid หรือ Power-Law scheme และในพิกัดแบบกระชับขอบเขตนี้ก็ใช้ Scheme ต่างๆ ได้เช่นเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีการ Upwind differencing scheme ซึ่งเสนอโดย Courant et al. (1952) จุดประสงค์ในการคิดค้นวิธีนี้ก็เพื่อแก้ไขปัญหาที่เกิดจากการสมมติค่าการพาที่ Interface ϕ_e เกิดจากค่าเฉลี่ยระหว่าง ϕ_E และ ϕ_P โดยเสนอแนวคิดใหม่คือเทอมการแพร่กระจายไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ในเทอมการพาสามารถคำนวณได้โดยสมมติฐานที่กล่าวว่า ค่าของ ϕ ที่ Grid point ของผิวปริมาตรควบคุมต้นกระแสการไหล (Upstream) ดังนี้

$$V_{1e} = V_{1P} \quad \text{เมื่อ} \quad F_e > 0 \qquad (3.11)$$

$$V_{1e} = V_{1E} \quad \text{เมื่อ} \quad F_e < 0 \qquad (3.12)$$

และ

$$V_{1w} = V_{1W} \quad \text{เมื่อ} \quad F_w > 0 \qquad (3.13)$$

$$V_{1w} = V_{1P} \quad \text{เมื่อ} \quad F_w < 0 \qquad (3.14)$$

สำหรับค่า V_{1n} และค่า V_{1s} ก็หาได้ในลักษณะเดียวกัน

ดังนั้นสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปจะมีค่าต่างๆ ดังนี้ได้เป็น

$$a_P V_{i_P} = \sum_{NB} a_{NB} V_{i_{NB}} + b \tag{3.15}$$

เมื่อ

$$a_N = D_n + \max\left[-F_n, 0\right] \tag{3.15}$$

$$a_S = D_s + \max\left[F_s, 0\right] \tag{3.16}$$

$$a_E = D_e + \max\left[-F_e, 0\right] \tag{3.17}$$

$$a_W = D_w + \max\left[F_w, 0\right] \tag{3.18}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \tag{3.19}$$

และ

$$b = \sum_{NB} a_{NB}\left(V'_{i_{NB}} - V_{i_{NB}}\right) + \left[\frac{1}{h_i}\left(b_u \frac{\partial x}{\partial \xi^i} + b_v \frac{\partial y}{\partial \xi^i}\right)\right]_P - \left(\frac{\delta V}{h_i}\frac{\partial p}{\partial \xi^i}\right)_P \tag{3.20}$$

เมื่อ $\max\left[A, B\right]$ คือค่าสูงสุด ที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าระหว่าง A และ B

จากสมการ จะสังเกตได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ จะไม่สามารถมีค่าเป็นลบได้ ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าเป็นไปตามลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง และทำให้สามารถแก้ปัญหาต่างๆ ได้โดยที่ผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง

3.3 SIMPLE algorithm

ในการแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั้น ผลเฉลยของสนามการไหลที่ได้จะมีค่าที่ไม่สอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล และเพื่อให้ค่าผลเฉลยที่ได้จากสองสมการนี้มีความสอดคล้องกัน เราจะใช้ขั้นตอนวิธีการที่เรียกว่า SIMPLE (Semi–Implicit Method for Pressure–Linked Equations) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Patankar and Spalding (1972) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการแก้ปัญหาของสนามการไหล โดยการสมมติค่าความดันและค่าความเร็วในขอบเขตของปัญหาที่น่าสนใจ แล้วคำนวณหาค่าความเร็วจากการสมมติค่าความเร็วและความดัน เพื่อที่จะนำค่าความเร็วที่คำนวณได้ไปหาค่าความดันอีกครั้ง โดยใช้ Pressure-correction method เพื่อช่วยในการคำนวณความดันที่ถูกต้อง ซึ่งค่า Pressure-correction ที่ได้นี้จะถูกนำกลับมาหาค่าความเร็ว และทำซ้ำตามขั้นตอนดังกล่าว จนกระทั่งผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ซึ่งวิธีนี้เป็นการช่วยให้ค่าความเร็วและความดันมีความสัมพันธ์เป็นไปตามการอนุรักษ์โมเมนตัมและการอนุรักษ์มวล โดยวิธีในโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ เป็นวิธีที่ใช้กับกริดแบบเยื้องกัน

กริดแบบเยื้อง เป็นการแบ่งกริดเพื่อให้กริดของความเร็ว อยู่ระหว่างจุดต่อของตัว แปรสเกลาร์ ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) และแก้ปัญหาการเกิด Checker-board effect (Patankar, 1980) อันจะก่อให้เกิดความผิดพลาดในการคำนวณเชิงตัวเลข

จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y

$$a_P u_{k_P} = \sum_{nb} a_{nb} u_{k_{nb}} + b_{u_k} - \left(A_k^j \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \right)_P \tag{3.21}$$

ซึ่งเริ่มต้นจากการเดาค่า p^*, u^* และ v^* ในสมการ (3.21) จะได้ดังนี้

$$a_P u^*_{k_P} = \sum_{nb} a_{nb} u^*_{k_{nb}} + b_{u_k} - \left(A_k^j \frac{\partial p^*}{\partial \xi_j} \right)_P \tag{3.22}$$

เครื่องหมาย* หมายความว่าเป็นค่าที่กำหนดขึ้นมาใหม่ เราจึงต้องนิยามค่าแก้ไขความดัน (Pressure correction, p') ซึ่งก็คือความแตกต่างระหว่างความดันที่ถูกต้อง (Correct pressure, p) กับความดันที่สมมติขึ้นมา (Guessed Pressure, p^*)

$$p = p^* + p' \tag{3.23}$$

และสำหรับค่าแก้ไขความเร็วสามารถนิยามได้ในลักษณะเดียวกัน คือ

$$u_k = u_k^* + u_k' \tag{3.24}$$

นำสมการ (3.21) ลบกับสมการ (3.22) จะได้ความสัมพันธ์ใหม่คือ

$$a_P u'_{k_P} = \sum_{nb} a_{nb} u'_{k_{nb}} - \left(A_k^j \frac{\partial p'}{\partial \xi_j} \right)_P \tag{3.25}$$

กำหนดให้ค่า $\sum_{nb} a_{nb} u'_{k_{nb}}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อลดความยุ่งยากในการหาคำตอบของสมการ (Patangkar, 1980) ดังนั้น จากสมการ (3.25) จะได้ Velocity-correction คือ

$$u'_{k_P} = -\left(\frac{A_k^j}{a_P} \frac{\partial p'}{\partial \xi^i} \right)_P \tag{3.26}$$

แทนค่าสมการ (3.26) ลงในสมการ (3.24) จะได้

$$u_k = u_k^* - \frac{A_k^j}{a_P} \frac{\partial p'}{\partial \xi^j} \tag{3.27}$$

แต่สำหรับ Physical covariant velocity projection จะต้องนำสมการ (3.27) แทนลงในสมการ (2.33) ได้ดังนี้

$$V_i = V_i^* - \frac{J}{a_P \sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial p'}{\partial \xi^i} \quad \text{No summation over } i \tag{3.28}$$

นำสมการ (3.26) มาคิดหาฟลักซ์การพา โดยยกตัวอย่างที่ทิศ e ได้ดังนี้

$$F_e^1 = \left(\rho \hat{U}^1 \right)_e = \left[\rho \left(\alpha^{11} V_1 + \alpha^{12} V_2 \right) \right]_e \tag{3.29}$$

$$F_w^1 = \left(\rho \hat{U}^1 \right)_w = \left[\rho \left(\alpha^{11} V_1 + \alpha^{12} V_2 \right) \right]_w \tag{3.30}$$

จากสมการ(2.47) ทำการอินทิเกรตสมการความต่อเนื่องตลอดปริมาตรควบคุมจะได้

$$\left(\rho \hat{U}^1 \right)_e - \left(\rho \hat{U}^1 \right)_w + \left(\rho \hat{U}^2 \right)_n - \left(\rho \hat{U}^2 \right)_s = 0 \tag{3.31}$$

เมื่อแทนค่า V_i จากสมการ (3.28) แทนค่าลงในสมการ (3.31) ทุกทิศ โดยจะยกตัวอย่างที่ทิศ e และ w ได้ดังนี้

$$\left(\rho\hat{U}^1\right)_e = \left(\rho\hat{U}^{*1}\right)_e - \left(\rho\hat{U}'^1\right)_e \tag{3.32}$$

$$\left(\rho\hat{U}^1\right)_w = \left(\rho\hat{U}^{*1}\right)_w - \left(\rho\hat{U}'^1\right)_w \tag{3.33}$$

พิจารณาพจน์ $\left(\rho\hat{U}'^1\right)_e$ และ $\left(\rho\hat{U}'^1\right)_w$ ของสมการ (3.30) และ (3.31) ตามลำดับ โดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการ (3.29) และ (3.30) มีค่าดังนี้

$$\left(\rho\hat{U}'^1\right)_e = \rho_e\left[\alpha^{11}\left(\frac{J}{a_P\sqrt{g_{11}}}\frac{P'_E - P'_P}{\delta\xi}\right) + \left(\alpha^{12}V'_2\right)_e\right] \tag{3.34}$$

$$\left(\rho\hat{U}'^1\right)_w = \rho_w\left[\alpha^{11}\left(\frac{J}{a_P\sqrt{g_{11}}}\frac{P'_P - P'_W}{\delta\xi}\right) + \left(\alpha^{12}V'_2\right)_w\right] \tag{3.35}$$

สำหรับทิศ n และ s ก็ทำได้เช่นเดียวกัน เมื่อได้ค่าทุกทิศแล้วนำค่าแทนกลับที่สมการ (3.31) และสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$a_P P'_P = a_N P'_N + a_S P'_S + a_E P'_E + a_N P'_N + b \tag{3.36}$$

เมื่อ

$$a_N = \frac{\rho\alpha^{22}J}{a_P\sqrt{g_{22}}} \tag{3.37}$$

$$a_S = \frac{\rho\alpha^{22}J}{a_P\sqrt{g_{22}}} \tag{3.38}$$

$$a_E = \frac{\rho\alpha^{11}J}{a_P\sqrt{g_{11}}} \tag{3.39}$$

$$a_W = \frac{\rho\alpha^{11}J}{a_P\sqrt{g_{11}}} \tag{3.40}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \tag{3.41}$$

$$b = b_s + b_{NO} \tag{3.42}$$

$$b_s = -\left(F_e^{1*} - F_w^{1*} + F_n^{2*} - F_s^{2*}\right) \tag{3.43}$$

$$b_{NO} = \left(\rho\alpha^{12}V_2'\right)_e - \left(\rho\alpha^{12}V_2'\right)_w + \left(\rho\alpha^{21}V_2'\right)_n - \left(\rho\alpha^{21}V_2'\right)_s \tag{3.44}$$

การปรับค่าความดันและความเร็วนั้น บางครั้งจะมีการใส่ค่า Under-relaxation เพื่อให้การคำนวณซ้ำมีผลลัพธ์ลู่เข้า อย่างมีเสถียรภาพ ดังนี้

$$p = p^* + \alpha_p p' \tag{3.45}$$

และค่าความเร็วก็เช่นกัน

$$u = u^* + \alpha_u u' \tag{3.46}$$

$$v = v^* + \alpha_v v' \tag{3.47}$$

เมื่อ α_p คือ Under relaxation factor สำหรับค่าความดัน p

α_u คือ Under relaxation factor สำหรับค่าความเร็ว u

α_v คือ Under relaxation factor สำหรับค่าความเร็ว v

จากวิธีการที่กล่าวมาในหัวข้อนี้ สามารถสรุปขั้นตอนของกระบวนการหาผลเฉลยด้วย SIMPLE algorithm ได้ดังนี้

1. คำนวณสัมประสิทธิ์ของรูปร่างกริดที่ใช้

2. สมมติค่าเริ่มต้นของ p^*, u^* และ v^* ทุกๆ จุด

3. แปลงค่าความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียนเป็น Physical covariant velocity projection $\left(V_i\right)$ ซึ่งมีทิศทาง ξ และ η จากสมการ (2.33)

4. แก้ไขค่าที่เกี่ยวข้องให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ

5. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ และ Source term ของสมการโมเมนตัมด้วยการใช้ตัวแปรล่าสุด จะได้ค่า V_i ทั้งสองทิศ จากสมการ (2.9) โดยใช้ค่า p^*

6. หาค่า $\hat{U}^{i*}$ จากสมการ (2.40) โดยใช้ค่า V_i ซึ่งหาได้จากขั้นตอนที่ 5

7.หาค่า p' จากสมการ (3.36)

8. คำนวณหาค่า p จากสมการ (3.45) แล้วแทนค่า p ที่คำนวณได้ มาแทนเป็น p^* ค่าใหม่

9. คำนวณหาค่า V_i ใหม่จากสมการ (3.28) โดยใช้ค่า p' จากขั้นตอนที่ 7 จากนั้นจึงกำหนดค่า V_i ที่ได้เป็น V_i^* ค่าใหม่ในการเริ่มต้น

10. แปลงค่า V_i กลับเป็นความเร็วพิกัดคาร์ทีเซียน จากสมการ (2.36)

11. ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 4 ถึง 10 จนกระทั่ง p^*,u^* และ v^* มีค่าลู่เข้าสู่ค่าที่ถูกต้อง โดยตรวจสอบการลู่เข้าใกล้ศูนย์ของพจน์ b (Mass source term) ในสมการ (3.20) และ (3.37) ซึ่งแสดงว่าค่า p^*,u^* และ v^* ที่คำนวณได้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตมาตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาการไหลแบบราบเรียบของของไหลที่อัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัว โดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการคำนวณจากวิธีอื่น ของงานวิจัยที่ผ่านมา เพื่อแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความถูกต้องและเชื่อถือได้ ซึ่งแต่ละปัญหาที่นำมาทดสอบนั้นจะมีรูปร่างที่แตกต่างกัน และค่าที่ใช้ในการเปรียบเทียบก็แตกต่างกันออกไป

กรณีทดสอบที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องมี 4 กรณี ดังต่อไปนี้

1) การไหลในแผ่นคู่ขนาน (Flow in parallel plates)

2) การไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channel

3) การไหลแบบราบเรียบผ่าน Sinusoidal wall

4) การไหลแบบราบเรียบผ่านผนังรูปคลื่น (Wavy-wall)

4.1 การไหลในแผ่นคู่ขนาน (Flow in parallel plates)

สำหรับกรณีทดสอบแรก โดยกำหนดให้การไหลเป็นแบบราบเรียบผ่านแผ่นคู่ขนานสองแผ่นที่อยู่นิ่ง โดนแผ่นขนานวางห่างกันเป็นระยะ D และแต่ละแผ่นมีขนาดความยาวเป็นระยะอนันต์ดังแสดงในรูปที่ 4.1

ที่บริเวณทางเข้าของไหลจะมีความเร็วคงที่และจากเงื่อนไขไม่ลื่นไถล (No-slip condition) จะทำให้ความเร็วที่ผนังของท่อต้องลดความเร็วลงมาเท่ากับศูนย์ ก่อให้เกิดเป็นรูปร่างความเร็วจนกระทั่งการไหลมีลักษณะเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ ซึ่งรูปร่างความเร็วจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง โดยระยะทางตั้งแต่บริเวณทางเข้าจนถึงตำแหน่งที่ความเร็วมีการพัฒนาเต็มที่ (Entrance length, L_e) จะมีความสัมพันธ์กับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number, Re) ดังแสดงในสมการ (4.1)

$$L_e = 0.06 \cdot \mathrm{Re} \cdot D \tag{4.1}$$

โดย L_e คือ ระยะการปรับตัวสู่การไหลแบบพัฒนาเต็มที่ และ

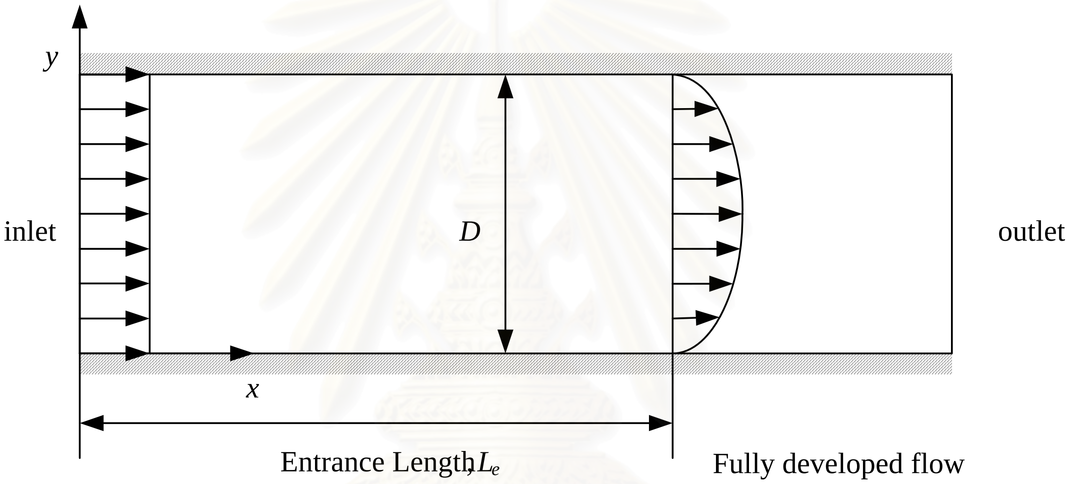
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} \tag{4.2}$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล

$\bar{u}$ คือ ความเร็วเฉลี่ยที่บริเวณทางเข้า

D คือ ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนาน

μ คือ ความหนืดสัมบูรณ์ (Absolute viscosity)



รูปที่ 4.1 ลักษณะการไหลในแผ่นคู่ขนาน

กำหนดให้ ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานที่อยู่นิ่ง (D) เท่ากับ 1 cm โดยของไหลเป็นอากาศ ($\rho = 1.164\ \mathrm{kg/m^3}$ และ $\mu = 1.86\times10^{-5}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$) มีความเร็วสม่ำเสมอที่ทางเข้ามีค่าเท่ากับ 0.5 m/s ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่คำนวณได้จากสมการ (4.2) มีค่าประมาณ 310 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1400 จึงเป็นการไหลแบบราบเรียบ และระยะ L_e ที่มากที่สุด สามารถคำนวณได้จากสมการ (4.1) โดยแทนค่า $\mathrm{Re} = 1400$ จะได้ ค่า $L_e = 84$ cm กล่าวคือเมื่อของไหลไหลผ่านแผ่นคู่ขนานเป็นระยะมากกว่า 84 cm การไหลจะพัฒนาจนเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ ดังนั้นจึงกำหนดให้แผ่นคู่ขนานมีความยาวเท่ากับ 100 cm

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กระทำโดยการจำลองการไหลผ่านแผ่นคู่ขนาน เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution) โดยลักษณะของการไหลสำหรับปัญหานี้เป็นการไหลในหนึ่งมิติ คือไม่มีการไหลในทิศทางแนวดิ่ง (y) หรือ

กำหนดให้ความเร็วในแนวดิ่ง (v) มีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้บริเวณทางออกเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว เมื่อใช้ข้อสมมติฐานเหล่านี้จะทำให้สมการโมเมนตัมทั้งสองแนวแกนลดรูปลงเป็น

x -momentum equation

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{4.3a}$$

y -momentum equation

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{4.3b}$$

จากสมการ (4.3a) ทำการอินทิเกรตเทียบตัวแปร y สองครั้ง จะได้

$$u=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2+\frac{A}{\mu}y+B \tag{4.4}$$

โดยค่าคงที่ A และ B จะสามารถหาค่าได้จากการประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบคือ $u=0$ ที่ $y=0$ และ $u=0$ ที่ $y=1$ ดังนั้น จะได้รูปร่างความเร็วของการไหลดังนี้

$$u=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y \tag{4.5}$$

หรือ

$$u=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(y^2-y\right) \tag{4.6}$$

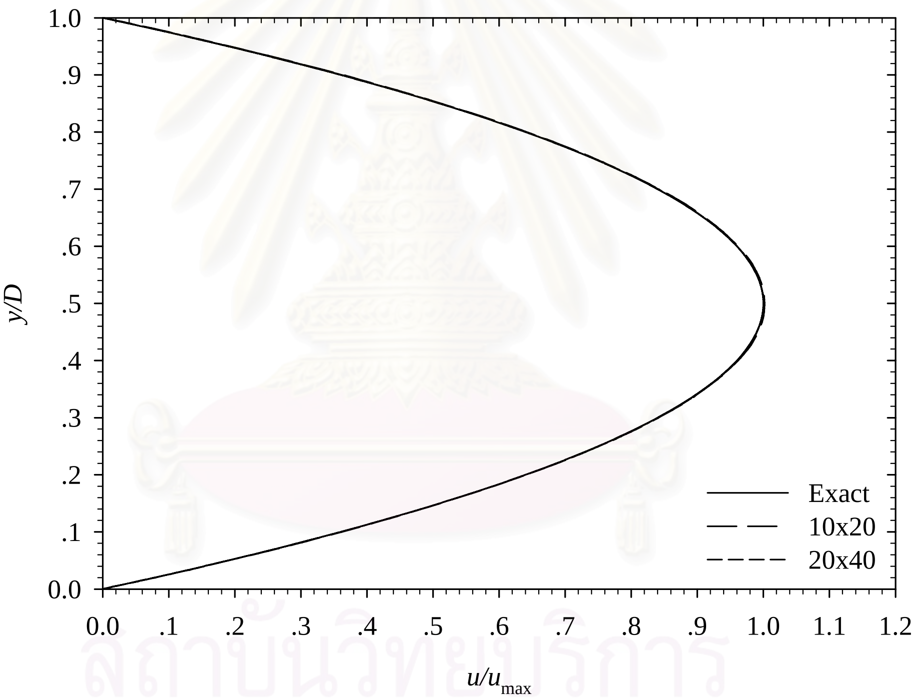
ที่บริเวณทางออก เป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ดังนั้น ความเร็วในแกน x จะมีค่ามากสุดที่บริเวณกึ่งกลางของแผ่นคู่ขนาน $(y=0.5)$ และเมื่อแทนค่า $y=0.5$ ลงในสมการ (4.6) จะได้ความเร็วสูงสุดในแนวแกน x ดังนี้

$$u_{\max}=-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{4.7}$$

นำสมการ (4.6) หารด้วยสมการ (4.7) จะได้ความเร็วไร้มิติซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความเร็วที่ตำแหน่งใดๆ ต่อความเร็วสูงสุดดังนี้

$$\frac{u}{u_{\max}} = 4\left(y^2 - y\right) \tag{4.6}$$

รูปที่ 4.2 แสดงรูปร่างความเร็วที่ตำแหน่งทางออกสำหรับกริดขนาด 10×20 และ 20×40 เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง พบว่าผลการคำนวณที่ได้ มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี คือกริดขนาด 10×20 มีความแตกต่างกับผลเฉลยแม่นตรงมากสุด 2.56 เปอร์เซ็นต์ และกริดขนาด 20×40 มีความแตกต่างกับผลเฉลยแม่นตรงมากสุด 1.54 เปอร์เซ็นต์ โดยผลการคำนวณของกริดทั้งสองขนาดนั้นให้ผลที่แตกต่างกันน้อยมาก นั่นหมายความว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น Grid-independent แล้ว หรือกล่าวอีกนัยนึง คือ ถ้าเพิ่มจำนวนกริดมากกว่า10×20 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงหรือมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก



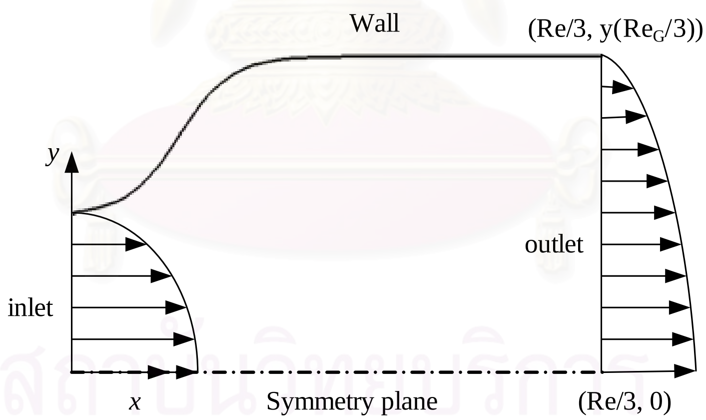
รูปที่ 4.2 รูปร่างความเร็วที่ตำแหน่งทางออกเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

4.2 การไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channel

ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channel เป็นปัญหาที่นิยมนำมาทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมเมื่อใช้พิกัดเชิงเส้นโค้ง (Curvilinear coordinates) โดยรูปร่างของช่องทางการไหลด้านบนจะเป็นผนังที่มีความโค้งซึ่งใช้ค่า Re เป็นตัวกำหนดความโค้งของผนัง โดยที่ค่า y ของผนัง (y_w) สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ (4.7) เงื่อนไขขอบด้านล่างกำหนดให้เป็นระนาบสมมาตร (Symmetry plane) และเงื่อนไขขอบบริเวณทางออกของช่องทางการไหลกำหนดให้เป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ ดังแสดงในรูปที่ 4.3

$$y_w = 1 - 0.5\left[\tanh\left(2 - 30\frac{x}{\mathrm{Re}_G}\right) - \tanh(2)\right], \qquad 0 \le x \le \frac{\mathrm{Re}}{3} \tag{4.7}$$

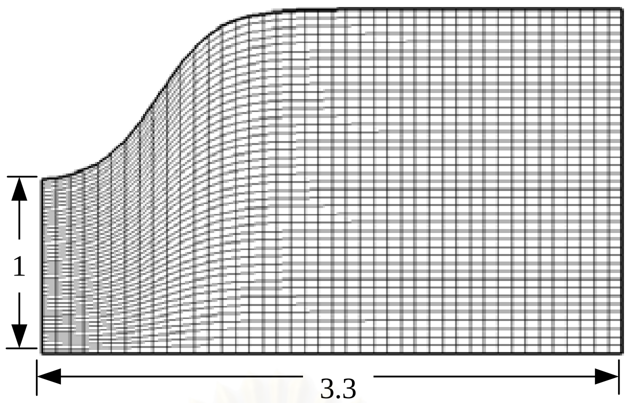
โดย Re_G คือค่าที่ใช้กำหนดความโค้งของผนังด้านบน กล่าวคือเมื่อค่า Re_G มีค่ามากขึ้น ความโค้งของผนังด้านบนจะน้อยลง สำหรับค่า Re จะเป็นตัวกำหนดความยาวของช่องทางการไหล กล่าวคือเมื่อค่า Re มากขึ้นช่องทางการไหลจะยาวมากขึ้น โดยสามารถคำนวณได้จากสมการ (4.2) และสำหรับค่า D ในปัญหานี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1



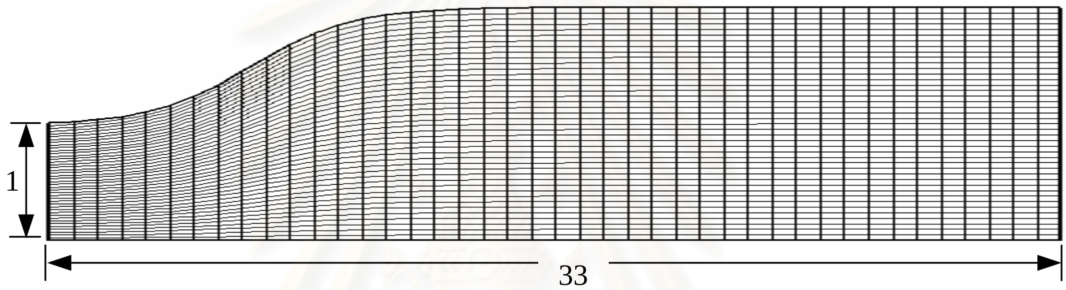
รูปที่ 4.3 รูปร่างของปัญหา Gradual-expansion channel

กำหนดให้ความเร็วที่ผนังเท่ากับศูนย์และรูปร่างความเร็วบริเวณทางเข้าซึ่งอยู่ในรูปตัวประกอบความเร็วคาร์ทิเซียนมีค่าดังนี้

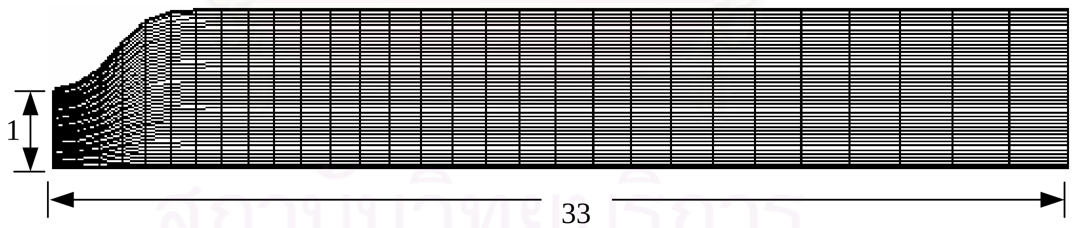
$$u = \frac{3}{2}\left(y_{\max}^2 - y^2\right), \qquad v = 0 \tag{4.8}$$



1) $\mathrm{Re} = 10$, $\mathrm{Re}_G = 10$ (not to scale)



2) $\mathrm{Re} = 100$, $\mathrm{Re}_G = 100$ (not to scale)



3) $\mathrm{Re} = 100$, $\mathrm{Re}_G = 10$ (not to scale)

รูปที่ 4.4 รูปร่างของปัญหาและการวางตัวของกริดสำหรับปัญหาการไหลผ่าน Gradual-expansion channel ทั้ง 3 กรณี

คำนวณปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channels กับรูปร่างผนังโค้งด้านบนที่มีความแตกต่างกัน 3 แบบ คือ กรณี 1) $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Re}_G=10$ กรณี 2) $\mathrm{Re}=100$, $\mathrm{Re}_G=100$ และ กรณี 3) $\mathrm{Re}=100$, $\mathrm{Re}_G=10$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4 ซึ่งรูปร่างปัญหาทั้ง 3 กรณีนั้น บริเวณช่องทางออกจะมีความสูงเท่ากันคือ $y\approx 2$ โดยในกรณี 3) นั้นผนังด้านบนจะมีความโค้งเหมือนกับกรณี 1) แต่ความยาวของช่องทางการไหลทั้งหมดนั้นจะยาวเท่ากับกรณี 2) คือ $x\approx 33$ ในขณะที่กรณี 1) มีความยาวของช่องทางการไหลทั้งหมดประมาณ 3

ตารางที่ 4.1 และ 4.2 แสดงค่าความดันที่ผนังด้านบน ณ ตำแหน่งต่าง ๆกันซึ่งกำหนดให้มีตำแหน่งอ้างอิงที่ $x/x_{out}=0.5$ โดยค่าความดันสามารถหาได้จากสมการ (4.9) ดังนี้

$$P=\frac{p-p_{ref}}{\rho\bar{u}^2} \tag{4.9}$$

โดยที่ค่า p_{ref} คือ ค่าความดันที่ตำแหน่งอ้างอิง ซึ่งในที่นี้ ตำแหน่งอ้างอิงคือ $x/x_{\mathrm{out}}=0.5$

เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผล Benchmark ของ Cliffe et al. (1982) ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 60×30 พบว่าผลจากทั้งสองตารางมีความใกล้เคียงกับผล Benchmark เป็นอย่างดีในทุกๆ ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.1 ค่าความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางการไหล ณ ตำแหน่งต่างๆ ของกรณี 1) $\mathrm{Re}=10, \mathrm{Re}_G=10$

$x/x_{\mathrm{out}}=0.5$	Cliffe et al. (1982)	22×22	42×42	62×62
0.10	-0.3400	-0.3580	-0.3420	-0.3450
0.30	-0.0680	-0.0736	-0.0714	-0.0670
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.70	0.0500	0.0520	0.0516	0.0510
0.90	0.0680	0.0727	0.0720	0.0715
1.00	0.0710	0.0804	0.0800	0.0796

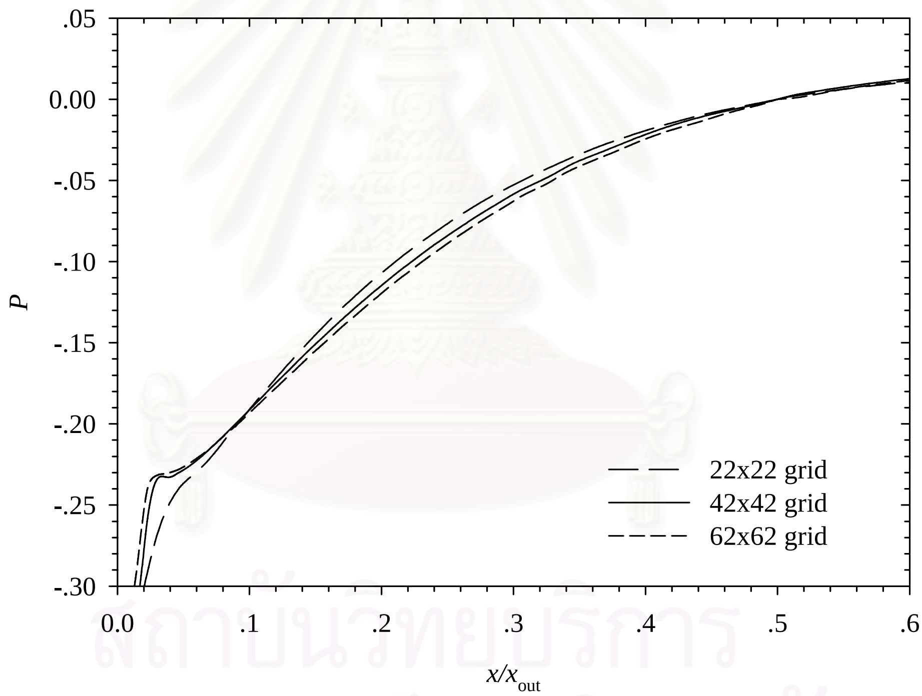
ตารางที่ 4.2 ค่าความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางการไหล ณ ตำแหน่งต่างๆ ของกรณี 2) $\mathrm{Re}=100, \mathrm{Re}_G=100$

$x/x_{out}=0.5$	Cliffe et al. (1982)	22×22	42×42	62×62
0.10	-0.2275	-0.2372	-0.2366	-0.2349
0.30	-0.0717	-0.0885	-0.0794	-0.0769
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.70	0.0287	0.0291	0.0286	0.0285
0.90	0.0294	0.0298	0.0295	0.0295
1.00	0.0253	0.0244	0.0243	0.0244

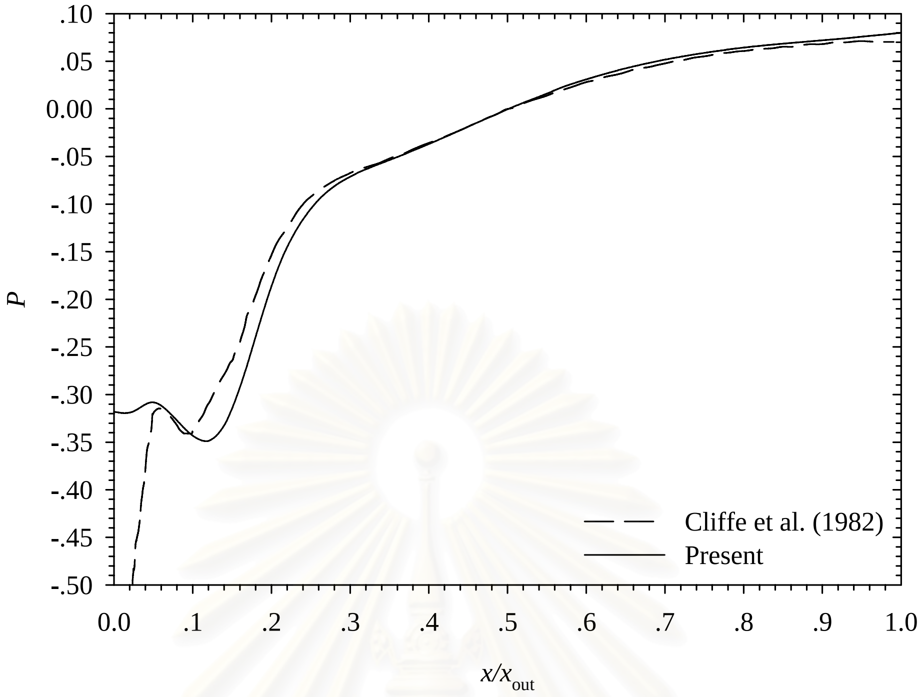
รูปที่ 4.5 แสดงผลของการคำนวณกรณี 3) โดยใช้กริดต่างๆ กัน 3 ขนาดคือ 22×22, 42×42 และ 62×62 จะเห็นว่าผลการคำนวณจากการใช้กริดขนาด 22×22 จะมีค่าค่อนข้างต่างจาก กรณีใช้กริดขนาด 42×42 และกรณีใช้กริดขนาด 62×62 จะให้ผลการคำนวณที่แตกต่างจากการใช้กริดขนาด 42×42 เพียงเล็กน้อย ดังนั้น การเลือกใช้กริดขนาด 42×42 จึงมีความละเอียดเพียงพอแล้วต่อการคำนวณ โดยการคำนวณปัญหาในกรณี 3) นี้จะมีขนาดความยาว 33 ซึ่งมีค่าเท่ากับกรณี 2) และมากกว่ากรณี 1) ดังนั้น การนำกริดขนาด 42×42 ไปใช้คำนวณกับกรณี 1) และ 2) จึงมีความเป็น Grid independent เช่นกัน

สำหรับรูปที่ 4.6 แสดงการกระจายความดันบริเวณผนังด้านบนของปัญหา พบว่าในช่วงแรกของโดเมนค่าความดันที่คำนวณได้นั้นเมื่อเทียบกับผลการคำนวณของ Cliffe et al. (1982) แล้วมีความแตกต่างกันอยู่ ซึ่งก็มีนักวิจัยท่านอื่นที่พบความแตกต่างลักษณะเช่นเดียวกันนี้ โดย Burns and Wilkes (1987) ได้ให้เหตุผลความแตกต่างนี้ว่ามีสาเหตุมาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้าและทางออก กล่าวคือการที่กำหนดให้เงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้าให้เป็นการไหลที่พัฒนาเต็มที่แล้วเป็นการขัดกับธรรมชาติ เนื่องจากผนังบริเวณทางเข้านั้นยังมีความชันอยู่ และอีกเหตุผลหนึ่งคือโดเมนของปัญหานี้ยังไม่ยาวมากพอที่จะกำหนดว่าช่องทางออกนี้เป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว ซึ่งMelaaen (1990) ก็ได้ให้เหตุผลไปในทิศทางเดียวกันว่า รูปร่างความดันในช่องทางเข้านั้นมีอัตราการเปลี่ยนที่สูงมาก ดังแสดงในรูปที่ 4.10 และกริดที่ใช้ในช่วงแรกนั้นยังไม่ละเอียดพอที่จะนำมาวิเคราะห์ปัญหานี้ อย่างไรก็ตาม การคำนวณในส่วนที่เหลือนั้นก็ยังเป็นไปตาม Benchmark โดยในรูปที่ 4.7 และ 4.8 การกระจายของความดันโดยรวมเมื่อเทียบกับผลของ Benchmark แล้วพบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีโดยจะมีลักษณะเดียวกันกับกรณี 1) คือ จะมีความแตกต่างกันเล็กน้อยในช่วงแรกและหลังจากนั้นในช่วงท้ายของปัญหา ผลลัพธ์ที่ได้จะค่อยๆ ลู่เข้าสู่ Benchmark

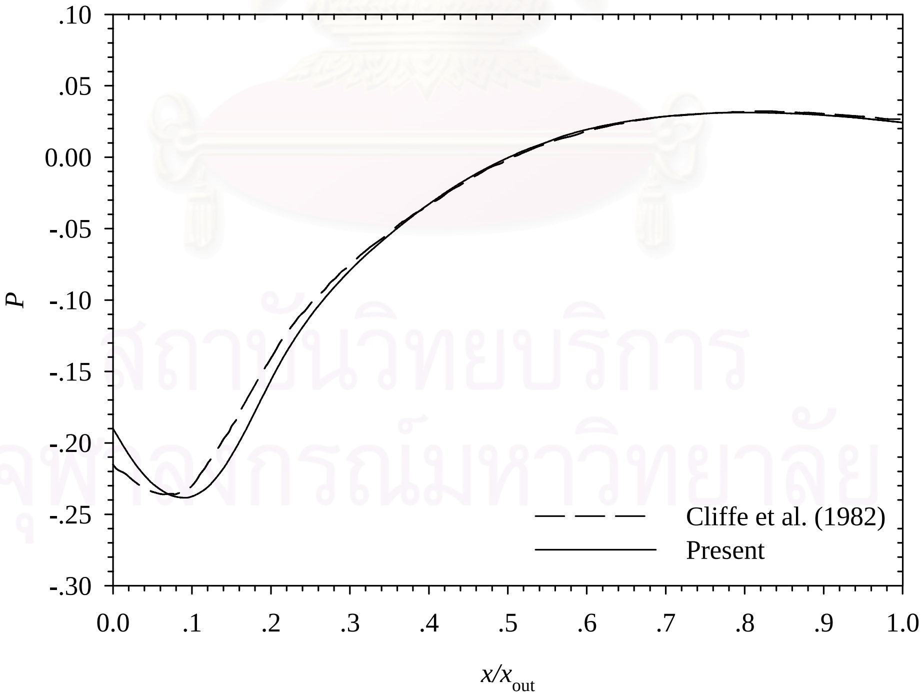
สำหรับรูปที่ 4.9 และ 4.11 เป็นการแสดงเส้นกระแสการไหลของกรณี 1) และ 2) จากรูปจะเห็นว่าเกิดการหมุนวนบริเวณผนังโค้งด้านบนซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นสอดคล้องกับผลการคำนวณของ Cliffe et al. (1982) เป็นอย่างดีโดย Cliffe et al. (1982) ได้เปรียบเทียบผลการคำนวณของการวางตัวกริดแบบเยื้องและแบบไม่เยื้องเฉพาะกรณีนี้ว่า ในกรณีที่ใช้กริดละเอียดนั้นผลการคำนวณของกริดทั้งสองแบบจะให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกัน ซึ่งสังเกตได้จากตำแหน่งที่เกิดการหมุนวนในรูปที่ 4.9a แต่ในกรณีที่ใช้จำนวนกริดหยาบ กริดแบบเยื้องต้องใช้ CPU-time และหน่วยความจำมากในการคำนวณ หมายความว่าการคำนวณแต่ละรอบจะใช้เวลามากกว่ากริดแบบไม่เยื้อง ซึ่งในการวางตัวกริดแบบไม่เยื้องนั้นจะต้องใช้จำนวนรอบในการคำนวณมากกว่า ผลลัพธ์ที่ได้นั้นกริดแบบเยื้องจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าเฉพาะกรณีที่ใช้กริดหยาบเท่านั้น สำหรับผลของการกระจายตัวความดันสำหรับปัญหากรณี 1) และกรณี 2) ก็ให้ผลสอดคล้องเช่นเดียวกันดังแสดงในรูปที่ 4.10 และ 4.12 ตามลำดับ



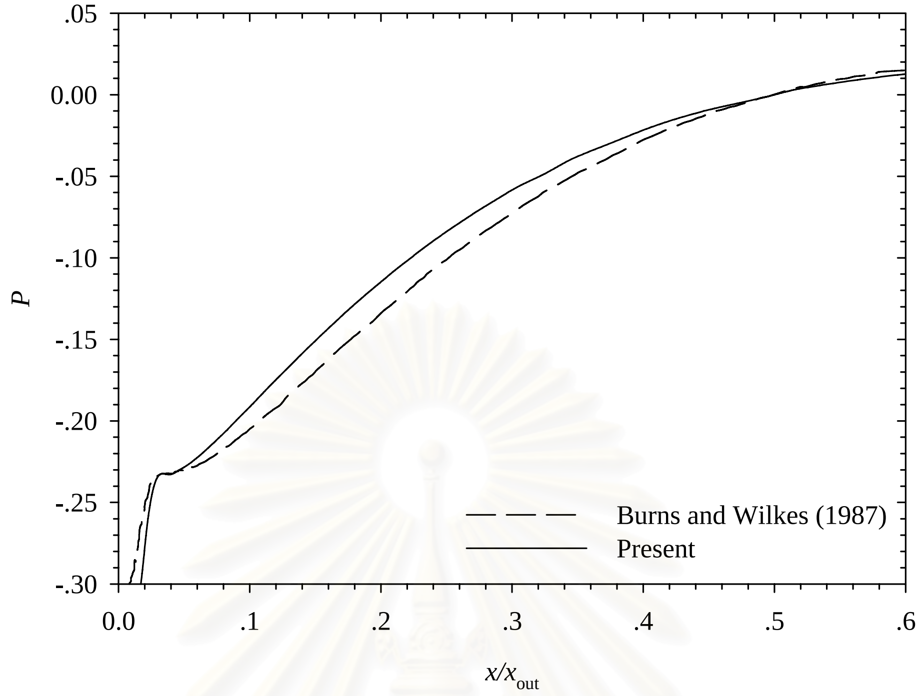
รูปที่ 4.5 การกระจายของความดันผนังด้านบนตลอดโดเมนของกริดขนาดต่างๆ กรณี 3) $\mathrm{Re} = 100, \mathrm{Re}_G = 10$



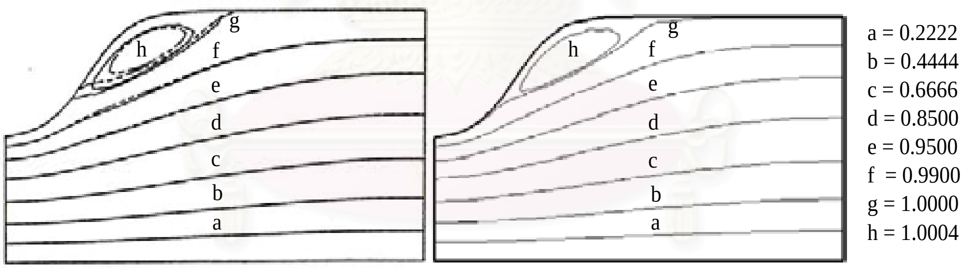
รูปที่ 4.6 การกระจายของความดันผนังด้านบนตลอดโดเมนกรณี 1) $\mathrm{Re}=10, \mathrm{Re}_G=10$



รูปที่ 4.7 การกระจายของความดันผนังด้านบนตลอดโดเมนกรณี2) $\mathrm{Re}=100, \mathrm{Re}_G=100$



รูปที่ 4.8 การกระจายของความดันผนังด้านบนตลอดโดเมนกรณี 3) $\mathrm{Re}=100, \mathrm{Re}_G=10$



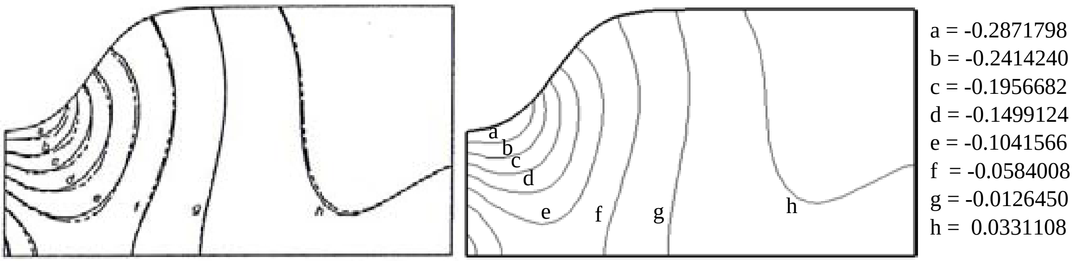
(a) Cliffe et al.(1982)

(b) Present calculation

—— Staggered grid

---- Non-staggered grid

รูปที่ 4.9 เส้นกระแสการไหลของรูปร่างกรณี 1) $\mathrm{Re}=10, \mathrm{Re}_G=10$



(a) Cliffe et al.(1982) (b) Present calculation

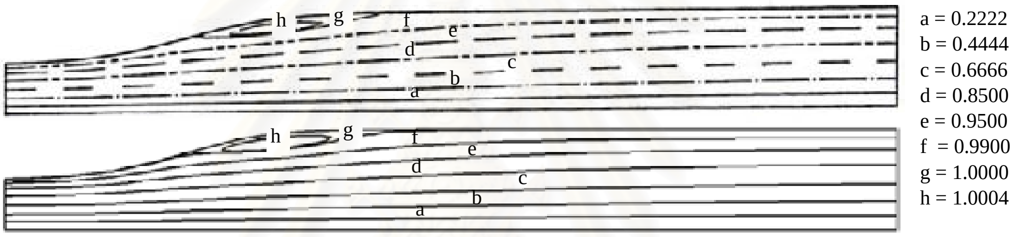
—— Staggered grid

---- Non-staggered grid

รูปที่ 4.10 การกระจายตัวของความดันของรูปร่างกรณี 1) $\mathrm{Re}=10, \mathrm{Re}_G=10$

(a)

(b)

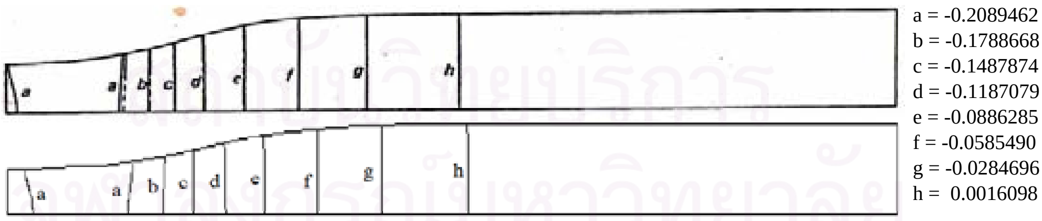


รูปที่ 4.11 เส้นกระแสการไหลของรูปร่างกรณี 2) $\mathrm{Re}=100, \mathrm{Re}_G=100$

(a) Cliffe et al.(1982) (b) Present calculation

(a)

(b)



รูปที่ 4.12 การกระจายตัวของความดันของรูปร่างกรณี 2) $\mathrm{Re}=100, \mathrm{Re}_G=100$

(a) Cliffe et al.(1982) ---- Staggered grid —— Non-staggered grid

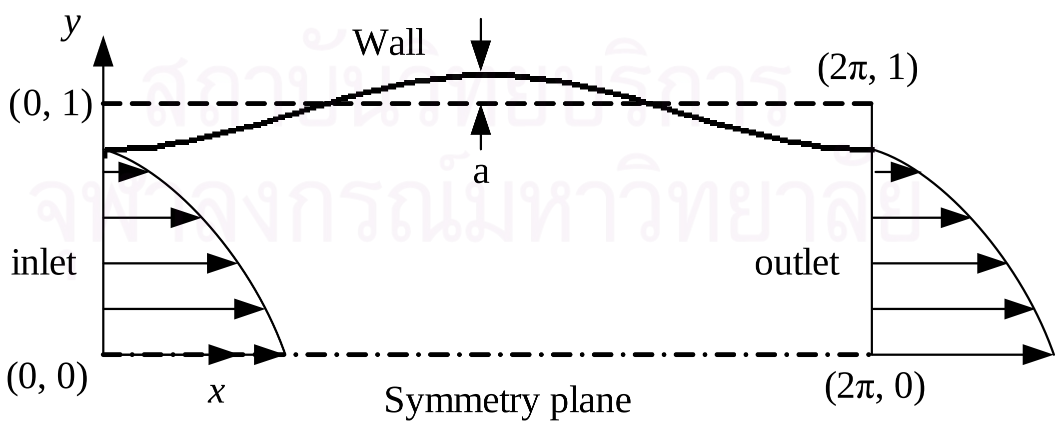
(b) Present calculation

4.3 การไหลแบบราบเรียบผ่าน Sinusoidal wall

Luo and Bewley (2004) ได้ทำการศึกษาการไหลที่อัดตัวไม่ได้ในระบบพิกัดเชิงเส้นโค้งที่ขึ้นอยู่กับเวลา (Time-dependent curvilinear coordinate system) กล่าวคือ เมื่อเวลามีการเปลี่ยนแปลง รูปร่างของปัญหาก็จะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย เช่น เนินค่อยๆ สูงขึ้น หรือ หลุมค่อยๆ ลึกลง เป็นต้น ในเบื้องต้น Luo and Bewley (2004) ได้ทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับการไหลแบบราบเรียบโดยไม่มีการเคลื่อนที่ของพิกัดผ่าน Sinusoidal wall ดังแสดงในรูปที่ 4.13 และนำผลลัพธ์ที่คำนวณด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องของ Tsangaris and Leiter (1983) ปัญหานี้ได้รับความสนใจจากนักสรีรวิทยาเนื่องจากพฤติกรรมการไหลที่เกิดขึ้นนี้สามารถนำผลลัพธ์ที่คำนวณได้ไปอธิบายพฤติกรรมการไหลในเส้นเลือด หรือท่อปัสสวะได้ ทำให้สามารถออกแบบและสร้างอวัยวะเทียมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

สำหรับปัญหานี้กำหนดเงื่อนไขขอบเช่นเดียวกับปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channels คือความเร็วที่ขอบทางเข้าเป็นการไหลแบบราบเรียบรูปร่างของพาราโบลาที่กำหนดโดยสมการ (4.8) เงื่อนไขขอบบริเวณทางออกของช่องทางการไหล กำหนดให้เป็นการไหลที่พัฒนาเต็มที่แล้ว และเงื่อนไขด้านล่างกำหนดให้เป็นระนาบสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 4.13 จากรูปจะเห็นว่าผนังด้านบนมีลักษณะโค้งเป็นรูปคลื่น ที่มีความยาว 2π โดยความเร็วที่ผนังจะมีค่าเท่ากับศูนย์ และผนังรูปคลื่นจะมีค่าแอมพลิจูดของผนัง (a) ที่กำหนดจากสมการ (4.10)

$$y_w = 1 - a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \tag{4.10}$$

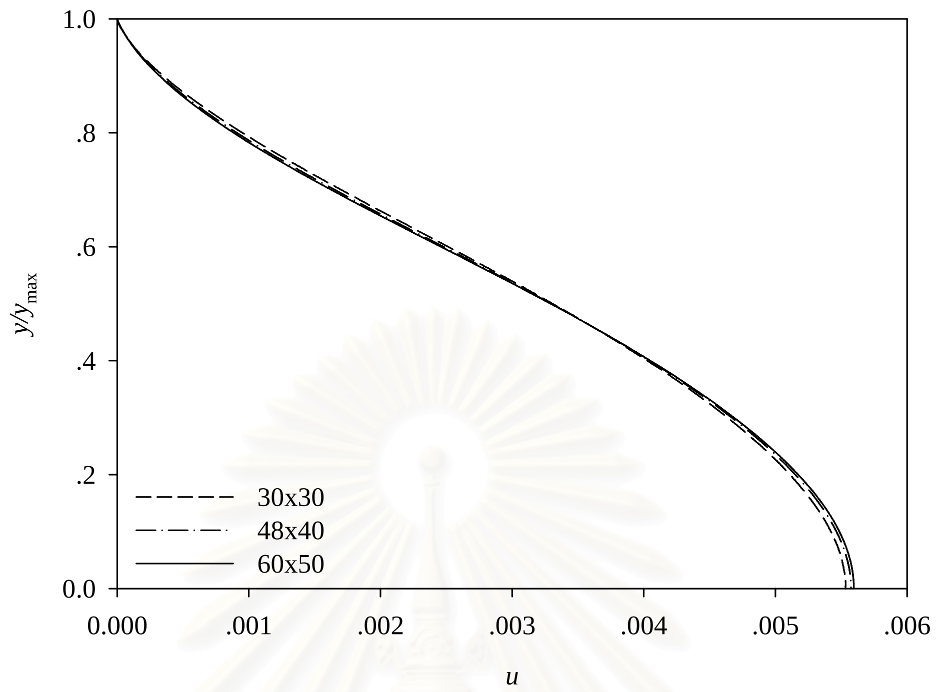


รูปที่ 4.13 รูปร่างของปัญหา Sinusoidal wall

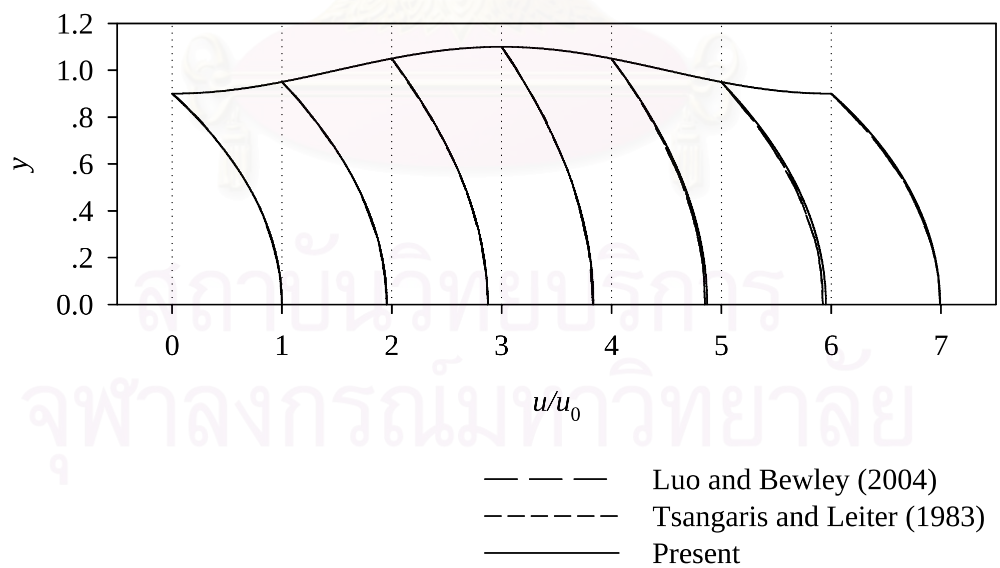
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหานี้จะเป็นการเปรียบเทียบความถูกต้องของรูปร่างความเร็วที่เกิดขึ้นในแต่ละหน้าตัดตั้งแต่ $x = 0,1,2,3,4,5$ และ 6 โดยกำหนดให้รูปร่างของผนังด้านบนมีค่าแอมพลิจูดเท่ากับ 0.1 และ 0.2 โดยค่า Re มีค่าเท่ากับ 1.0, 10, 75, 200 และ 400 ในเบื้องต้นนั้นจะทำการทดสอบหา Grid independent กับรูปร่างของผนังโค้งที่ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 400$ โดยเลือกตำแหน่ง $x = 4$ จะพบว่าเมื่อกริดมีความละเอียดมากขึ้นรูปร่างความเร็วจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก กล่าวคือกริดขนาด 48×40 เมื่อเทียบกับขนาด 60×50 นั้นมีความแตกต่างกันน้อยมากดังแสดงในรูปที่ 4.14 ดังนั้นจึงเลือกใช้กริดขนาด 48×40 ในการคำนวณปัญหาการไหลนี้

การเปรียบเทียบรูปร่างความเร็วกับผลการคำนวณของ Luo and Bewley (2004) และ Tsangaris and Leiter (1983) ที่ค่า Re ต่างๆ กัน ในกรณี $a = 0.1$ ได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.15–4.19 และสำหรับกรณี $a = 0.2$ แสดงไว้ในรูปที่ 4.20–4.24 สำหรับกรณี $a = 0.1$ จะเห็นว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีในทุกๆ ตำแหน่งและทุกค่า Re ที่เปรียบเทียบ สำหรับกรณีค่า $a = 0.2$ จะพบว่าผลการคำนวณเมื่อ $\mathrm{Re} = 1.0,\ 10$ และ 75 มีความสอดคล้องกับผลของ Tsangaris and Leiter (1983) และ Luo and Bewley (2004) เป็นอย่างดี แต่เมื่อ $\mathrm{Re} = 200$ และ 400 จะเห็นว่ารูปร่างความเร็วจะมีความแตกต่างกันไปเล็กน้อย โดยผลการคำนวณที่ได้จะใกล้เคียงกับผลของ Luo and Bewley (2004) มากกว่าของ Tsangaris and Leiter (1983) โดยที่ค่า $\mathrm{Re} = 200$ จะมีการไหลหมุนวน (Recirculation) เกิดขึ้นที่บริเวณผนังด้านบน และการไหลหมุนวนนี้จะมีบริเวณกว้างมากขึ้นเมื่อค่า Re เพิ่มเป็น 400 โดยการหมุนวนจะเริ่มตำแหน่ง $x \approx 1.5$ จนสิ้นสุดที่ $x \approx 4$ ดังแสดงในรูปที่ 4.25

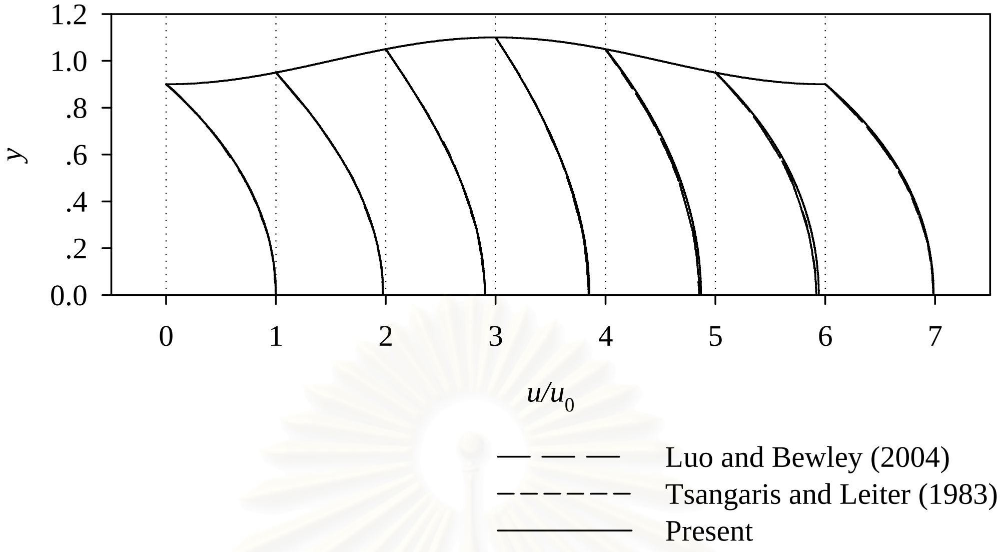
สาเหตุของความแตกต่างที่เกิดขึ้นนี้ Luo and Bewley (2004) ได้ให้เหตุผลว่า Tsangaris and Leiter (1983) ได้ใช้ทฤษฎีเพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation method) โดยได้นำเพียงพจน์อันดับศูนย์และอันดับหนึ่งของอนุกรมมาคำนวณ จึงทำให้เกิดความผิดพลาดเนื่องจากการประมาณค่าเรียกว่า Truncation error



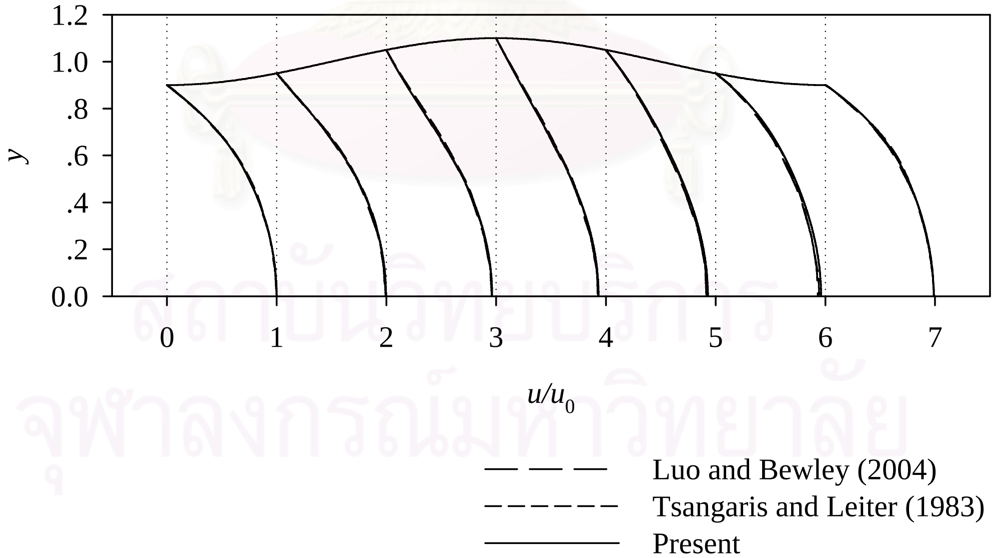
รูปที่ 4.14 รูปร่างความเร็วของกริดขนาดต่าง ๆ เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 400$ ที่ $x = 4$



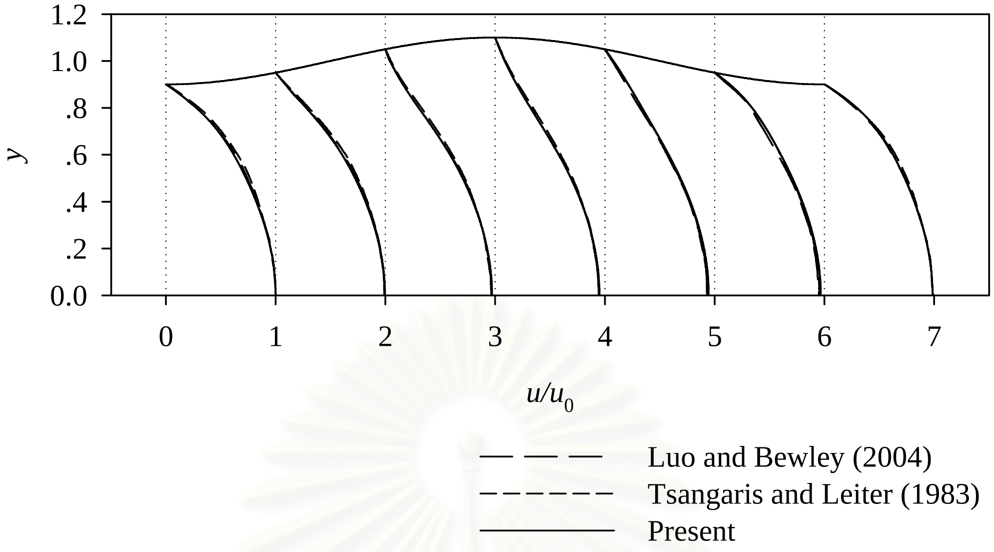
รูปที่ 4.15 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.1$ และ $\mathrm{Re} = 1.0$



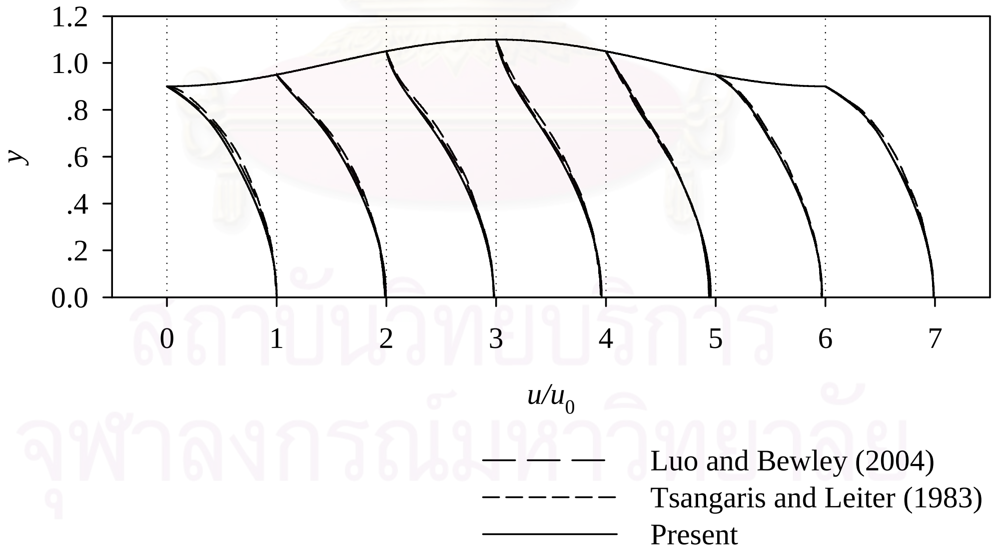
รูปที่ 4.16 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.1$ และ $\mathrm{Re} = 10$



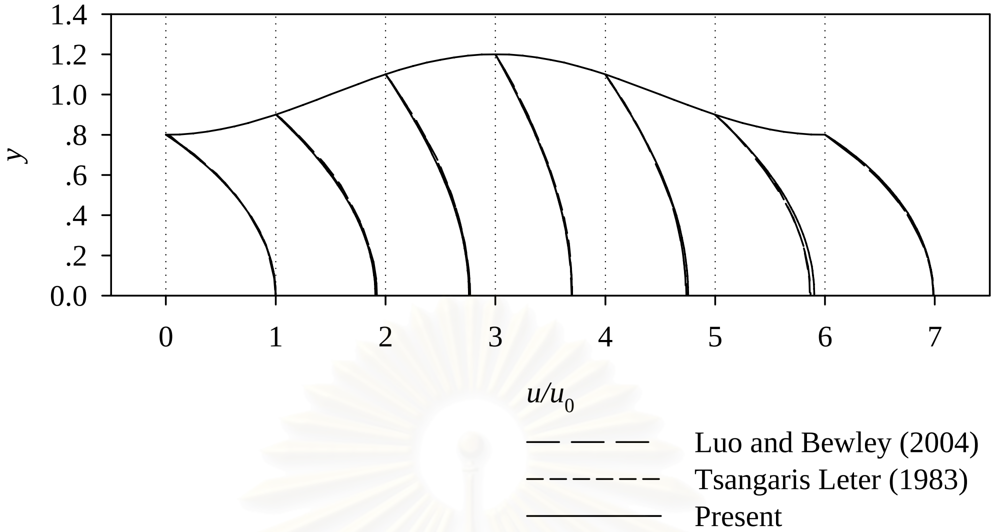
รูปที่ 4.17 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.1$ และ $\mathrm{Re} = 75$



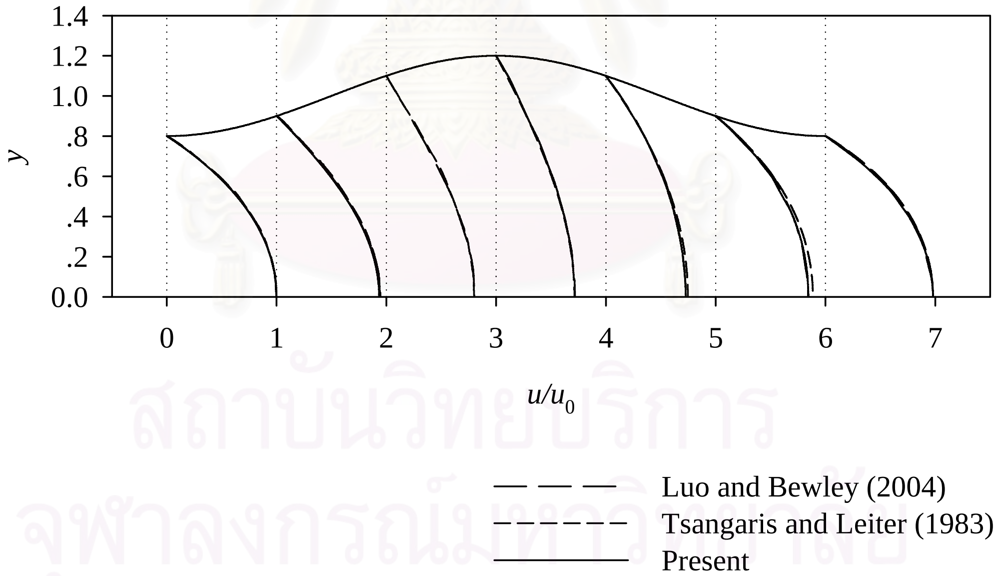
รูปที่ 4.18 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.1$ และ $\mathrm{Re} = 200$



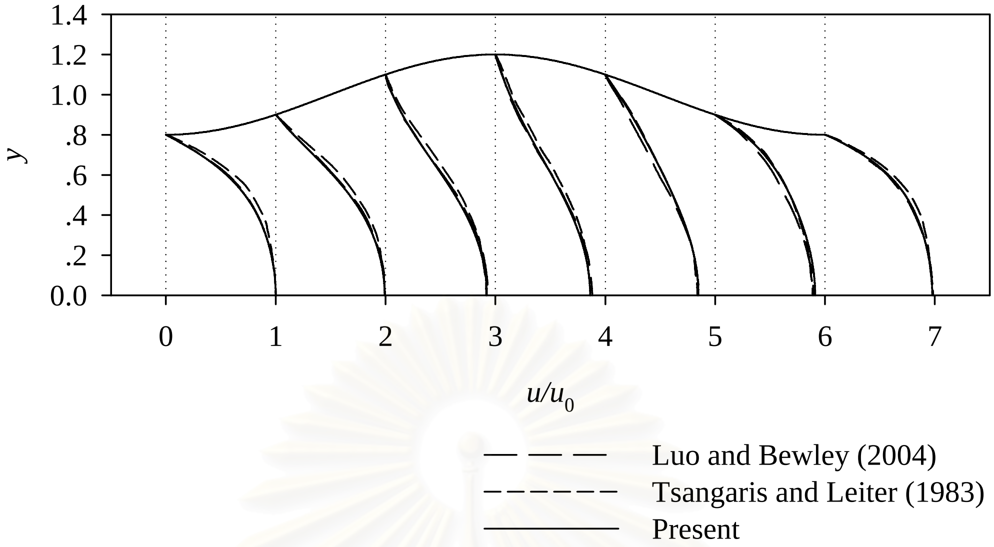
รูปที่ 4.19 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.1$ และ $\mathrm{Re} = 400$



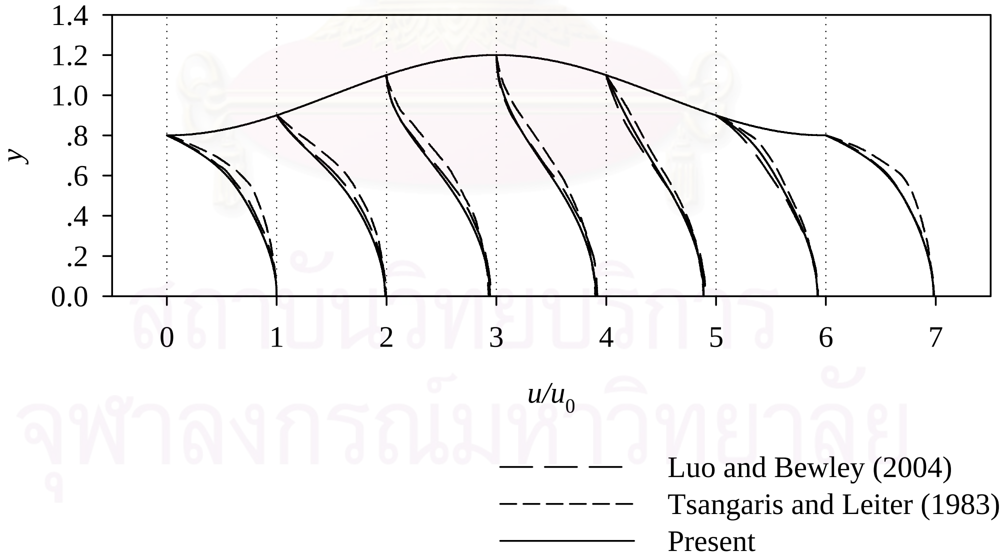
รูปที่ 4.20 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 1.0$



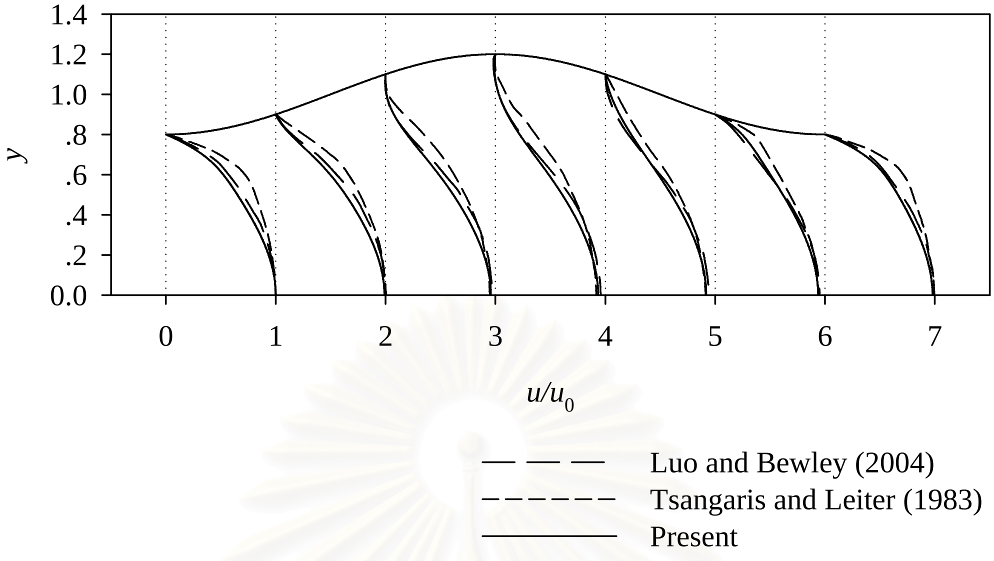
รูปที่ 4.21 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 10$



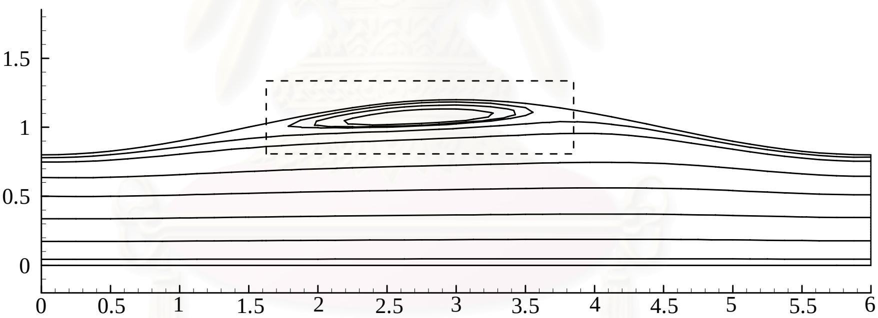
รูปที่ 4.22 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 75$

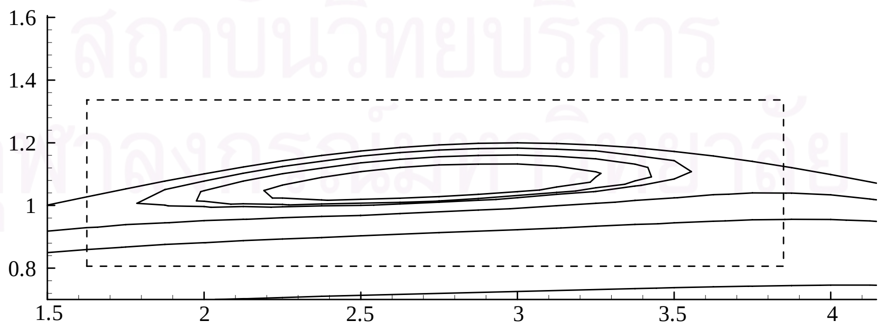


รูปที่ 4.23 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 200$



รูปที่ 4.24 รูปร่างความเร็วตลอดช่องทางการไหล เมื่อ $a = 0.2$ และ $\mathrm{Re} = 400$





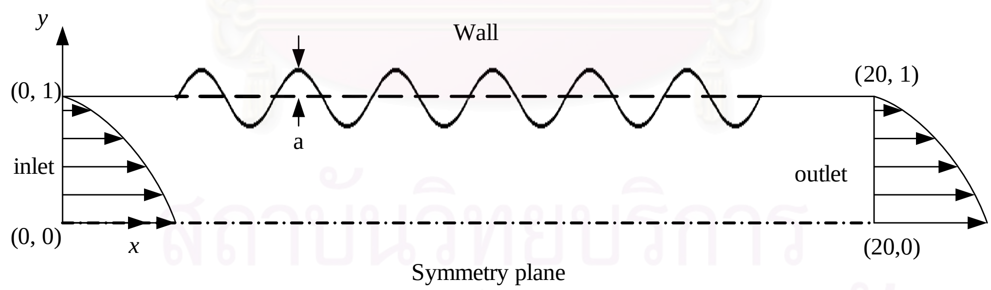
รูปที่ 4.25 เส้นกระแสการไหล กรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 400$

4.4 การไหลแบบราบเรียบผ่านผนังรูปคลื่น (Wavy-wall)

Wang and Chen (2002) ได้ศึกษาอัตราการถ่ายเทความร้อนในช่องทางการไหลผ่านช่องผนังรูปคลื่น (Wavy-wall) โดยการใช้วิธีการแปลงพิกัดอย่างง่าย (Simple coordinate transformation method) ซึ่งวิธีดังกล่าวจะแปลงพิกัดการไหลผ่านผนังรูปคลื่นให้กลายเป็นการไหลผ่านแผ่นคู่ขนาน และใช้วิธี Spline alternating-direction implicit method ในการคำนวณเชิงตัวเลข

ลักษณะของปัญหาได้ถูกแสดงได้ดังรูปที่ 4.26 จะเห็นว่าที่ผนังด้านบนของช่องทางการไหลจะมีลักษณะเป็นรูปคลื่นจำนวน 6 คลื่นเรียงต่อเนื่องกันโดยในช่วงแรก จะเป็นช่องทางตรงก่อนเพื่อให้การไหลพัฒนาเต็มที่ก่อนเป็นระยะทาง 3 หน่วย แล้วจึงเข้าสู่ช่วงผนังรูปคลื่นตั้งแต่ $x = 3$ จนถึง $x = 15$ และหลังจากนั้นผนังก็จะกลับมาเป็นช่องทางตรงอีกครั้งไปจนถึงทางออกที่ตำแหน่ง $x = 20$ โดยลักษณะของผนังรูปคลื่นถูกกำหนดโดยค่า y_w ในสมการ (4.11) และเงื่อนไขที่ใช้นั้นมีค่าเช่นเดียวกับ 2 ปัญหาที่ผ่านมา

การไหลแบบราบเรียบผ่านผนังรูปคลื่นซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 6 คลื่นเรียงต่อเนื่องกัน โดยในช่วงแรกนั้นเป็นช่องทางตรงก่อนเพื่อให้การไหลมีลักษณะเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ก่อนที่จะไหลผ่านผนังรูปคลื่นซึ่งมีระยะเริ่มตั้งแต่ $x = 3$ จนถึง $x = 15$ ดังแสดงในรูปที่ 4.26 สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเริ่มต้นนั้นกำหนดเช่นเดียวกับ 2 ปัญหาที่ผ่านมา (การไหลแบบราบเรียบผ่าน Gradual-expansion channels และ Sinusoidal wall) ซึ่งรูปร่างผนังของปัญหานี้สามารถสร้างขึ้นโดยสมการ (4.11)



รูปที่ 4.26 รูปร่างปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านผนังรูปคลื่น

$$y_w = 1 + a \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(x - 3\right)\right) \qquad 3 \le x \le 15 \tag{4.11}$$

การทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมสำหรับปัญหานี้จะใช้ค่า $\mathrm{Re} \cdot C_f$ ตลอดความยาวของปัญหาเป็นตัวเปรียบเทียบ ซึ่งค่า C_f คือค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานที่ผนังซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ (4.12)

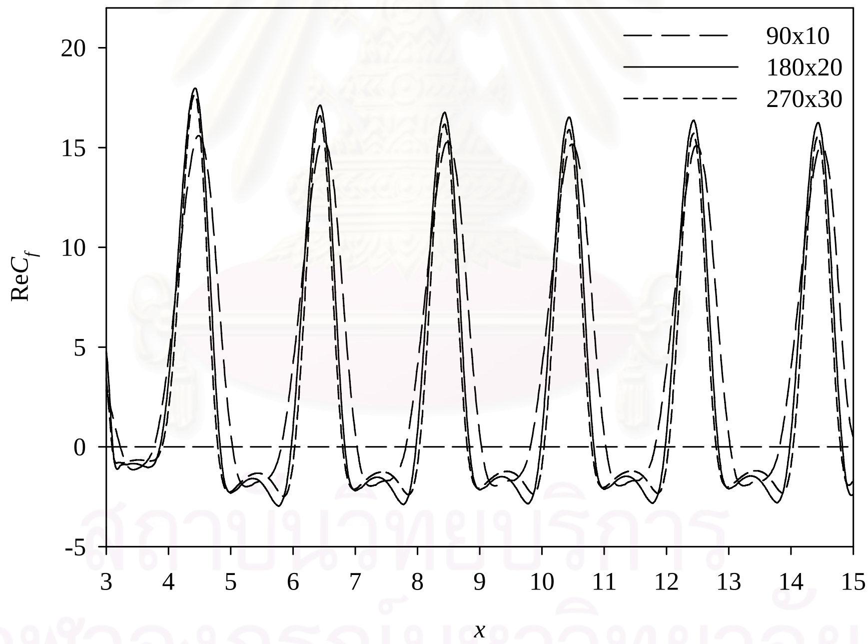
$$C_f = \frac{\tau}{\rho \bar{u}^2} \tag{4.12}$$

โดย τ คือ แรงเฉือน (Shear force) สามารถหาได้จากสมการ (4.13)

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=y_w} \tag{4.13}$$

ซึ่งการหา τ บริเวณผนังโค้งต้องใช้ Normal vector $(\vec{n})$ ของผนังโค้ง dot กับค่า τ

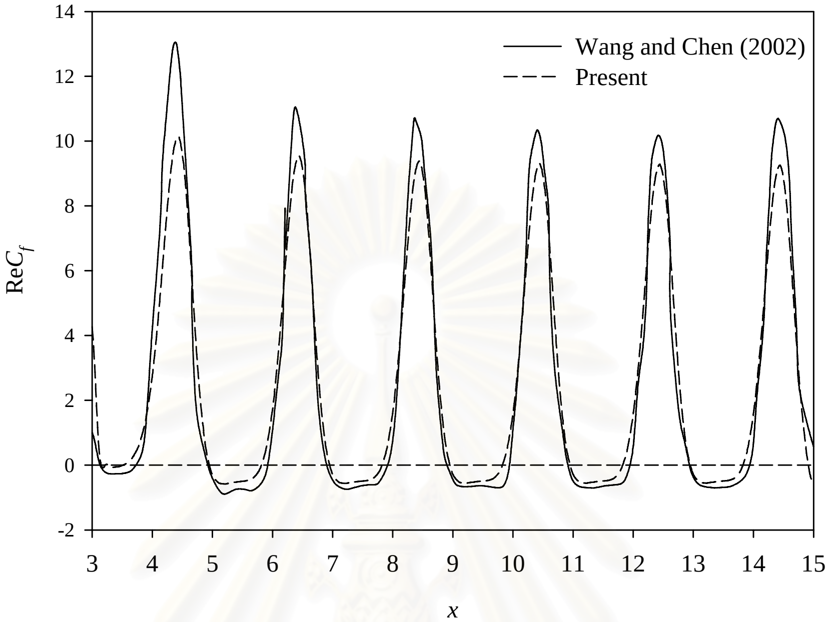
สำหรับปัญหานี้จะคำนวณที่ $\mathrm{Re} = 100$, 300 และ 500 โดยที่ค่าแอมพลิจูดของผนังจะมีค่าเท่ากับ 0.1 และ 0.2 ในเบื้องต้นนั้นจะทำการหา Grid independent ที่ $\mathrm{Re} = 500$ และ $a = 0.2$ ซึ่งจากรูปที่ 4.27 จะเห็นว่าผลการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 90×10 จะมีความแตกต่างออกไปอย่างชัดเจน ส่วนกริดอีก 2 ขนาดจะให้ผลใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงเลือกใช้กริดขนาด 180×20 ในการคำนวณกับกรณีอื่นๆ ต่อไป



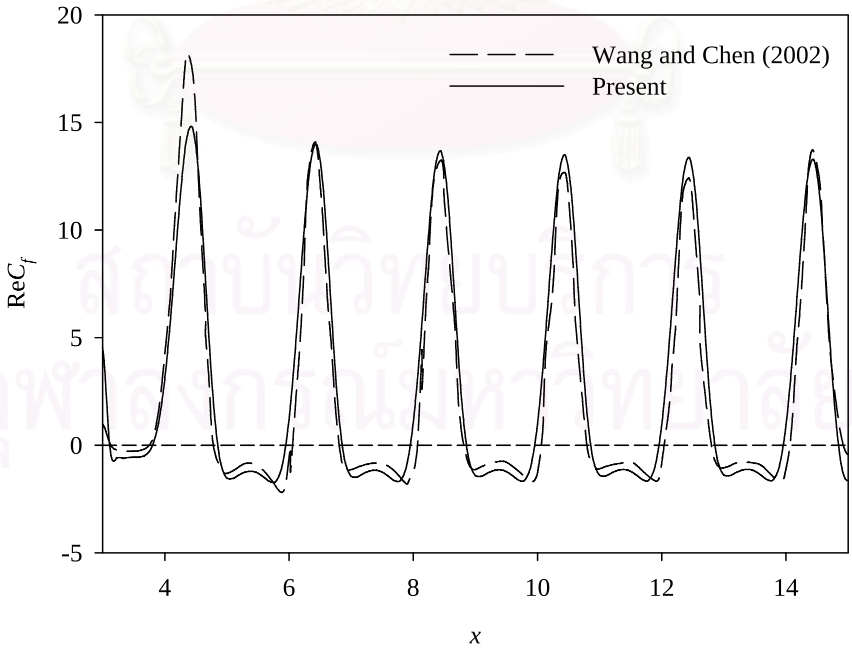
รูปที่ 4.27 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานบริเวณผนังรูปคลื่น สำหรับกรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 500$ ที่กริดขนาดต่างกัน

รูปที่ 4.28–4.31 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานกับผลจากวิธีผลต่างสืบเนื่องของ Wang and Chen (2002) โดยในรูปที่ 4.28 เป็นกรณีที่ $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 100$ รูปที่ 4.29 กรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 300$ รูปที่ 4.30 กรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 500$ และรูปที่ 4.31 $a = 0.1$, $\mathrm{Re} = 500$ ซึ่งจะเห็นว่าผลการคำนวณที่ได้มีความ

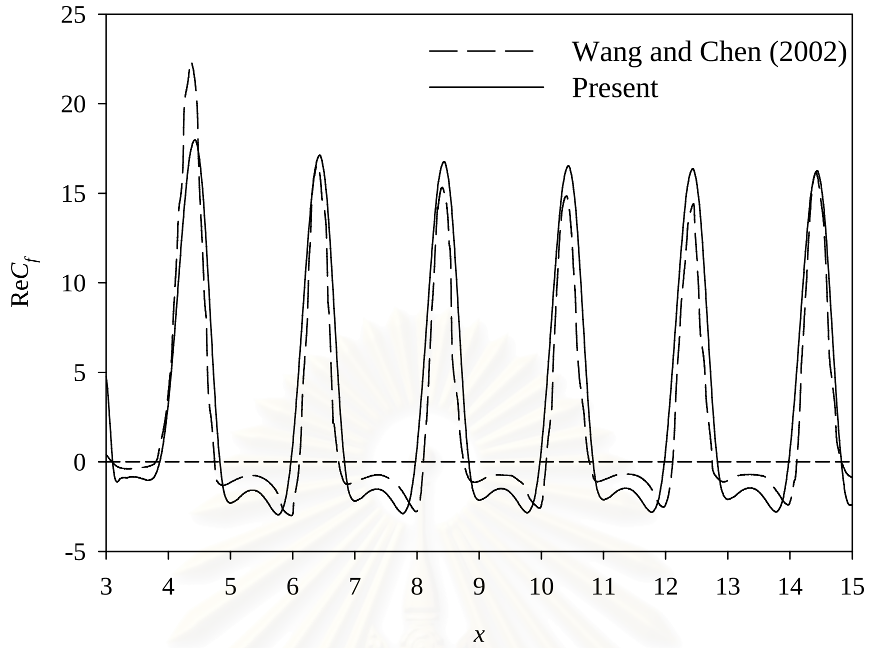
สอดคล้องเป็นที่น่าพอใจทั้ง 4 กรณี โดยผลที่ $\mathrm{Re}C_f$ ที่คำนวณได้จะมีค่าน้อยกว่า Wang and Chen (2002) เล็กน้อยที่บริเวณส่วนโค้งด้านล่าง โดยจะมีความแตกต่างกันมากสุดที่โค้งแรก คือระยะ $x=4$ ถึง $x=5$



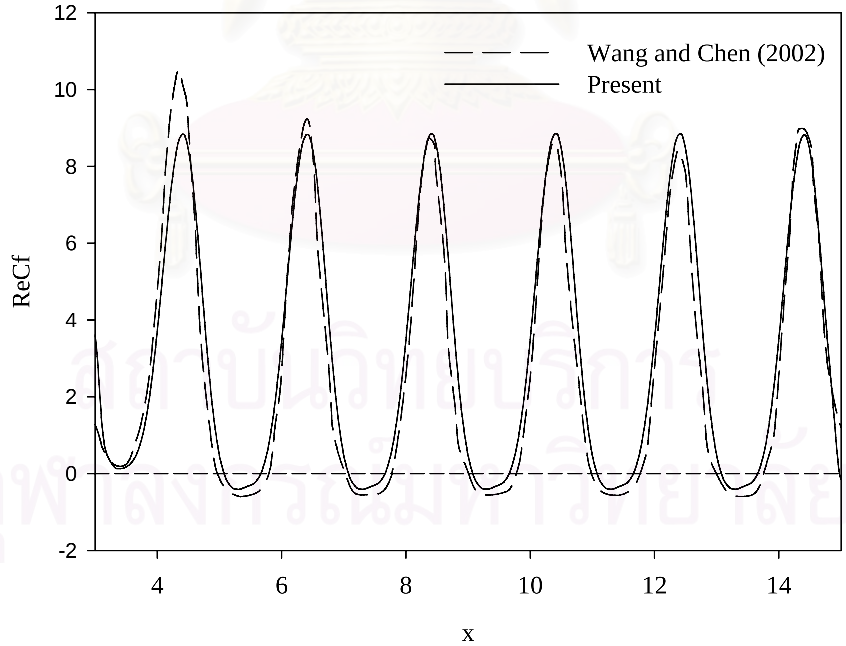
รูปที่ 4.28 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานบริเวณผนังรูปคลื่น สำหรับกรณี $a=0.2$, $\mathrm{Re}=100$



รูปที่ 4.29 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานบริเวณผนังรูปคลื่น สำหรับกรณี $a=0.2$, $\mathrm{Re}=300$

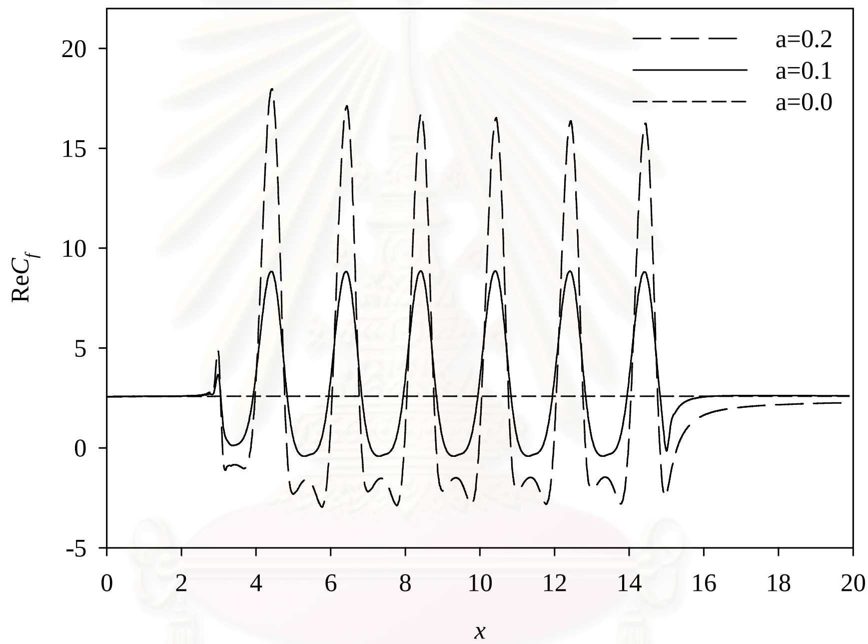


รูปที่ 4.30 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานบริเวณผนังรูปคลื่น สำหรับกรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 500$



รูปที่ 4.31 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานบริเวณผนังรูปคลื่น สำหรับกรณี $a = 0.1$, $\mathrm{Re} = 500$

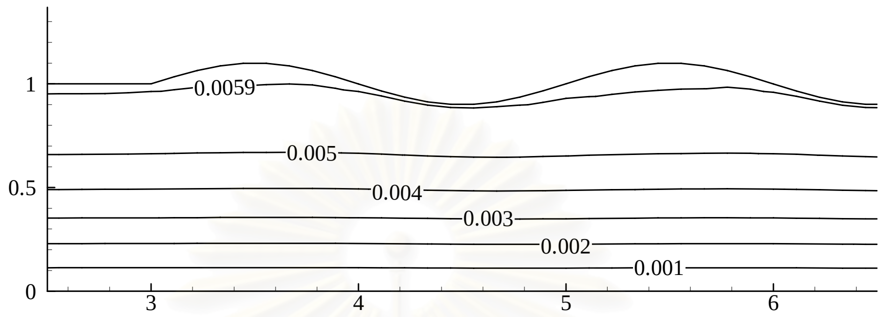
รูปที่ 4.32 แสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของค่า $\mathrm{Re}C_f$.ในกรณี $\mathrm{Re}=500$ จากรูปจะเห็นว่าเมื่อค่าแอมพลิจูดเท่ากับ 0 ซึ่งก็คือการไหลผ่านแผ่นคู่ขนาน ค่า $\mathrm{Re}C_f$ จะมีค่าคงที่ แต่เมื่อค่าแอมพลิจูดของผนังเท่ากับ 0.1 ค่า $\mathrm{Re}C_f$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงตามความเร็วของของไหลบริเวณผนังรูปคลื่น กล่าวคือเมื่อพื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้น (ผนังสูงขึ้น) จะส่งผลให้ความเร็วของของไหล ณ หน้าตัดนั้นลดลง และเมื่อนำค่าความเร็วนั้นไปคำนวณหาค่า $\mathrm{Re}C_f$ จะพบว่าค่า $\mathrm{Re}C_f$ ลดลงด้วย รูปที่ 4.33 แสดงเส้นกระแสการไหลกรณี $\mathrm{Re}=500$ จะพบว่ามีบริเวณหมุนวนเกิดขึ้นที่ส่วนโค้งด้านบน โดยเมื่อ แอมพลิจูดเพิ่มขึ้นการไหลหมุนวนจะกินบริเวณกว้างมากขึ้น และบริเวณหมุนวนดังกล่าวค่า $\mathrm{Re}C_f$ จะมีค่าเป็นลบ



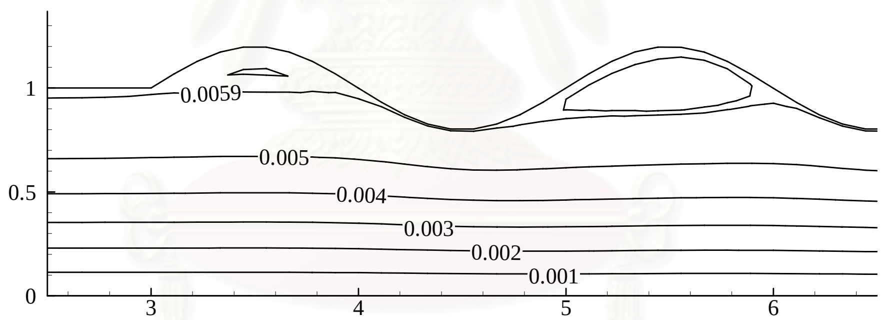
รูปที่ 4.32 การเปรียบเทียบการกระจายตัวสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสำหรับ กรณี $\mathrm{Re}=500$ ที่แอมพลิจูดต่างๆ

รูปที่ 4.34 แสดงผลของ $\mathrm{Re}C_f$ ที่ค่า $\mathrm{Re}=100,\ 300$ และ 500 ในกรณีที่แอมพลิจูดเท่ากับ 0.2 ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อค่า Re ลดลงจาก 500 ไปยัง 100 จะทำให้ค่า $\mathrm{Re}C_f$ ที่น้อยสุดจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จนเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนค่า $\mathrm{Re}C_f$ ที่มากที่สุดจะมีค่าลดลงอย่างเห็นได้ชัด นั่นหมายความว่า ถ้าค่า Re เพิ่มขึ้นค่า $\mathrm{Re}C_f$ ที่สูงสุดจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นสูงอย่างเห็นได้ชัด แต่ค่า $\mathrm{Re}C_f$ ที่ต่ำที่สุดจะมีค่าลดลงอย่างช้าๆ สำหรับค่า $\mathrm{Re}C_f$ ที่มีค่ามากสุดที่คลื่นลูกแรก และค่อยๆ ลดลงมาจนมีค่าเกือบคงที่ที่คลื่นลูกต่อๆ ไป สาเหตุที่เกิดขึ้นเช่นนี้เพราะรูปร่างของความเร็วที่ไหลผ่านผนังรูปคลื่นลูกแรกนั้น $(3\le x\le 4.5)$ เป็นการไหลที่เกิดขึ้นซึ่งอยู่ในช่วงการไหลที่ยังพัฒนาไม่เต็มที่ และเมื่อผ่านผนังรูปคลื่นประมาณ 2 ลูกแล้ว $(x=6.5)$ รูปร่างการไหลที่เกิดขึ้นจึงจะเข้าสู่การไหลที่พัฒนาเต็มที่ ดังแสดงในรูปที่ 4.35 ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ณ เฟส

เดียวกัน คือ $x = 3.5, 5.5$ และ 7.5 รูปร่างความเร็วที่ $x = 5.5$ จะมีความใกล้เคียงกับรูปร่างความเร็วที่ $x = 7.5$ นั้นหมายความว่าการไหลที่เกิดขึ้นเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว หรือในรูปที่ 4.36 ที่ $x = 4.5$, 6.5 และ 8.5 ก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน คือรูปร่างความเร็วที่ $x = 6.5$ จะมีความใกล้เคียงกับรูปร่างความเร็วที่ $x = 8.5$

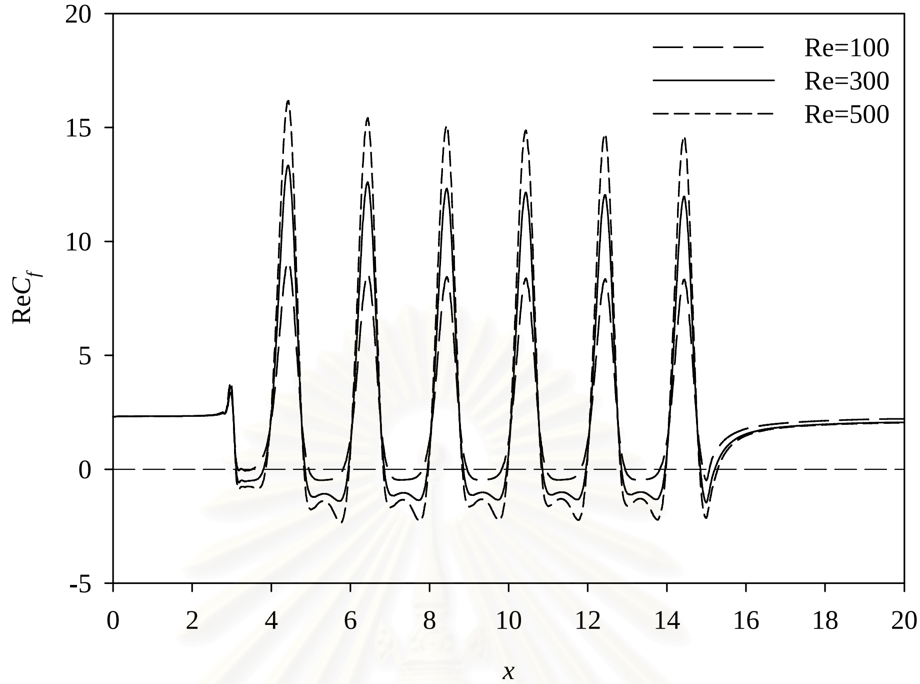


(a) $a = 0.1$

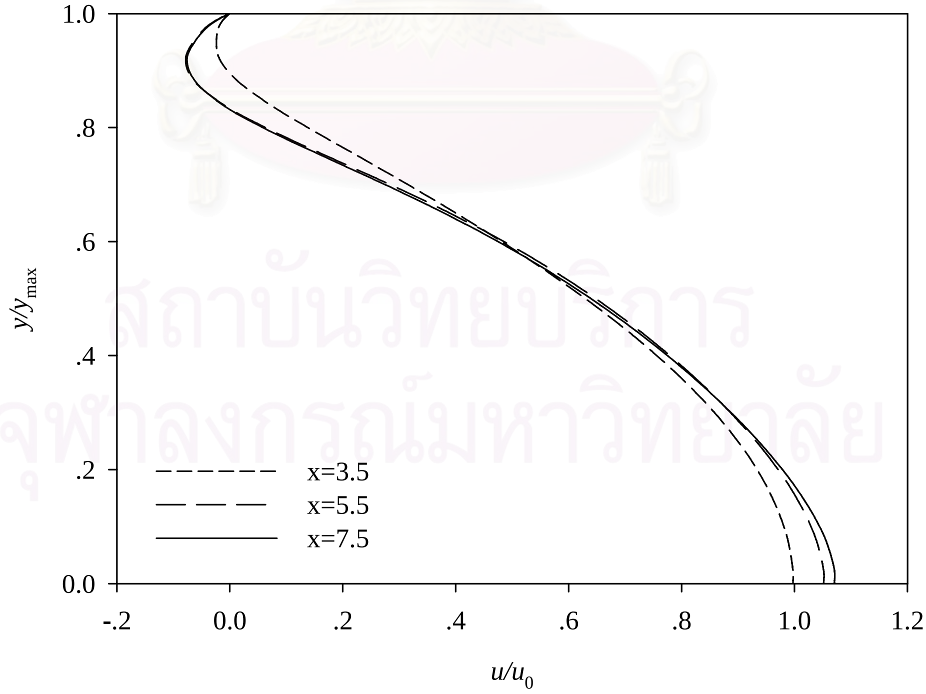


(b) $a = 0.2$

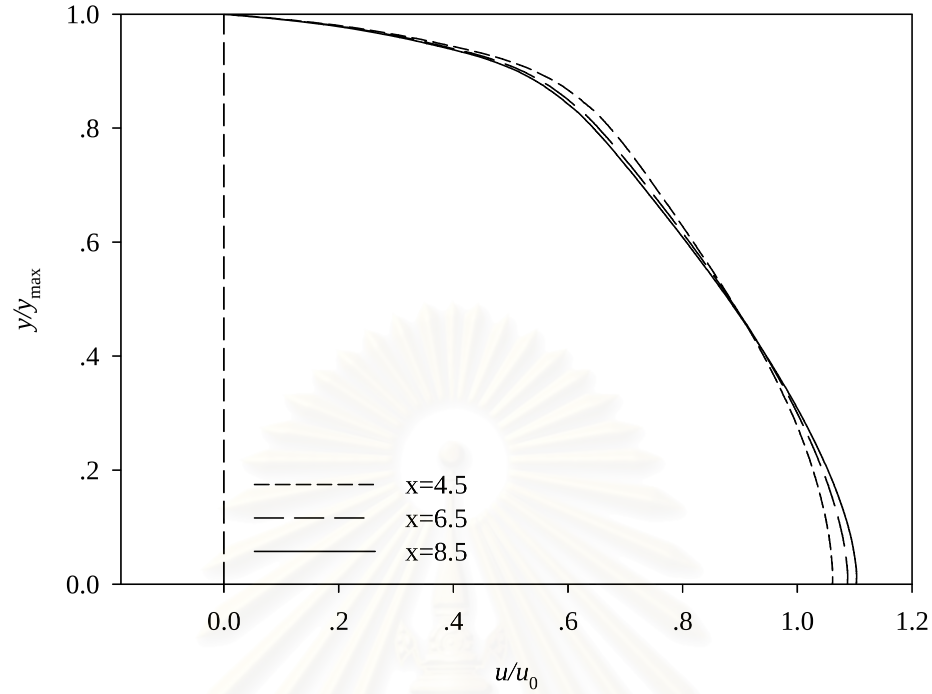
รูปที่ 4.33 เส้นกระแสการไหลที่ $\mathrm{Re} = 500$



รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบการกระจายตัวสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสำหรับกรณี $a = 0.2$ ที่ Re ต่างๆ



รูปที่ 4.35 รูปร่างความเร็ว ณ ตำแหน่ง x = 3.5, 5.5 และ 7.5 สำหรับกรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 500$



รูปที่ 4.36 รูปร่างความเร็ว ณ ตำแหน่ง x = 4.5, 6.5 และ 8.5 สำหรับกรณี $a = 0.2$, $\mathrm{Re} = 500$

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับระบบพิกัดกระชับขอบเขต เพื่อใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาของการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนที่มีลักษณะที่ซับซ้อน ซึ่งวิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงให้เห็นว่าระบบพิกัดกระชับขอบเขตนั้นสามารถใช้แก้ปัญหาในรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

ขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม เบื้องต้นคือ การสร้างกริดให้มีความเหมาะสมและมีคุณสมบัติของกริดตามที่ต้องการ หลังจากสร้างกริดที่เหมาะสมกับปัญหาได้แล้ว จึงทำการหาผลเฉลยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต และสุดท้ายคือการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยแม่นตรง หรือผลการคำนวณเชิงตัวเลขของงานวิจัยก่อนหน้านี้

ปัญหาที่นำมาตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น เป็นปัญหาแบบง่ายซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรง หรือผลการคำนวณจากงานวิจัยอื่นๆ ที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ โดยเริ่มทดสอบกับปัญหาแรกคือ ปัญหาการไหลผ่านแผ่นคู่ขนาน ซึ่งเป็นปัญหาที่ง่ายต่อการคำนวณเพื่อให้เกิดความมั่นใจว่ากริดที่สร้างขึ้นมานั้นสามารถนำมาคำนวณได้จริง และกริดมีรูปร่างเป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้ ผลการเปรียบเทียบความเร็วกับผลเฉลยแม่นตรงมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ปัญหาที่สองเป็นปัญหาผ่าน Gradual-expansion channel ซึ่งปัญหานี้จะเกิดการไหลหมุนวนบริเวณผนังด้านบน โดยคำนวณที่ Re ทั้งหมด 3 ค่า ซึ่งรูปร่างของปัญหาจะขึ้นอยู่กับค่า Re และค่า Re_G การเปรียบเทียบกับปัญหานี้จะใช้ค่าความดันบริเวณผนังด้านบนตลอดความยาวของโดเมนเทียบกับ Benchmark ซึ่งผลในช่วงแรกจะมีความแตกต่างกันบ้างเล็กน้อย เนื่องจากการกำหนดเงื่อนไขขอบ แต่ในช่วงหลังผลการเปรียบเทียบความดันบริเวณผนังด้านบนจะสอดคล้องกับ Benchmark เป็นอย่างดี ปัญหาที่สามเป็นปัญหาการไหลผ่าน Sinusoidal wall รูปร่างของปัญหามีลักษณะเป็นโพรงป่องตรงกลางของท่อ ทำให้เกิดการไหลหมุนวนบริเวณนี้ และการไหลหมุนวนจะเริ่มเกิดขึ้นที่ค่า $\mathrm{Re} = 200$ ขึ้นไปการทดสอบได้กำหนดให้ค่าแอมพลิจูดของผนังมีความแตกต่างกัน ที่ค่า Re ต่างๆ การเปรียบเทียบใช้ค่าความเร็วตามแนวแกน x เทียบกับผลการคำนวณของงานวิจัยที่ผ่านมาซึ่งใช้ระเบียบวิธีการคำนวณอื่นๆ ปัญหาที่สี่ ปัญหาของการไหลแบบราบเรียบไหลผ่านผนังรูปคลื่นจำนวน 6 ลูกคลื่น พบว่าการไหลจะเกิดการหมุนวนและจะมีบริเวณกว้างมากขึ้นเมื่อค่าแอมพลิจูดของผนังเพิ่มมากขึ้น และเมื่อค่า Re เพิ่มมากขึ้นก็จะช่วยให้เกิดการไหลหมุนวนได้ง่ายขึ้น

เช่นกัน สำหรับปัญหานี้ใช้ค่า τ_w เป็นตัวเปรียบเทียบ พบว่าลักษณะของ τ_w ที่เกิดขึ้นนั้นจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นและลดลงจนติดลบซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อของไหลไหลผ่านบริเวณผนังที่เป็นลูกคลื่น และค่าที่ติดลบจะเกิดขึ้นเมื่อบริเวณนั้นเกิดการไหลหมุนวน

จากผลการทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาที่นำมาทดสอบทั้ง 4 ปัญหา จะเห็นได้ว่าโปรแกรมมีประสิทธิภาพในระดับที่น่าพอใจ โดยสามารถทำนายผลได้ใกล้เคียงกับผลแม่นตรง และผลการคำนวณต่างๆ ที่นำมาเปรียบเทียบได้เป็นอย่างดี

5.2 ข้อเสนอแนะในการศึกษาวิจัยในอนาคต

1. ควรพัฒนาการสร้างกริดแบบอิลิปติก ให้มีการกระจายตัวที่ดีกว่านี้ และสามารถควบคุมเส้นกริดได้ตามที่ต้องการ

2. พัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาของการไหลควบคู่ไปกับการถ่ายเทความร้อน

3. พัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาของการไหลผ่านพิกัดอื่นๆ เช่น พิกัดทรงกระบอก 2 มิติ พิกัดของทรงกลมเป็นต้น

4. สามารถสร้างกริดผ่านวัตถุที่มีลักษณะเป็นมุมฉากได้

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

จุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์. ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมแบบกระชับขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2549.

ภาษาอังกฤษ

Braaten, M., and Shyy, W. A Study of Recirculating Flow Computation Using Body-Fitted Coordinates: Consistency Aspects and Mesh Skewness. Numerical Heat Transfer 9 (1986a): 559-574.

Braaten, M., and Shyy, W. Comparison of Iterative and Direct Solution Methods for Viscous Flow Calculations in Body-Fitted Co-ordinates. International Journal for Numerical Methods in Fluids 6 (1986b): 325-349.

Burns, A. D., and Wilkes, N. S. A Finite Difference Method for the Computation of Fluid Flows in Complex Three Dimensional Geometries. Technical Report AERE-R 12342 (1987).

Correa, S. M., and Shyy, W. Computational Models and Methods for Continuous Gasous Turbulent Computation. Progress in Energy and Combustion Science. 13 (1987): 249-292.

Courant, R., Isaacson, E., and Rees, M. On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952): 243.

Cliffe, K. A., Jackson, C. P., and Greenfield, A. C. Finite Element Solutions for Flow in a Symmetric Channel with Smooth Expansion. Technical Report AERE-R 10608 (1982).

Demirdzic, I. A., Gosman, A. D., Issa, R.I., and Peric, M. A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries. Computers and Fluids 15 (1987): 251-273.

Dvinsky, A. S. FLUDNT/BFC: A General Purpose Fluid Flow Modeling Program for all Flow Speeds. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow 5 (1987)

Eriksson, L. E. Generation of Boundary-Conforming Grids Around Wing-body Configurations Using Transfinite Interpolation. AIAA Joutnal 20 (October 1982): 1313-1320.

Ferziger, J. H., and Peric, M. Computational Methods for Fluid Dynamics. 2nd ed. New York: Springer, 1999.

Fletcher, C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. vol. 2. 2nd ed. New York: Springer, 1991.

Gordon, W. N., and Hall, C. A. Construction of Curvilinear Coordinate Systems and Application to Mesh Generation. International Journal of Numerical Methods in Engineering 7 (1973): 461-477.

Hadjisophocleous, G. V., Sousa, A. C. M., and Venart, J. E. S. Prediction of Transient Natural Convection in Enclosures of Arbitrary Geometry Using a Nonorthogonal Numerical Model. Numerical Heat Transfer (1988)

Hah, C. Calculation of Various Diffuser Flows with Inlet Swirl and Inlet Distortion Effects. AIAA Journal 21 (1983)

Hah, C. A Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows Inside Turbine Blade Rows at Design and Off-Design Conditions. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 106 (1984)

Karki, K. C., and Patankar, S. V. Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries. Numerical Heat Transfer 14 (1988a): 295-307.

Karki, K. C., and Patankar, S. V. Solution of Some Two-Dimensional Incompressible Flow Problems using a Curvilinear Coordinate System Based Calculation Procedure. Numerical Heat Transfer 14 (1988b): 309-321.

Karki, K. C. A Calculation Procedure for Viscous Flows at all Speeds in Complex Geometries. Ph.D. Thesis, University of Minnesota. 1986.

Luo, H., and Bewley, T. R. On The Contravariant from The Navier-Stokes Equations in Time-dependent Curvilinear Coordinate Systems. Journal of Computational Physics 199 (2004): 355-375.

Malin, M. R., Rosten, H. I., Spalding, D. B., and Tatchell, D. G. Application of PHOENICS to Flow Around Ship's Hulls. Second Int. Symp. on Ship Viscous Resistance, Goteborg, Sweden 1985.

Maliska, C. R., and Raithby, G. D. A Method for Computing Three Dimensional Flow Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Co-ordinates. International Journal for Numerical Methods in Fluids 4 (1984): 519-537.

Meakin, R. L. Application of Boundary Conforming Coordinate and Domain Decomposition Principles to Environmental Flows. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1988.

Melaaen, M. C. Analysis of Curvilinear Non-orthogonal Coordinates for numerical Calculation of Fluid Flow in Complex Geometries. Doctoral dissertation, University of Trondheim, 1990.

Napolitano, M., and Orlandi, P. Laminar Flow in a Complex Geometry: A Comparison. International journal for Numerical Methods in Fluids l5 (1985): 667-683.

Oztop, H. F. Numerical Study of Flow and Heat Transfer in Curvilinear Ducts: Applications of Elliptic Grid Generation. Applied Mathematics and Computation 168 (2005): 1449-1460.

Patankar, S. V., and Spalding, D. B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972): 17-87.

Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. New York: Hemisphere, 1980.

Peric, M. A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts. Ph.D. Thesis, University of London, 1995.

Rhie, C. M., and Chow, W. L. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. AIAA Journal 21 (November 1983): 1525-1532.

Rosa, S., and Pinho, F. T. Pressure Drop Coefficient of Laminar Newtonian Flow in Axisymmetric Diffusers. International Journal of Heat and Fluid Flow 27 (2006): 319-328.

Shyy, W. An Adaptive Grid Method for Navier-Stokes Flow Computation. Applied mathematics and Computation 21 (1987): 201-219.

Shyy, W., and Braaten, M. E. Three-Dimensional Analysis of the Flow in Curved Hydraulic Turbine Draft Tube. International Journal for Numerical Methods in Fluids 6 (1986): 861-882.

Shyy, W., and Correa, S. M. A Systematic Comparison of Several Numerical Schemes for Complex Flow Calculations, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, 14-17, 1985.

Shyy, W., and Vu, T. C. A Numerical Study of Incompressible Navier-Stoke Flow Through Rectilinear and Radial Cascade of Turbine Blades. Computational mechanics 6 (1986): 861-882.

Shyy, W., Tong, S. S., and Correa, S. M. Numerical Recirculating Flow Calculation Using a Body-Fitted Coordinate System. Numerical Heat Transfer 8 (1985): 99-113.

Thompson, J. F. General Curvilinear Coordinate Systems. Applied Mathematics and Computation 10-11 (1982b) : 1-30.

Thompson, J. F. Grid General Techniques in Computation Fluid Dynamics. AIAA Journal 22 (1984): 1505-1523.

Thompson, J. F., Thames, F. C., and Mastin, C. W. Automatic Numerical Generation of Body-fitted Curvilinear Coordinates System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies. Journal of Computation Physic 15 (1974) : 299-319.

Thompson, J. F., Thames, F. C., Walker, R. L., and Shanks S. P. Numerical Solutions of the Unsteady navier-stokes Equations for Arbitrary Bodies Using Boundary-fitted Curvilinear Coordinates. Magnetohydrodynamics 485 (1975) : 453-485.

Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and Mastin, C. W. Boundary-fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A review. Journal of Computational Physics 47 (1982a): 1-108.

Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and Mastin, C. W. Numerical Grid Generation Foundations and Applications. Elsevier Science, 1985.

Tsangaris, S., and Leiter, E. On Laminar Steady Flow in Sinusoidal Channels. Journal of Engineering Mathematics 18 (1984): 89-103.

Vanka, S. P., Chen, B. C., Sha, W. T. A Semi-Implicit Calculation Procedure for Flows Described in Boundary-Fitted Coordinate Systems. Numerical Heat Transfer 3 (1980): 1-19.

Wang, C. C., and Chen, C. K. Forced Convection in a Wavy-wall Channel. International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002): 2587-2595.

Yung, C. N. Numerical Simulation of Axisymmetric Turbulent Flow in Combustors and Diffusers. Ph.D Thesis, University of Toledo, 1986.

Yung, C. N., Keith, T. G. Jr., and De Witt, K. J. Numerical Simulation of Axisymmetric Turbulent Flow in Combustors and Diffusers. International Journal for Numerical Methods in Fluids 9 (1989): 167-183.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณัฐพล โชคบุญมงคล เกิดเมื่อวันที่ 4 เดือนเมษายน พุทธศักราช 2526 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เมื่อปีการศึกษา 2547 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2548