การวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิเปลี่ยนแปลง
โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม

นายคทาวุธ ไชยแสน

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1414-5

ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES UNDER VARYING TEMPERATURE USING THIRD ORDER POLYNOMIALS

Mr.Khathawut Chaisaen

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University

Academic Year 2004
ISBN 974-53-1414-5

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิเปลี่ยนแปลง โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม
โดย	นายศทาวุธ ไชยแสน
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.วัฒนชัย สมิทธากร

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย)

....อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.วัฒนชัย สมิทธากร)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฤดายุทธ์ ชมภูมิ่ง)

คทาวุธ ไชยแสน : การวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม (ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES UNDER VARYING TEMPERATURE USING THIRD ORDER POLYNOMIALS) อ. ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร, 148 หน้า, ISBN 974-53-1414-5

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาการนำความร้อนและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในแผ่นประกอบ การวิเคราะห์การนำความร้อนใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา ทำให้สามารถลดขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาในสามมิติให้เป็นแบบเสมือนสองมิติ ส่วนการวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมินั้นอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม ทั้งนี้จะพิจารณาแผ่นประกอบที่แต่ละชั้นมีความหนาคงที่และมีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก เงื่อนไขขอบเขตของแผ่นประกอบจะพิจารณาเป็นการกำหนดอุณหภูมิ กำหนดฟลักซ์ความร้อน และกำหนดการพาความร้อน ในส่วนของการแก้ปัญหาในภาวะไม่คงที่นั้น อาศัยวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยมีการแบ่งเวลาออกเป็นช่วง ๆ แล้วทำการคำนวณทีละช่วงเวลาต่อเนื่องกัน

จากการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างพบว่า การวิเคราะห์การนำความร้อนโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนานั้นจะให้ผลดีเมื่อแผ่นประกอบมีค่า อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้นอยู่ในช่วงระหว่าง 0.5 ถึง 2.0 และความกว้างต่อความหนามีค่ามากกว่า 40 ทั้งนี้แบบจำลองดังกล่าวสามารถใช้ได้ดีกับแผ่นประกอบที่มีความหนาในแต่ละชั้นแตกต่างกันได้ โดยไม่จำกัดจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ส่วนการวิเคราะห์หน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิโดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สาม เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตพบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

ภาควิชา........วิศวกรรมโยธา........ ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา........วิศวกรรมโยธา........ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา................................

ปีการศึกษา........2547........

4570235221 : MAJOR ENGINEERING

KEY WORD: COMPOSITE PLATES/THERMAL STRESS/HEAT CONDUCTION/THIRD ORDER POLYNOMIALS

MR.KHATHAWUT CHAISAEN : ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES UNDER VARYING TEMPERATURE USING THIRD ORDER POLYNOMIALS : THESIS ADVISOR : WATANACHAI SMITTAKORN,Ph.D., 148 pp,

ISBN 974-53-1414-5

This research studies the heat conduction and thermal stress in laminated composite plates. Employing third-order polynomials for the temperature distribution in the through-thickness direction, problems in 3 dimensions can be transformed into 2-D problems. In the analysis of thermal stress, the third-order shear deformation theory is applied. Laminated composite plates composed of layers of orthotropic materials are considered. Three types of boundary conditions are allowed : prescribed temperature, heat flux, and convective heat transfer. In solving the transient problems, a recurrence relation method using step-by-step integration is employed.

Results from the numerical examples have shown that the analyses of heat conduction using the third-order polynomials in the through-thickness direction yield good results when the ratio of the coefficient of thermal conductivity of the laminae is between 0.5 and 2.0, with the width-to-thickness ratio greater than 40. The difference in the thickness of each layer and the number of layers of the composites have little effects in such model. In the analyses for the thermal stresses of the composites using the third-order shear deformation theory, results are found to have good agreements with earlier studies.

Department……CIVIL ENGINEERING….. Student 's signature……………………………………

Concentration……CIVIL ENGINEERING…. Advisor 's signature……………………………………

Academic year……2004…………………

กิตติกรรมประกาศ

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณต่อครูอาจารย์ในอดีตทุกท่าน ท่านผู้แต่งเอกสารที่ผู้จัดทำนำมาอ้างอิงทุกท่าน คณาจารย์คณะวิศวกรรมศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยและขอขอบพระคุณสูงสุดต่ออาจารย์ ดร.วัฒนชัย สมิทรากร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำและความรู้อันล้ำค่าอย่างยิ่ง ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย ที่ท่านได้ให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์นี้ ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กฤดายุทธ์ ชมภูมิ่ง ที่ท่านได้เสียสละเวลาอันมีค่าในการให้คำแนะนำการใช้โปรแกรม ANSYS อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการศึกษาครั้งนี้ และขอขอบคุณ นายณัฐพล จารุศิริสมบัติ ในการให้คำแนะนำในการเก็บข้อมูลแบบ SKY LINE ในการพัฒนาโปรแกรม

ท้ายที่สุดนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา – มารดา ที่เคารพอย่างสูง และ ญาติพี่น้อง เพื่อนๆ รวมทั้งบุคคลอื่นๆ ที่ได้ให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าในการทำวิทยานิพนธ์นี้มาโดยตลอด

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

c_v	ความร้อนจำเพาะ
h	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
J	จาโคเบียน
k	ชั้นวัสดุแผ่นประกอบใด ๆ
k_{ij}	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
N_{ij}, M_{ij}, P_{ij}	แรง, โมเมนต์และโมเมนต์ที่สามตามลำดับ
N	ฟังก์ชันประมาณภายในสองมิติของลากราน
NG	จำนวนจุดของเกาส์
n_x, n_y, n_z	ทิศทางโคไซน์
$Q_{ij}, \overline{Q}_{ij}$	คุณสมบัติของวัสดุในระบบพิกัดเฉพาะที่ และระบบพิกัดรวมตามลำดับ
ρ	ความหนาแน่นของมวล
$q_n, \hat{q}$	อัตราการถ่ายเทความร้อนในทิศทาง n, อัตราการถ่ายเทความร้อนที่กำหนด
q	แรงภายนอกกระทำที่ผิวระนาบ x-y
t	เวลา
$T, T_x, T_e, \hat{T}, T_0$	อุณหภูมิที่เวลาใด ๆ , อุณหภูมิที่ผิว, อุณหภูมิบรรยากาศรอบระบบ, อุณหภูมิที่กำหนด, อุณหภูมิที่เวลา 0 ตามลำดับ
T_x, T_y, T_z	หน่วยแรงที่ผิวทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ
u, v, w	การกระจัดในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ
W_i, W_j	ค่าถ่วงน้ำหนักของเกาส์
$\overline{W}_i$	ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก
Ω, Γ	ระนาบ x-y, และเส้นรอบรูปตามลำดับ
v, s	ปริมาตรและพื้นที่ขอบผิวตามลำดับ
χ	ฟังก์ชันประมาณภายในหนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสาม
$\overline{N}$	ผลคูณฟังก์ชันประมาณภายในสองมิติของลากราน และฟังก์ชันประมาณภายในหนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสาม
ν	อัตราส่วนปัวส์ซง
ϕ_x, ϕ_y	มุมที่เปลี่ยนไปของแกนทิศทางความหนาที่ระดับกึ่งกลางความหนารอบแกน y และ x ตามลำดับ
$\dfrac{\partial w_0}{\partial x}, \dfrac{\partial w_0}{\partial y}$	ความชันของระนาบที่ระดับกึ่งกลางความหนารอบแกน y และ x ตามลำดับ
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$	ความเครียดในทิศทางแกน 1 และแกน 2 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yy}$	ความเครียดในทิศทางแกน x และแกน y ในระบบพิกัดรวมตามลำดับ

ε_T	ความเครียดเนื่องจากอุณหภูมิ
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$	ความเครียดเฉือนระนาบ 1-2 ,2-3 และ 1-3 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	ความเครียดเฉือนระนาบ x- y , y- z และ x- z ในระบบพิกัดรวมตามลำดับ
σ_{11}, σ_{22}	หน่วยแรงตั้งฉากทิศทาง 1 และ 2 ในพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
σ_{xx}, σ_{yy}	หน่วยแรงตั้งฉากทิศทาง x และ y ในพิกัดรวมตามลำดับ
$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$	หน่วยแรงเฉือนระนาบ 1-2, 1-3 และ 2-3 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	หน่วยแรงเฉือนระนาบ x-y, x-z และ y-z ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
ΔT	อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป
α_{11}, α_{22}	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในระบบพิกัดเฉพาะที่
$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{xy}$	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในระบบพิกัดรวม
φ	ฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต
ψ	ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์
δU	พลังงานความเครียดสมมติ
δV	พลังงานสมมติเนื่องจากแรงกระทำภายนอก
$\hat{\sigma}_{ij}$	หน่วยแรงภายนอกที่กำหนด
$\Im$	หน่วยแรงที่ผิว
c_1, c_2	ค่าคงที่มีค่าเท่ากับ 4 และ $\frac{4}{3h^2}$ และ $\frac{4}{h^2}$ ตามลำดับ
E_1, E_2	ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในทิศทาง 1 และ 2 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
G_{12}, G_{13}	ค่าโมดูลัสเฉือนในระนาบ 1-2 และ 1-3 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ
β	ค่ายูคลิเดียนนอร์มกำลังสองหารด้วยผลลัพธ์กำลังสอง
β_w, β_T	ค่ายูคลิเดียนนอร์มกำลังสองหารด้วยผลลัพธ์กำลังสองของการกระจัดในทิศทางความหนาและอุณหภูมิตามลำดับ
$\chi_i^{\Delta}, \chi_i^{\Delta-1}$	ผลลัพธ์หลังการแบ่งเอลิเมนต์และก่อนการแบ่งเอลิเมนต์ตามลำดับ
Texact, Tpoly	ผลลัพธ์ของอุณหภูมิด้วยวิธีผลเฉลยแม่นตรงและวิธีเสนอในงานวิจัยนี้ตามลำดับ
λ	ค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์
$\bar{\lambda}$	ค่ายูคลิเดียนนอร์มกำลังสอง

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันมีการนำแผ่นประกอบ (composite plate) มาใช้ในโครงสร้างกันเป็นจำนวนมาก ยกตัวอย่าง เช่น โครงสร้างเครื่องบิน ชิ้นส่วนเครื่องจักร แผ่นไม้อัด ผนังกระจก ตลอดจนแผ่นพื้นสำเร็จรูป เป็นต้น ทั้งนี้เนื่องจากแผ่นประกอบ ประกอบด้วยวัสดุหลายชั้นที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน ทำให้คุณสมบัติเชิงกล เช่น อัตราส่วนกำลังต่อน้ำหนักและความแข็งต่อน้ำหนักมีค่ามากกว่าวัสดุเนื้อเดียวโดยทั่วไป รวมถึงประหยัดค่าใช้จ่ายและช่วยให้น้ำหนักของโครงสร้างเบาขึ้น จึงทำให้แผ่นประกอบเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย

ปัญหาสำคัญอย่างหนึ่งในการนำโครงสร้างแผ่นประกอบไปใช้งานคือ แผ่นประกอบอาจเกิดการเสียหายภายใต้อุณหภูมิที่มีการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากพฤติกรรมของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงนั้นจะแตกต่างจากโครงสร้างที่เป็นเนื้อเดียวเป็นอย่างมาก วัสดุแต่ละชั้นของแผ่นประกอบอาจมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) อัตราส่วนปัวส์ซอง (poisson ratio) ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (coefficient of thermal conductivity) และค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (coefficient of thermal expansion) ที่แตกต่างกัน มีผลทำให้การขยายตัวในแต่ละชั้นวัสดุไม่เท่ากันอาจก่อให้เกิดการโก่งตัว บิดงอหรือเลื่อนไถลระหว่างชั้นขึ้นได้

การวิเคราะห์พฤติกรรมการกระจายอุณหภูมิในแผ่นประกอบโดยทั่วไปนิยมใช้วิธีการวิเคราะห์แบบสามมิติ แต่การวิเคราะห์จะมีความยุ่งยากและซับซ้อนในการคำนวณ เนื่องจากตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ในวิทยานิพนธ์นี้จึงทำการแปลงการวิเคราะห์แบบสามมิติให้เป็นแบบสองมิติ โดยการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา เป็นการลดขนาดของปัญหาลงเหลือสองมิติในระนาบของแผ่นประกอบ แต่ผลลัพธ์ที่ได้ยังคงมีค่าใกล้เคียงกับการวิเคราะห์แบบสามมิติ ส่วนการวิเคราะห์การเสียรูปและแรงภายในแผ่นประกอบ จะอาศัยวิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม

1.2 วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยมีดังนี้

1. ทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิในแผ่นประกอบภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ได้แก่ การกำหนดอุณหภูมิ (temperature) ฟลักซ์ความร้อน (heat flux) และการพาความร้อน (convection) ที่ผิวบนและล่างของแผ่นประกอบในภาวะไม่คงที่ (transient) โดยการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา

2. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม (third-order shear deformation theory) ในการวิเคราะห์การเปลี่ยนรูปร่างและหน่วยแรงในแผ่นประกอบเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

3. พัฒนาแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับการวิเคราะห์การนำความร้อน และหน่วยแรงที่เกิดขึ้นของแผ่นประกอบภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด

1.3 ขอบเขตการศึกษา

การศึกษาของวิทยานิพนธ์นี้ มีข้อจำกัดของการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ดังนี้

1. โครงสร้างแผ่นประกอบมีความหนาคงที่ในแต่ละชั้น และการยึดเหนี่ยวระหว่างชั้นเป็นไปอย่างสมบูรณ์

2. วัสดุที่ใช้ทำแผ่นประกอบมีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) และออโทรอปิก (orthotropic)

3. สภาพขอบเขตของแผ่นประกอบเป็นจุดรองรับแบบหมุน (hinge) ปล่อยอิสระ (free) และแบบยึดแน่น (fixed)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิ และหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิของแผ่นประกอบในวิทยานิพนธ์นี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาของโครงสร้างแผ่นประกอบรูปร่างใด ๆ ภายใต้อุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน และการพาความร้อน ยกตัวอย่าง เช่น กระจกแบบลามิเนตที่ใช้ทำเป็นผนังโดยรอบของอาคาร ผนังกันความร้อนที่ได้รับความร้อนจากแสงแดด แผ่นไม้อัดที่ใช้กั้นห้องโดยอุณหภูมิห้องแต่ละห้องไม่เท่ากัน เป็นต้น โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการวิเคราะห์ในแบบเสมือนสองมิติ ซึ่งจะช่วยให้สะดวก รวดเร็ว และง่ายต่อการวิเคราะห์มากกว่าแบบสามมิติทั่วไป โดยผลลัพธ์ที่ได้จะมีความน่าเชื่อถือในระดับหนึ่ง

บทที่ 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่ใช้วิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงนั้น สามารถแยกพิจารณาออกเป็นสองส่วนคือ การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นประกอบ และการวิเคราะห์หน่วยแรงในแผ่นประกอบเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ โดยทั้งสองส่วนนี้ได้มีผู้ทำการศึกษาวิจัยไว้เป็นจำนวนมากในที่นี้จะขอกล่าวถึงโดยสังเขปดังต่อไปนี้

2.1 การนำความร้อนในแผ่นประกอบ

ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นประกอบ โดยส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติ และสามมิติ การวิเคราะห์มีทั้งการวิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรง และการวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยประมาณ ซึ่งการเลือกวิธีวิเคราะห์จะขึ้นอยู่กับชนิดของปัญหาในแต่ละปัญหา ในที่นี้จะขอกล่าวถึงการวิเคราะห์การนำความร้อนในแผ่นประกอบในปัญหาหนึ่งมิติ และสามมิติ ทั้งสภาวะคงที่และไม่คงที่ โดยแยกพิจารณาการวิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรง และการวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยประมาณ จากนั้นจึงจะขอกล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์ปัญหาแบบเสมือนสองมิติที่ใช้แทนการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ปัญหาการนำความร้อนภาวะคงที่หนึ่งมิติ สุนันท์ ศรัณยนิตย์ (2002) ได้แสดงสมการการวิเคราะห์การนำความร้อนในทิศทางความหนาของแผ่นประกอบด้วยวิธีผลเฉลยแม่นตรง วัสดุในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบเป็นวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ (homogeneous) และคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง มีเงื่อนไขขอบเขตแยกออกเป็นสองกรณี หนึ่งกำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างแตกต่างกัน และสองกำหนดการพาความร้อนที่ผิวบนและผิวล่างแตกต่างกัน โดยสมการการวิเคราะห์แสดงในรูปของความต้านทานความร้อนในเชิงอนุกรม ซึ่งจำนวนเทอมอนุกรมจะเท่ากับจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ เดช พุทธเจริญทอง (1998) ได้หาผลเฉลยการนำความร้อนในทิศทางความหนาของแผ่นประกอบโดยประมาณ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่แผ่นประกอบ ประกอบด้วยวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอสามชั้น โดยค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและความหนาในแต่ละชั้นแตกต่างกัน และได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวบนเป็นการพาความร้อนและผิวล่างเป็นการกำหนดอุณหภูมิคงที่ที่เวลาใด ๆ ผลการวิเคราะห์ได้แสดงผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิที่ผิววัสดุในแต่ละชั้น

ปัญหาการนำความร้อนภาวะไม่คงที่หนึ่งมิติ สุนันท์ ศรัณยนิตย์ (2002) ได้แสดงผลเฉลยแม่นตรงแบบไร้มิติ การนำความร้อนของวัสดุในภาวะไม่คงที่ วัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอโดยแสดงผลเฉลยแม่นตรงไร้มิติสำหรับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตสองลักษณะคือ การกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นที่เวลาเท่ากับศูนย์เท่ากันตลอดทั้งวัสดุ และกำหนดฟลักซ์ที่เวลาเริ่มต้นเท่ากับศูนย์เท่ากันตลอดทั้งวัสดุ โดยผลเฉลยแม่นตรงไร้มิติทั้งสองนี้อยู่ในรูปผลเฉลยแม่นตรงเอกซ์โปเนลเชียล ที่เวลาใด ๆ ปราโมทย์ เดชะอำไพ (1999) ได้หาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การนำความร้อน ภายใต้ภาวะไม่คงที่ในทิศทางความหนาของผนังวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางโดยกำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างที่เวลาเริ่มต้น

เท่ากับศูนย์ ซึ่งในการวิเคราะห์ภาวะไม่คงที่ใช้วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson recurrence relations) โดยแบ่งช่วงเวลาออกเป็นช่วง ๆ ผลการวิเคราะห์ได้แสดงการกระจายอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างของผนังที่เวลาใด ๆ

สำหรับปัญหาการนำความร้อนสามมิติภาวะคงที่ Feijoo และคณะ (1979) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงโดยใช้ฟังก์ชันของกรีน (Green's functions) ในการหาการกระจายอุณหภูมิของแผ่นประกอบลักษณะแซนด์วิช (sandwich structure) ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางโดยได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตออกเป็นสองลักษณะ คือกำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนของวัสดุให้คงที่เมื่อเวลาใด ๆ และสองกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ผิวโดยรอบเท่ากับศูนย์ ซึ่งผลเฉลยแม่นตรงนี้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ Mukherjee และ Sinha (1994) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิโดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นประกอบวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ (homogeneous) คุณสมบัติออโธทรอปิก (orthotropic) และความหนาในแต่ละชั้นเท่ากันตลอดทั้งความหนา โดยวางมุมวัสดุแผ่นประกอบที่องศาใด ๆ รอบแกนทิศทางความหนาวัสดุ แผ่นประกอบประกอบด้วยวัสดุ 4 ชั้น โดยได้รวมค่าคุณสมบัติวัสดุในแต่ละชั้นเข้าด้วยกัน ผลการศึกษาได้แสดงการกระจายอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของแผ่นประกอบ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่มากนักเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของ Carslaw และ Jaeger (1959) ต่อมา Shuler และ Advani (1999) ได้ศึกษาหาผลเฉลยแม่นตรง และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์แผ่นประกอบวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และคุณสมบัติไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทาง โดยทำการเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ซึ่งจะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวก่อนทำการแปลงลาปลาซ (Laplace transform boundary element method, LTBEM) โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 6 โนด ผนวกกับการใช้วิธีการประมาณของกาเลอร์คิน (Galerkin approximation) ในการขจัดตัวแปรของเวลา ซึ่งในการวิเคราะห์แผ่นประกอบวัสดุเนื้อเดียวกันไม่สม่ำเสมอ ได้ทำการกำหนดฟังก์ชันการนำความร้อนในทิศทางความหนาอยู่ในรูปเอกซ์โปเนลเชียล ผลการศึกษาเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน ต่อมา Park และคณะ (2003) ได้ศึกษาการวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยประมาณการกระจายอุณหภูมิของแผ่นประกอบสามมิติ โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาผลเฉลยได้ใช้เอลิเมนต์ 18 โนด ทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา เช่นเดียวกันกับวิธีการแบ่งชั้น (layerwise theory) ในการศึกษาได้จำลองแบบทดสอบสามมิติด้วยวัสดุสองชนิด โดยวางมุมตั้งฉากกัน โดยทำการเปรียบเทียบกับการทดสอบ ซึ่งแสดงกราฟการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่เวลาใด ๆ ที่จุดกึ่งกลางแผ่นประกอบ แสดงให้เห็นว่าการกระจายอุณหภูมิที่ได้จำลองแบบทดสอบมีค่ามากกว่าการทดสอบเล็กน้อย และมีทิศทางการเพิ่มของกราฟในทิศทางเดียวกัน

ในการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิสามมิติ เป็นการยากในการจำลองโมเดลหรือการหาผลเฉลยแม่นตรง จึงได้มีผู้ศึกษาวิจัยในการลดขั้นตอนการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิสามมิติให้เป็นเสมือนแบบสองมิติโดยการสมมติการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาด้วยฟังก์ชันพหุนาม อาศัยความสมดุลยของอุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนในการหาความต่อเนื่องในการกระจายอุณหภูมิ Argyris และคณะ (1995) ได้วิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิคงที่ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 6 โนด ในการศึกษาการนำความร้อนภายใต้การกำหนดอุณหภูมิ การพาความร้อน และการแผ่รังสีความร้อน ซึ่งกำหนดคุณสมบัติของวัสดุแปรผันตามอุณหภูมิ โดยในทิศทางความหนาใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งแทนการกระจายอุณหภูมิ และได้ใช้

(Newton - Raphson method) ในการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นในเทอมของการแผ่รังสีความร้อน ผลการศึกษาได้เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิกับโปรแกรม NASTRAN เอลิเมนต์ 8 โนด แสดงให้เห็นว่า ผลการศึกษามีค่ามากกว่าโปรแกรม NASTRAN เล็กน้อย Rolfes และคณะ (1999) ได้ศึกษาการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ระนาบ $x - y$ และในทิศทางความหนาได้ทำการสมมติฟังก์ชัน พหุนามกำลังหนึ่งและกำลังสองในการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา โดยมีสมมติฐานในการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งที่ว่า ค่าการนำความร้อนในทิศทางความหนาเท่ากันตลอดทั้งชั้นวัสดุและไม่มีตัวต้านทานการถ่ายเทความร้อนระหว่างชั้นรอยต่อวัสดุ ส่วนการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสองมีข้อสมมติฐานเพิ่มเติมที่ว่า วัสดุที่มีค่าการนำความร้อนต่ำจะทำให้เกิดค่าความลาดชันของอุณหภูมิสูง ก่อให้เกิดค่าแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างในแต่ละชั้นของวัสดุ ทำให้การสมมติฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งไม่เพียงพอ จึงได้ใช้สมมติฐานนี้ในการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้ฟลักซ์ความร้อน การพาความร้อน และการแผ่รังสีความร้อน และในปีต่อมา Rolfes และ Rohwer (2000) ได้ศึกษาวิธีการเช่นเดียวกัน โดยทำการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิกับผลการทดสอบวัสดุ 2 ชนิด เนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง โดยกำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนและมีเครื่องวัดการกระจายอุณหภูมิ ผลการศึกษาแสดงให้เห็นกราฟการกระจายอุณหภูมิโมเดลทดสอบมีค่าน้อยกว่าแบบจำลองเล็กน้อย แต่ทิศทางของกราฟมีลักษณะเช่นเดียวกัน และในปีต่อมา Rolfes และ Teβmer (2001) ได้ใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งและกำลังสองในการหาการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาของแผ่นประกอบแบบแซนด์วิส (sandwich composite plate) โดยทดสอบแผ่นประกอบภายใต้ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่บริเวณผิวบนกึ่งกลางแผ่นประกอบ และมีการพาความร้อนที่ผิวโดยรอบ ผลทดสอบแสดงให้เห็นว่า การใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง มีการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาดีกว่าการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง เมื่อเปรียบเทียบการวิเคราะห์สามมิติด้วยโปรแกรม MSC / NASTRAN โดยที่ฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งให้ค่าการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาต่ำกว่าฟังก์ชัน พหุนามกำลังสอง และการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสองให้ผลการทดสอบดีกว่ากำลังหนึ่ง

2.2 การหาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในแผ่นประกอบ

การวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบมีทั้งวิธีการวิเคราะห์แบบสองมิติและสามมิติ ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบสองมิติ มีทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์สองทฤษฎีใหญ่ ๆ คือ ทฤษฎีคลาสิกคัลลามิเนต (classical laminate plate theory, CLT) โดยอาศัยสมมติฐานของ Kirrchoff ที่ว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือน ทำให้ระนาบหลังการเปลี่ยนแปลงรูปร่างยังคงระนาบเดิม และอีกทฤษฎีหนึ่งคือ ทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน (shear deformation plate theory) โดยวิธีนี้แยกออกได้หลายวิธีขึ้นอยู่กับการพิจารณาผลกระทบแรงเฉือนที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เช่น การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง (first-order shear deformation theory) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม (third-order shear deformation theory) ซึ่งเรียกย่อ ๆ ว่า FSDT และ TSDT ตามลำดับ ซึ่งในการวิเคราะห์แบบสองมิตินี้จะทำการอินทิเกรตคุณสมบัติวัสดุในแต่ละชั้นทำให้สามารถวิเคราะห์ในแบบสองมิติ ทำให้สะดวกและรวดเร็วในการวิเคราะห์ ส่วนการวิเคราะห์แผ่น

layerwise theory) และใช้สมการสมดุล ในการหาความต่อเนื่องของหน่วยแรง ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าการวิเคราะห์แบบสองมิติ แต่วิธีนี้มีความยุ่งยากและซับซ้อนเพราะมีตัวไม่ทราบค่าของการกระจัดในแต่ละชั้นเป็นจำนวนมาก ในที่นี้จะกล่าวแยกออกเป็นสองส่วน คือ ปัญหาการวิเคราะห์หน่วยแรงของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิแบบสามมิติและสองมิติ โดยมีรายละเอียดดังนี้

สำหรับปัญหาหน่วยแรงภายใต้อุณหภูมิสามมิติ Mukherjee และ Sinha (1994) ได้วิเคราะห์แผ่นประกอบสามมิติภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์ 20 โนด ซึ่งแผ่นประกอบเป็นวัสดุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง มีจุดรองรับแบบง่าย ผลการศึกษาได้แปรผันความกว้างต่อความหนาเมื่อเปรียบเทียบการกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติกับ Timosheko (1959) Das และ Rath (1972) และ Reddy (1980) มีค่าใกล้เคียงกัน Smittakorn และ Heyliger (2001) ได้วิเคราะห์แผ่นไม้ประกอบภายใต้ความชื้น อุณหภูมิ พิโซอิเลคทริกภาวะคงที่และไม่คงที่ โดยใช้แบบจำลองแยกชั้น (discrete-layer model) ซึ่งประยุกต์ใช้เทคนิคของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยทำการเปรียบเทียบกับผลการทดสอบ ผลการศึกษาแสดงให้เห็นกราฟหน่วยแรงในแต่ละแกน และแสดงให้เห็นว่าภายใต้การเปลี่ยนแปลงปริมาณความชื้นหรือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ สามาถใช้พิโซอิเลคทริกควบคุมการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นเนื่องจากผลกระทบทั้งสองนี้

สำหรับการวิเคราะห์หน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิด้วยทฤษฎีคลาสสิกคัลลามิเนต Reddy (1999) แสดงสมการการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิและพิโซอิเลคทริกด้วยทฤษฎีคลาสิกคัลลามิเนตออกสองวิธี คือวิธีของ Navier ซึ่งเป็นวิธีหาผลลัพธ์ในรูปของผลเฉลยแม่นตรง ในการวิเคราะห์จะทำการสมมติฟังก์ชันการกระจัดในทิศทางระนาบไซน์ และโคไซน์ และสมมติการกระจัดในทิศทางความหนา หน่วยแรงตามแนวแกน หน่วยแรงโมเมนต์ด้วยฟังก์ชันไซน์ การวิเคราะห์จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการวิเคราะห์ โดยผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของอนุกรมไซน์และโคไซน์ อีกวิธีหนึ่งคือวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งได้แสดงสมการการวิเคราะห์ในรูปของเมตริกซ์ โดยสมมติฟังก์ชันรูปร่างออกสองชนิดคือ ฟังก์ชันรูปร่างลากรานจ์ใช้ในการสมมติฟังก์ชันการกระจัดในทิศทางระนาบ และฟังก์ชันเฮอมิตใช้ในการสมมติฟังก์ชันการกระจัดในทิศทางความหนา

สำหรับการวิเคราะห์หน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ ด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง Rolfes และคณะ (1998) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิด้วยวิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์ 8 โนดในการวิเคราะห์ และกำหนดให้อุณหภูมิกระจายในทิศทางความหนาเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งตลอดความหนา ทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบประกอบด้วยวัสดุสี่ชั้น และสิบชั้น วางมุมวัสดุตั้งฉากสลับกันในแต่ละชั้น โดยแปรผันค่าอัตราส่วนความหนาต่อความกว้าง และมีจุดรองรับเป็นจุดรองรับแบบง่าย ผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่า หน่วยแรงในทิศทางความหนาจะมีค่าความถูกต้อง เมื่อค่าอัตราส่วนหน่วยแรงตามแนวแกนต่อหน่วยแรงโมเมนต์มีค่าน้อย และค่าอัตราส่วนหน่วยแรงทิศทางความหนาต่อหน่วยแรงเฉือนทิศทางความหนามีค่ามากกว่า 0.01 เมื่อทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงและการวิเคราะห์แบบสามมิติ ต่อมา Fares (2000) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ ด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจาก

แรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง โดยใช้วิธีของ Reissner ในการรวมผลของอุณหภูมิแบบไม่เชิงเส้นเข้าไปในสมการพลังงาน การศึกษาได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อความชันของอุณหภูมิในทิศทางความหนามีค่าเพิ่มขึ้น ผลของอุณหภูมิแบบไม่เชิงเส้นส่งผลให้การกระจัดในทิศทางความหนามีค่าลดลง ทำให้ค่าหน่วยแรงมีค่าลดลงตามเมื่อเทียบกับการกระจายอุณหภูมิแบบเชิงเส้น และในปีถัดมา Rohwer และคณะ (2001) ได้ใช้วิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่งในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงของแผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิแบบไซน์ในระนาบ x-y และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่งในทิศทางความหนา โดยมีจุดรองรับแบบง่าย ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่า ค่าหน่วยแรงและหน่วยแรงเฉือนในแต่ละทิศทางมีค่าน้อยกว่าการวิเคราะห์แบบสามมิติเล็กน้อย

ปัญหาหน่วยแรงในแผ่นประกอบเนื่องจากอุณหภูมิ ด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม Reddy (1996) ได้ใช้แสดงผลเฉลยแม่นตรงการกระจัดและหน่วยแรงไร้มิติด้วยทฤษฎีคลาสิกคัลลามิเนต การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สามของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิแบบไซน์ในระนาบ x-y และฟังก์ชันพหุนามในทิศทางความหนา โดยแปรผันจำนวนชั้นและแปรผันความกว้างต่อความหนาเมื่อจุดรองรับเป็นแบบจุดรองรับแบบง่าย (simply support) จุดรองรับแบบอิสระ (free support) และจุดรองรับแบบยึดแน่น (fix support) แสดงให้เห็นว่าค่าการกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ และหน่วยแรงไร้มิติด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่หนึ่ง และระดับชั้นที่สามมีค่าใกล้เคียงกันและมีค่ามากกว่าผลลัพธ์ที่วิเคราะห์ด้วยทฤษฎีคลาสิกคัลลามิเนต Daneshjoo และ Ramezami (2002) ได้วิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไม่คงที่ โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ผนวกเข้ากับทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม ซึ่งจะทำการรวมตัวแปรไม่ทราบค่าของตัวแปรอุณหภูมิและหน่วยแรงด้วยวิธิของ Green-Lindsay มีตัวแปรไม่ทราบค่า 15 ตัวแปรในแต่ละโนด ในการวิเคราะห์ได้จำลองแผ่นประกอบภายใต้ปริมาณฟลักซ์ความร้อนแปรผันกับเวลา มีจุดรองรับแบบง่าย ผลการศึกษาเมื่อเปรียบเทียบการวิเคราะห์สามมิติโปรแกรม NISA II มีค่าการเปลี่ยนแปลงใกล้เคียงกันที่เวลาใด ๆ

วิทยานิพนธ์นี้จะทำการศึกษาการหาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ โดยในการวิเคราะห์หาการนำความร้อนในแผ่นประกอบ จะใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา และในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงจะใช้วิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในลำดับต่อไป

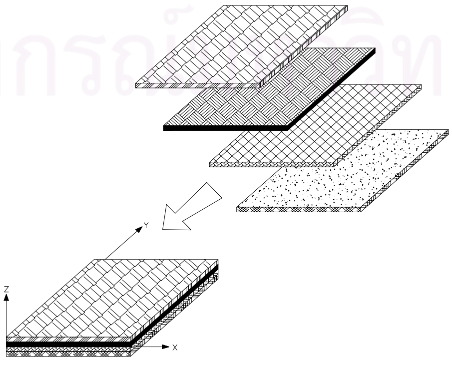
บทที่ 3

การวิเคราะห์การนำความร้อน

3.1 บทนำ

การศึกษาพฤติกรรมของแผ่นประกอบ (composite plate) ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในที่นี้จะแยกการพิจารณาออกเป็นสองส่วนหลัก ๆ คือ การวิเคราะห์การนำความร้อนในแผ่นประกอบและการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นประกอบ ส่วนรายละเอียดของการวิเคราะห์หน่วยแรงในแผ่นประกอบจะกล่าวในบทต่อไป

วิทยานิพนธ์นี้จะศึกษาพฤติกรรมของแผ่นประกอบ (รูปที่ 3.1) ภายใต้อุณหภูมิภาวะไม่คงที่ การวิเคราะห์การนำความร้อนเพื่อหาการกระจายอุณหภูมิในเนื้อวัสดุแต่ละชั้นนั้นเป็นปัญหาในสามมิติ ซึ่งการวิเคราะห์ในระบบสามมิติ จะสามารถให้คำตอบที่มีความแม่นยำสูง แต่การคำนวณจะประสบปัญหาความยุ่งยากและซับซ้อนในการวิเคราะห์ เนื่องจากมีตัวแปรของอุณหภูมิในแต่ละชั้นไม่ทราบค่าอยู่เป็นจำนวนมาก ในที่นี้จึงทำการแปลงการวิเคราะห์ในแบบสามมิติให้เป็นแบบเสมือนสองมิติ โดยการสมมติการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาด้วยฟังก์ชันพหุนามแล้วทำการอินทิเกรตคุณสมบัติวัสดุในทิศทางความหนา ซึ่งจะทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ในแบบสองมิติ การสมมติฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นต่ำจะทำให้ความละเอียดของผลลัพธ์ที่ได้มีความละเอียดไม่เพียงพอ ค่าคลาดเคลื่อนจะมาก และในทางตรงข้ามการสมมติฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นสูงจะทำให้ความละเอียดของผลลัพธ์มีความละเอียดมากแต่เสียเวลาในการวิเคราะห์ อย่างไรก็ตามเนื่องจากผลของความละเอียดของระดับขั้นสูงมีผลต่อการกระจายอุณหภูมิเพิ่มขึ้นไม่มากนัก (Aagaah และคณะ, 2003) วิทยานิพนธ์นี้จะสมมติการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาด้วยฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งจะทำให้ปัญหาการนำความร้อนจะสามารถพิจารณาได้ในแบบสองมิติในระนาบของแผ่นประกอบ จากนั้นจึงสามารถประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ในการหาคำตอบของการกระจายอุณหภูมิในแผ่นประกอบ



รูปที่ 3.1 แผ่นประกอบ

ขั้นตอนการวิเคราะห์จะเริ่มจากการพิจารณาสมการควบคุม (governing equation) และประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ในการหาสมการรูปแบบอ่อน (weak form) จากนั้นจึงทำการสมมติฟังก์ชันรูปร่างและทำการแก้สมการเพื่อหาคำตอบการนำความร้อนในแผ่นประกอบ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น (boundary and initial condition) ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวในลำดับต่อไป

3.2 ทฤษฎีการนำความร้อน

ในการวิเคราะห์การนำความร้อนในวัตถุใด ๆ จะใช้กฎของฟูเรียร์ (Fourier's law) ในการหาอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำ และใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานในการหาสมการการนำความร้อนที่ตำแหน่งใดๆในวัตถุ โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.2.1 กฎของฟูเรียร์

เมื่อจุดสองจุดของก้อนวัตถุมีอุณหภูมิต่างกันจะเกิดความลาดชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ขึ้นในก้อนวัตถุนั้น อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำจะเป็นสัดส่วนระหว่างผลต่างของอุณหภูมิต่อระยะทางซึ่งเป็นค่าความลาดชันของอุณหภูมิ โดยที่การถ่ายเทความร้อนนี้จะขึ้นอยู่กับค่าการนำความร้อน (thermal conductivity, k) ซึ่งเป็นคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของตัวกลางที่ความร้อนเคลื่อนที่ผ่าน สำหรับวัสดุคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) สามารถเขียนได้ว่า

$$q_n = -k\frac{\partial T}{\partial n} \tag{3.1}$$

โดย q_n แทนอัตราการถ่ายเทความร้อน (heat flow rate , W/m^2) k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (coefficient of thermal conductivity, W/m$^\circ$C) T คือ อุณหภูมิ (temperature,$^\circ$C) และ n คือระยะในทิศทางใดๆ เครื่องหมายลบที่อยู่ทางด้านขวามือของสมการแสดงให้เห็นว่า ความร้อนจะเคลื่อนที่จากจุดที่มีอุณหภูมิสูงไปยังทิศทางที่อุณหภูมิต่ำกว่าเสมอ สมการ (3.1) เรียกว่ากฎการนำความร้อนของฟูเรียร์ (Fourier's law of conduction) ใช้ในการหาอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำหรือฟลักซ์ความร้อนของวัสดุคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง สำหรับการถ่ายเทความร้อนในวัสดุคุณสมบัติไม่เหมือนกันทุกทิศทางหรือ แอนไอโซทรอปิก อัตราการถ่ายเทความร้อนในแต่ละทิศทางจะเขียนได้ดังนี้

$$q_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.2ก}$$

$$q_y = -\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.2ข}$$

$$q_z = -\left(k_{13}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.2ค}$$

หรือสามารถเขียนในระบบเมตริกซ์ได้ว่า

$$\{q\} = -[k]\{\nabla T\} \tag{3.3}$$

$$\text{เมื่อ} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}, \{\nabla T\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

สมการ (3.3) เป็นสมการที่ใช้หาอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำของวัสดุแอนไอโซทรอปิก โดยที่ค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำนี้ จะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและความลาดชันของอุณหภูมิในแต่ละทิศทาง

3.2.2 หลักการอนุรักษ์พลังงาน

ในการอธิบายหลักการอนุรักษ์พลังงานจะเริ่มจากการพิจารณาส่วนของวัตถุชิ้นเล็กๆ ในระบบควบคุมปริมาตร ดังรูปที่ 3.2 วัตถุชิ้นเล็กๆ นี้มีความยาวเท่ากับ dx,dy และ dz ตามลำดับ และเมื่อนำกฎการอนุรักษ์พลังงานมาใช้กับระบบควบคุมปริมาตรที่เป็นวัตถุชิ้นเล็กๆ นี้ จะได้ความสัมพันธ์ที่ว่าผลรวมของอัตราการนำความร้อนที่ไหลเข้าวัตถุกับอัตราความร้อนที่เกิดขึ้นในวัตถุ จะเท่ากับผลรวมของอัตราการนำความร้อนที่ไหลออกจากวัตถุกับอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของวัตถุ และเมื่อไม่มีอัตราความร้อนที่เกิดขึ้นในวัตถุจะสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ได้ว่า

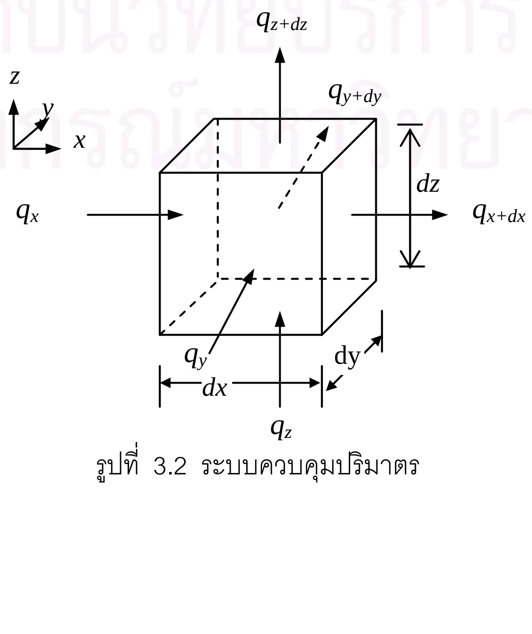
$$\left(q_x + q_y + q_z\right) = \left(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}\right) + \rho c_v \left(dx\, dy\, dz\right)\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.4}$$

โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของมวล (mass density, kg/m^3)

c_v คือ ความร้อนจำเพาะ (specific heat, J/kg°C)

T คือ อุณหภูมิของวัตถุ (temperature,°C)

t คือ เวลา (time, s)



รูปที่ 3.2 ระบบควบคุมปริมาตร

จากสมการ (3.4) เมื่อพิจารณาระบบควบคุมปริมาตรที่มีขนาดเล็กมากๆจะสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)=\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.5}$$

เมื่อแทนค่าอัตราการนำความร้อนโดยการนำในแต่ละทิศทางสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{22}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{13}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned} \tag{3.6}$$

สมการ (3.6) เรียกว่าสมการนำความร้อน (heat conduction equation) ใช้ในการหาการกระจายอุณหภูมิในวัตถุ ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของอุณหภูมิจำเป็นต้องมีเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะกล่าวในลำดับต่อไป

3.3 เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของอุณหภูมิ จำเป็นต้องมีเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ในวิทยานิพนธ์นี้ขอบเขตจะแบ่งพิจารณาออกเป็นผิวบน ผิวล่างและที่ขอบโดยรอบ โดยที่ขอบจะกำหนดให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อน นั้นคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ขอบโดยรอบ (heat flux)เท่ากับศูนย์ $\left(q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = 0\right)$ ส่วนผิวบน ผิวล่าง เมื่อเวลา t >0 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ (รูปที่3.3) ดังนี้

- กำหนดอุณหภูมิที่ผิว s_1

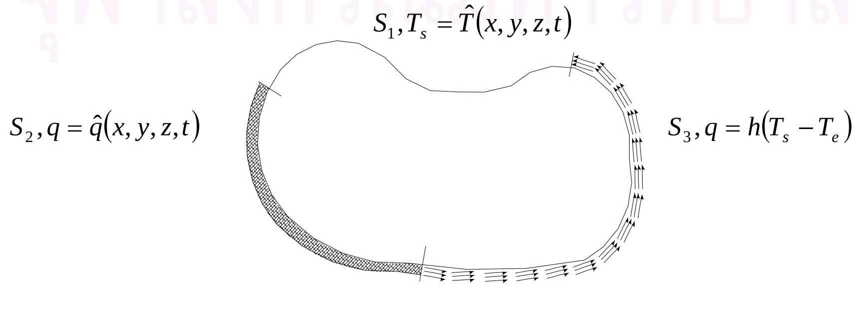
$$T_s = \hat{T}(x, y, z, t) \tag{3.7ก}$$

- กำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ผิว s_2

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = \hat{q}(x, y, z, t) \tag{3.7ข}$$

- กำหนดปริมาณการพาความร้อนที่ผิว s_3

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_s - T_e) \tag{3.7ค}$$



รูปที่ 3.3 เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น

โดยที่สัญลักษณ์ S หมายถึงผิววัตถุโดยรอบ $\hat{q}$ คือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่พุ่งออกจากวัตถุ (W/m^2) ซึ่งอยู่ในทิศทางเดียวกันกับปริมาณการนำความร้อนในวัตถุ ซึ่งพุ่งตรงออกมาจากวัตถุในทิศทางตั้งฉากกับผิวของวัตถุนั้น ประกอบด้วยทิศทางโคไซน์ n_x, n_y, n_z ตามลำดับ h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (W/m^2 $^\circ$C) T_s และ T_e คืออุณหภูมิที่ผิวและอุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบระบบตามลำดับ

สำหรับปัญหาการนำความร้อนในภาวะไม่คงที่จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นในการวิเคราะห์ โดยที่การกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของแผ่นประกอบภายในโดเมนที่พิจารณาเมื่อเวลา t = 0 จะกำหนดให้

$$T = T_0(x, y, z) \tag{3.8}$$

3.4 การวิเคราะห์การนำความร้อน

ในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการหาผลเฉลยโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิของแผ่นประกอบ โดยเริ่มจากการพิจารณาแปลงสมการที่ (3.6) ให้อยู่ในสมการรูปแบบอ่อน (weak form) โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) แล้วทำการสมมติฟังก์ชันรูปร่างของการกระจายอุณหภูมิแทนในสมการรูปแบบอ่อน เมื่อทำการแก้ระบบสมการดังกล่าวก็จะสามารถหาการกระจายอุณหภูมิได้โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.4.1 สมการรูปแบบอ่อน

การแปลงสมการการนำความร้อนให้เป็นสมการรูปแบบอ่อนจะเริ่มจากการพิจารณาสมการ (3.6) เมื่อทำการย้ายข้างสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{22}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{13}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=0\end{aligned} \tag{3.9}$$

กล่าวคือ หากเรารู้ผลแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิและแทนลงทางด้านซ้ายของสมการ (3.9) จะก่อให้เกิดค่าที่เป็นศูนย์ดังแสดงทางด้านขวาของสมการ แต่ในที่นี้เราไม่ทราบผลเฉลยแม่นตรงจึงสมมติผลเฉลยโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิ ดังนั้นหากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณของอุณหภูมินี้ลงในสมการ (3.9) จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง (residual) ทางด้านขวาของสมการนั้นคือ

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{22}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{13}\frac{\partial T}{\partial x}+k_{23}\frac{\partial T}{\partial y}+k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=R\end{aligned} \tag{3.10}$$

โดย R แทนค่าของเศษตกค้าง หลักการขั้นต่อไปก็คือ การพยายามทำให้เศษตกค้างที่เกิดขึ้นนี้มีค่าน้อยที่สุด เพื่อที่ว่าผลเฉลยโดยประมาณของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นจะมีค่าเที่ยงตรงมากที่สุด เราจะระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษ

ตกค้างซึ่งจะประกอบด้วยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W แล้วทำการอินทิเกรตตลอดทั้งปริมาตรของวัตถุ และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากันศูนย์นั้นคือ

$$\int_v RW_i \, dv = 0 \tag{3.11}$$

ในที่นี้เนื่องจากเรามีอุณหภูมิไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนที่สมมติ จึงต้องทำการแทนฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่ i ใด ๆ และเมื่อทำการแทนสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.11) จะได้ว่า

$$\int_v \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{13}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} \right) W_i \, dv = 0 \tag{3.12}$$

เมื่อแทนสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.12) แล้วทำการแยกพจน์จะได้ว่า

$$\int_v \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) W_i \, dv + \int_v \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} W_i \, dv = 0 \tag{3.13}$$

พจน์แรกในสมการ (3.13) แทนปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านผิวของวัตถุนั้น ๆ ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านผิวของวัตถุนี้จะอยู่ในสถานะสมดุลกับปริมาณการถ่ายเทความร้อนภายนอกที่เกิดขึ้นที่ผิวของวัตถุ พจน์ที่สองแทนอัตราการจุความร้อน ซึ่งทั้งสองพจน์ต้องทำการอินทิเกรตทั้งปริมาตรของวัตถุ จึงไม่สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้าพื้นผิววัตถุได้ เพื่อให้สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้าพื้นผิวจำเป็นต้องทำการอินทิเกรตทีละส่วน (by parts integration) จะได้ว่า

$$\int_v \left(\frac{\partial (q_x W_i)}{\partial x} + \frac{\partial (q_y W_i)}{\partial y} + \frac{\partial (q_z W_i)}{\partial z} \right) dv - \int_v \left(q_x \frac{\partial W_i}{\partial x} + q_y \frac{\partial W_i}{\partial y} + q_z \frac{\partial W_i}{\partial z} \right) dv + \int_v \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} W_i dv = 0 \tag{3.14}$$

ประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ในพจน์แรกของสมการ (3.14) จะได้ว่า

$$\oint_s \left(q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z \right) W_i \, ds - \int_v \left(q_x \frac{\partial W_i}{\partial x} + q_y \frac{\partial W_i}{\partial y} + q_z \frac{\partial W_i}{\partial z} \right) dv$$
$$+ \int_v \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} W_i dv = 0 \tag{3.15}$$

สมการ (3.15) เรียกว่าสมการรูปแบบอ่อนใช้ในการวิเคราะห์การนำความร้อนของอุณหภูมิโดยที่สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้เข้ากับปัญหา ทั้งนี้ในการวิเคราะห์ต้องทำการสมมติฟังก์ชันการกระจายอุณหภูมิและฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก จึงจะทำการวิเคราะห์ได้ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

3.4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิโดยอาศัยสมการรูปแบบอ่อนดังกล่าว เราสมมติคำตอบของการกระจายอุณหภูมิให้อยู่ในรูปของผลคูณ การกระจายอุณหภูมิในระนาบและการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา โดยที่การกระจายอุณหภูมิในระนาบจะสมมติด้วยฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติ เอลิเมนต์

สี่เหลี่ยมเชิงเส้น (linear quadrilateral element) ส่วนของการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาจะสมมติการกระจายอุณหภูมิด้วยฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสามแสดงดังรูป

$$T(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}N_i(x,y)\chi_j(z)T_{ij}(t) \qquad (3.16)$$

โดยที่ $N_i(x,y)$ คือฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นประกอบด้วย

$$N_1=\frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \qquad (3.17ก)$$

$$N_2=\frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \qquad (3.17ข)$$

$$N_3=\frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \qquad (3.17ค)$$

$$N_4=\frac{1}{4ab}(a-x)(b+y) \qquad (3.17ง)$$

$\chi_i(z)$ คือ ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสามประกอบด้วย

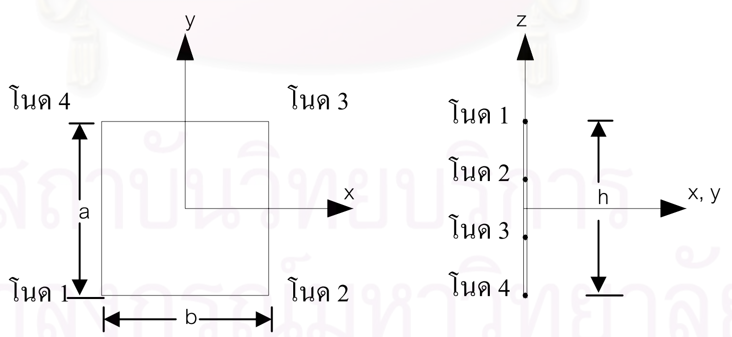
$$\chi_1=-\frac{1}{16}-\frac{z}{8h}+\frac{9z^2}{4h^2}+\frac{9z^3}{2h^3} \qquad (3.18ก)$$

$$\chi_2=\frac{9}{16}+\frac{27z}{8h}-\frac{9z^2}{4h^2}-\frac{27z^3}{2h^3} \qquad (3.18ข)$$

$$\chi_3=\frac{9}{16}-\frac{27z}{8h}-\frac{9z^2}{4h^2}+\frac{27z^3}{2h^3} \qquad (3.18ค)$$

$$\chi_4=-\frac{1}{16}+\frac{z}{8h}+\frac{9z^2}{4h^2}-\frac{9z^3}{2h^3} \qquad (3.18ง)$$

และ $T_{ij}(t)$ คือ ค่าของอุณหภูมิที่เวลาใดๆ โดยที่ i และ j มีค่า 1 ถึง 4



ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ข) เอลิเมนต์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสาม

รูปที่ 3.4 ลักษณะเอลิเมนต์

สมการ (3.16) สามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ว่า

$$T(x,y,z,t)=\lfloor \overline{N}(x,y,z)\rfloor\{T(t)\} \qquad (3.19)$$

โดยที่ $\lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor$ คือ เมตริกซ์ผลคูณของฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น $N_i(x,y)$ กับฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสาม $\chi_j(z)$ ซึ่งมีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 1x16 และ $\{T(t)\}$ คือ เมตริกซ์ผลเฉลยโดยประมาณการกระจายอุณหภูมิที่เวลาใดๆ มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 16x1

เมื่อทำการสมมติผลเฉลยการกระจายอุณหภูมิดังสมการ (3.19) ในลำดับต่อไปจะทำการสมมติฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก W_i ซึ่งวิธีของกาเลอร์คินจะทำการสมมติฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก W_i เช่นเดียวกับฟังก์ชันการประมาณของอุณหภูมินั่นคือ $W_i = \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor$ ดังนั้นสมการรูปแบบอ่อน สมการ (3.15) สามารถเขียนได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\oint_s \left(q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z\right) \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T ds \\
&- \int_v \left(q_x \frac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T}{\partial x} + q_y \frac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T}{\partial y} + q_z \frac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T}{\partial z} \right) dv \\
&+ \int_v \rho c_v \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} dv = 0
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

แทนค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.20) แล้วทำการจัดพจน์จะได้

$$
\begin{aligned}
&\oint_s \left(q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z\right) \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T ds + \int_v [B(x,y,z)]^T [k][B(x,y,z)]\{T\} dv \\
&+ \int_v \rho c_v \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor^T \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} dv = 0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

โดยที่

$$
[B(x,y,z)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor}{\partial z} \end{bmatrix}
$$

เมื่อทำการจัดรูปแบบสมการ (3.21) ให้อยู่ในระบบเมตริกซ์สามารถเขียนได้ว่า (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 1999)

$$[C]\{\dot{T}\} + ([K_c] + [K_h])\{T\} = \{Q_q\} + \{Q_h\} \tag{3.22}$$

โดยที่

$$[C] = \int_v \rho c_v \{\overline{N}(x,y,z)\} \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor dv \tag{3.23ก}$$

$$[K_c] = \int_v [B(x,y,z)]^T [k][B(x,y,z)] dv \tag{3.23ข}$$

$$[K_h] = \int_{s_3} h \{\overline{N}(x,y,z)\} \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor ds \tag{3.23ค}$$

$$\{Q_q\} = \int_{s_2} \hat{q} \{\overline{N}(x,y,z)\} ds \tag{3.23ง}$$

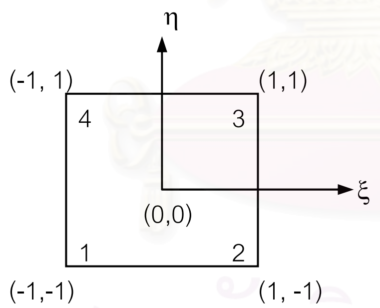
$$\{Q_h\} = \int_{s_3} h T_e \{\overline{N}(x,y,z)\} ds \tag{3.23จ}$$

ในการอินทิเกรตทั้งปริมาตรสมการ (3.23ก) และ (3.23ข) สามารถแยกการอินทิเกรตออกเป็นสองส่วน คือการอินทิเกรตในทิศทางความหนาและการอินทิเกรตในระนาบ x-y ซึ่งการอินทิเกรตในทิศทางความหนาจะทำการอินทิเกรตในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบในทิศทางความหนา โดยรวมค่าคุณสมบัติของวัสดุในแต่ละชั้นให้เสมือนวัสดุชั้นเดียว เมื่อทำการอินทิเกรตในทิศทางความหนาจะได้ว่า

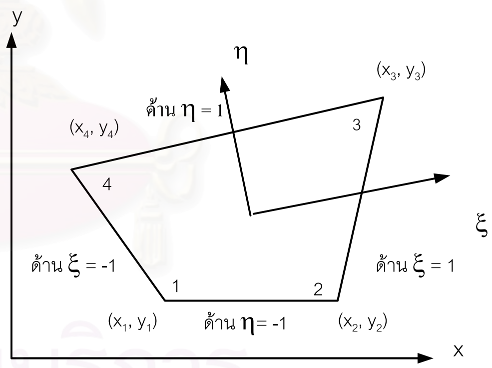
$$[C] = \int_A \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^k c_v^k \{\overline{N}(x,y,z)\} \lfloor \overline{N}(x,y,z) \rfloor dz \right) dA \tag{3.24ก}$$

$$[K_c] = \int_A \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [B(x,y,z)]^T [k]^k [B(x,y,z)] \, dz \right) dA \tag{3.24ข}$$

เมื่อ n คือจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ หลังจากทำการอินทิเกรตในทิศทางความหนา ขั้นตอนต่อไปจะทำการอินทิเกรตในระนาบ x-y ซึ่งบ่อยครั้งปัญหาการนำความร้อนในแผ่นประกอบมีรูปร่างมิใช่สี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อให้สอดคล้องกับรูปร่างเดิมของปัญหา ทำให้การแบ่งเอลิเมนต์ไม่สามารถแบ่งเอลิเมนต์เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนั้นการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใดๆจำเป็นต้องใช้หลักการกฎลูกโซ่ (chain rule) ในการแปลงการถ่ายโอน (transformation mapping) ระบบพิกัดฉาก ให้อยู่พิกัดธรรมชาติโดย ξ และ η จะเป็นตัวกำหนดลักษณะรูปร่างหรือพิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์แทนที่จะใช้การหมุน (orientation) ของเอลิเมนต์ในระบบพิกัดฉากถ่ายโอน และเรียกเอลิเมนต์ที่ทำการพิกัดนี้ว่า ไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์ (isoparametric element) ซึ่งมีขนาดเอลิเมนต์เท่ากับ 2 x 2 ดังรูปที่ 3.5



ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัสใน $\xi - \eta$ พิกัดธรรมชาติ



ข) การถ่ายโอนเอลิเมนต์รูป (ก) ลงในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใดๆในพิกัด x,y

รูปที่ 3.5 การแปลงการถ่ายโอนระบบพิกัด

การแปลงการถ่ายโอนพิกัดจะเริ่มจากการสมมติผลเฉลยการกระจายอุณหภูมิในระบบพิกัดธรรมชาติ $\xi - \eta$ (ดูสมการ 3.16 ประกอบ) จะได้ว่า

$$T(\xi,\eta,z,t) = \lfloor \overline{N}(\xi,\eta,z) \rfloor \{T(t)\} \tag{3.25}$$

โดยฟังก์ชันการประมาณภายใน $\overline{N}(\xi,\eta,z)$ จะประกอบด้วยสองส่วนคือ $N_i(\xi,\eta)$ และ $\chi_j(z)$ เมื่อ $N_i(\xi,\eta)$ คือฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นระบบพิกัดธรรมชาติประกอบด้วย

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{3.26ก}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{3.26ข}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{3.26ค}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.26ง}$$

และ $\chi_i(z)$ คือฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสามมีค่าดังสมการ (3.18)

เมื่อทำการสมมติผลเฉลยการกระจายอุณหภูมิในระบบพิกัดธรรมชาติแล้ว ในขั้นตอนต่อไปเราจำเป็นต้องทำการหาความชันของอุณหภูมิ $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}$ และ $\frac{\partial T}{\partial z}$ แต่เนื่องจากอุณหภูมิ T นั้นถูกสมมติคำตอบให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ξ , η และ z ดังนั้นจึงต้องประยุกต์การใช้กฎลูกโซ่ ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{3.27ก}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{3.27ข}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} \tag{3.27ค}$$

เนื่องจากพิกัด x, y และพิกัด z อิสระต่อกันทำให้เทอมของค่าอนุพันธ์ z เทียบกับ ξ, η และค่าอนุพันธ์ x, y เทียบกับ z เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.27) เมื่อเขียนในรูปเมตริกซ์จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

เมื่อ
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $[J]$ เรียกว่าเมตริกซ์จาโคเบียน ซึ่งเป็นตัวบ่งชี้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงการถ่ายโอนระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ และเมื่อพิจารณาสมการ (3.28) ทำการผกผันเมตริกซ์จาโคเบียนและแทนคำตอบการกระจายอุณหภูมิในระบบพิกัดธรรมชาติสมการ (3.25) ลงในสมการ (3.28) จะได้ความชันของอุณหภูมิได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = B\left[(\xi,\eta,z)\right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{16} \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

โดยที่ค่า

$$B[(\xi,\eta,z)] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{N}_1(\xi,\eta,z)}{\partial \xi} & \frac{\partial \overline{N}_2(\xi,\eta,z)}{\partial \xi} \cdots & \frac{\partial \overline{N}_{16}(\xi,\eta,z)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \overline{N}_1(\xi,\eta,z)}{\partial \eta} & \frac{\partial \overline{N}_2(\xi,\eta,z)}{\partial \eta} \cdots & \frac{\partial \overline{N}_{16}(\xi,\eta,z)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \overline{N}_1(\xi,\eta,z)}{\partial z} & \frac{\partial \overline{N}_2(\xi,\eta,z)}{\partial z} \cdots & \frac{\partial \overline{N}_{16}(\xi,\eta,z)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $J_{11}^* = \frac{\partial y}{\partial \eta} / \overline{J}$, $J_{12}^* = -\frac{\partial y}{\partial \xi} / \overline{J}$, $J_{21}^* = -\frac{\partial x}{\partial \eta} / \overline{J}$

$J_{22}^* = \frac{\partial x}{\partial \xi} / \overline{J}$ โดยที่ $\overline{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$

และ dA เท่ากับ $|J|\, d\xi\, d\eta$ ดังนั้นเมตริกซ์ในสมการ (3. 23) สามารถถ่ายโอนระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติได้ดังนี้

$$[C] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^k c_v^k \{\overline{N}(\xi,\eta,z)\}\lfloor \overline{N}(\xi,\eta,z) \rfloor \left|J(\xi,\eta,z)\right| dz \right) d\xi d\eta \quad \text{(3.30ก)}$$

$$[K_c] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [B(\xi,\eta,z)]^{T} [k]^{k} [B(\xi,\eta,z)] \left|J(\xi,\eta,z)\right| dz \right) d\xi d\eta \quad \text{(3.30ข)}$$

$$[K_h] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h \{\overline{N}(\xi,\eta,z)\}\lfloor \overline{N}(\xi,\eta,z) \rfloor \left|J(\xi,\eta,z)\right| d\xi d\eta \quad \text{(3.30ค)}$$

$$[Q_q] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{q} \{\overline{N}(\xi,\eta,z)\} \left|J(\xi,\eta,z)\right| d\xi d\eta \quad \text{(3.30ง)}$$

$$[Q_h] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} hT_e \{\overline{N}(\xi,\eta,z)\} \left|J(\xi,\eta,z)\right| d\xi d\eta \quad \text{(3.30จ)}$$

ในการทำการอินทิเกรตสมการ (3.30) สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์ (Guass's point) ซึ่งเป็นการอินทิเกรตโดยการแทนค่าจุดของเกาส์ (Guass point location) คูณกับค่าถ่วงน้ำหนัก (weight) แล้วรวมค่าผลคูณนี้เท่ากับจำนวนจุดของเกาส์ (number of Guass point) ซึ่งจะกล่าวในภาคผนวก ข. ดังนั้นสมการ (3.30) จะสามารถทำการอินทิเกรตได้ว่า

$$[C]=\sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG}W_iW_j\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\rho^k c_v^k\{\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\}\lfloor\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\rfloor\left|J(\xi_i,\eta_j,z)\right|dz\right) \quad (3.31ก)$$

$$[K_c]=\sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG}W_iW_j\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}}[B(\xi_i,\eta_j,z)]^T[k]^k[B(\xi_i,\eta_j,z)]\left|J(\xi_i,\eta_j,z)\right|dz\right) \quad (3.31ข)$$

$$[K_h]=\sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG}W_iW_j\{\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\}\lfloor\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\rfloor\left|J(\xi_i,\eta_j,z)\right| \quad (3.31ค)$$

$$[Q_q]=\sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG}W_iW_j\hat{q}\{\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\}\left|J(\xi_i,\eta_j,z)\right| \quad (3.31ง)$$

$$[Q_h]=\sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG}W_iW_jhT_e\{\overline{N}(\xi_i,\eta_j,z)\}\left|J(\xi_i,\eta_j,z)\right| \quad (3.31จ)$$

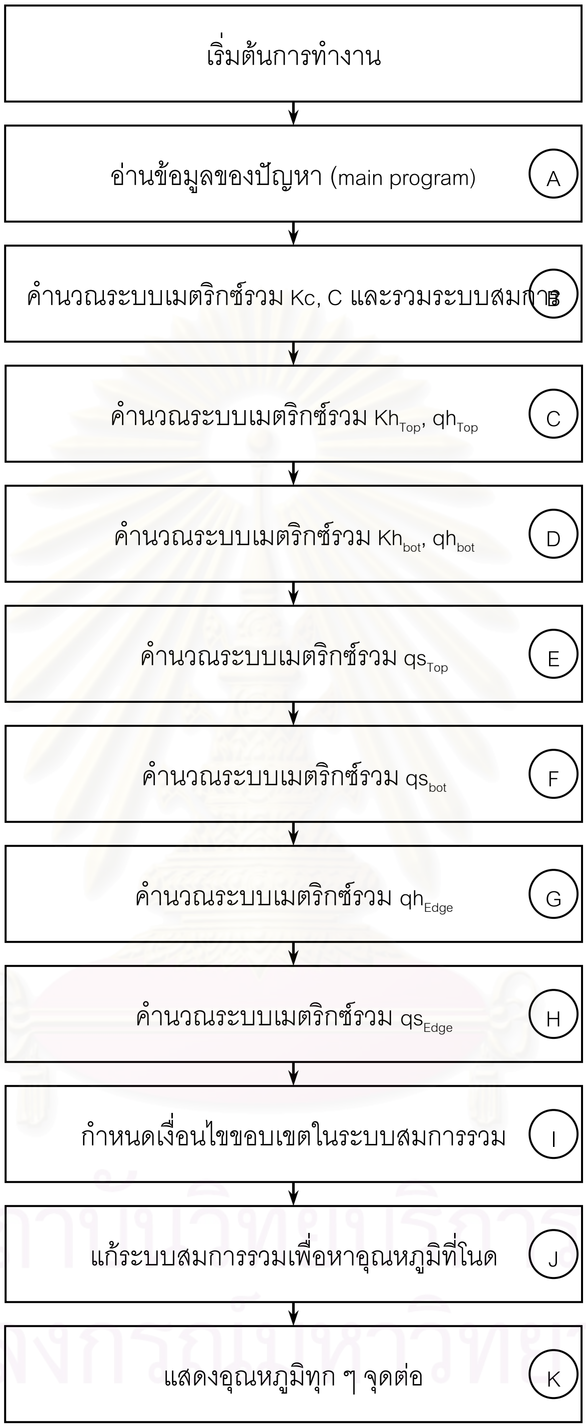
โดยที่ NG คือจำนวนจุดของเกาส์ n คือจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ และ W_i และ W_j คือค่าถ่วงน้ำหนักของเกาส์ซึ่งแสดงค่าดังตาราง ข.1 ในภาคผนวก ข

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (3.31) แล้วนำไปแทนกลับลงสมการ (3.22) ก็จะสามารถหาค่าการกระจายอุณหภูมิได้ แต่เนื่องจากในพจน์แรกของสมการ (3.22) มีเทอมของค่าอนุพันธ์เมตริกซ์เทียบกับเวลา ดังนั้นการแก้ระบบสมการอนุพันธ์นั้นใช้วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) รายละเอียดจะกล่าวไว้ในภาคผนวก ค. และเมื่อทำการแก้สมการที่ (3.22) ก็จะสามารถทราบค่าการกระจายอุณหภูมิของแผ่นประกอบภายใต้เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลาต่าง ๆ

3.5 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์วิเคราะห์การนำความร้อน

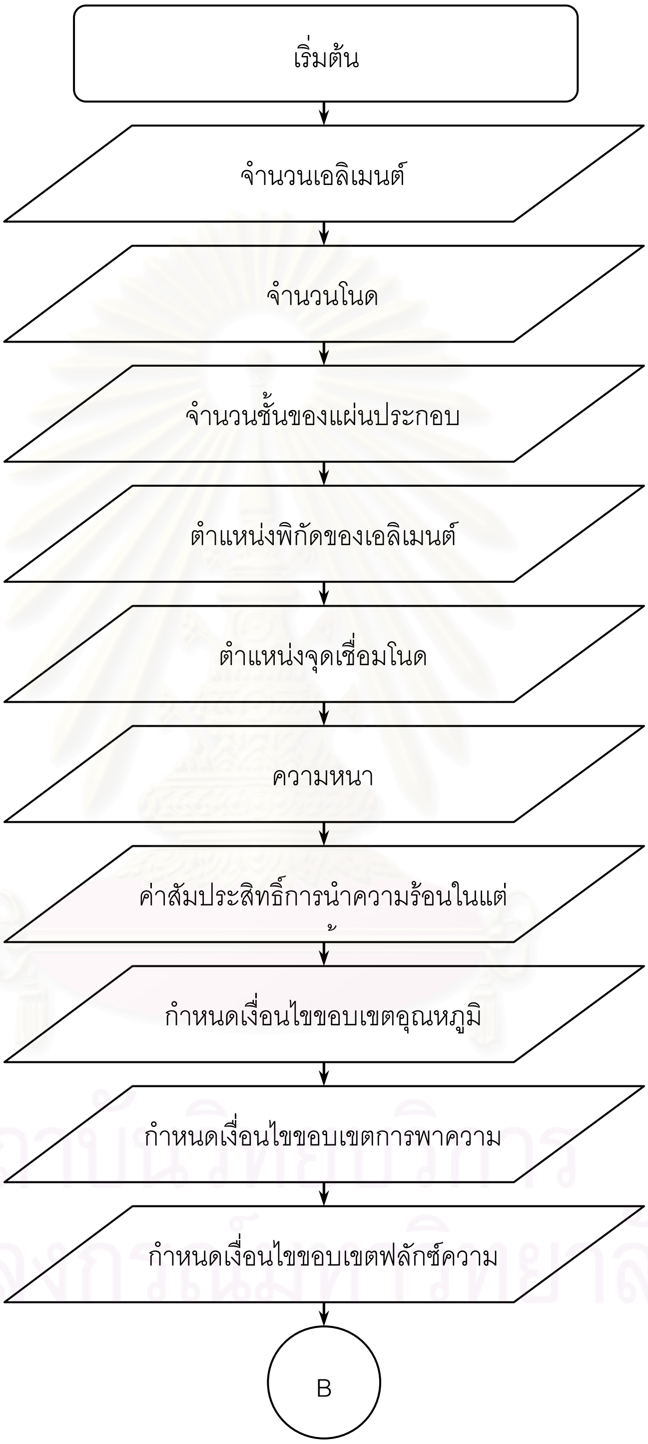
เมื่อได้สมการการวิเคราะห์การนำความร้อนสมการ (3.22) ในลำดับต่อไปจะทำการพัฒนาโปรแกรมในการวิเคราะห์ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ MATLAB ในการพัฒนาโปรแกรมรายละเอียดของโปรแกรมประกอบด้วย โปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutines) (ดูรูปที่ 3.6 ประกอบ) ลักษณะขั้นตอนที่สำคัญของโปรแกรมจะเริ่มจากโปรแกรมหลัก เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนโนด จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ คุณสมบัติการนำความร้อน ความหนาในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบ ฯลฯ จากนั้นในส่วนของโปรแกรมจะเริ่มทำการส่งข้อมูลไปสู่โปรแกรมย่อยแรกเป็นส่วนของการคำนวณเอลิเมนต์เมตริกซ์ Kc และ C (ดูสมการ 3.22 ประกอบ) ซึ่งในส่วนนี้จะเป็นส่วนของการคำนวณค่าเมตริกซ์ Kc และ C ในแต่ละชั้นและในแต่ละเอลิเมนต์จากนั้นจะทำการรวมค่าเมตริกซ์นี้ให้อยู่ในระบบเมตริกซ์รวม (global matrix) ซึ่งจะมีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 4N×4N เมื่อ N คือจำนวนโนดของการแบ่งเอลิเมนต์จากนั้นตัวโปรแกรมจะทำการคำนวณในส่วนของโปรแกรมย่อยสอง ซึ่งเป็นส่วนของการคำนวณ Kh_{Top} และ qh_{Top} ในส่วนนี้จะทำการคำนวณค่าเมตริกซ์ Kh และเมตริกซ์โหลด qh ที่ผิวบนของแผ่นประกอบ โดยในส่วนโปรแกรมย่อยนี้จะทำการคำนวณค่าเมตริกซ์เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีการกำหนดการพาความร้อนที่ผิวบน จากนั้นจะทำการรวมระบบสมการเมตริกซ์ในระบบสมการเมตริกซ์รวม เช่นเดียวกันในส่วนของโปรแกรมย่อยที่สามจะเป็นส่วนของการคำนวณค่าเมตริกซ์ Kh และ qh ที่ผิวล่าง ซึ่งทำในลักษณะ

เช่นเดียวกันในส่วนของโปรแกรมย่อยสอง โดยจะทำการคำนวณเฉพาะเอลิเมนต์ที่มีการกำหนดการพาความร้อนที่ผิวล่างเท่านั้น จากนั้นจะทำการคำนวณในส่วนของโปรแกรมย่อยสี่และห้า ซึ่งจะเป็นส่วนของการคำนวณเมตริกซ์โหลดของฟลักซ์ความร้อนที่ผิวบนและผิวล่างตามลำดับ (qs_{Top} และ qs_{Top}) ที่เวลาใด ๆ โดยที่จะรวมสมการเข้าในระบบเมตริกซ์รวมของโหลดที่ช่วงเวลาใด ๆ และในส่วนของโปรแกรมย่อยหกและเจ็ดจะเป็นการคำนวณเมตริกซ์ของ qh ที่ขอบ และ qs ที่ขอบโดยรอบของแผ่นประกอบ (qh_{Edge} , qs_{Edge}) ซึ่งจะทำการคำนวณเมตริกซ์การพาความร้อนที่ขอบในแต่ละขอบของแผ่นประกอบ แล้วทำการรวมระบบของสมการเมตริกซ์ให้อยู่ในระบบสมการเมตริกซ์รวม (ทำเช่นเดียวกันกับโปรแกรมย่อยสี่และห้า) เมื่อทำการคำนวณเมตริกซ์ และเมตริกซ์โหลดในโปรแกรมย่อยสองถึงเจ็ด จากนั้นในส่วนของโปรแกรมย่อยแปดจะเป็นส่วนของการจัดระเบียบของระบบสมการเมตริกซ์ และเมตริกซ์โหลดรวมทั้งระบบให้แยกเป็นส่วนของเมตริกซ์ที่มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและส่วนที่ไม่มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และในส่วนของโปรแกรมย่อยเก้าเป็นส่วนของการแก้สมการเมตริกซ์ในโปรแกรมย่อยแปด โดยที่ผลลัพธ์จะนำไปแสดงในแต่ละส่วนของโปรแกรมย่อยสิบ ซึ่งรายละเอียดแสดงไว้ในรูปที่ 3.6



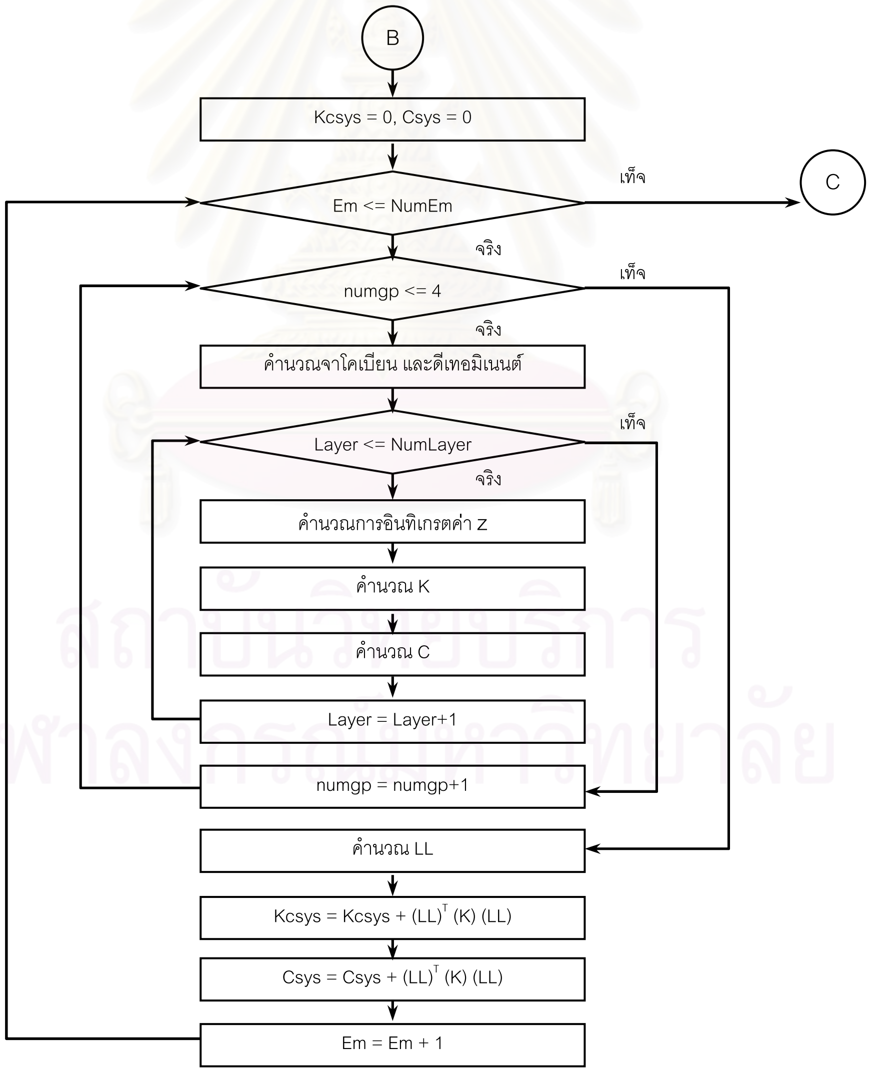
รูปที่ 3.6 ลำดับโปรแกรมวิเคราะห์การนำความร้อน

โดยรายละเอียดของการอ่านข้อมูลของปัญหาเริ่มจากการป้อนค่าจำนวนของเอลิเมนต์ จำนวนโนด จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ตำแหน่งพิกัดของเอลิมเนต์ ตำแหน่งจุดเชื่อมโนด ความหนา ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้น กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิการนำความร้อนและฟลักซ์ความร้อนโดยรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 3.7



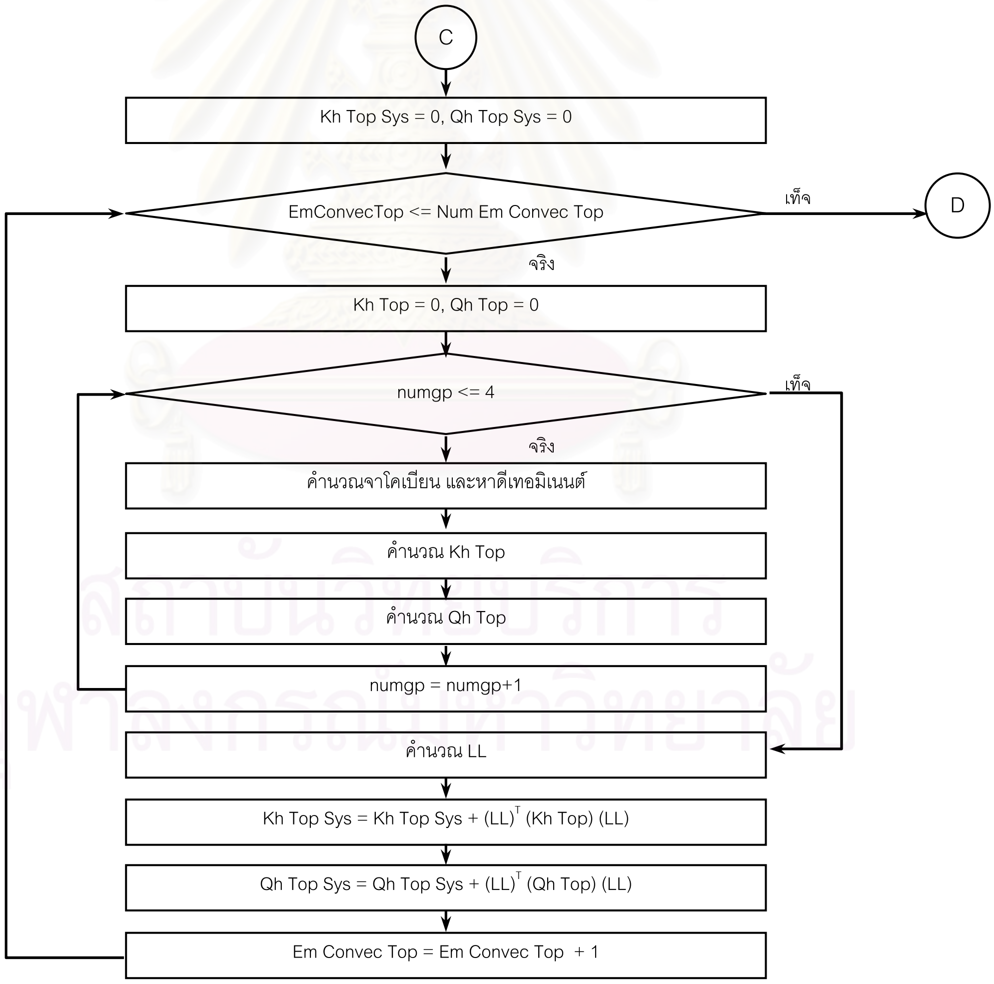
รูปที่ 3.7 ลำดับการอ่านข้อมูลของปัญหา

เมื่อทำการกำหนดค่าตัวแปรต่าง ๆ แล้วลำดับต่อไปจะเป็นส่วนของโปรแกรมย่อยหนึ่ง เป็นส่วนของการคำนวณเอลิเมนต์เมตริกซ์ Kc และ C แล้วเอลิเมนต์เมตริกซ์นี้เข้าเป็นเมตริกซ์รวม Kcsys และ Csys โดยเริ่มจากการกำหนดให้เมตริกซ์ในระบบรวมของ Kcsys และ Csys ให้มีค่าเป็นศูนย์ (ขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 4N×4N เมื่อ N คือจำนวนโนด) เพื่อที่จะทำการรวมค่าเมตริกซ์ในแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นจะเริ่มเข้าการวนลูปแรกเป็นการวนลูปในแต่ละจำนวนเอลิเมนต์ โดยในการวนลูปนี้จะทำการกำหนดให้เมตริกซ์ K และ C มีค่าเป็นศูนย์ (ขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 16×16) จากนั้นจะเริ่มเข้าการวนลูปที่สองจะเป็นการวนลูปการอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์ (ในที่นี้ใช้ 4 จุด ของเกาส์) ซึ่งในการวนลูปนี้จะทำการคำนวณหาค่าจาโคเบียน และหาค่าดีเทอมิเนนต์ของจาโคเบียน ซึ่งจะมีการวนลูปที่สาม จะเป็นการวนลูปจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ในการวนลูปนี้จะทำการคำนวณค่าเมตริกซ์ K และ C ในแต่ละชั้น (วนลูปที่สาม) และในแต่ละจุดของเกาส์ (วนลูปที่สอง) และเมื่อทำการคำนวณค่าเมตริกซ์ Kc และ C ในแต่ละเอลิเมนต์แล้ว จากนั้นจะทำการแปลงระบบเมตริกซ์ในแต่ละเอลิเมนต์ให้อยู่ในระบบเมตริกซ์รวม Kcsys และ Csys ด้วยเมตริกซ์ LL ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.8



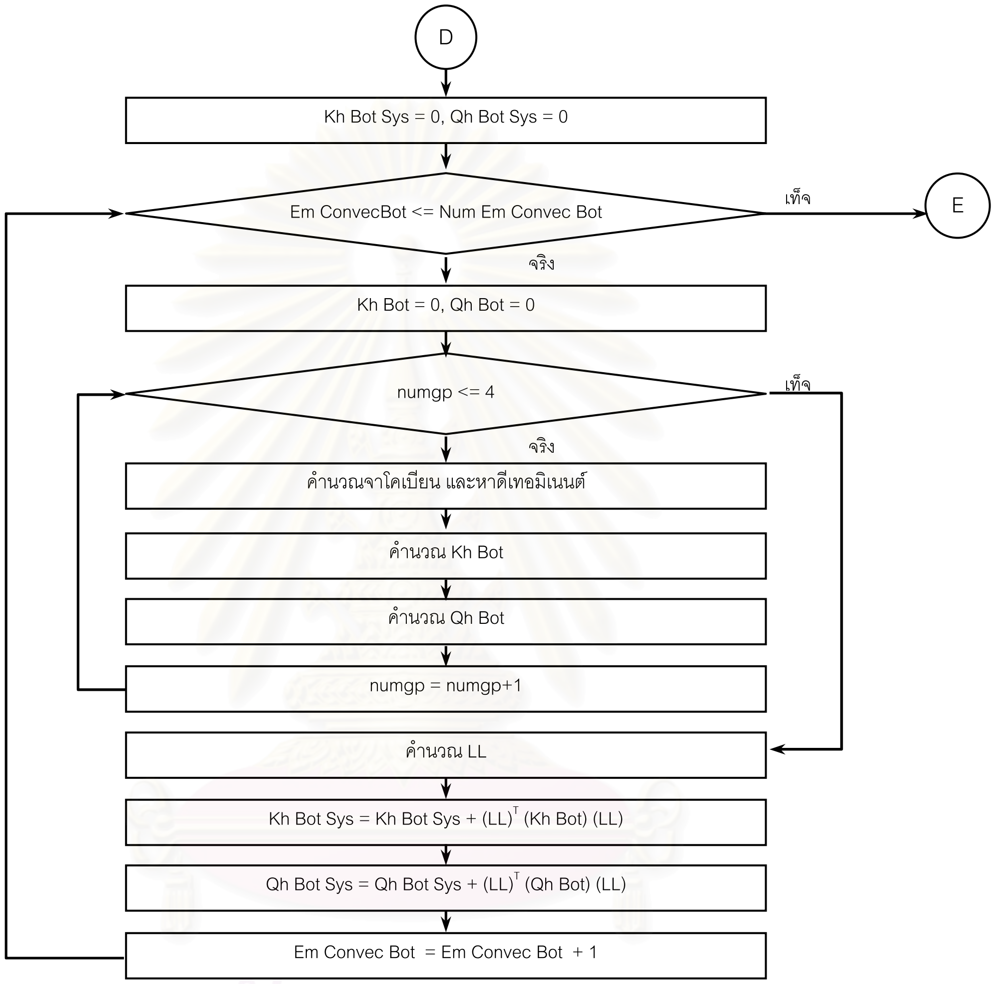
รูปที่ 3.8 ลำดับการคำนวณเมตริกซ์ระบบรวม Kcsys และ Csys

เมื่อทำการคำนวณเมตริกซ์ระบบรวม Kcsys และ Csys แล้วในขั้นตอนต่อไปจะเริ่มทำการคำนวณค่า Kh และ Qh ที่ผิวบน ระบบเมตริกซ์รวม (Kh Top Sys และ Qh Top Sys) โดยเริ่มจากการทำให้ระบบเมตริกซ์รวมของ Kh Top Sys และ Qh Top Sys มีค่าเป็นศูนย์ ทั้งนี้เพื่อที่จะได้ทำการรวมค่าเอลิเมนต์เมตริกซ์ในแต่ละเอลิเมนต์เข้าระบบเมตริกซ์รวม จากนั้นจะเริ่มเข้าการวนลูปแรกเป็นการวนลูปเท่ากับจำนวนของเอลิเมนต์ที่มีการกำหนดการพาความร้อนที่ผิวบน แล้วทำการกำหนดให้เมตริกซ์ Kh Top และ Qh Top มีค่าเท่ากับศูนย์ (ขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 16×16) จากนั้นจะเริ่มเข้าการวนลูปที่สองเป็นการวนลูปการอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์ ซึ่งในส่วนของการวนลูปนี้จะทำการคำนวณค่าจาโคเบียน และหาค่าดีเทอมิเนนต์ในแต่ละจุดของเกาส์ แล้วทำการคำนวณค่า Kh Top และ Qh Top ในแต่ละจุดของเกาส์ (การวนลูปที่สอง) และเมื่อทำการอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์แล้ว จากนั้นจะทำการคำนวณเมตริกซ์ LL ในการแปลงเอลิเมนต์เมตริกซ์สู่ระบบเมตริกซ์รวม แล้วขั้นตอนต่อไปจะทำการรวมเมตริกซ์ของ Kh Top Sys และ Qh Top Sys ในระบบพิกัดรวม โดยมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.9



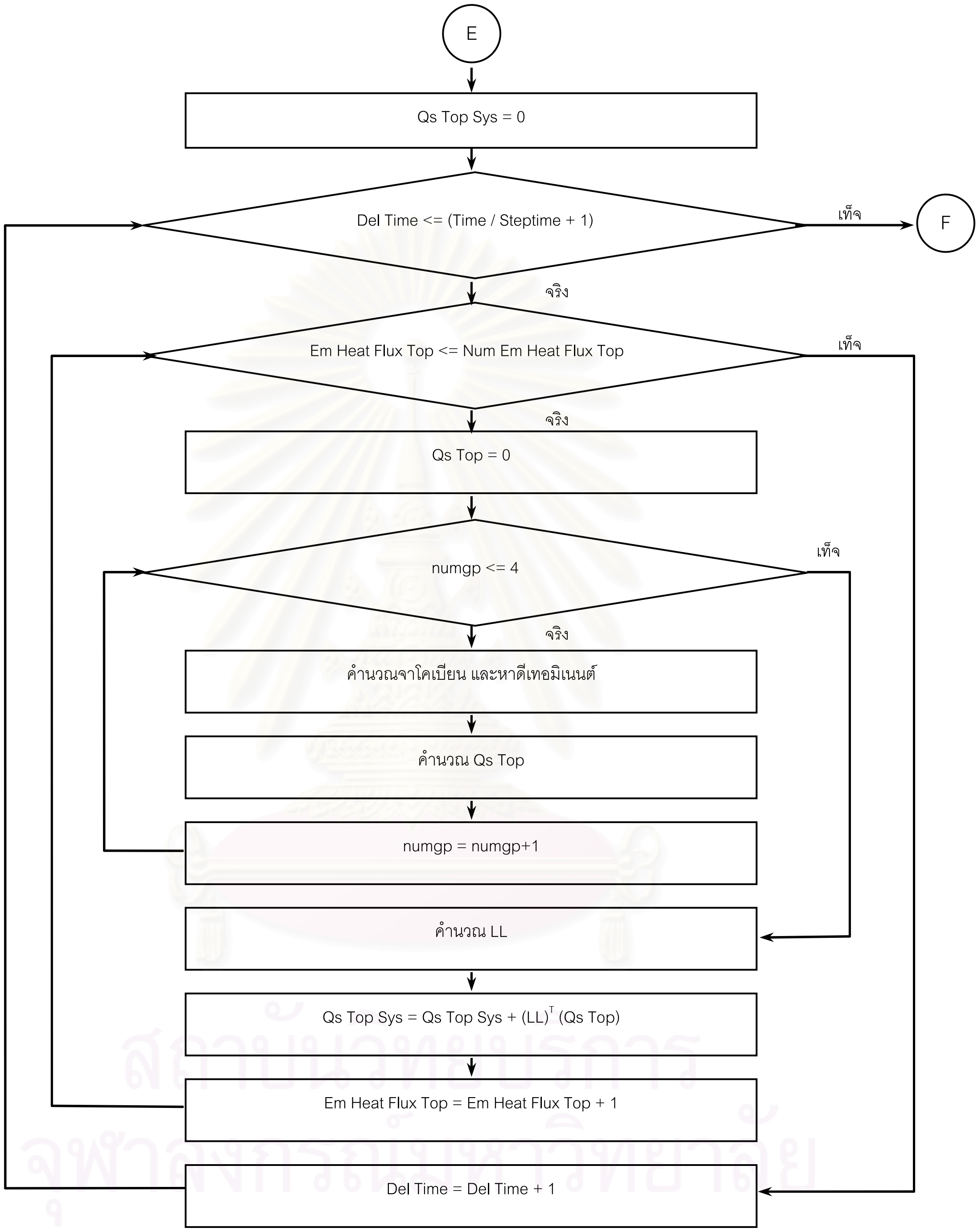
รูปที่ 3.9 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมการพาความร้อนที่ผิวบน Kh Top Sys และ Qh Top Sys

ลำดับในการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมของการพาความร้อนที่ผิวล่าง Kh Bot Sys และ Qh Bot Sys จะทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมของการพาความร้อนที่ผิวบน Kh Top Sys และ Qh Top Sys ซึ่งรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 3.10

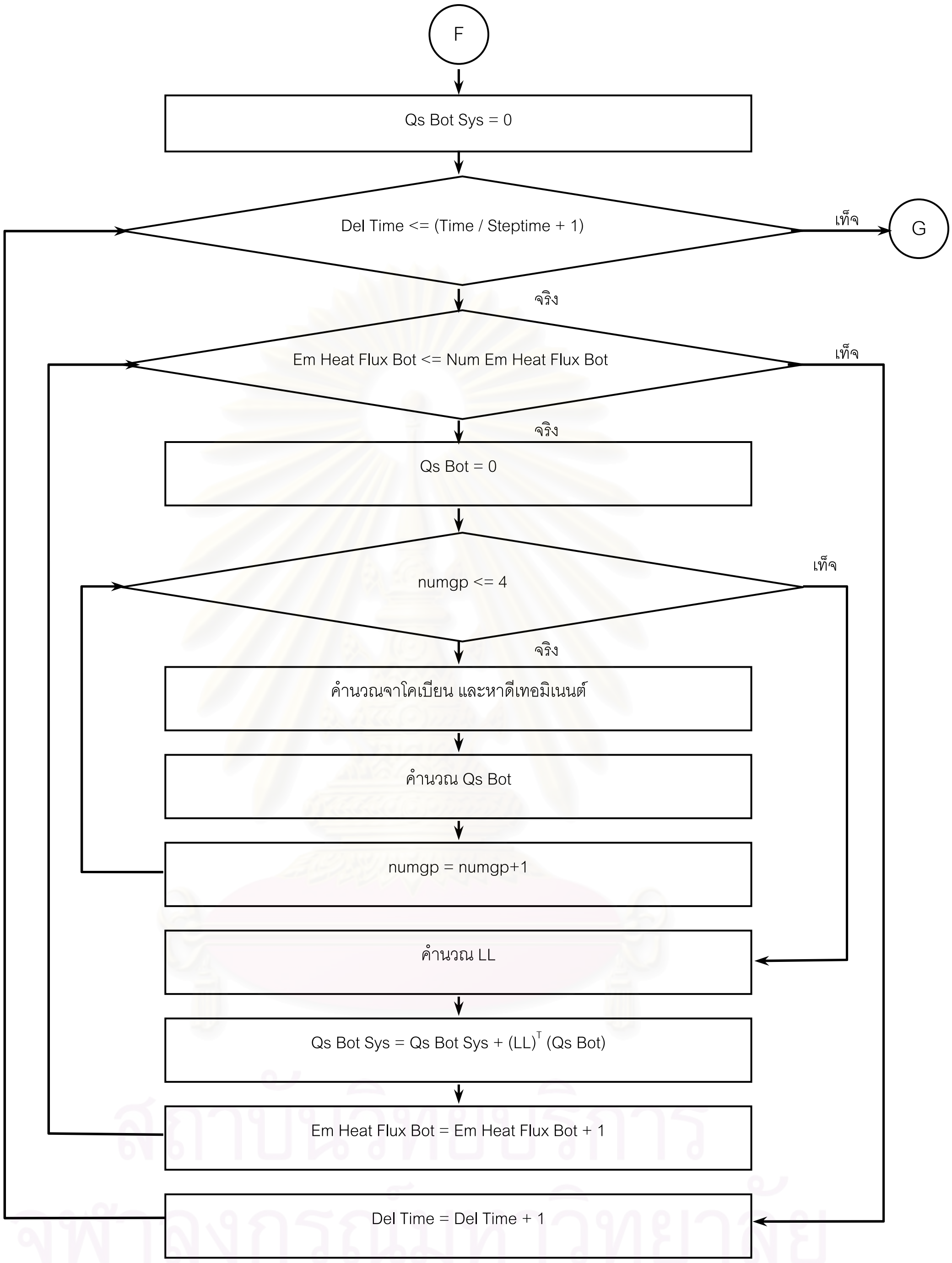


รูปที่ 3.10 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมการพาความร้อนที่ผิวล่าง Kh Bot Sys และ Qh Bot Sys

เช่นเดียวกันกับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมฟลักซ์ความร้อนที่ผิวบนและผิวล่าง Qs Top Sys และ Qs Bot Sys จะทำการคำนวณเช่นเดียวกันกับ Qh Top Sys และ Qh Bot Sys ที่ได้กล่าวมาในข้างต้น แต่จะมีการคำนวณจำนวนการวนลูปเพิ่ม เนื่องจากการคำนวณฟลักซ์ความร้อนจะทำการคำนวณที่เวลาใด ๆ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.11 และ 3.12

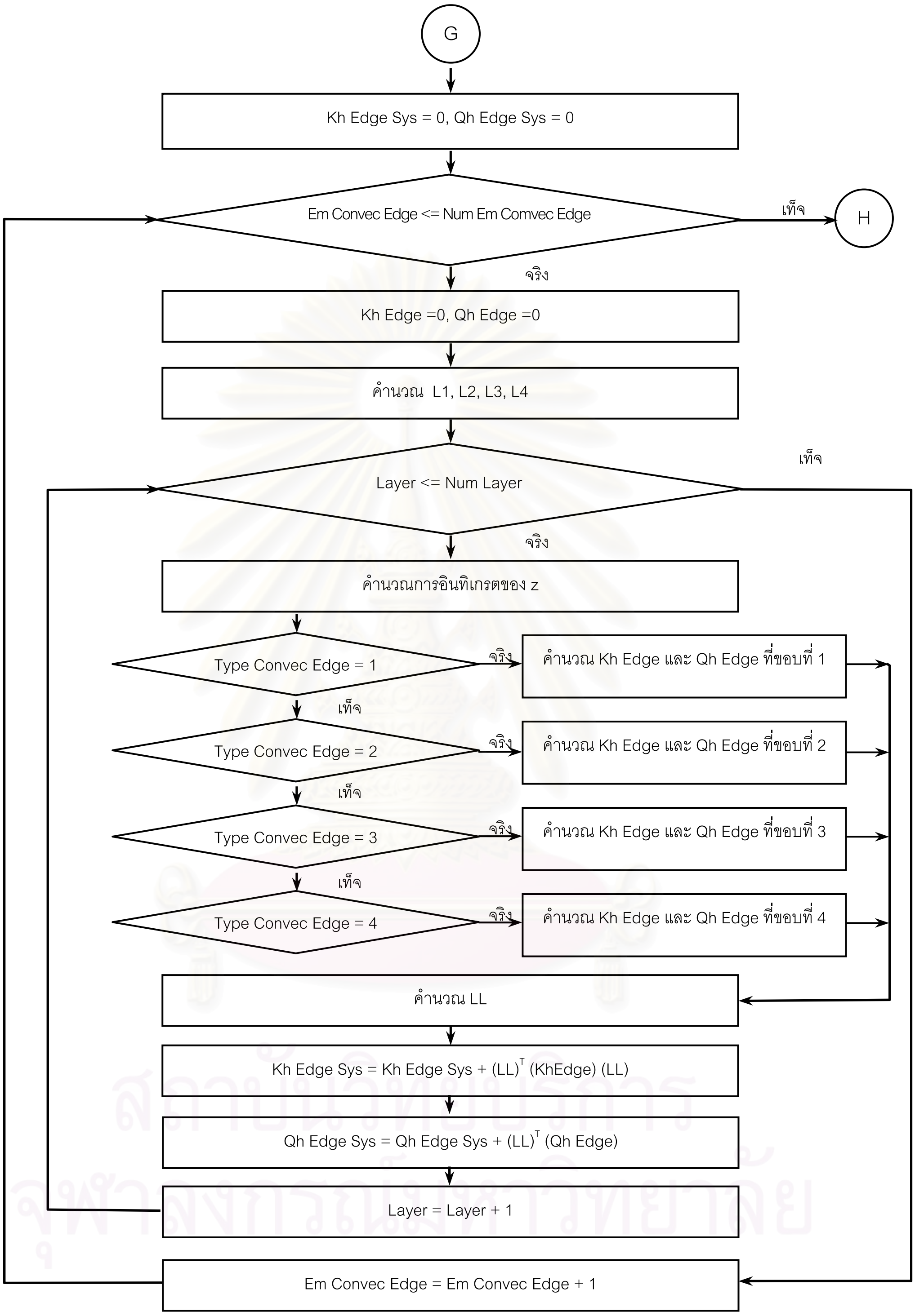


รูปที่ 3.11 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมฟลักซ์ความร้อนที่ผิวบน Qs Top Sys



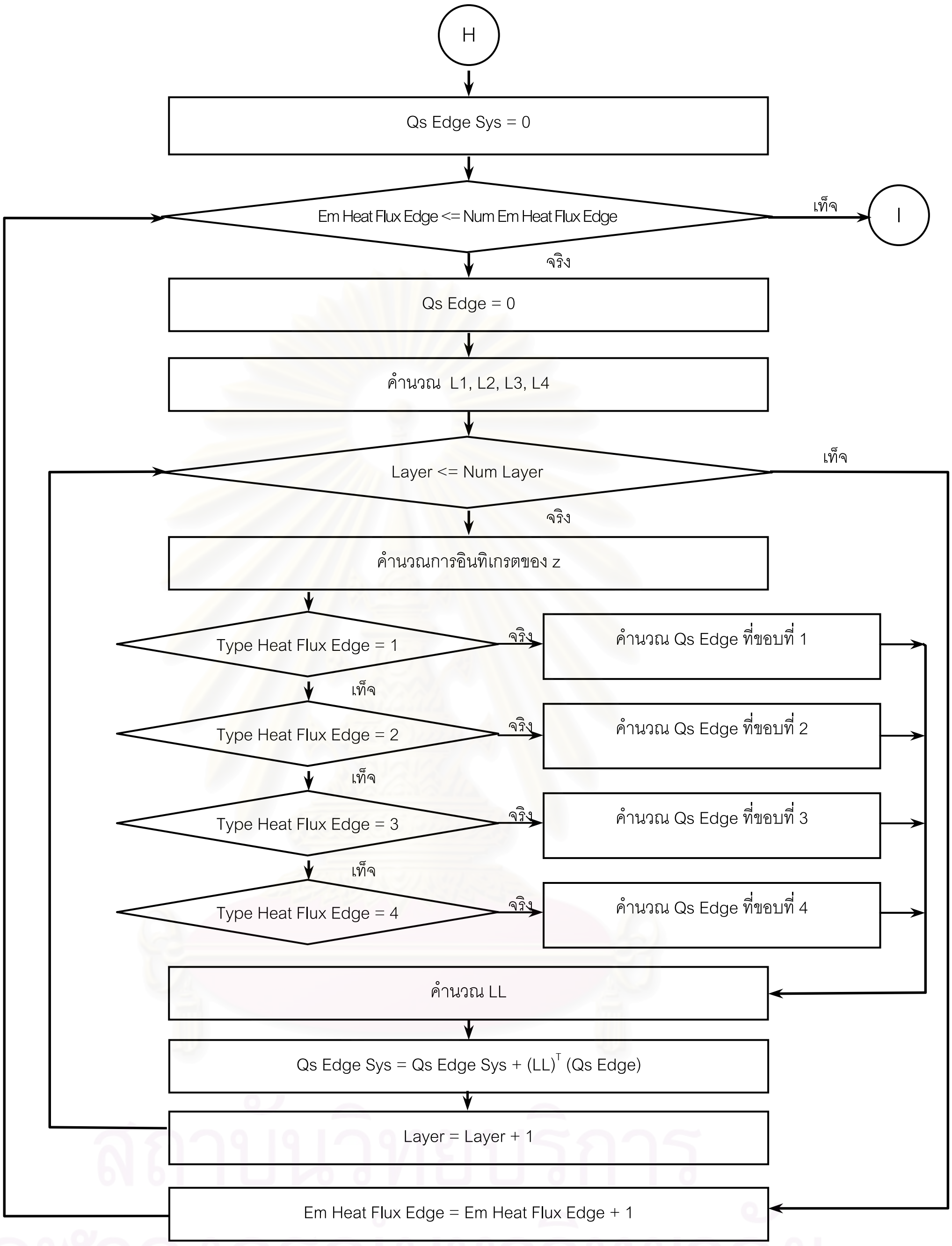
รูปที่ 3.12 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมฟลักซ์ความร้อนที่ผิวล่าง Qs Bot Sys

ในลำดับต่อไปจะเป็นลำดับการคำนวณในระบบเมตริกซ์การพาความร้อนที่ขอบ ลักษณะลำดับจะทำเช่นเดียวกันกับการคำนวณระบบเมตริกซ์การพาความร้อนที่ผิวบนและผิวล่าง แต่ในที่นี้ขอบของแผ่นประกอบจะประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน จึงต้องทำการตรวจสอบเงื่อนไขของด้านแต่ละด้าน แล้วทำการอินทิเกรตด้านแต่ละด้านนั้นให้เท่ากับจำนวนของชั้นของแผ่นประกอบ โดยมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.13



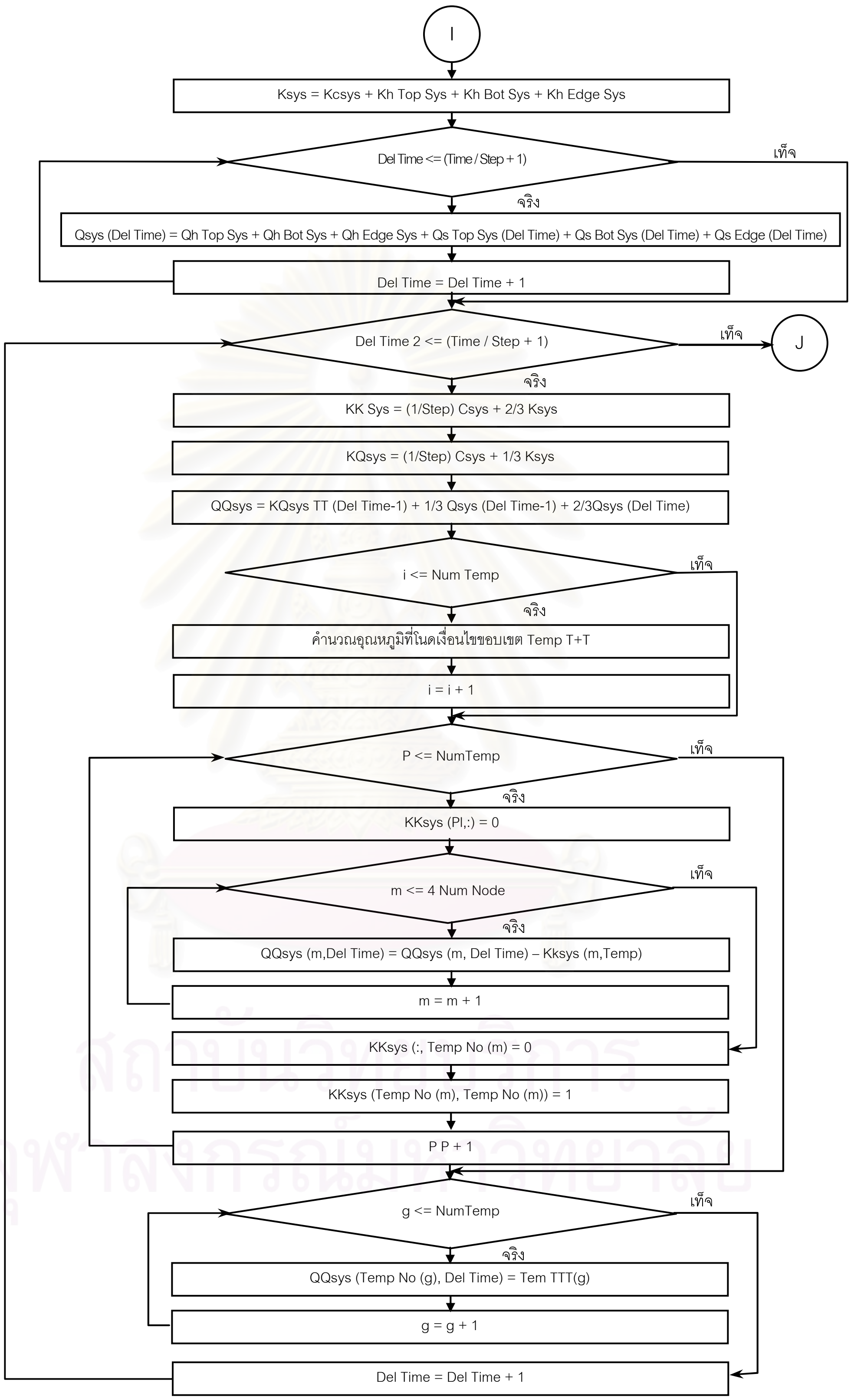
รูปที่ 3.13 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมการพาความร้อนที่ขอบ Kh Edge Sys และ Qh Edge Sys

เช่นเดียวกันกับการคำนวณระบบเมตริกซ์ฟลักซ์ความร้อนที่ขอบQs Edge Sys จะทำลักษณะเช่นเดียวกับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมการพาความร้อนที่ขอบ Qh Edge Sys ซึ่งรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 3.14



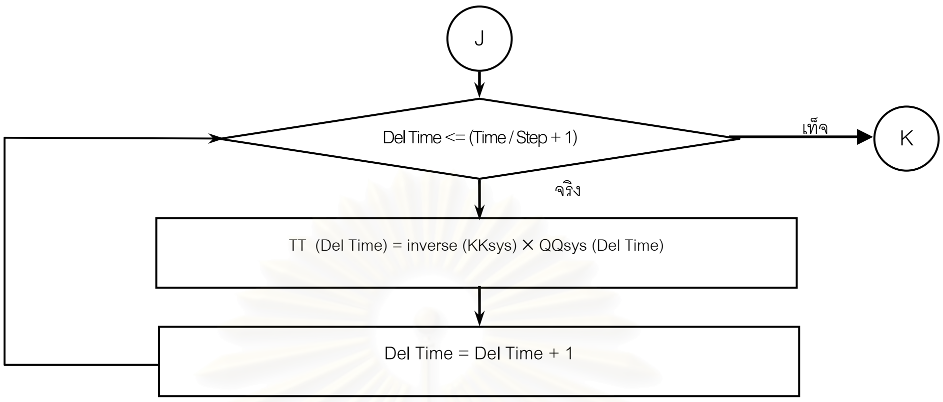
รูปที่ 3.14 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวมฟลักซ์ความร้อนที่ขอบ Qs Edge Sys

ในลำดับต่อไปจะเป็นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในระบบสมการรวม ซึ่งในส่วนนี้จะเป็นการรวมเมตริกซ์ในระบบรวมแต่ละเมตริกซ์เข้าด้วยกัน หลังจากนั้นจะทำการดัดแปลงระบบเมตริกซ์รวมนี้เพื่อให้สอดคล้องกับการกำหนดอุณหภูมิการพาความร้อน และฟลักซ์ความร้อนในแต่ละปัญหา โดยจะทำการดัดแปลงระบบเมตริกซ์รวมเท่ากับจำนวนของโนดที่มีการกำหนดอุณหภูมิ ต่อมาจะทำการดัดแปลงเมตริกซ์ระบบรวม ณ ตำแหน่งที่คอลัมน์ที่มีการกำหนดอุณหภูมิ จากนั้นถึงจะมีการดัดแปลงแถวของเมตริกซ์ที่ตำแหน่งคอลัมน์นั้น ๆ จากนั้นจึงจะทำการดัดแปลงระบบเมตริกซ์โหลดรวม ซึ่งมีรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 3.15



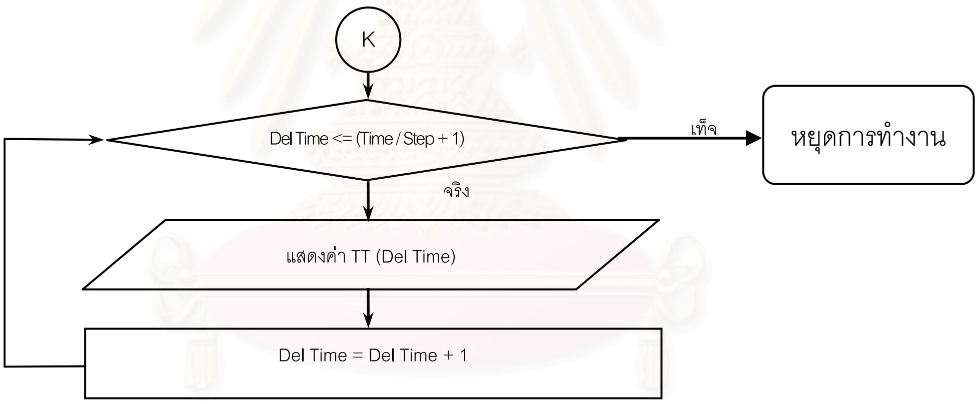
รูปที่ 3.15 ลำดับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

เมื่อทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับระบบเมตริกซ์รวมแล้วจากนั้นจะทำการแก้ระบบสมการเมตริกซ์ที่เวลาใด ๆ โดยมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 ลำดับการแก้สมการ

และในลำดับสุดท้ายจะเป็นการแสดงผลลัพธ์ของอุณหภูมิโดยมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 ลำดับการแสดงผลลัพธ์ของอุณหภูมิ

รายละเอียดลำดับการพัฒนาโปรแกรมได้แสดงไว้ดังที่กล่าวมา ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิที่เวลาใด ๆ ซึ่งค่าอุณหภูมิที่ได้นี้จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรง และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากอุณหภูมิต่อไป รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 4

บทที่ 4

การวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ

4.1 บทนำ

การวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบ (composite plate) ภายใต้อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง ในวิทยานิพนธ์นี้ จะอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม (third-order shear deformation theory, TSDT) ผนวกกับการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์หาการกระจัดและหน่วยแรงที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในแผ่นประกอบ และการสมมติฟังก์ชันการกระจัดในที่นี้จะใช้รูปแบบที่เสนอโดย Reddy (1996) จากนั้นอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด การกระจัด และความสัมพันธ์อุณหภูมิที่มีต่อความเครียดและหน่วยแรง ซึ่งความสัมพันธ์ทั้งสองนี้จะนำไปผนวกเข้ากับหลักการพลังงานความเครียดสมมติเพื่อหาสมการรูปแบบอ่อน (weak form) แล้วจึงใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบของการเปลี่ยนตำแหน่งและหน่วยแรงโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด

ทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม สมมติให้ระนาบการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุไม่คงระนาบเส้นตรงเนื่องจากผลของแรงเฉือน (รูปที่ 4.1) และการคำนึงถึงผลของแรงเฉือนระดับขั้นที่สามนี้ ได้มีผู้เสนอแบบจำลองไว้หลายรูปแบบ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้แบบจำลองที่เสนอโดย Reddy (1996) โดยมีสมมติฐานคือ วัสดุแต่ละชั้นมีการยึดเหนี่ยวกันอย่างสมบูรณ์ ความเครียดและการกระจัดมีค่าน้อย คุณสมบัติของวัสดุมีลักษณะอิลาสติกเชิงเส้น (linear elastic) วัสดุแต่ละชั้นมีความหนาสม่ำเสมอ และระนาบหลังการเสียรูปไม่คงระนาบเดิมเนื่องจากผลของแรงเฉือน โดยฟังก์ชันการกระจัดจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันกำลังสามของความหนา ดังสมการ

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) - c_1 z^3\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \qquad (4.1ก)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) - c_1 z^3\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad (4.1ข)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \qquad (4.1ค)$$

โดยที่ u_0, v_0, w_0 คือการกระจัดที่ระดับกึ่งกลางความหนาในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ

ϕ_x และ ϕ_y คือมุมที่เปลี่ยนไปของแกนทิศทางความหนาที่ระดับกึ่งกลางความหนารอบแกน y และ x ตามลำดับ

$\dfrac{\partial w_0}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial w_0}{\partial y}$ คือความชันของระนาบแผ่นประกอบที่ระดับกึ่งกลางความหนารอบแกน y และ x ตามลำดับ

c_1 คือค่าคงที่มีค่าเท่ากับ $\dfrac{4}{3h^2}$

เมื่อ h คือ ความหนาของแผ่นประกอบ

รูปที่ 4.1 การเสียรูปของทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม

สมการที่ (4.1) คือแบบจำลองการกระจัดในแต่ละทิศทางเสนอโดย Reddy ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าการกระจัดในระนาบ $u(x,y,z,t)$ และ $v(x,y,z,t)$ จะมีเทอมของมุมที่เปลี่ยนไปของแกนทิศทางความหนา (พจน์ที่สอง) และเทอมของความชันของระนาบ (พจน์ที่สาม) ทั้งนี้สืบเนื่องจากแรงเฉือนมีผลทำให้ระนาบของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไม่คงระนาบเดิม ทำให้ค่าการกระจัด $u(x,y,z,t)$ และ $v(x,y,z,t)$ มีค่าไม่เชิงเส้นในทิศทางความหนา (ดูรูปที่ 4.1 ประกอบ)

เมื่อทำการสมมติการกระจัดดังสมการ (4.1) ลำดับต่อไปจะทำการหาค่าอนุพันธ์ของการกระจัดดังกล่าวเพื่อหาความเครียดดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \qquad (4.2\text{ก})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad (4.2\text{ข})$$

โดยที่

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (4.3\text{ก})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(1)} \\ \gamma_{xy}{}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4.3ข}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(3)} \\ \gamma_{xy}{}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.3ค}$$

และ

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}{}^{(0)} \\ \gamma_{xz}{}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + \dfrac{\partial w_o}{\partial y} \\ \phi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4.4ก}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}{}^{(2)} \\ \gamma_{xz}{}^{(2)} \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \phi_y + \dfrac{\partial w_o}{\partial y} \\ \phi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4.4ข}$$

โดยที่ ε_{xx} คือ ความเครียดตั้งฉากในทิศทางแกน x

ε_{yy} คือ ความเครียดตั้งฉากในทิศทางแกน y

γ_{xy} คือ ความเครียดเฉือนในระนาบ x-y

γ_{yz} คือ ความเครียดเฉือนในระนาบ y-z

γ_{xz} คือ ความเครียดเฉือนในระนาบ x-z

c_2 คือ ค่าคงที่มีค่าเท่ากับ $\dfrac{4}{h^2}$

4.3 **ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ ความเครียด และหน่วยแรง**

เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิวัตถุนั้นจะเกิดความเครียดขึ้นภายในวัตถุ ซึ่งความเครียดนี้จะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (coefficient of thermal expansion) และอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ถ้าอุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้นจากอุณหภูมิอ้างอิง ค่าความเครียดนั้นจะมีค่าเป็นบวก และในทางตรงข้ามถ้าอุณหภูมิมีค่าลดลงจากอุณหภูมิอ้างอิงค่าความเครียดจะมีค่าเป็นลบ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \tag{4.5}$$

โดยที่ ε_T คือ ความเครียดเนื่องจากอุณหภูมิ

α คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (1/ ºC)

ΔT คือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป (ºC) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $T_f - T_i$

เมื่อ T_f และ T_i คืออุณหภูมิที่พิจารณาและอุณหภูมิอ้างอิงตามลำดับ

จากสมการ (4.5) เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปก็จะสามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นภายในแผ่นประกอบนั้นได้ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิทราบได้จากคุณสมบัติทางฟิสิกส์ของวัสดุที่นำมาใช้ในแผ่นประกอบ ส่วนการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแผ่นประกอบสามารถทราบได้จากผลการวิเคราะห์การนำความร้อนในแผ่นประกอบซึ่งกล่าวไว้ในบทบที่ 3 โดยที่คำตอบการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิมีค่าดังสมการ

$$\Delta T\,(x,y,z,t) = \left\lfloor \overline{N}(x,y,z) \right\rfloor \{T(t)\} \tag{4.6}$$

โดยที่ค่า $\left\lfloor \overline{N}(x,y,z) \right\rfloor$ คือเมตริกซ์ผลคูณของฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น $N_i(x,y)$ กับฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์หนึ่งมิติแบบพหุนามกำลังสาม $\chi_j(z)$ โดยแสดงค่าไว้ในสมการ (3.17) และ (3.18)

ในกรณีวัตถุที่มีการยึดรั้งเกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขึ้นภายในวัตถุ วัตถุนั้นจะเกิดหน่วยแรง ซึ่งหน่วยแรงนี้จะขึ้นอยู่กับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัตถุแต่ละชนิด สำหรับวัตถุเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_T\right) \tag{4.7}$$

โดยที่ σ คือหน่วยแรงภายในวัตถุ (N/m^2)

E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (N/m^2)

ε และ ε_T คือความเครียดและความเครียดเนื่องจากอุณหภูมิ (m/m) ตามลำดับ

สมการ (4.7) เป็นสมการหาหน่วยแรงภายในวัตถุคุณสมบัติไอโซทรอปิก ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์หาหน่วยแรงภายในแผ่นประกอบคุณสมบัติออโทรอปิกได้ โดยอาศัยหลักการเช่นเดียวกันกับสมการ (4.7) ผนวกเข้ากับหลักการของความเค้นระนาบ (plane stress) (ดูภาคผนวก ง) เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิที่ชั้น k ใด ๆ ในระบบพิกัดเฉพาะที่ (local coordinate) ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \tag{4.8ก}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \tag{4.8ข}$$

. เนื่องจากแผ่นประกอบ ประกอบด้วยแผ่นวัสดุที่มีคุณสมบัติ และทำมุมแตกต่างกันในแต่ละชั้นวัสดุ จึงจำเป็นต้องทำการแปลงหน่วยแรงในระบบพิกัดเฉพาะที่ของแผ่นประกอบให้อยู่ในระบบพิกัดรวม (global coordinate) เพื่อให้คุณสมบัติของวัสดุของแผ่นประกอบที่ทำมุมต่างกัน แปลงให้อยู่ในระบบพิกัดรวมเดียวกัน (ดูภาคผนวก จ) จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \right) \tag{4.9ก}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{4.9ข}$$

โดยที่

$\lfloor \sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{12} \rfloor^T, \lfloor \sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{xy} \rfloor^T$ คือหน่วยแรงตั้งฉากในระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดรวมตามลำดับ

$\lfloor \sigma_{23}\ \sigma_{13} \rfloor^T, \lfloor \sigma_{yz}\ \sigma_{xz} \rfloor^T$ คือหน่วยแรงเฉือนในระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดรวมตามลำดับ

$\lfloor \varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{12} \rfloor^T, \lfloor \varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{xy} \rfloor^T$ คือความเครียดตั้งฉากในระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดรวมตามลำดับ

$\lfloor \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{13} \rfloor^T, \lfloor \varepsilon_{yz}\ \varepsilon_{xz} \rfloor^T$ คือความเครียดเฉือนในระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดรวมตามลำดับ

$\lfloor \alpha_{11}\ \alpha_{22}\ 0 \rfloor^T, \lfloor \alpha_{xx}\ \alpha_{yy}\ \alpha_{x} \rfloor^T$ คือค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดรวมตามลำดับ และ $[Q_{ij}], [\overline{Q}_{ij}]$ คือคุณสมบัติของวัสดุในระบบพิกัดเฉพาะที่ และระบบพิกัดรวมตามลำดับ (รายละเอียดได้แสดงไว้ในภาคผนวก ง และ จ)

จากสมการความเครียด (4.2) เมื่อแทนลงในสมการ (4.9) จะสามารถหาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละทิศทางของแผ่นประกอบภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เกิดขึ้น เมื่อทำการอินทิเกรตตลอดทิศทางความหนาจะสามารถหาแรงภายในต่อความกว้างหนึ่งหน่วยที่เกิดขึ้นในวัสดุแต่ละชั้นได้ โดยที่แรงต่อความกว้างหนึ่งหน่วยของทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สามจะประกอบด้วย แรง (N) กระทำโดยการอินทิเกรตหน่วยแรงตลอดความหนาในแต่ละชั้น โมเมนต์ (M) หาได้โดยทำการอินทิเกรตหน่วยแรงตลอดความหนาในแต่ละชั้นคูณด้วย z และโมเมนต์ที่สาม (P) ทำการอินทิเกรตหน่วยแรงตลอดความหนาในแต่ละชั้นคูณด้วย z^3 สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} + z^3\varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} + z^3\varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} + z^3\gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \end{aligned} \tag{4.10ก}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}{}^{(1)} + z^3\varepsilon_{xx}{}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}{}^{(1)} + z^3\varepsilon_{yy}{}^{(3)} \\ \gamma_{xy}{}^{(0)} + z\gamma_{xy}{}^{(1)} + z^3\gamma_{xy}{}^{(3)} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \right) zdz$$

(4.10ข)

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}{}^{(1)} + z^3\varepsilon_{xx}{}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}{}^{(1)} + z^3\varepsilon_{yy}{}^{(3)} \\ \gamma_{xy}{}^{(0)} + z\gamma_{xy}{}^{(1)} + z^3\gamma_{xy}{}^{(3)} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha yy \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \right) z^3 dz$$

(4.10ค)

เช่นเดียวกันสำหรับหน่วยแรงเฉือน (Q) กระทำโดยการอินทิเกรตหน่วยแรงเฉือนตลอดความหนาในแต่ละชั้น และหน่วยแรงเฉือนที่สอง (R) หาได้โดยการอินทิเกรตหน่วยแรงเฉือนตลอดความหนาในแต่ละชั้น คูณด้วย z^2

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}{}^{(0)} + z^2\gamma_{yz}{}^{(2)} \\ \gamma_{xz}{}^{(0)} + z^2\gamma_{xz}{}^{(2)} \end{Bmatrix} dz \qquad (4.11ก)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} z^2 dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}{}^{(0)} + z^2\gamma_{yz}{}^{(2)} \\ \gamma_{xz}{}^{(0)} + z^2\gamma_{xz}{}^{(2)} \end{Bmatrix} z^2 dz \qquad (4.11ข)$$

สมการ (4.10) และ (4.11) สามารถเขียนแรงและแรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยความกว้างในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} - \{\varepsilon_T\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} \qquad (4.12ก)$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \qquad (4.12ข)$$

ซึ่งค่าต่าง ๆ ในสมการ (4.12) หาได้จาก

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\right) dz \qquad (4.13ก)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left(1, z^2, z^6\right) \qquad (4.13ข)$$

และ $$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \qquad (4.14)$$

สมการ (4.13ก) สัญลักษณ์ i,j เท่ากับ 1, 2, 6 มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 3×3 และในสมการ (4.13ข) สัญลักษณ์ i, j เท่ากับ 4, 5 มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 2×2 โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ หาได้จาก

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left(z_{k+1} - z_k \right) \tag{4.15ก}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[\left(z_{k+1} \right)^2 - \left(z_k \right)^2 \right] \tag{4.15ข}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[\left(z_{k+1} \right)^3 - \left(z_k \right)^3 \right] \tag{4.15ค}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[\left(z_{k+1} \right)^4 - \left(z_k \right)^4 \right] \tag{4.15ง}$$

$$F_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[\left(z_{k+1} \right)^5 - \left(z_k \right)^5 \right] \tag{4.15จ}$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[\left(z_{k+1} \right)^7 - \left(z_k \right)^7 \right] \tag{4.15ฉ}$$

เมื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด หน่วยแรงและแรงได้แล้ว เราจะนำค่าความสัมพันธ์นี้ไปแทนค่าในสมการรูปแบบอ่อน เพื่อหาผลลัพธ์ของการกระจัดซึ่งจะกล่าวในลำดับต่อไป

4.4 หลักการพลังงานความเครียดสมมติ และสมการรูปแบบอ่อน

พื้นฐานการวิเคราะห์พฤติกรรมเชิงกลของแผ่นประกอบ ในวิทยานิพนธ์นี้จะเริ่มจากการใช้หลักการพลังงานความเครียดสมมติ (principle virtual strain energy) โดยการแทนความเครียดและหน่วยแรงซึ่งกล่าวในหัวข้อ 4.3 เข้าในระบบสมการเพื่อนำไปสู่การหาสมการรูปแบบอ่อน ซึ่งหลักการพลังงานสมมติมีหลักการที่ว่าวัตถุที่อยู่ในสถานะสมดุลภายใต้หน่วยแรงที่กำหนด ถ้าให้ความเครียดกับวัตถุด้วยความเครียดสมมติ (virtual strain, $\delta\varepsilon$) ทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนรูปร่างซึ่งสอดคล้องทางเรขาคณิตแล้ว พลังงานสมมตินี้จะต้องเท่ากับศูนย์ (Reddy, 1996) สามารถเขียนได้ว่า

$$\delta U + \delta V = 0 \tag{4.16}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{\Omega} \Bigg\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Big[& \sigma_{xx} \left(\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} + z\delta\varepsilon_{xx}^{(1)} - c_1 z^3 \delta\varepsilon_{xx}^{(3)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} + z\delta\varepsilon_{yy}^{(1)} - c_1 z^3 \delta\varepsilon_{yy}^{(3)} \right) \\ & + \sigma_{xy} \left(\delta\gamma_{xy}^{(0)} + z\delta\gamma_{xy}^{(1)} - c_1 z^3 \delta\gamma_{xy}^{(3)} \right) + \sigma_{xz} \left(\delta\gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \delta\gamma_{xz}^{(2)} \right) + \sigma_{yz} \left(\delta\gamma_{yz}^{(0)} + z^2 \delta\gamma_{yz}^{(2)} \right) \Big] dz \Bigg\} dxdy \end{aligned} \tag{4.17ก}$$

$$\begin{aligned} \delta V = & -\oint_{\Gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\hat{\sigma}_{nn} \left(\delta u_n + z\delta\phi_n - c_1 z^3 \delta\varphi_n \right) + \hat{\sigma}_{ns} \left(\delta u_s + z\delta\phi_s - c_1 z^3 \delta\varphi_{ns} \right) + \hat{\sigma}_{nr} \delta w_0 \right] dzd\Gamma \\ & - \int_{\Omega} q(x,y) \delta w_0 \, dxdy \end{aligned} \tag{4.17ข}$$

โดยที่

δU คือ พลังงานความเครียดสมมติ

δV คือ พลังงานสมมติเนื่องจากแรงกระทำภายนอก

Ω คือ ระนาบ x-y ที่พิจารณา

Γ คือ เส้นรอบรูปในระนาบ x-y ที่พิจารณา

q คือ แรงภายนอกกระทำที่ผิว

δw_0 คือ การกระจัดในทิศทางความหนาสมมติที่ระดับกึ่งกลางความหนา

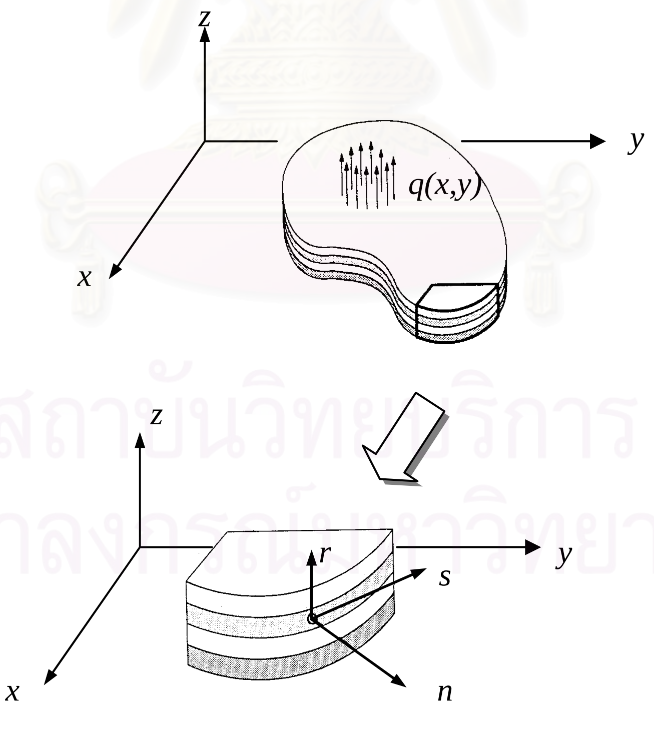
σ_{ij} คือ หน่วยแรงภายในเมื่อ i, j เท่ากับ x, y, z

$\hat{\sigma}_{ij}$ คือ หน่วยแรงภายนอกที่กำหนด เมื่อ i, j เท่ากับ n, s, r

ϕ_n, ϕ_s คือ มุมที่เปลี่ยนไปของแกนทิศทางความหนาที่กึ่งกลางความหนารอบแกนสัมผัสผิวและรอบแกนตั้งฉากผิวความหนาตามลำดับ

φ_n, φ_{ns} คือ ผลรวมของมุมของแกนทิศทางความหนาที่เปลี่ยนไปกับความชันของระนาบแผ่นประกอบที่ระดับกึ่งกลางรอบแกนสัมผัสผิวความหนาและรอบแกนตั้งฉากผิวความหนาตามลำดับ

และสัญลักษณ์ n, s และ r คือทิศทางตั้งฉากความหนา ทิศทางสัมผัสผิวความหนาและทิศทางความหนาของแผ่นประกอบแสดงดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงทิศทางที่ผิวของแผ่นประกอบ

เมื่อทำการอินทิเกรตในทิศทางความหนาสมการ 4.17 จะได้ว่า

$$\delta U = \int_{\Omega} \Big(N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(1)} - c_1 P_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(3)} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(1)} - c_1 P_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(3)}$$
$$+ N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} - c_1 P_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(3)} + Q_x\delta\gamma_{xz}^{(0)}$$
$$- c_2 R_x\delta\gamma_{xz}^{(2)} + Q_y\delta\gamma_{yz}^{(0)} - c_2 R_y\delta\gamma_{yz}^{(2)} \Big) dxdy \tag{4.18ก}$$

$$\delta V = -\oint_{\Gamma} \left(\hat{N}_{nn}\delta u_n + \hat{M}_{nn}\delta\phi_n - c_1\hat{P}_{nn}\delta\varphi_n + \hat{N}_{ns}\delta u_s + \hat{M}_{ns}\delta\phi_s - c_1\hat{P}_{ns}\delta\varphi_{ns} + \hat{Q}_n\delta w_0 \right) d\Gamma$$
$$- \int_{\Omega} q\delta w_0 \, dxdy \tag{4.18ข}$$

เมื่อ $\hat{N}_{ij}, \hat{M}_{ij}, \hat{P}_{ij}$ คือแรงต่อหนึ่งหน่วยความกว้างที่กำหนด โมเมนต์ต่อหนึ่งหน่วยความกว้างที่กำหนด และ โมเมนต์ที่สามต่อหนึ่งหน่วยความกว้างที่กำหนดตามลำดับ เมื่อ i , j เท่ากับ n ,s

และ $\hat{Q}_n$ คือแรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยความกว้างมีค่าเท่ากับ $\int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}_{nr}\, dz$

ในการพิจารณาสมการ (4.18) จะทำการแยกพิจารณาออกเป็นสองส่วนคือ δU และ δV เมื่อพิจารณา δU ในสมการ (4.18ก) จำเป็นต้องหาค่าแปรผันของความเครียดและหน่วยแรงต่าง ๆ ซึ่งหาได้จาก

$$\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial\delta u_0}{\partial x} \tag{4.19ก}$$

$$\delta\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x} \tag{4.19ข}$$

$$\delta\varepsilon_{xx}^{(3)} = \left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} \right) \tag{4.19ค}$$

$$\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} = \frac{\partial\delta v_0}{\partial y} \tag{4.19ง}$$

$$\delta\varepsilon_{yy}^{(1)} = \frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y} \tag{4.19จ}$$

$$\delta\varepsilon_{yy}^{(3)} = \left(\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} \right) \tag{4.19ฉ}$$

$$\delta\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial\delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial\delta v_0}{\partial x} \tag{4.19ช}$$

$$\delta\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x} \tag{4.19ซ}$$

$$\delta\gamma_{xy}^{(3)} = \left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y} \right) \tag{4.19.ฌ}$$

$$\delta\gamma_{yz}^{(0)} = \delta\phi_y + \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} \tag{4.19ญ}$$

$$\delta\gamma_{yz}^{(2)} = \left(\delta\phi_y + \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} \right) \tag{4.19ฎ}$$

$$\delta\gamma_{xz}^{(0)} = \delta\phi_x + \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} \tag{4.19ฏ}$$

$$\delta\gamma_{xz}^{(2)} = \left(\delta\phi_x + \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} \right) \tag{4.19ฐ}$$

และทำการแทนค่าสมการ (4.19) ลงในสมการ (4.18ก) จะได้ว่า

$$\delta U = \int_{\Omega} \Bigg\{ N_{xx}\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_{yy}\frac{\partial \delta v_0}{\partial y}$$
$$+ \left(M_{xx} - c_1 P_{xx}\right)\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + \left(M_{yy} - c_1 P_{yy}\right)\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y}$$
$$+ \left(M_{xy} - c_1 P_{xy}\right)\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} + \left(M_{xy} - c_1 P_{xy}\right)\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y}$$
$$- c_1\left(P_{xx}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + 2P_{xy}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + P_{yy}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \left(Q_x - c_2 R_x\right)\delta\phi_x + \left(Q_y - c_2 R_y\right)\delta\phi_y$$
$$+ \left(Q_x - c_2 R_x\right)\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \left(Q_y - c_2 R_y\right)\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \Bigg\} dxdy \qquad (4.20)$$

และในการพิจารณาค่า δV ในสมการ (4.18ข) จะเริ่มจากการแปลงพิกัดระบบ n, s, r ให้อยู่ในพิกัด x, y, z เมื่อกำหนดทิศทางโคไซน์หนึ่งหน่วยเวคเตอร์ $n_x = \cos\theta$ และ $n_y = \sin\theta$ ดังนั้นในการแปลงพิกัดระหว่างพิกัดระบบ n, r, s และ x, y, z เขียนได้ว่า

$$\hat{e}_x = n_x \hat{e}_n - n_y \hat{e}_s \qquad (4.21ก)$$

$$\hat{e}_y = n_y \hat{e}_n + n_x \hat{e}_s \qquad (4.21ข)$$

$$\hat{e}_z = \hat{e}_r \qquad (4.21ค)$$

เมื่อ $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ คือหนึ่งหน่วยเวคเตอร์ในพิกัด x, y, z

$\hat{e}_n, \hat{e}_s, \hat{e}_r$ คือหนึ่งหน่วยเวคเตอร์ในพิกัด s, n, r

ดังนั้นสามารถเขียนการกระจัด u_n, u_s ระบบพิกัด n, r, s ให้อยู่ในระบบพิกัด x, y, z ได้ว่า

$$u_0 = n_x u_n - n_y u_s \qquad (4.22ก)$$

$$v_0 = n_y u_n + n_x u_s \qquad (4.22ข)$$

และเมื่อพิจารณาสมการ (จ.5) ในภาคผนวก จ. จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงในระบบพิกัด n, r, s ให้อยู่ในระบบพิกัด x, y, z ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (4.23)$$

เช่นเดียวกันเราสามารถเขียนแรง โมเมนต์และโมเมนต์ที่สามต่อหนึ่งหน่วยความกว้างได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \hat{N}_{nn} \\ \hat{N}_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{N}_{xx} \\ \hat{N}_{yy} \\ \hat{N}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (4.24ก)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{xx} \\ \hat{M}_{yy} \\ \hat{M}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (4.24ข)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{P}_{nn} \\ \hat{P}_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{P}_{xx} \\ \hat{P}_{yy} \\ \hat{P}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.24ค}$$

เมื่อพิจารณาเทอมของแรงคูณกับค่าแปรผันความเครียดในสมการ (4.18ข) จะมีเทอมของ $\hat{N}_{nn}\delta u_n + \hat{N}_{ns}\delta u_s$ และเมื่อแทนค่าสมการ (4.24ก) ลงในสมการเทอมนี้จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{N}_{nn}\delta u_n + \hat{N}_{ns}\delta u_s = {} & \left(\hat{N}_{xx}n_x^2 + \hat{N}_{yy}n_y^2 + 2\hat{N}_{xy}n_x n_y\right)\delta u_n + \\ & \left(-\hat{N}_{xx}n_x n_y + \hat{N}_{yy}n_x n_y + \hat{N}_{xy}\left(n_x^2 - n_y^2\right)\right)\delta u_s \end{aligned} \tag{4.25}$$

เมื่อทำการจัดพจน์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{N}_{nn}\delta u_n + \hat{N}_{ns}\delta u_s = {} & \left(\hat{N}_{xx}n_x + \hat{N}_{xy}n_y\right)\left(n_x\delta u_n - n_y\delta u_s\right) + \\ & \left(\hat{N}_{xy}n_x + \hat{N}_{yy}n_y\right)\left(n_y\delta u_n + n_x\delta u_s\right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

เมื่อทำการแปรผันการกระจัดสมการ (4.22) และแทนลงในสมการ (4.26) จะได้ว่า

$$\hat{N}_{nn}\delta u_n + \hat{N}_{ns}\delta u_s = \left(\hat{N}_{xx}n_x + \hat{N}_{xy}n_y\right)\delta u_0 + \left(\hat{N}_{xy}n_x + \hat{N}_{yy}n_y\right)\delta v_0 \tag{4.27}$$

เช่นเดียวกันเมื่อพิจารณาเทอมบางเทอมของสมการ (4.18ข) จะมีเทอมของโมเมนต์คูณกับมุมที่เปลี่ยนไปของแกนในสมการ (4.18ข) สามารถเขียนได้ว่า

$$\hat{M}_{nn}\delta\phi_n + \hat{M}_{ns}\delta\phi_s = \left(\hat{M}_{xx}n_x + \hat{M}_{xy}n_y\right)\delta\phi_x + \left(\hat{M}_{xy}n_x + \hat{M}_{yy}n_y\right)\delta\phi_y \tag{4.28}$$

และในทำนองเดียวกันในเทอมของโมเมนต์ที่สามในสมการ (4.18ข) จะได้ว่า

$$-c_1\hat{P}_{nn}\delta\varphi_n - c_1\hat{P}_{ns}\delta\varphi_{ns} = -c_1\left(\hat{P}_{xx}n_x + \hat{P}_{xy}n_y\right)\delta\varphi_x - c_1\left(\hat{P}_{xy}n_x + \hat{P}_{yy}n_y\right)\delta\varphi_y \tag{4.29}$$

เมื่อ $\delta\varphi_x = \left(\delta\phi_x + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)$, $\delta\varphi_y = \left(\delta\phi_y + \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)$

แทนสามการ (4.27) ถึง (4.29) ลงในสมการ (4.18) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta V = -\oint_\Gamma \Bigg\{ & \left(\hat{N}_{xx}n_x + \hat{N}_{xy}n_y\right)\delta u_0 + \left(\hat{N}_{xy}n_x + \hat{N}_{yy}n_y\right)\delta v_0 \\ & + \left(\left(\hat{M}_{xx} - c_1\hat{P}_{xx}\right)n_x + \left(\hat{M}_{xy} - c_1\hat{P}_{xy}\right)n_y\right)\delta\phi_x \\ & + \left(\left(\hat{M}_{xy} - c_1\hat{P}_{xy}\right)n_x + \left(\hat{M}_{yy} - c_1\hat{P}_{yy}\right)n_y\right)\delta\phi_x \\ & - c_1\left(\hat{P}_{xx}n_x + \hat{P}_{xy}n_y\right)\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - c_1\left(\hat{P}_{xy}n_x + \hat{P}_{yy}n_y\right)\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \hat{Q}_n\delta w_0 \Bigg\} d\Gamma \\ & - \int_\Omega q\,\delta w_0 d\Omega \end{aligned} \tag{4.30}$$

แทนสมการ (4.20) และสมการ (4.30) ลงในสมการ (4.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \Bigg\{ & N_{xx}\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_{yy}\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ & + \overline{M}_{xx}\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} + \overline{M}_{yy}\frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} + \overline{M}_{xy}\frac{\partial \delta\phi_y}{\partial x} + \overline{M}_{xy}\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} \end{aligned}$$

$$-c_1\left(P_{xx}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2}+2P_{xy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y}+P_{yy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$+\overline{Q}_x\delta\phi_x+\overline{Q}_y\delta\phi_y+\overline{Q}_x\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}+\overline{Q}_y\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}-q\delta w_0\ \Bigg\}dxdy$$

$$-\oint_\Gamma\Bigg\{\ \left(\hat{N}_{xx}n_x+\hat{N}_{xy}n_y\right)\delta u_0+\left(\hat{N}_{xy}n_x+\hat{N}_{yy}n_y\right)\delta v_0$$

$$-\left(\overline{M}_{xx}n_x+\overline{M}_{yy}n_y\right)\delta\phi_x+\left(\overline{M}_{xy}n_x+\overline{M}_{yy}n_y\right)\delta\phi_y$$

$$-c_1\left(\hat{P}_{xx}n_x+\hat{P}_{xy}n_y\right)\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}-c_1\left(\hat{P}_{xy}n_x+\hat{P}_{yy}n_y\right)\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}+\hat{Q}_n\delta w_0\ \Bigg\}d\Gamma \quad (4.31)$$

โดยที่ $\overline{M}_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}-c_1P_{\alpha\beta}$

$\overline{Q}_\alpha\ =Q_\alpha-c_2P_\alpha$

เมื่อ α,β คือ x และ y

เนื่องจาก $\delta u_0,\delta v_0,\delta w_0,\delta\phi_x$ และ $\delta\phi_y$ เป็นตัวแปรอิสระต่อกันจึงสามารถจัดพจน์ได้ว่า

$$0=\int_\Omega\left\{N_{xx}\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial\delta u_0}{\partial y}\right\}dxdy-\oint_\Gamma\left\{\hat{N}_{xx}n_x+\hat{N}_{xy}n_y\right\}\delta u_0d\Gamma \quad (4.32ก)$$

$$0=\int_\Omega\left\{N_{xy}\frac{\partial\delta v_0}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial\delta v_0}{\partial y}\right\}dxdy-\oint_\Gamma\left\{\hat{N}_{xy}n_x+\hat{N}_{yy}n_y\right\}\delta v_0d\Gamma \quad (4.32ข)$$

$$0=\int_\Omega\left\{\overline{Q}_x\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}+\overline{Q}_y\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}-c_1\left(P_{xx}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2}+2P_{xy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y}+P_{yy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2}\right)-q\delta w_0\right\}dxdy$$

$$-\oint_\Gamma\hat{V}_n\delta w_0d\Gamma-\oint_\Gamma\hat{P}_{nn}\frac{\partial\delta w_0}{\partial n}d\Gamma \quad (4.32ค)$$

$$0=\int_\Omega\left\{\overline{M}_{xx}\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}+\overline{M}_{xy}\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\overline{Q}_x\delta\phi_x\right\}dxdy-\oint_\Gamma\left\{\hat{\overline{M}}_{xx}n_x+\hat{\overline{M}}_{xy}n_y\right\}\delta\phi_xd\Gamma \quad (4.32ง)$$

$$0=\int_\Omega\left\{\overline{M}_{xy}\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}+\overline{M}_{yy}\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}+\overline{Q}_y\delta\phi_y\right\}dxdy-\oint_\Gamma\left\{\hat{\overline{M}}_{xy}n_x+\hat{\overline{M}}_{yy}n_y\right\}\delta\phi_yd\Gamma \quad (4.32จ)$$

เมื่อ

$$\hat{V}_n=c_1\left[\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}\right)n_x+\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}\right)n_y\right]+\left(\overline{Q}_xn_x+\overline{Q}_yn_y\right)+c_1\frac{\partial P_{ns}}{\partial s}$$

สมการ (4.32) เรียกว่าสมการรูปแบบอ่อนซึ่งจะนำไปประยุกต์ในการหาผลลัพธ์ โดยทำการสมมติฟังก์ชันการกระจัดเข้าในสมการแล้วทำการอินทิเกรตทั้งโดเมนเท่ากับศูนย์ โดยจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

4.5 เงื่อนไขขอบเขต

ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง ต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตกับแผ่นประกอบ ซึ่งสามารถกำหนดการกระจัด หรือกำหนดหน่วยแรงที่ผิวอย่างใดอย่างหนึ่งให้กับปัญหา สามารถเขียนได้ว่า

$$\Im = T_x \hat{e}_x + T_y \hat{e}_y + T_z \hat{e}_z \quad (4.33)$$

เมื่อ

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

โดยที่ ค่า $\Im$ คือ หน่วยแรงที่ผิวและ T_x, T_y และ T_z คือหน่วยแรงที่ผิวในแต่ละแกน และ n_x, n_y และ n_z คือทิศทางโคไซน์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\hat{n} = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y + n_z \hat{e}_z$

4.6 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มจากการพิจารณาสมการรูปแบบอ่อน โดยจะทำการสมมติฟังก์ชันการกระจัดในแต่ละทิศทาง ฟังก์ชันมุมของแกนทิศทางความหนา และฟังก์ชันความชันของระนาบแผ่นประกอบ ในทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สามมีตัวแปร 5 ตัวแปรคือ $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ โดยที่ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ u_0, v_0, ϕ_x, ϕ_y ใช้ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น (linear quadrilateral element, ψ_i) และตัวแปร w_0 ใช้ฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต (Hermite interpolation function, φ_i) โดยมีระดับขั้นเสรี (degree of freedom) เท่ากับ 4 $\left(w_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$ (Reddy,1996) จะได้ว่า

$$u_o(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} u_i(t)\psi_i(x,y) \quad (4.35ก)$$

$$v_o(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} v_i(t)\psi_i(x,y) \quad (4.35ข)$$

$$w_o(x,y,t) = \sum_{i=1}^{16} \Delta_i(t)\varphi_i(x,y) \quad (4.35ค)$$

$$\phi_x(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} X_i(t)\psi_i(x,y) \quad (4.35ง)$$

$$\phi_y(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} Y_i(t)\psi_i(x,y) \quad (4.35จ)$$

โดยที่ u_i , v_i คือค่าการกระจัดที่ระดับกึ่งกลางความหนาแต่ละโนดของเอลิเมนต์ในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

X_i , Y_i คือมุมที่เปลี่ยนแปลงไปของแกนทิศทางความหนาที่ระดับกึ่งกลางความหนาในแต่ละโนดของเอลิเมนต์รอบแกน y และ x ตามลำดับ

Δ_i คือการกระจัดและค่าอนุพันธ์ในทิศทางแกน z ดังนี้ $w_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_o}{\partial y}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$

เมื่อทำการพิจารณาสมการรูปแบบอ่อน (weak form) ลำดับต่อไปจะแทนค่า $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\phi_x, \delta\phi_y$ ซึ่ง Reddy (1996) ได้เสนอค่าแปรผันการกระจัดดังนี้

$$\delta u_o(x,y,t) \approx \psi_i(x,y) \tag{4.36ก}$$

$$\delta v_o(x,y,t) \approx \psi_i(x,y) \tag{4.36ข}$$

$$\delta w_o(x,y,t) \approx \varphi_i(x,y) \tag{4.36ค}$$

$$\delta \phi_x(x,y,t) \approx \psi_i(x,y) \tag{4.36ง}$$

$$\delta \phi_y(x,y,t) \approx \psi_i(x,y) \tag{4.36จ}$$

โดยที่ ψ_i คือฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น และ φ_i คือฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต 4 โนด (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ก) เมื่อทำการแทนสมการ (4.12) (4.35) และ (4.36) ลงในสมการรูปแบบอ่อนสมการ (4.32ก) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 = \int_\Omega \Bigg\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Bigg[& A_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + A_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + A_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
& + B_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + B_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + B_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
& - c_1E_{11}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1E_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
& - c_1E_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \\
+ \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\Bigg[& A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + A_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
& + B_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + B_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
& - c_1E_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1E_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
& - c_1E_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \Bigg\} dxdy \\
- \int_\Omega \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x}N_{xx}^T + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}N_{xy}^T \right\} & dxdy - \oint_\Gamma \left(\hat{N}_{xx}n_x + \hat{N}_{xy}n_y\right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.37}$$

เมื่อทำการแทนสมการ (4.12) (4.35) และ (4.36) ลงในสมการรูปแบบอ่อนสมการ (4.32ข) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 = \int_\Omega \Bigg\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Bigg[& A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + A_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
& + B_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + B_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -c_1E_{16}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}X_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right)-c_1E_{26}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}Y_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
& -c_1E_{66}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}X_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}Y_j+2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\Bigg] \\
+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\Bigg[\; & A_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}u_j+A_{22}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}v_j+A_{26}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}u_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
& +B_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}X_j+B_{22}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}Y_j+B_{26}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}X_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
& -c_1E_{12}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}X_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right)-c_1E_{22}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}Y_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
& -c_1E_{26}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}X_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}Y_j+2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg\}dxdy \\
-\int_\Omega & \left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial x}N_{xy}^T+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}N_{yy}^T\right\}dxdy-\oint_\Gamma\left(\hat{N}_{xy}n_x+\hat{N}_{yy}n_y\right)\delta v_o\,d\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

เมื่อทำการแทนสมการ (4.12) (4.35) และ (4.36) ลงในสมการรูปแบบอ่อนสมการ (4.32ค) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0=\int_\Omega\Bigg\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\Bigg[\; & A_{44}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)+A_{45}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
& -c_2D_{44}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)-c_2D_{45}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg] \\
+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\Bigg[\; & -c_2D_{44}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)+c_2D_{45}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
& +c_2{}^2F_{44}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)-c_2{}^2F_{45}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg] \\
+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\Bigg[\; & A_{45}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)+A_{55}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
& -c_2D_{45}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)-c_2D_{55}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg] \\
+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\Bigg[\; & -c_2D_{45}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)+c_2D_{55}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
& +c_2{}^2F_{45}\left(\psi_jX_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right)-c_2{}^2F_{55}\left(\psi_jY_j+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg] \\
-c_1\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\Bigg[\; & E_{11}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}u_j+E_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}v_j+E_{16}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}u_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
& +F_{11}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}X_j+F_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}Y_j+F_{16}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}X_j+\frac{\partial\psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
& -c_1H_{11}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}X_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right)-c_1H_{12}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y}Y_j+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)
\end{aligned}
$$

$$-c_1 H_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]$$

$$-2c_1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}\Bigg[E_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)$$

$$+F_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)$$

$$-c_1 H_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 H_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)$$

$$-c_1 H_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]$$

$$-c_1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\Bigg[E_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)$$

$$+F_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)$$

$$-c_1 H_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 H_{22}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)$$

$$-c_1 H_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\Bigg\}dxdy$$

$$-c_1\int_\Omega \left\{\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}\overline{P}^T_{xx} + \frac{2\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}\overline{P}^T_{xy} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\overline{P}^T_{yy}\right\}dxdy - q\varphi_i - \oint_\Gamma \delta w_0 \hat{V}_n d\Gamma - \oint_\Gamma \frac{\partial \delta w_0}{\partial n}\hat{P}_{nn} d\Gamma$$

(4.39)

เมื่อทำการแทนสมการ (4.12) (4.35) และ (4.36) ลงในสมการรูปแบบอ่อนสมการ (4.32ง) จะได้ว่า

$$0 = \int_\Omega \Bigg\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\Bigg[B_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + B_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + B_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)$$

$$+D_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + D_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + D_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)$$

$$-c_1 F_{11}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 F_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)$$

$$-c_1 F_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]$$

$$-c_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\Bigg[E_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)$$

$$+F_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)$$

$$-c_1 H_{11}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 H_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)$$

$$-c_1 H_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial \psi_i}{\partial y}\Bigg[B_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + B_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)\\
&\qquad + D_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + D_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + D_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)\\
&\qquad - c_1F_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1F_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)\\
&\qquad - c_1F_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\\
&-c_1\frac{\partial \psi_i}{\partial y}\Bigg[E_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)\\
&\qquad + F_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)\\
&\qquad - c_1H_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1H_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)\\
&\qquad - c_1H_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\\
&+\psi_i\Bigg[A_{44}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) + A_{45}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\\
&\qquad - c_2D_{44}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) - c_2D_{45}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\\
&+\psi_i\Bigg[-c_2D_{44}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) + c_2D_{45}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\\
&\qquad + c_2{}^2F_{44}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) + c_2{}^2F_{45}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\Bigg\}dxdy\\
&-\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\overline{M}^T_{xx} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\overline{M}^T_{xy}\right\}dxdy - \oint_{\Gamma}\left(\hat{\overline{M}}_{xx}n_x + \hat{\overline{M}}_{xy}n_y\right)d\Gamma \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

เมื่อทำการแทนสมการ (4.12) (4.35) และ (4.36) ลงในสมการรูปแบบอ่อนสมการ (4.32จ) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega}&\Bigg\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\Bigg[B_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + B_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + B_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)\\
&\qquad + D_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + D_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + D_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right)\\
&\qquad - c_1F_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1F_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right)\\
&\qquad - c_1F_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right)\Bigg]\\
&-c_1\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\Bigg[E_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + F_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
&\qquad - c_1 H_{16}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 H_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
&\qquad - c_1 H_{66}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \\
&+ \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\Bigg[B_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + B_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + B_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
&\qquad + D_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + D_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + D_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
&\qquad - c_1 F_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 F_{22}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
&\qquad - c_1 F_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right) \\
&- c_1\frac{\partial \psi_i}{\partial y}\Bigg[E_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}u_j + E_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}v_j + E_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}u_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}v_j\right) \\
&\qquad + F_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + F_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + F_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j\right) \\
&\qquad - c_1 H_{12}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}X_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2}\Delta_j\right) - c_1 H_{22}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}Y_j + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}\Delta_j\right) \\
&\qquad - c_1 H_{26}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y}X_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}Y_j + 2\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \\
&+ \psi_i\Bigg[A_{45}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) + A_{55}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
&\qquad - c_2 D_{45}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) - c_2 D_{55}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \\
&+ \psi_i\Bigg[-c_2 D_{45}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) - c_2 D_{55}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \\
&\qquad + {c_2}^2 F_{45}\left(\psi_j X_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Delta_j\right) + {c_2}^2 F_{55}\left(\psi_j Y_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\Delta_j\right) \Bigg] \Bigg\} dxdy \\
&- \int_{\Omega}\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\overline{M}^T_{xy} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\overline{M}^T_{yy}\right\} dxdy - \oint_{\Gamma}\left(\hat{\overline{M}}_{xy}n_x + \hat{\overline{M}}_{yy}n_y\right) d\Gamma \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

สมการ (4.37) ถึง (4.41) สามารถรวมเทอมแต่ละเทอมให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & [K^{14}] & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] & [K^{24}] & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & sym & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \\ \{X^e\} \\ \{Y^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} - \{F^{T_1}\} \\ \{F^2\} - \{F^{T_2}\} \\ \{F^3\} - \{F^{T_3}\} \\ \{F^4\} - \{F^{T_4}\} \\ \{F^5\} - \{F^{T_5}\} \end{Bmatrix} \tag{4.42}$$

โดยที่

$$K_{ij}^{11} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[A_{11}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{12} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[A_{66}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{13} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[-c_1\left(E_{11}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + E_{12}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + 2E_{16}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right)\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[-c_1\left(E_{11}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + E_{26}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + 2E_{66}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{14} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[(B_{11} - c_1E_{11})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{16} - c_1E_{16})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[(B_{16} - c_1E_{16})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{66} - c_1E_{66})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{15} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[(B_{16} - c_1E_{16})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{12} - c_1E_{12})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[(B_{66} - c_1E_{66})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{26} - c_1E_{26})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{21} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[A_{16}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[A_{12}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{22} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[A_{66}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[A_{26}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{23} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[-c_1\left(E_{16}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + E_{26}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + 2E_{66}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right)\right]dxdy + \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[-c_1\left(E_{12}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + E_{22}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + 2E_{26}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{24} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[(B_{16} - c_1E_{16})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{66} - c_1E_{66})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[(B_{12} - c_1E_{12})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{26} - c_1E_{26})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{25} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[(B_{66} - c_1E_{66})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{26} - c_1E_{26})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[(B_{26} - c_1E_{26})\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + (B_{22} - c_1E_{22})\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{31}=\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\left[-c_1E_{11}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1E_{16}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\left[-2c_1E_{16}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-2c_1E_{66}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\left[-c_1E_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1E_{26}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{32}=\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\left[-c_1E_{16}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1E_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\left[-2c_1E_{66}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-2c_1E_{26}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\left[-c_1E_{26}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1E_{22}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{33}=\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\left[\left(A_{55}-2c_2D_{55}+c_2^2F_{55}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\left(A_{45}-2c_2D_{45}+c_2^2F_{45}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left[\left(A_{45}-2c_2D_{45}+c_2^2F_{45}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\left(A_{44}-2c_2D_{44}+c_2^2F_{44}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\left[c_1^2\left(H_{11}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+H_{12}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}+2H_{16}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\left[2c_1^2\left(H_{16}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+H_{26}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}+2H_{66}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\left[c_1^2\left(H_{12}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+H_{22}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}+2H_{26}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{34}=\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\left[\left(A_{55}-2c_2D_{55}+c_2^2F_{55}\right)\psi_j\right]dxdy+\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left[\left(A_{45}-2c_2D_{45}+c_2^2F_{45}\right)\psi_j\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\left[-c_1\left(F_{11}-c_1H_{11}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1\left(F_{16}-c_1H_{16}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial y}\left[-2c_1\left(F_{16}-c_1H_{16}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-2c_1\left(F_{66}-c_1H_{66}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}\left[-c_1\left(F_{12}-c_1H_{12}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1\left(F_{26}-c_1H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{35}=\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\left[\left(A_{45}-2c_2D_{45}+c_2^2F_{45}\right)\psi_j\right]dxdy+\int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\left[\left(A_{44}-2c_2D_{44}+c_2^2F_{44}\right)\psi_j\right]dxdy$$
$$\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\left[-c_1\left(F_{16}-c_1H_{16}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1\left(F_{12}-c_1H_{12}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial y}\left[-2c_1\left(F_{66}-c_1H_{66}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-2c_1\left(F_{26}-c_1H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}\left[-c_1\left(F_{26}-c_1H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-c_1\left(F_{22}-c_1H_{22}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{41}=\int_\Omega \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left[\left(B_{11}-c_1E_{11}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\left(B_{16}-c_1E_{16}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\left[\left(B_{16}-c_1E_{16}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{42} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\left(B_{16} - c_1 E_{16}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{12} - c_1 E_{12}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[\left(B_{66} - c_1 E_{66}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{26} - c_1 E_{26}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{43} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[-c_1\left(F_{11} - c_1 H_{11}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - c_1\left(F_{12} - c_1 H_{12}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} - 2c_1\left(F_{16} - c_1 H_{16}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[-c_1\left(F_{16} - c_1 H_{16}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - c_1\left(F_{26} - c_1 H_{26}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} - 2c_1\left(F_{66} - c_1 H_{66}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \psi_i\left[\left(A_{55} - 2c_2 D_{55} + c_2^2 F_{55}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \left(A_{45} - 2c_2 D_{45} + c_2^2 F_{45}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{44} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\left(D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(D_{16} - 2c_1 F_{16} + c_1^2 H_{16}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[\left(D_{16} - 2c_1 F_{16} + c_1^2 H_{16}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \psi_i\left[\left(A_{55} - 2c_2 D_{55} + c_2^2 F_{55}\right)\psi_i\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{45} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x}\left[\left(D_{16} - 2c_1 F_{16} + c_1^2 H_{16}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(D_{12} - 2c_1 F_{12} + c_1^2 H_{12}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y}\left[\left(D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(D_{26} - 2c_1 F_{26} + c_1^2 H_{26}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \psi_i\left[\left(A_{45} - 2c_2 D_{45} + c_2^2 F_{45}\right)\psi_j\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{51} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\left(B_{16} - c_1 E_{16}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{66} - c_1 E_{66}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[\left(B_{12} - c_1 E_{12}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{26} - c_1 E_{26}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{52} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\left(B_{66} - c_1 E_{66}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{26} - c_1 E_{26}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[\left(B_{26} - c_1 E_{26}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(B_{22} - c_1 E_{22}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{53} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[-c_1\left(F_{16} - c_1 H_{16}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - c_1\left(F_{26} - c_1 H_{26}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} - 2c_1\left(F_{66} - c_1 H_{66}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\left[-c_1\left(F_{12} - c_1 H_{12}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - c_1\left(F_{22} - c_1 H_{22}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} - 2c_1\left(F_{26} - c_1 H_{26}\right)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y}\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Omega} \psi_i\left[\left(A_{45} - 2c_2 D_{45} + c_2^2 F_{45}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \left(A_{44} - 2c_2 D_{44} + c_2^2 F_{44}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$K_{ij}^{54} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\left(D_{16} - 2c_1 F_{16} + c_1^2 H_{16}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \left(D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right] dxdy$$

$$+\int_{\Omega}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\left[\left(D_{12}-2c_1F_{12}+c_1^2H_{12}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\left(D_{26}-2c_1F_{26}+c_1^2H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_{\Omega}\psi_i\left[\left(A_{45}-2c_2D_{45}+c_2^2F_{45}\right)\psi_j\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{55}=\int_{\Omega}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left[\left(D_{66}-2c_1F_{66}+c_1^2H_{66}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\left(D_{26}-2c_1F_{26}+c_1^2H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_{\Omega}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\left[\left(D_{26}-2c_1F_{26}+c_1^2H_{26}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\left(D_{22}-2c_1F_{22}+c_1^2H_{22}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\int_{\Omega}\psi_i\left[\left(A_{44}-2c_2D_{44}+c_2^2F_{44}\right)\psi_j\right]dxdy$$

เมื่อ

$$F_i^1=\oint_{\Gamma}\left(\hat{N}_{xx}n_x+\hat{N}_{xy}n_y\right)\psi_i d\Gamma\,,\qquad F_i^2=\oint_{\Gamma}\left(\hat{N}_{xy}n_x+\hat{N}_{yy}n_y\right)\psi_i d\Gamma$$

$$F_i^3=\int_{\Omega}q\varphi_i dxdy+\oint_{\Gamma}\left(\hat{Q}_n\varphi_i+\hat{V}_n\frac{\partial w_0}{\partial n}\right)\psi_i d\Gamma$$

$$F_i^4=\oint_{\Gamma}\left(\hat{\overline{M}}_{xx}n_x+\hat{\overline{M}}_{xy}n_y\right)\psi_i d\Gamma\,,\qquad F_i^5=\oint_{\Gamma}\left(\hat{\overline{M}}_{xy}n_x+\hat{\overline{M}}_{yy}n_y\right)\psi_i d\Gamma$$

$$F_i^{T_1}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}N_{xx}^T+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}N_{xy}^T\right)dxdy\,,\ F_i^{T_2}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}N_{xy}^T+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}N_{yy}^T\right)dxdy$$

$$F_i^{T_3}=-c_1\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\overline{P}_{xx}^T+2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\overline{P}_{xy}^T+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\overline{P}_{yy}^T\right)dxdy$$

$$F_i^{T_4}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\overline{M}_{xx}^T+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\overline{M}_{xy}^T\right)dxdy\,,\ F_i^{T_5}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\overline{M}_{xy}^T+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\overline{M}_{yy}^T\right)dxdy$$

เมื่อทำการแทนฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์ และฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต ลงในสมการ (4.42) ก็จะสามารถหาการกระจัดที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้ แต่ในการพัฒนาโปรแกรมในการวิเคราะห์จะนิยมทำการแปลงการถ่ายโอนพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติก่อน ทั้งนี้เพื่อที่ในการพัฒนาโปรแกรมจะสามารถประยุกต์การอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์ (Gauss's point integration) ในการอินทิเกรต และยังทำให้การแบ่งเอลิเมนต์สามารถแบ่งเอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้

ในการแปลงการถ่ายโอนระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบของระบบพิกัดธรรมชาติ จะทำเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์การนำความร้อน แต่ในสมการการหาหน่วยแรงภายใต้อุณหภูมิได้มีเทอมของค่าเป็นอนุพันธ์อันดับสอง จึงต้องแยกการแปลงการโอนถ่ายระบบพิกัดออกเป็น 2 ส่วน คือการแปลงการโอนถ่ายค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของระบบพิกัดฉาก ให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ โดยใช้หลักการกฎลูกโซ่ ในการแปลงการถ่ายโอนพิกัดจากระบบ x-y ให้อยู่ในระบบ $\xi-\eta$ ได้ดังสมการดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (4.43)$$

สมการที่ (4.43) เป็นการแปลงการถ่ายโอนอนุพันธ์อันดับหนึ่งของระบบพิกัดธรรมชาติให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเมื่อทำการผกผันสมการ (4.43) ก็จะสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของระบบพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (4.44)$$

เมื่อ $J_{11}^* = \dfrac{\partial y}{\partial \eta} / \overline{J}$, $J_{12}^* = -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} / \overline{J}$, $J_{21}^* = -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} / \overline{J}$ และ

$J_{22}^* = \dfrac{\partial x}{\partial \xi} / \overline{J}$ โดยที่ $\overline{J} = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} - \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$

และในส่วนที่สองจะเป็นการแปลงการถ่ายโอนอนุพันธ์อันดับสองของระบบพิกัดฉาก ให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ก็จะทำลักษณะคล้ายกันกับการแปลงการโอนถ่ายค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของระบบพิกัดฉาก แต่ได้ใช้กฎลูกโซ่ในการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ x, y และ xy (Reddy, 1993)ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} + \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

(4.45)

เมื่อทำการย้ายข้าง และทำการผกผันสมการ (4.45) จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} + \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix} \right)$$

(4.46)

สมการ (4.46) เป็นการแปลงการถ่ายโอนค่าอนุพันธ์อันดับสองของระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้น ในการแปลงการถ่ายโอนพิกัดฉากให้อยู่ระบบพิกัดธรรมชาติ ดังนั้นในเทอมของอนุพันธ์อันดับสองของ x และ y เมื่อเทียบ ξ และ η จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ในสมการ (4.46) ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} JJ_{11}^* & JJ_{12}^* & JJ_{13}^* \\ JJ_{21}^* & JJ_{22}^* & JJ_{23}^* \\ JJ_{31}^* & JJ_{32}^* & JJ_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial \xi\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.47}$$

เมื่อ
$$JJ_{11}^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 / \overline{JJ} \quad , \quad JJ_{12}^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 / \overline{JJ} \quad , \quad JJ_{13}^* = -2\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} / \overline{JJ}$$

$$JJ_{21}^* = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 / \overline{JJ} \quad , \quad JJ_{22}^* = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 / \overline{JJ} \quad , \quad JJ_{23}^* = -2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} / \overline{JJ}$$

$$JJ_{31}^* = -\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} / \overline{JJ} \, , \, JJ_{32}^* = -\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} / \overline{JJ} \, , \, JJ_{33}^* = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) / \overline{JJ}$$

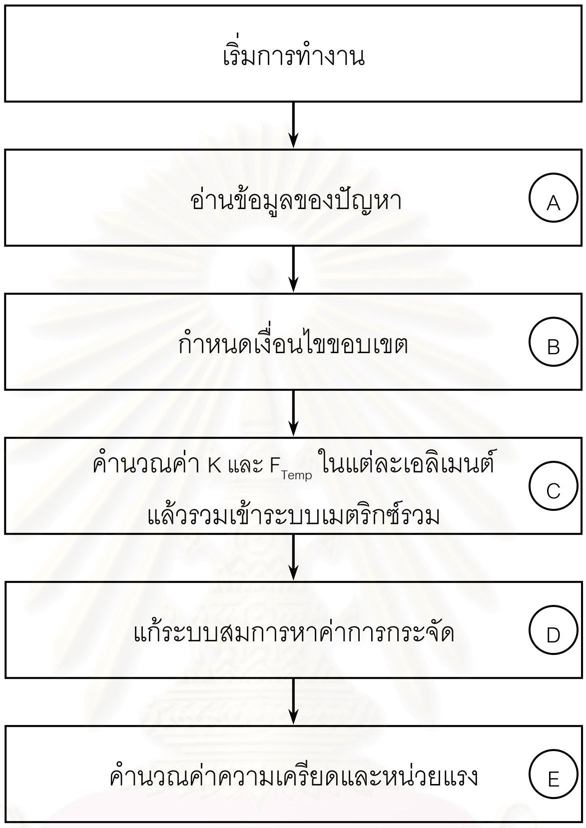
โดยที่
$$\overline{JJ} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2$$

เมื่อแทนสมการ (4.44) และ (4.47) ลงในสมการ (4.42) จะสามารถถ่ายโอนระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติได้ ซึ่งค่าลิมิตการอินทิเกรตจะมีค่าจากลบหนึ่งถึงหนึ่ง ทำให้สามารถประยุกต์ทฤษฎีการอินทิเกรตของเกาส์ได้ (ทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์การนำความร้อน) ซึ่งสามารถนำไปพัฒนาโปรแกรมในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้

4.7 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์วิเคราะห์หน่วยแรง

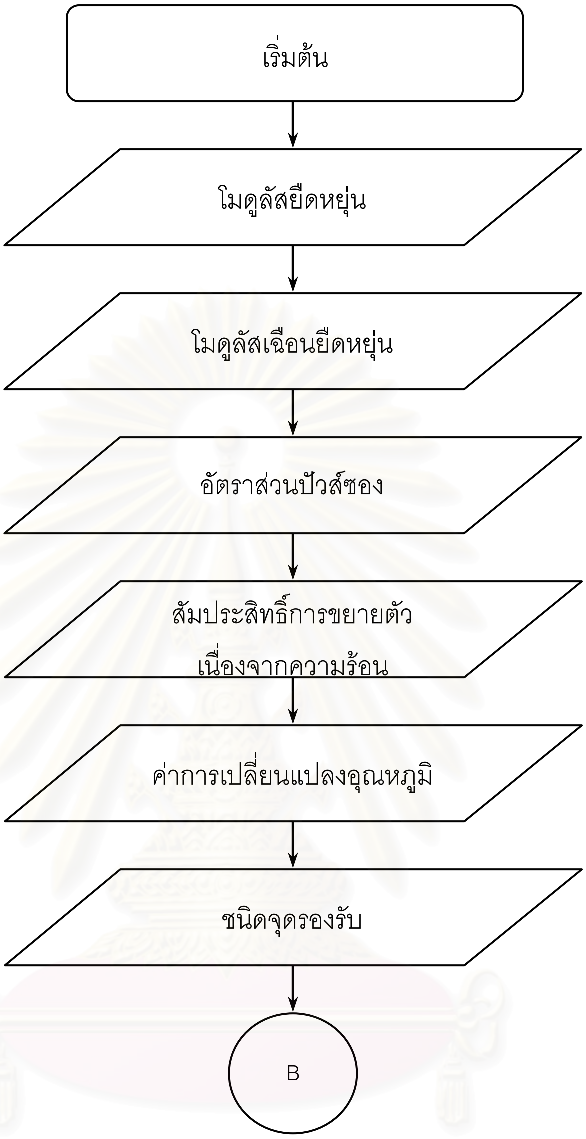
เมื่อทำการหาสมการการหาหน่วยแรงสมการ (4.42) ได้แล้ว ในลำดับต่อไปจะนำสมการนี้ไปพัฒนาโปรแกรม ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ MATLAB ในการพัฒนาโปรแกรมการวิเคราะห์ โดยในโปรแกรมประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 4 โปรแกรมย่อย (subroutines) (ดูรูปที่ 4.3 ประกอบ) ลักษณะขั้นตอนที่สำคัญของโปรแกรมจะเริ่มจากโปรแกรมหลัก โดยจะเริ่มต้นการทำงาน ซึ่งจะทำการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น และโมดูลัสเฉือนยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวส์ซอง ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ฯลฯ จากนั้นในส่วนของโปรแกรมจะเริ่มทำการส่งข้อมูลไปสู่โปรแกรมย่อยแรกเป็นส่วนการเก็บค่าข้อมูลในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยจะเก็บข้อมูลชนิดจุดรองรับแต่ละแบบที่โนดขอบเขต เมื่อทำการเก็บข้อมูลเงื่อนไขขอบเขตแล้ว ในส่วนของโปรแกรมย่อยสองจะทำการคำนวณหาเมตริกซ์ K และเมตริกซ์แรงเนื่องจากอุณหภูมิ F_{Temp} ในแต่ละเอลิเมนต์ จากนั้นจะทำการรวมระบบเมตริกซ์ในแต่ละเอลิเมนต์ให้อยู่ในระบบเมตริกซ์รวม โดยจะทำการเก็บข้อมูลเฉพาะเมตริกซ์ที่มีค่า (ข้อมูลของเมตริกซ์ที่มีค่าเท่ากับศูนย์จะไม่ทำการเก็บข้อมูล) และในขั้นตอนต่อไปในส่วนของโปรแกรมย่อยสามจะทำการแก้สมการระบบเมตริกซ์รวม เพื่อหาค่าการกระจัดมุมของแกนทิศทาง

ความหนา และความลาดชันของระนาบในแต่ละทิศทาง ซึ่งค่าผลลัพธ์เหล่านี้จะนำไปหาความเครียดและหน่วยแรงในโปรแกรมย่อยสี่ รายละเอียดแสดงดังรูปที่ 4.3



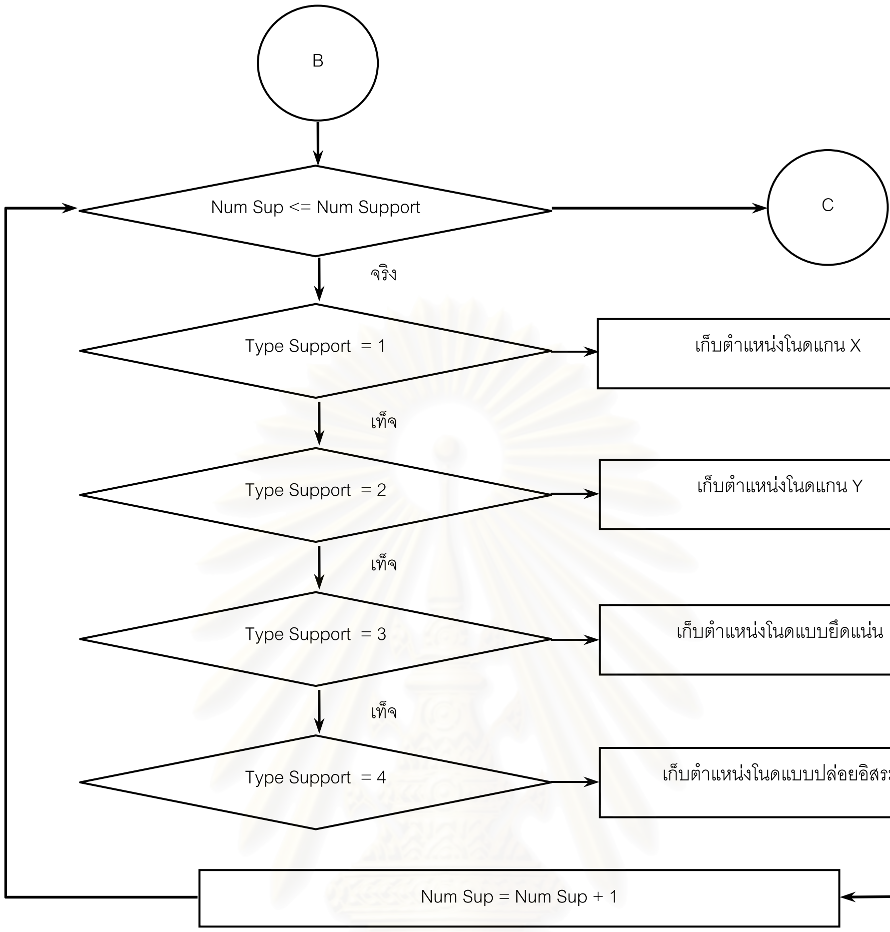
รูปที่ 4.3 แสดงโปรแกรมหลัก และโปรแกรมย่อยของการวิเคราะห์หาหน่วยแรง

รายละเอียดของการอ่านข้อมูลของปัญหา เริ่มจากการป้อนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและโมดูลัสเฉือนยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน และค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (ได้จากการคำนวณในการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในบทที่สาม) จากนั้นจะทำการกำหนดชนิดจุดรองรับ โดยมีรายละเอียดดังรูปที่ 4.4



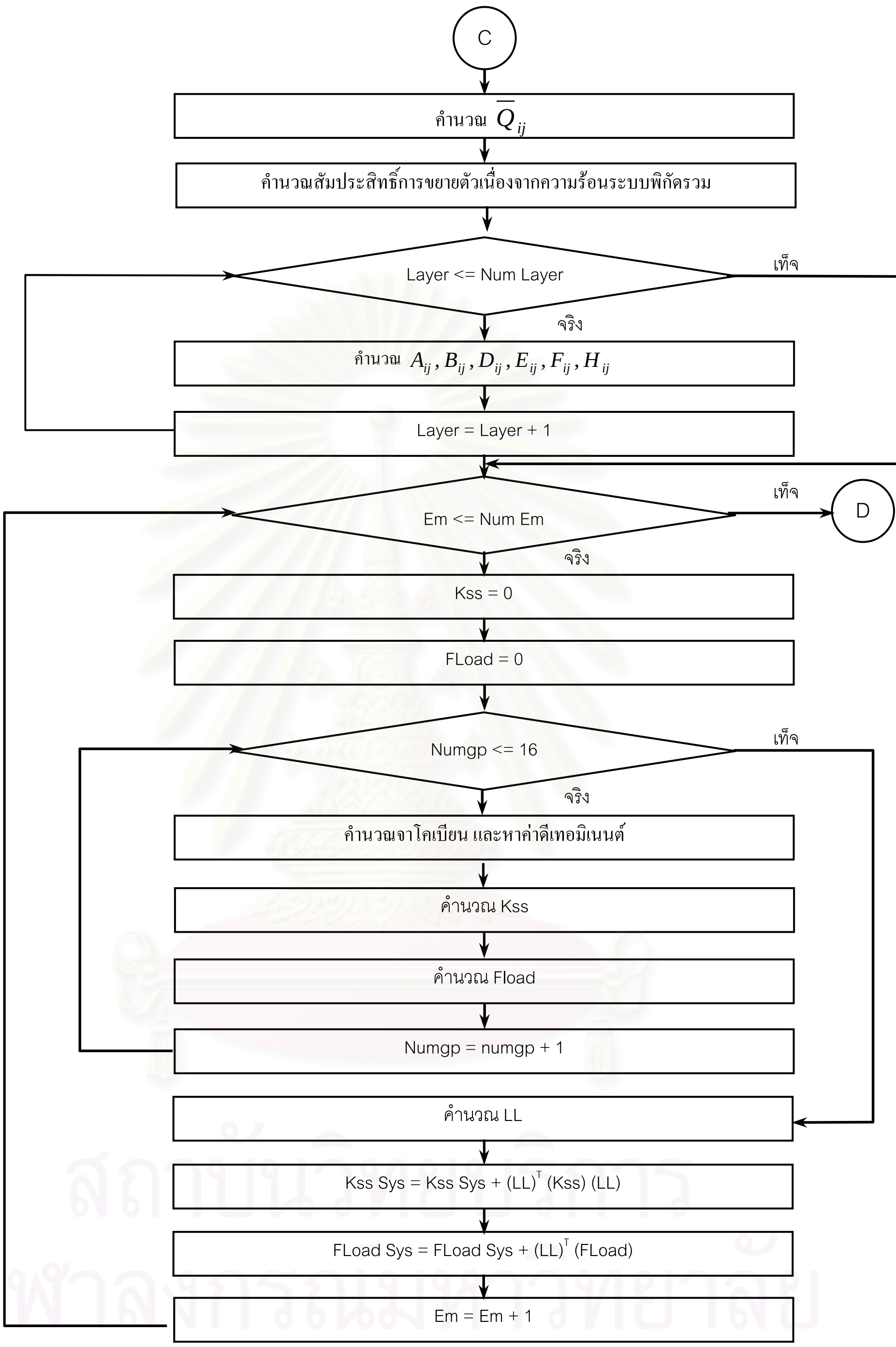
รูปที่ 4.4 ลำดับการป้อนข้อมูล

เมื่อทำการป้อนค่าข้อมูลดังกล่าว จากนั้นจะทำการส่งค่าข้อมูลนี้ไปคำนวณโดยที่ในขั้นตอนแรกจะเป็นส่วนของโปรแกรมย่อยหนึ่งจะเป็นส่วนของการเก็บข้อมูลของชนิดจุดรองรับ ซึ่งในที่นี้กำหนดได้ 4 แบบ หนึ่งจุดรองรับแบบง่ายขนาดแกน X สองจุดรองรับแบบง่ายขนาดแกน Y สามเป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น และสี่จุดรองรับแบบปล่อยอิสระ โดยมีรายละเอียดในการเก็บข้อมูลดังรูปที่ 4.5 ซึ่งในการเก็บข้อมูลนี้เพื่อที่จะทำการดัดแปลงระบบเมตริกซ์รวมในการแก้สมการเมตริกซ์ ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวในขั้นตอนต่อไป



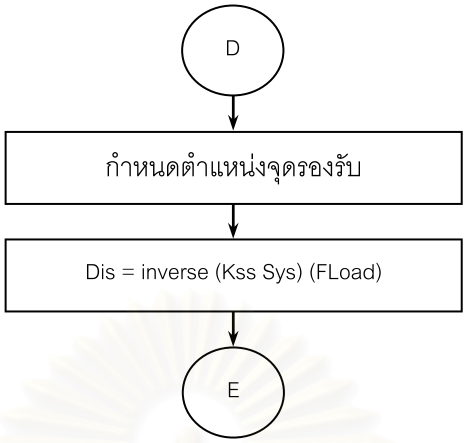
รูปที่ 4.5 ลำดับการเก็บข้อมูลจุดรองรับ

เมื่อทำการเก็บข้อมูลของจุดรองรับในลำดับต่อไปจะเป็นการคำนวณค่าระบบเมตริกซ์รวม และระบบเมตริกซ์โหนด เนื่องจากอุณหภูมิรวม โดยที่เริ่มแรกจะเริ่มทำการคำนวณค่า $\overline{Q}_{ij}$ และสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อนในระบบพิกัดรวม จากนั้นจะทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ ในแต่ละชั้น (วนลูปแรก) และในลำดับต่อไปจะทำการวนลูปที่สองเป็นการวนลูปเท่ากับจำนวนเอลิเมนต์ จากนั้นจะทำการกำหนดให้ Kss และ FLoad เท่ากับศูนย์ (มีขนาดเมตริกซ์ขนาดเท่ากับ 28×28) ทั้งนี้เพื่อทำการรวมค่า Kss และ FLoad เท่ากับจำนวนจุดของเกาส์ (ในที่นี้ใช้จำนวน 16 จุด ของเกาส์) และจากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าจาโคเบียน ดีเทอมิเนนต์ ค่า Kss และ FLoad ในแต่ละจุดของเกาส์ เมื่อจบการวนลูปของการอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์ จากนั้นจะทำการคำนวณเมตริกซ์การแปลงระบบเมตริกซ์เฉพาะสู่ระบบเมตริกซ์รวม LL ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณระบบเมตริกซ์รวม Kss Sys และ FLoad Sys ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.6



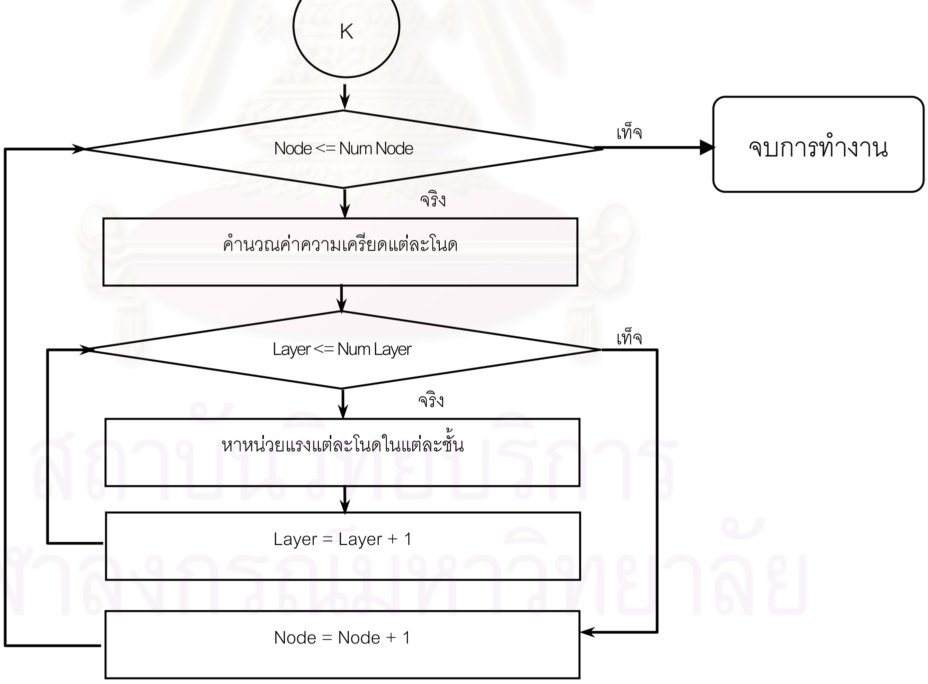
รูปที่ 4.6 ลำดับการคำนวณระบบเมตริกซ์รวม Ks Sys และ FLoad Sys

เมื่อทำการคำนวณหาค่าระบบเมตริกซ์รวม Kss Sys และ FLoad Sys จากนั้นจะทำการแก้ระบบสมการโดยในขั้นตอนแรกจะทำการกำหนดตำแหน่งจุดรองรับ (ได้จากขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต) ซึ่งจะทำการแก้ระบบสมการจะทำโดยการผกผันสมการ Kss Sys แล้วคูณเข้ากับเมตริกซ์ FLoad Sys ซึ่งจะได้คำตอบของการกระจัด โดยรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 ลำดับการแก้สมการ

ในขั้นตอนสุดท้าย เมื่อทำการหาค่าการกระจัดได้แล้วจากนั้นจะทำการหาค่าความเครียด ซึ่งความเครียดนี้จะนำไปหาหน่วยแรง โดยจะเริ่มจากการหาค่าความเครียดในแต่ละโนด จากนั้นจะทำการหาค่าหน่วยแรง ซึ่งจะทำการหาหน่วยแรงแยกออกเป็นชั้น ๆ รายละเอียดแสดงดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 ลำดับการคำนวณหน่วยแรง

รายละเอียดลำดับการพัฒนาโปรแกรมการวิเคราะห์หาหน่วยแรงได้แสดงดังที่กล่าวมา ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาหน่วยแรงได้ ในลำดับต่อไปจะเป็นการนำทฤษฎีการนำความร้อนและทฤษฎีการวิเคราะห์หน่วยแรงไปพัฒนาโปรแกรมและทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยของแต่ละปัญหา ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป

บทที่ 5

กรณีศึกษาเปรียบเทียบอุณหภูมิ

การศึกษากรณีเปรียบเทียบจะแยกกรณีศึกษาออกเป็นสองกรณี คือกรณีศึกษาเปรียบเทียบการนำความร้อนในแผ่นประกอบ และกรณีศึกษาหน่วยแรงในแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงการเปรียบเทียบการนำความร้อนในแผ่นประกอบกรณีต่าง ๆ ซึ่งแต่ละกรณีมีวัตถุประสงค์เพื่อทำการตรวจสอบความแม่นยำของโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ที่กำหนดในแต่ละกรณีแตกต่างกัน โดยการตรวจสอบนี้จะทำการเปรียบเทียบกับ ผลเฉลยแม่นตรง งานวิจัยเก่าที่ผ่านมา และ โปรแกรม ANSYS โดยแบ่งกรณีศึกษาออกเป็นสองส่วนใหญ่ๆคือ กรณีปัญหาการกระจายอุณหภูมิภาวะคงที่ ซึ่งแบ่งออกเป็นสามกรณีศึกษาคือ ปัญหาสองมิติ ปัญหาสามมิติ และการศึกษาพารามิเตอร์ ส่วนกรณีปัญหาการกระจายอุณหภูมิภาวะไม่คงที่ แบ่งออกเป็นสองกรณีศึกษาคือ ปัญหาสองมิติและปัญหาสามมิติ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

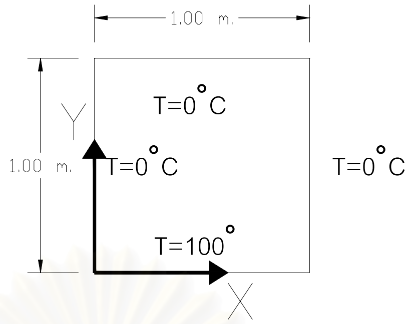
5.1 ปัญหาการนำความร้อนภาวะคงที่

ปัญหาตัวอย่างการนำความร้อนภาวะคงที่ ในกรณีศึกษานี้ได้เสนอการนำความร้อนแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยที่ปัญหา 2 มิติจะแสดงการกระจายอุณหภูมิในระนาบ x-y ซึ่งจะมีการกระจายอุณหภูมิแตกต่างกันไปตามเงื่อนไขขอบเขต และในปัญหา 3 มิติจะแสดงการกระจายอุณหภูมิในระนาบ x-y เช่นเดียวกับการนำความร้อนแบบ 2 มิติ พร้อมทั้งแสดงการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาของแผ่นประกอบ ทั้งนี้การกระจายอุณหภูมิในระนาบ x-y จะแสดงในรูปแบบเส้นชั้นความสูง (contour line) เพื่อให้เห็นถึงลักษณะการกระจายอุณหภูมิในแต่ละกรณี โดยมีรายละเอียดดังนี้

5.1.1 ปัญหาการนำความร้อน 2 มิติ

5.1.1.1 แผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียว

สำหรับกรณีศึกษานี้ ทำการวิเคราะห์หาผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิแผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียวขนาด 1x1 ม. โดยที่ขอบกำหนดอุณหภูมิเท่ากับ 100°C ที่ขอบด้านล่าง และอีก 3 ด้านที่เหลือกำหนดอุณหภูมิ 0°C ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง เท่ากับ 1 W/m$^{\circ}$C แสดงดังรูปที่ 5.1 ในกรณีปัญหานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำการตรวจสอบโปรแกรมในปัญหาสองมิติเมื่อมีการกำหนดอุณหภูมิ



รูปที่ 5.1 แผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียว

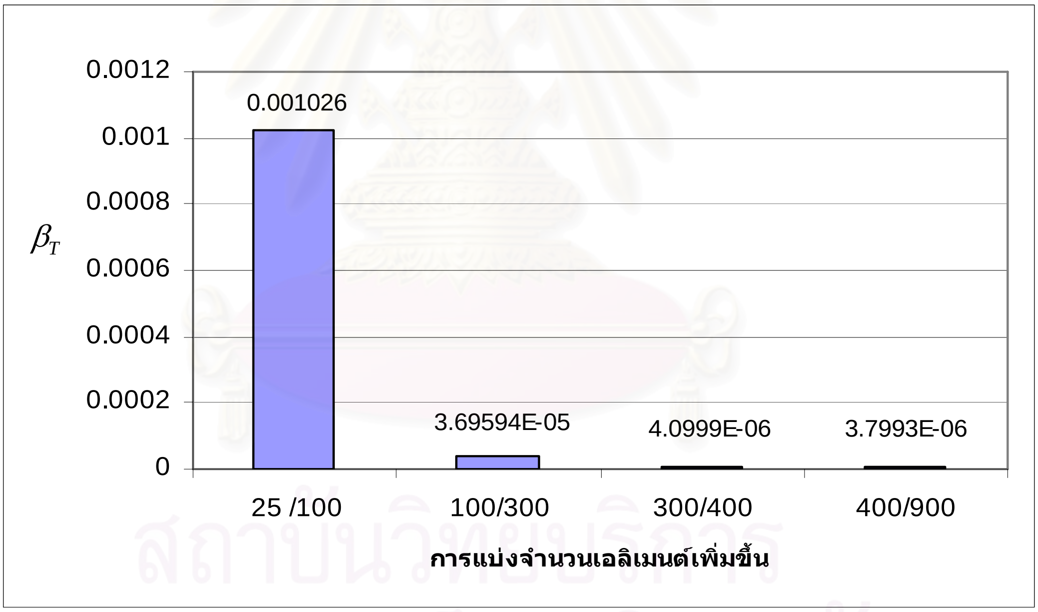
ในการวิเคราะห์จะเริ่มจากการแบ่งแผ่นเรียบจตุรัสให้เป็นเอลิเมนต์ โดยแต่ละเอลิเมนต์จะมีโนดเป็นจุดเชื่อมระหว่างเอลิเมนต์ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ หนึ่งเอลิเมนต์จะประกอบด้วย 4 โนด และในแต่ละโนดจะมีระดับขั้นเสรี (degree of freedom) เท่ากับ 4 ดังนั้นในหนึ่งเอลิเมนต์จะประกอบด้วยขนาดเมตริก 16×16 ซึ่งถ้ายิ่งแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากเท่าไหร่ก็ยิ่งทำให้ในการวิเคราะห์มีขนาดเมตริกซ์ใหญ่ขึ้นตาม ส่งผลให้การวิเคราะห์จะเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ในการวิเคราะห์ ซึ่งในที่นี้จะมีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 4N×4N โดยที่ N คือจำนวนโนด ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้ได้พิจารณาจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ โดยพิจารณาการลู่เข้าของค่ายูคลิเดียนนอมร์ม (Euclidean-norm) ยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสองดังนี้

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\Delta} - x_i^{\Delta-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\Delta} \right)^2} \tag{5.1}$$

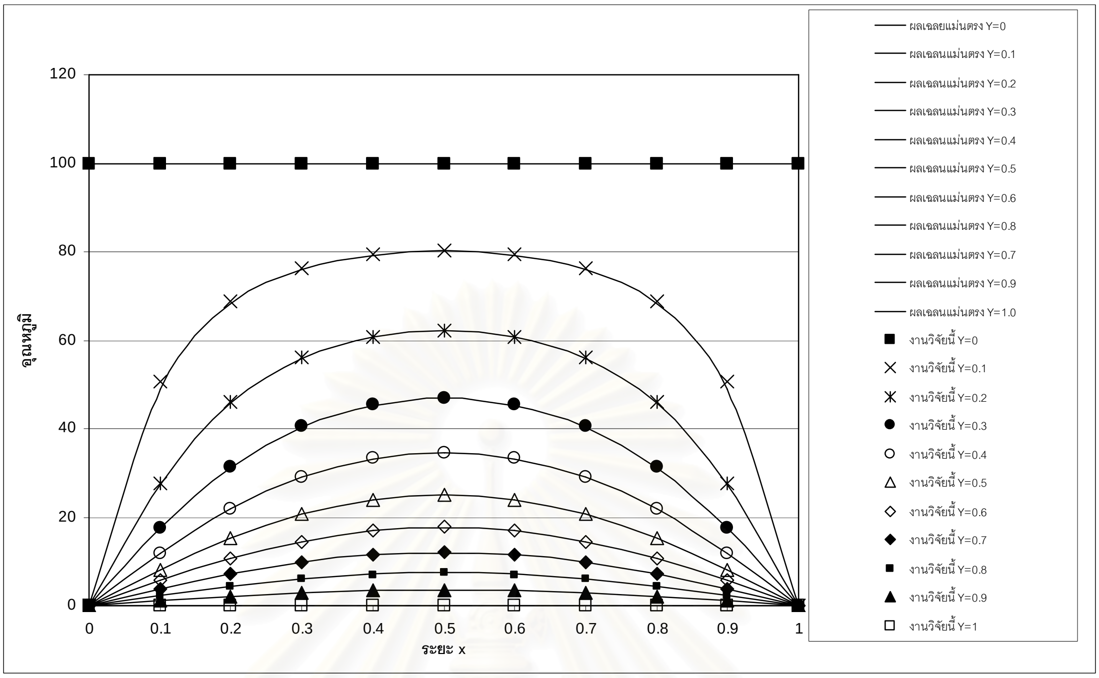
จากสมการกล่าวได้ว่า ค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสอง (β) คือค่าผลรวมของผลต่างกำลังสองระหว่างผลลัพธ์หลังทำการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น $\left(x_i^{\Delta}\right)$ กับผลลัพธ์ก่อนทำการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น $\left(x_i^{\Delta-1}\right)$ หารด้วยผลรวมของผลลัพธ์หลังทำการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นกำลังสอง $\left(x_i^{\Delta}\right)$ โดยที่ค่าผลลัพธ์หลังทำการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มที่ x_i^{Δ} จะพิจารณาค่าผลลัพธ์ ณ ตำแหน่งเดียวกันกับผลลัพธ์ก่อนทำการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่ม (สำหรับการวิเคราะห์การนำความร้อนผลลัพธ์ x_i^{Δ} จะพิจารณาค่าอุณหภูมิที่โนดใด ๆ และใช้สัญลักษณ์ค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสองด้วย β_T และการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในแผ่นประกอบ ผลลัพธ์ x_i^{Δ} จะพิจารณาค่าการกระจัดในทิศทางความหนาที่โนดใด ๆ และใช้สัญลักษณ์ค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสองด้วย β_w) ซึ่งค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสองนี้ จะบอกว่า เมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์มากขึ้นค่าผลลัพธ์หลังทำการแบ่งเอลิเมนต์จะมีค่าต่างกับผลลัพธ์ก่อนทำการแบ่งเอลิเมนต์มากน้อยเพียงใด หรือความหมายอีกนัยหนึ่งว่า ถ้าค่าผลลัพธ์จะเกิดการลู่เข้าต่อเมื่อ ค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์ยกกำลังสองมีค่าน้อยและเข้าใกล้ศูนย์นั่นเอง

ในการหาค่าการลู่เข้าในการกระจายอุณหภูมิ เริ่มจากการแบ่งออกเป็น 25, 100, 300, 400 และ 900 เอลิเมนต์ โดยที่การแบ่ง 25, 100, 300, 400 เอลิเมนต์จะทำการแบ่งด้านแต่ละด้านเท่า ๆ กันเป็น 5 ส่วนแล้วแบ่งทวีคูณ ซึ่งจะแบ่งได้ 25, 100, 300, 400 เอลิเมนต์ตามลำดับ ส่วนการแบ่งเอลิเมนต์ 900 เอลิเมนต์จะแบ่งเอลิเมนต์บริเวณที่กำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ละเอียดขึ้น เพื่อให้บริเวณขอบมีค่าใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น หลังจากนั้นได้หาค่า β_T เพื่อแสดงค่าการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นดังรูป 5.2 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ 400 เอลิเมนต์ เพิ่มเป็น 900 เอลิเมนต์ ค่าผลลัพธ์เพิ่มขึ้นไม่มากนัก เมื่อเทียบกับแบ่ง 25 เอลิเมนต์ เป็น 100 เอลิเมนต์ แบ่ง 100 เอลิเมนต์ เป็น 300 เอลิเมนต์ และแบ่งจาก 300 เอลิเมนต์ เป็น 400 เอลิเมนต์ จึงเลือกใช้การแบ่งเอลิเมนต์จำนวน 900 เอลิเมนต์ ในการพิจารณาเปรียบเทียบผลการศึกษานี้

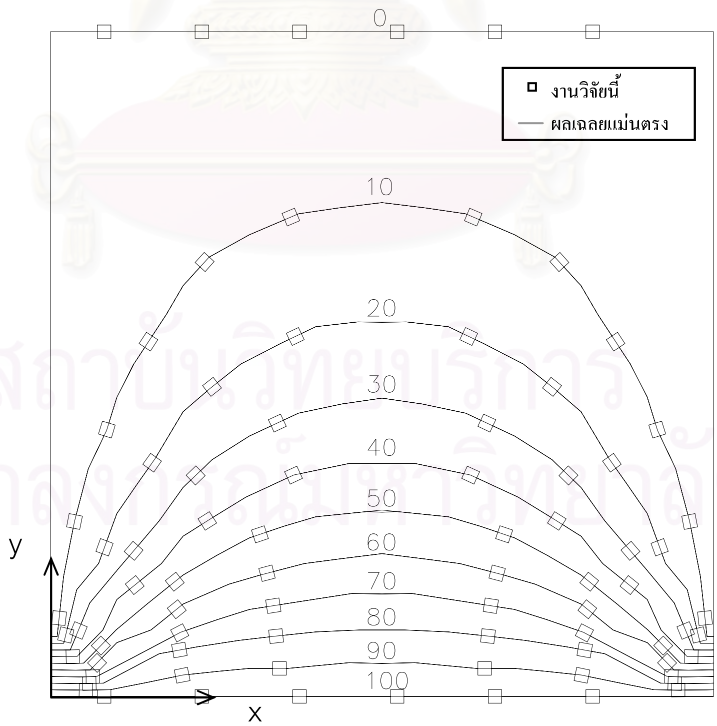
ผลการวิเคราะห์โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2002) แสดงดังรูปที่ 5.3 และแสดงเส้นชั้นความสูงรูปที่ 5.4 และตาราง 5.1 แสดงเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนที่ระยะ x และ y ต่าง ๆ เมื่อพิจารณาจะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนจะมากตรงบริเวณที่ใกล้กับบริเวณขอบเขตเงื่อนไข โดยมีค่า 7.643% และเมื่อพิจารณาห่างจากขอบแต่ละด้าน 0.1 ม. จะมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเพียง 1.025%



รูปที่ 5.2 ค่า β_T ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.3 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่ x-y ใด ๆ



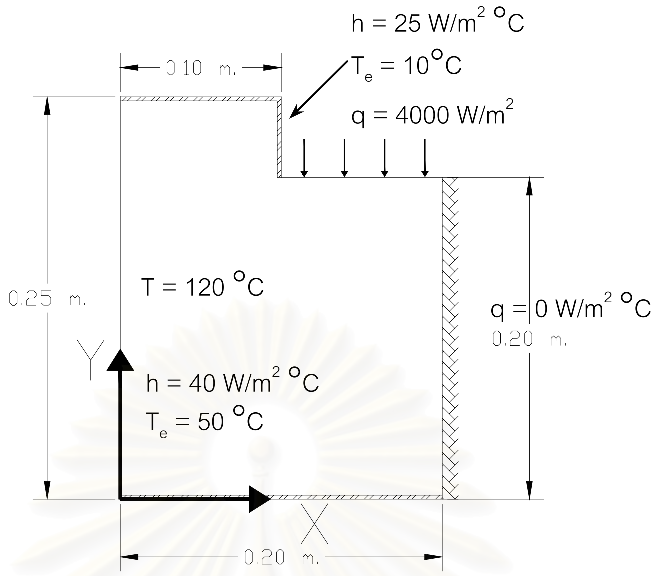
รูปที่ 5.4 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิในแผ่นจตุรัสชั้นเดียว

ตารางที่ 5.1 เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

ระยะแกน X / ระยะแกน Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.229	0.274	0.147	0.094	0.162	0.094	0.147	0.274	0.229	0.000
0.2	0.000	0.387	0.085	0.167	0.151	0.141	0.151	0.167	0.085	0.387	0.000
0.3	0.000	0.390	0.097	0.078	0.133	0.143	0.133	0.078	0.097	0.390	0.000
0.4	0.000	0.319	0.155	0.004	0.073	0.096	0.073	0.004	0.155	0.319	0.000
0.5	0.000	0.271	0.173	0.050	0.004	0.028	0.004	0.050	0.173	0.271	0.000
0.6	0.000	0.245	0.184	0.111	0.055	0.035	0.055	0.111	0.184	0.245	0.000
0.7	0.000	0.234	0.197	0.146	0.111	0.089	0.111	0.146	0.197	0.234	0.000
0.8	0.000	0.235	0.291	0.935	0.999	1.025	0.999	0.935	0.291	0.235	0.000
0.9	0.000	7.643	0.217	0.189	0.164	0.157	0.164	0.189	0.217	7.643	0.000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

5.1.1.2 แผ่นเรียบรูปฉากชั้นเดียว

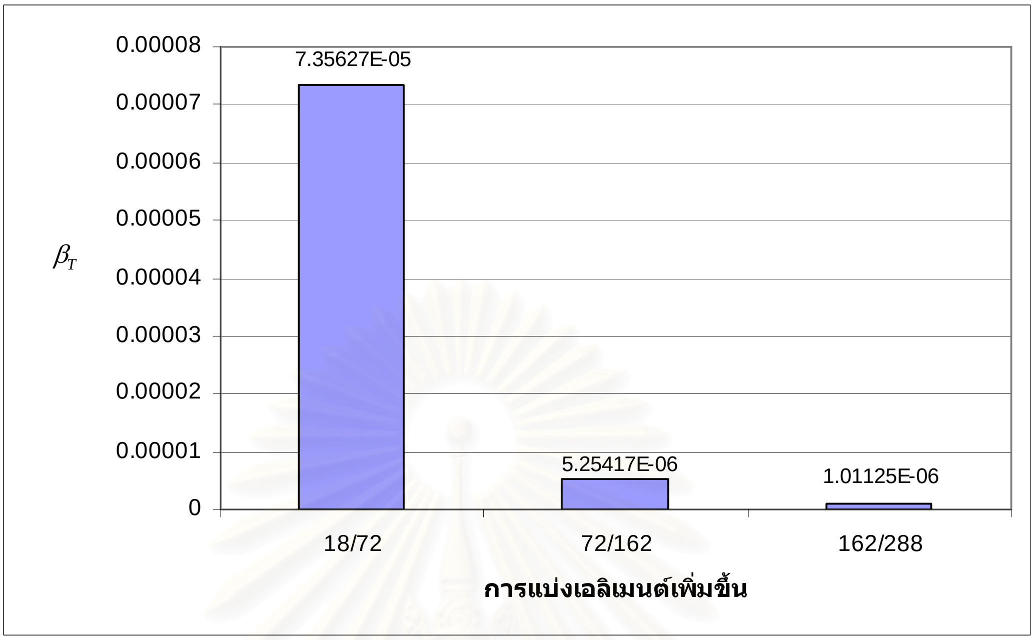
ปัญหากรณีนี้จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิของแผ่นเรียบชั้นเดียว โดยมีคุณสมบัติวัสดุเนื้อเดียวสม่ำเสมอ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละทิศทางเหมือนกัน รูปร่างฉากขนาด 0.10×0.25 ม. ในแนวตั้งและ 0.10×0.20 ม. ในแนวนอน โดยกำหนดอุณหภูมิที่ขอบด้านซ้าย 120°C ที่ขอบบนด้านซ้าย มีการกำหนดการพาความร้อน โดยมีสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 25 $W/m^2 {}^\circ C$ อุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบระบบ 10°C ที่ขอบบนด้านขวามีฟลักซ์ความร้อนเท่ากับ 4000 $W/m^2 {}^\circ C$ ส่วนขอบล่างมีการกำหนดการพาความร้อนโดยมีสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 40 $W/m^2 {}^\circ C$ อุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบระบบ 50°C และขอบด้านขวามีลักษณะเป็นฉนวน (ฟลักซ์ความร้อนเท่ากับศูนย์) กำหนดให้วัสดุมีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 5 $W/m^2 {}^\circ C$ ดังแสดงในรูป 5.5 ในกรณีปัญหาตัวอย่างนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในปัญหาสองมิติ เมื่อเงื่อนไขขอบเขตมีการกำหนด อุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน และการพาความร้อนว่ามีความแม่นยำมากน้อยเพียงใด



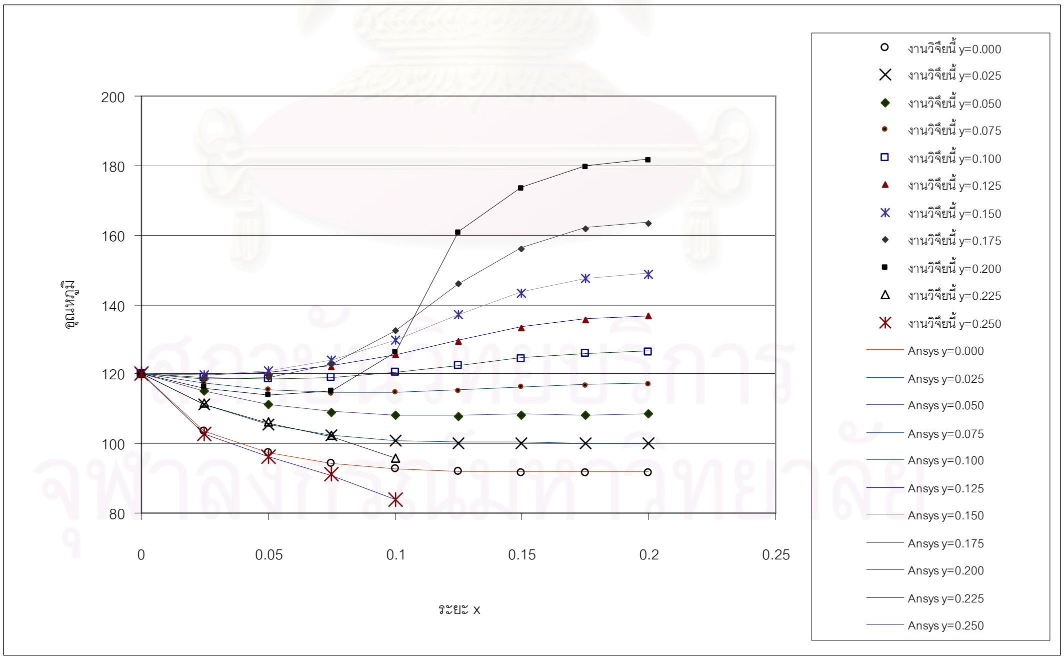
รูปที่ 5.5 แผ่นเรียบรูปฉากชั้นเดียว

ในการวิเคราะห์เริ่มจากการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน โดยทำการเริ่มแบ่งด้านแต่ละด้านของแผ่นเรียบรูปฉากออกเป็นช่องละ 0.05 ม. ซึ่งจะได้ 18 เอลิเมนต์ จากนั้นเพิ่มการแบ่งเอลิเมนต์โดยแบ่งด้านแต่ละด้านออกเป็นเอลิเมนต์ละ 0.025, 0.01667, 0.0125 ม. ซึ่งจะได้เอลิเมนต์เท่ากับ 72, 162 และ 288 เอลิเมนต์ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาค่า β_T จะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์จาก 162 เป็น 288 เอลิเมนต์ พบว่าค่า β_T มีค่าลู่เข้าใกล้ศูนย์ จึงพิจารณาการแบ่งเอลิเมนต์ 288 เอลิเมนต์ ในการเปรียบเทียบดังแสดงในรูปที่ 5.6

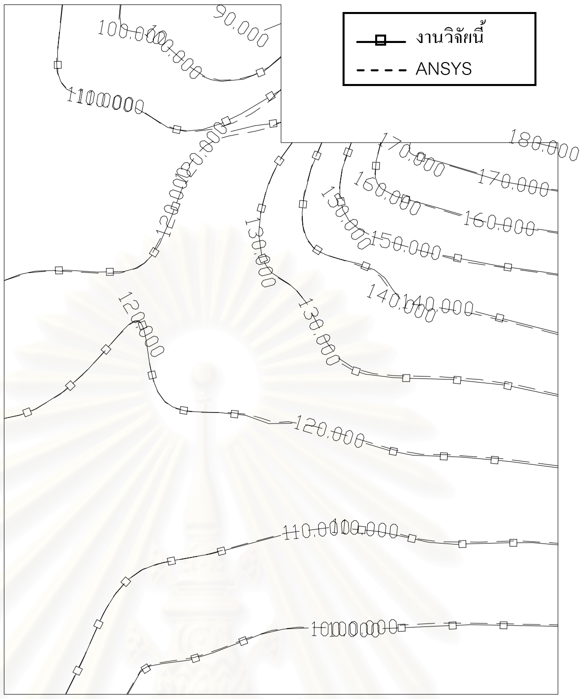
กรณีปัญหานี้มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตค่อนข้างซับซ้อน เป็นการยากที่หาผลเฉลยแม่นตรงมาเปรียบเทียบ จึงได้ใช้โปรแกรม ANSYS ในการวิเคราะห์เปรียบเทียบ โดยกระทำการกำหนดรูปร่าง และเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกันกับปัญหา โดยเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 โนด ทำการแบ่งเอลิเมนต์เช่นเดียวกันที่กล่าวในข้างต้น โดยพิจารณาที่จุดกึ่งกลางแผ่น พบว่าการลู่เข้าเมื่อทำการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ 288 เอลิเมนต์ และเมื่อนำค่าการกระจายอุณหภูมิมาเปรียบเทียบกันจะเห็นได้ว่า มีค่าใกล้เคียงกัน โดยแสดงดังรูปที่ 5.7 และ 5.8 ซึ่งได้แสดงเส้นชั้นความสูงในรูปที่ 5.9 เมื่อพิจารณาความคลาดเคลื่อนในตารางที่ 5.2 พบว่าเปอร์เซ็นต์ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.392% โดยเกิดบริเวณใกล้ ๆ กับการกำหนดฟลักซ์ความร้อน และการพาความร้อน



รูปที่ 5.6 ค่า β_T ของอุณหภูมิ เมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.7 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิกับ ANSYS



รูปที่ 5.8 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิเทียบกับ ANSYS

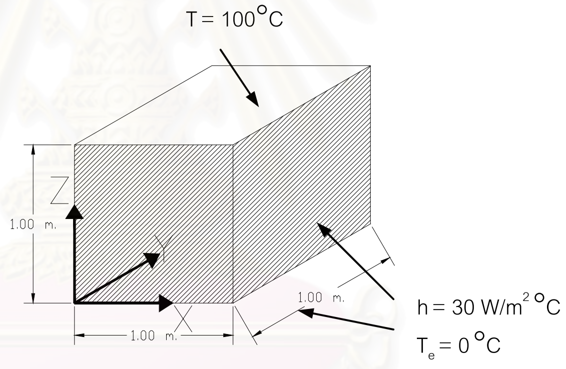
ตารางที่ 5.2 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับ ANSYS

ระยะแกน X / ระยะแกน Y	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2
0.25	0	0.019	0.163	0.209	0.136				
0.225	0	0.144	0.170	0.392	0.076				
0.2	0	0.060	0.070	0.052	0.134	0.224	0.219	0.189	0.187
0.175	0	0.008	0.008	0.008	0.076	0.103	0.262	0.216	0.202
0.15	0	0.008	0.017	0.000	0.023	0.109	0.230	0.230	0.221
0.125	0	0.008	0.025	0.033	0.064	0.139	0.225	0.221	0.219
0.1	0	0.008	0.034	0.050	0.083	0.155	0.233	0.206	0.213
0.075	0	0.000	0.026	0.061	0.087	0.156	0.241	0.188	0.196
0.05	0	0.026	0.018	0.064	0.065	0.139	0.268	0.111	0.175
0.025	0	0.054	0.028	0.068	0.099	0.100	0.319	0.160	0.160
0	0	0.087	0.060	0.074	0.094	0.114	0.130	0.142	0.145

5.1.2 ปัญหาการนำความร้อน 3 มิติ

5.1.2.1 รูปทรงลูกบาศก์

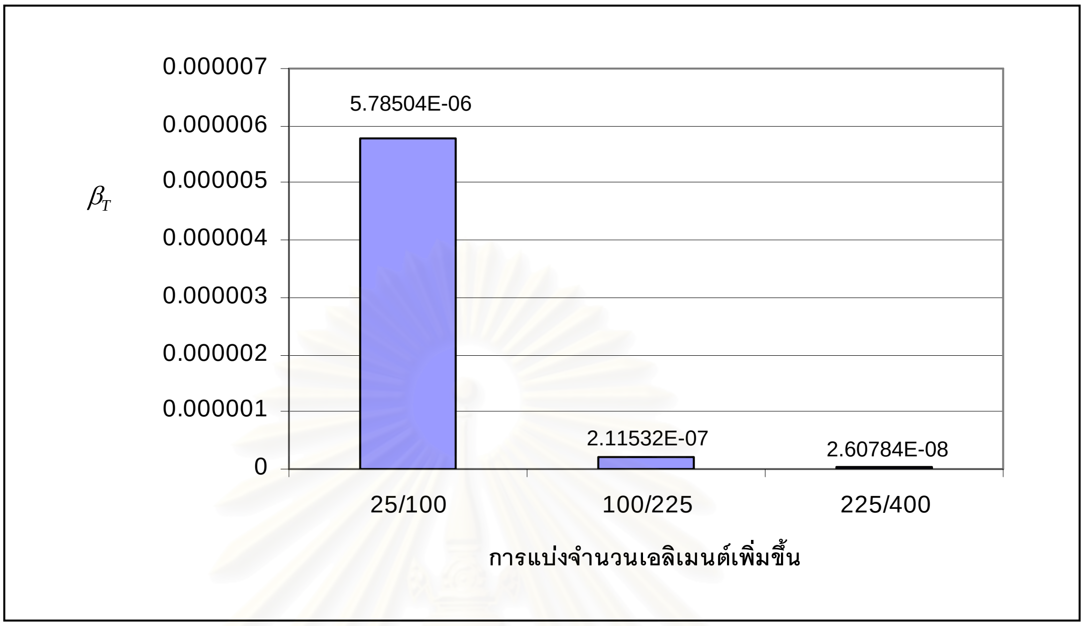
เมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนสองมิติภายใต้เงื่อนไขขอบเขตดังจุดประสงค์ที่ตั้งไว้แล้ว ลำดับต่อไปจะเริ่มทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในการวิเคราะห์การนำความร้อนสามมิติ โดยในปัญหานี้ได้ทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิภาวะคงที่เช่นเดียวกับสองกรณีที่ผ่านมา โดยจะพิจารณาลูกบาศก์ชั้นเดียวที่มีความหนาเท่ากับความกว้างและความยาว รูปทรงลูกบาศก์นี้กำหนดวัสดุเป็นอลูมิเนียม มีลักษณะเนื้อเดียวสม่ำเสมอ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 235 $W/m^2\,^{o}C$ มีขนาด 1×1×1 ม. กำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนเท่ากับ 100 ^{o}C และผิวที่เหลือกำหนดให้มีการพาความร้อน โดยมีสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 30 $W/m^2\,^{o}C$ และอุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบระบบเท่ากับ 0 ^{o}C ดังแสดงดังรูป 5.9 ซึ่งในกรณีศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกรณีปัญหาสามมิติ เมื่อเงื่อนไขขอบเขตมีการกำหนด อุณหภูมิ และการพาความร้อน



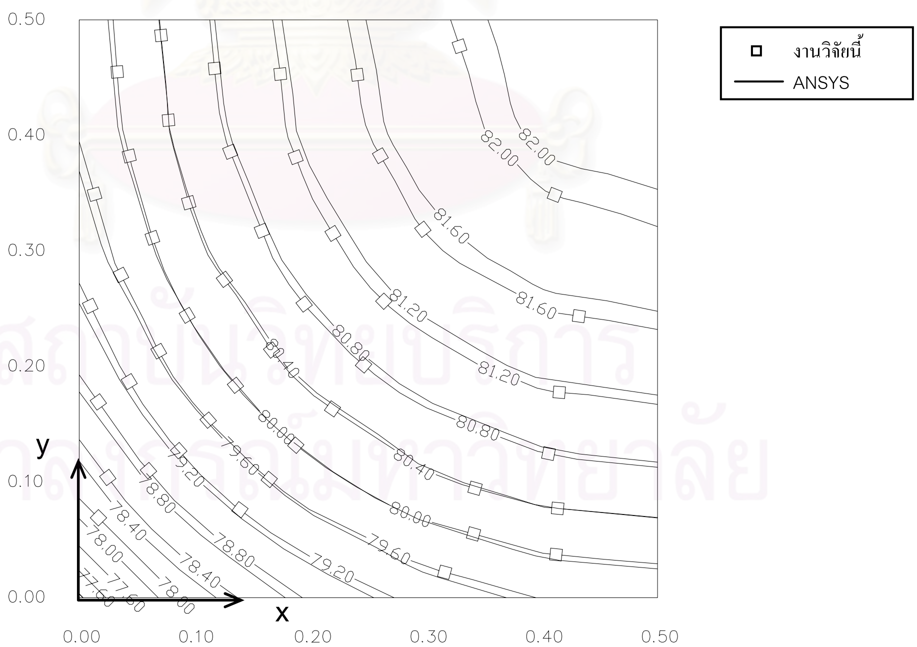
รูปที่ 5.9 รูปทรงลูกบาศก์

การวิเคราะห์ในกรณีนี้จะทำการแบ่งเอลิเมนต์ในระนาบ x-y ออกเป็นเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน โดยที่ทิศทางความหนาแบ่งออกชั้นเดียว โดยมีฟังก์ชันพหุนามกำลังสามในการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา โดยจะเริ่มทำการแบ่งรูปทรงลูกบาศก์ออกเป็นเอลิเมนต์ โดยแต่ละด้านแบ่งออกด้านละ 5, 10, 15 และ 20 เอลิเมนต์ ซึ่งจะได้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 25, 100, 225 และ 400 เอลิเมนต์ตามลำดับ ซึ่งแสดงค่า การลู่เข้าของ β_T ในรูปที่ 5.10

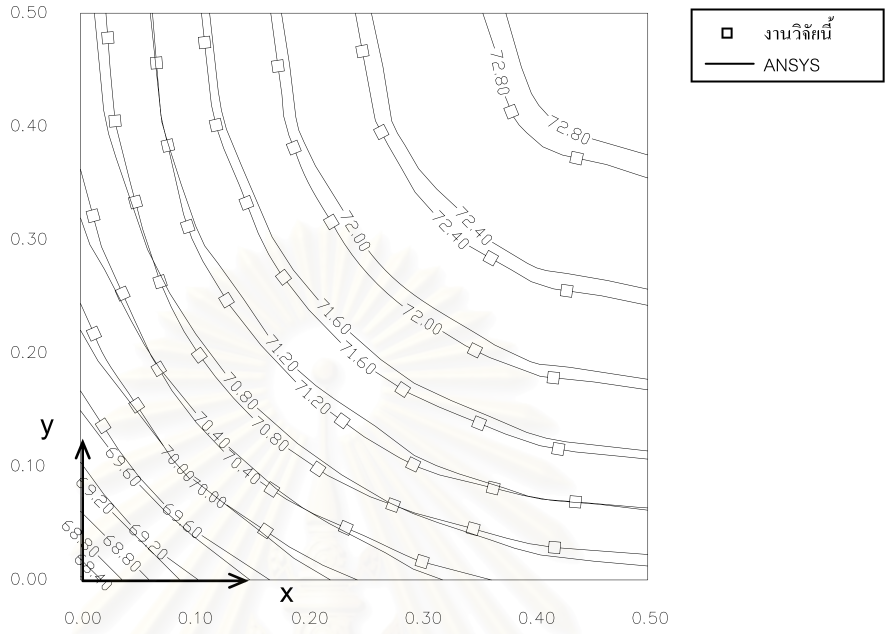
การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในกรณีนี้ได้ใช้โปรแกรม ANSYS ในการเปรียบเทียบ โดยใช้เอลิเมนต์สามมิติ 20 โนด เมื่อพิจารณาจุดกึ่งกลางรูปทรงลูกบาศก์ของกรณีนี้พบว่า เมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ด้านละ 10 เอลิเมนต์ พบว่ามีการลูกเข้า ซึ่งได้แสดงเส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิหนึ่งในสี่ส่วนระนาบ x-y ที่ระดับ z เท่ากับ 0.5 และ 0 ตามลำดับดังรูปที่ 5.11 และ 5.12 และแสดงการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาดังรูปที่ 5.13 และเมื่อทำการเปรียบเทียบดังตาราง 5.3 และ 5.4 พบว่าเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของการกระจายอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 0.477%



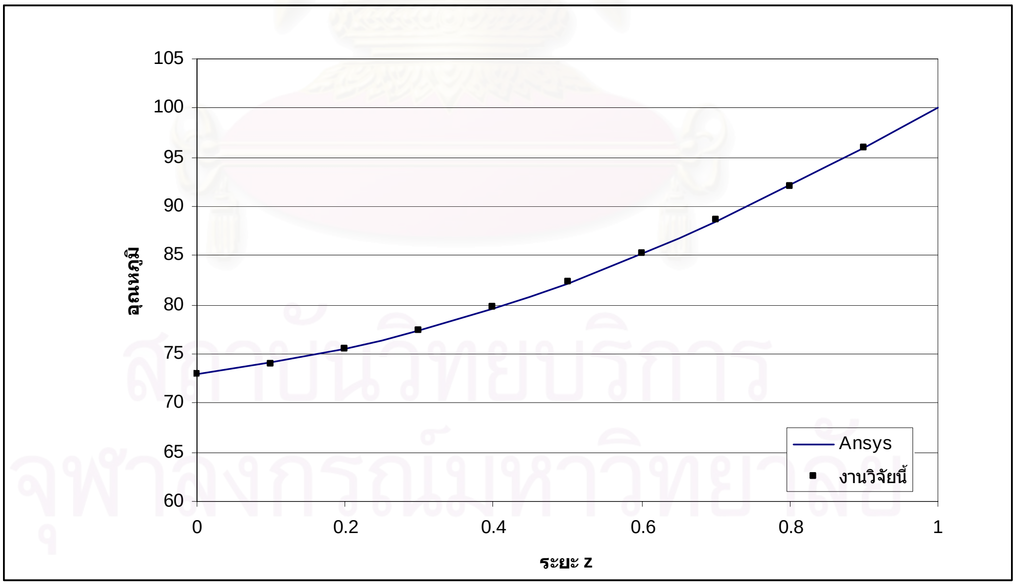
รูปที่ 5.10 ค่า β_T ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ระนาบ x-y มากขึ้น



รูปที่ 5.11 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิเปรียบเทียบกับ ANSYS ที่ระยะ z = 0.5



รูปที่ 5.12 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิเปรียบเทียบกับ ANSYS ที่ระยะ z = 0



รูปที่ 5.13 แสดงอุณหภูมิในทิศทางความหนาที่ระยะ x = 0.5

ตารางที่ 5.3 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับ ANSYS ที่ระยะ z = 0.5

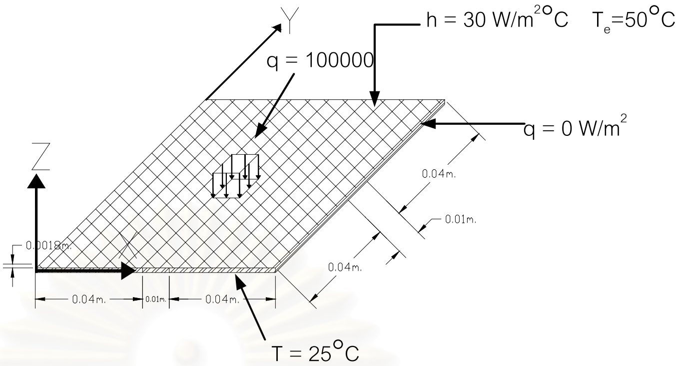
ระยะx / ระยะy	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.328	0.212	0.153	0.128	0.119	0.117
0.1	0.212	0.095	0.038	0.014	0.005	0.003
0.2	0.153	0.038	0.019	0.042	0.988	0.053
0.3	0.128	0.014	0.042	0.066	0.074	0.076
0.4	0.119	0.005	0.233	0.074	0.083	0.085
0.5	0.117	0.003	0.053	0.076	0.085	0.087

ตารางที่ 5.4 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับ ANSYS ที่ระยะ z = 0

ระยะx / ระยะy	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.477	0.235	0.195	0.199	0.208	0.212
0.1	0.235	0.004	0.044	0.037	0.027	0.022
0.2	0.195	0.044	0.080	0.074	0.064	0.060
0.3	0.199	0.037	0.074	0.066	0.055	0.052
0.4	0.208	0.027	0.064	0.055	0.047	0.043
0.5	0.212	0.022	0.060	0.052	0.043	0.038

5.1.2.2 **แผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียว**

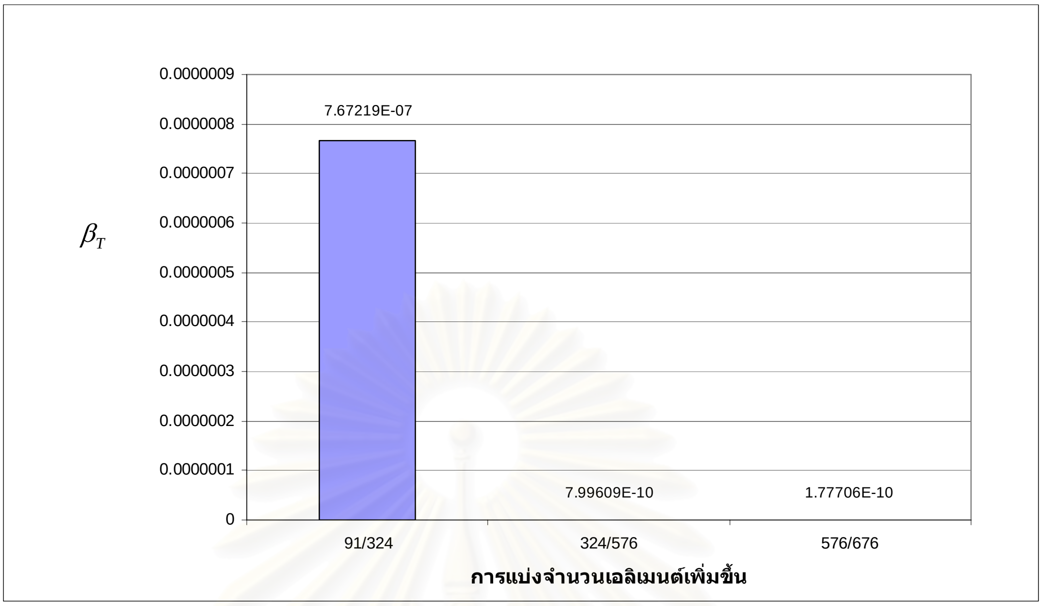
สำหรับปัญหาในกรณีนี้ จะทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิภาวะคงที่สามมิติเช่นเดียวกับกรณีที่ผ่านมา แต่รูปร่างของแผ่นประกอบจะบางมากเมื่อเทียบกับความกว้าง (อัตราส่วนความกว้างต่อความหนาเท่ากับ 50) แผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียวมีขนาด 0.09×0.09×0.0018 ม. กำหนดอุณหภูมิที่ผิวล่างคงที่ 25°C และที่ขอบโดยรอบมีลักษณะเป็นฉนวน (ฟลักซ์ความร้อนเท่ากับศูนย์) ส่วนผิวบนจะมีฟลักซ์ความร้อน q เท่ากับ 100000 W/m^2 กระทำตรงกลางมีขนาดเท่ากับ 0.01×0.01 ม. และผิวบนส่วนที่เหลือ มีการพาความร้อนโดยสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 30 W/m^2 °C และอุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบระบบ 50 °C ซึ่งวัสดุในปัญหานี้คืออลูมิเนียม มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 235 W/m^2 °C ดังแสดงในรูป 5.14 ในกรณีปัญหานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมปัญหาสามมิติ เมื่อเงื่อนไขขอบเขตมีการกำหนด อุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน และการพาความร้อน



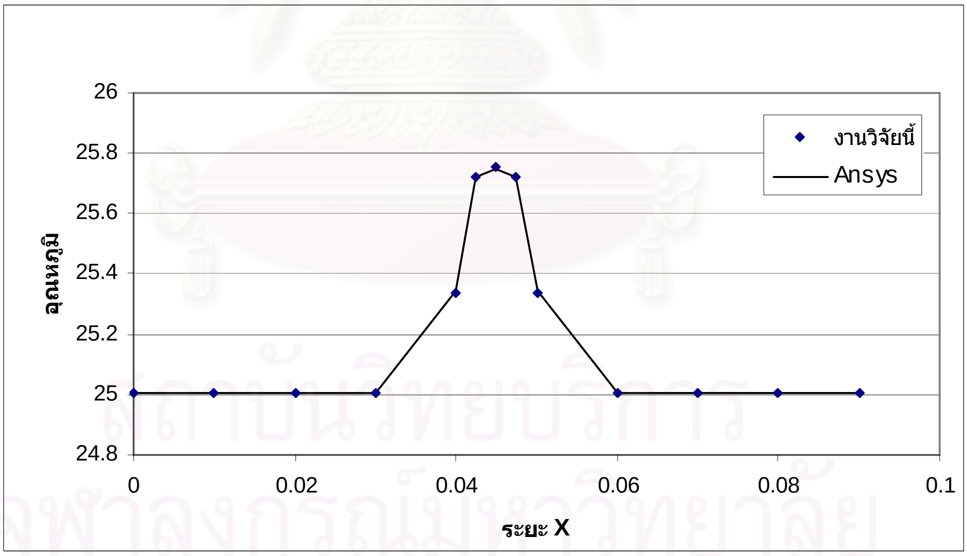
รูปที่ 5.14 แผ่นจตุรัสชั้นเดียว

การวิเคราะห์ในกรณีนี้จะทำการแบ่งเอลิเมนต์ไม่เท่ากัน เนื่องจากที่บริเวณกึ่งกลางแผ่นประกอบมีฟลักซ์ความร้อนกระทำลักษณะเป็นจุด ทำให้เกิดความเข้มของอุณหภูมิบริเวณกึ่งกลางแผ่นเรียบจตุรัส ซึ่งจะแบ่งเอลิเมนต์ 324, 400, 576 และ 676 เอลิเมนต์ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่าการลู่เข้าของ β_T เห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มเอลิเมนต์จาก 576 เป็น 676 เอลิเมนต์ จะมีค่าน้อยมาก (รูปที่ 5.15) จึงพิจารณาจำนวนเอลิเมนต์ที่ 676 เอลิเมนต์

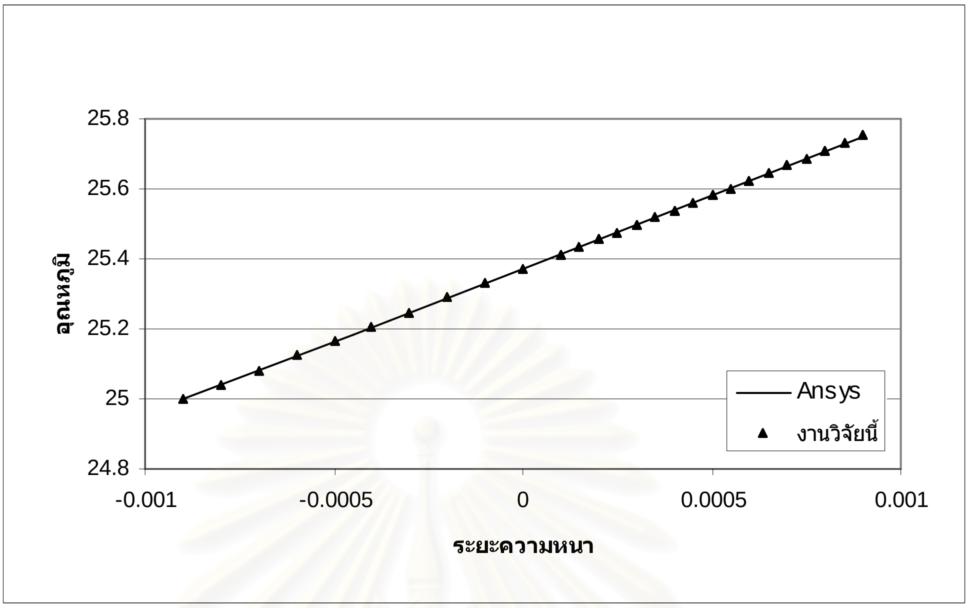
กรณีปัญหานี้ เงื่อนไขขอบเขตค่อนข้างซับซ้อนจึงทำการเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ของโปรแกรม ANSYS โดยกระทำการกำหนดรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกัน โดยเลือกใช้เอลิเมนต์สามมิติ 20 โนด ทำการแบ่งเอลิเมนต์ระนาบ x-y เช่นเดียวกับที่กล่าวมาข้างต้น ส่วนในทิศทางความหนาแบ่งออกเป็น 4 ชั้น เมื่อพิจารณาค่าการลู่เข้าพบว่า มีการลู่เข้าเมื่อทำการแบ่งจำนวน 10 เอลิเมนต์ จึงใช้ 576 เอลิเมนต์ ในการเปรียบเทียบดังแสดงในรูปที่ 5.16 และ 5.17 และได้แสดง เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิที่ผิวบนและกึ่งกลางความหนาของแผ่นจตุรัสชั้นเดียวในรูปที่ 5.18 และ 5.19 ตามลำดับ และเมื่อทำการเปรียบเทียบหาค่าคลาดเคลื่อนในตาราง 5.5 และ 5.6 พบว่าเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนของการกระจายอุณหภูมิที่แนวกึ่งกลางผิวบนคลาดเคลื่อน สูงสุดมีค่าเท่ากับ 0.0947% และที่กึ่งกลางในทิศทางความหนามีเปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.001941%



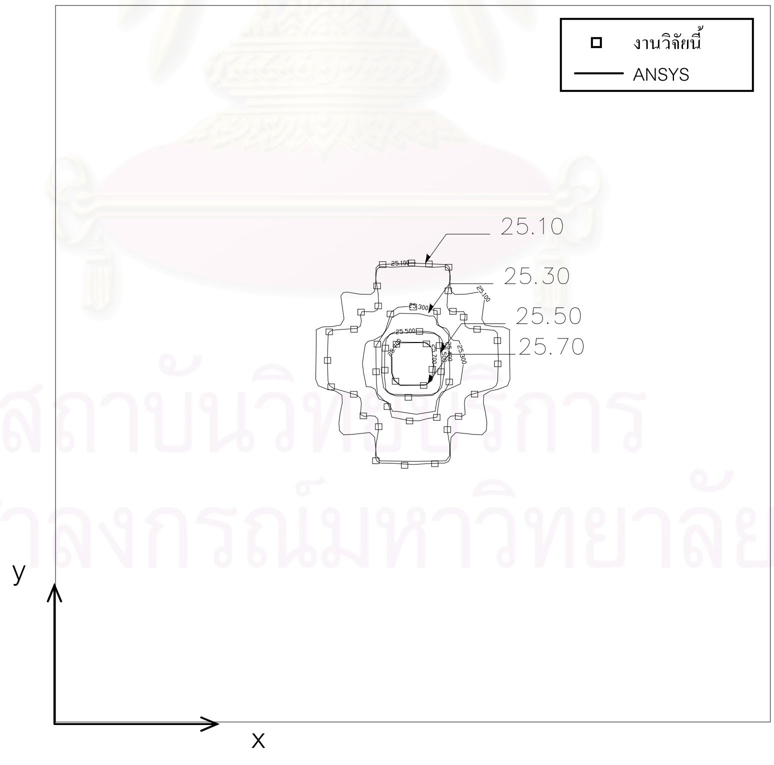
รูปที่ 5.15 ค่า β_T ของอุณหภูมิ เมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น



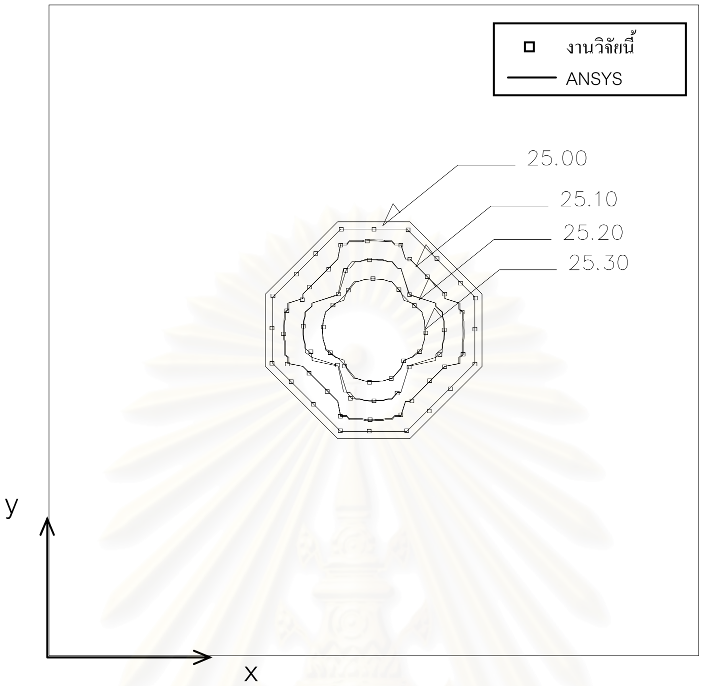
รูปที่ 5.16 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่แนวกึ่งกลางผิวบนของแผ่นเรียบจตุรัสกับ ANSYS



รูปที่ 5.17 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางแผ่นเรียบจตุรัสในทิศทางความหนากับ ANSYS



รูปที่ 5.18 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิที่ผิวบนของแผ่นจตุรัสชั้นเดียว



รูปที่ 5.19 เส้นชั้นความสูงของอุณหภูมิที่กึ่งกลางความหนาของแผ่นจตุรัสชั้นเดียว

ตารางที่ 5.5 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนของอุณหภูมิแนวกึ่งกลางผิวบนเทียบกับ ANSYS

ระยะ x	ค่าคลาดเคลื่อน (%)	ระยะ x	ค่าคลาดเคลื่อน (%)
0.00	0.0012	0.0475	0.0229
0.01	0.0012	0.05	0.0947
0.02	0.0012	0.06	0.0060
0.03	0.0060	0.07	0.0012
0.04	0.0947	0.08	0.0012
0.0425	0.0229	0.09	0.0012
0.045	0.0144		

ตารางที่ 5.6 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางแผ่นเรียบจตุรัสในทิศทางความหนาเทียบกับ ANSYS

ระยะความหนา	ค่าคลาดเคลื่อน (%)
-0.0009	0.000000
-0.00045	0.00191
0	0.000074
0.00045	0.001941
0.0009	0.006990

5.1.3 การศึกษาพารามิเตอร์

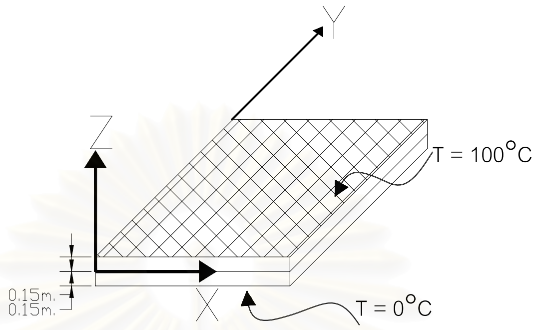
ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้ใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาของแผ่นประกอบ ซึ่งแผ่นประกอบประกอบด้วยวัสดุแต่ละชั้นแตกต่างกัน ทำให้การนำความร้อนมีการหักเหระหว่างชั้นในทิศทางความหนา ซึ่งจึงเป็นต้องหาพารามิเตอร์ว่าการใช้ฟังก์ชันพหนุนามกำลังสามนี้เหมาะสมกับแผ่นประกอบในกรณีใดบ้าง และพารามิเตอร์ตัวไหนมีความสำคัญมากน้อยเพียงไร

เมื่อพิจารณาถึงพารามิเตอร์ที่มีผลต่อการนำความร้อนในทิศทางความหนา จะมีพารามิเตอร์ที่สำคัญ คือ หนึ่ง สัมประสิทธิ์การนำความร้อน ซึ่งมีผลต่อการนำความร้อนในทิศทางความหนา กล่าวคือ ถ้าวัสดุนั้นมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูงจะทำให้วัสดุนั้นมีการนำความร้อนได้ดี และในทางกลับกัน ถ้าวัสดุนั้นมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่ำวัสดุนั้นจะมีลักษณะคล้ายฉนวนกันความร้อน ทำให้อุณหภูมิที่กระจายมีค่าต่ำ สอง ความหนาแต่ละชั้นของแผ่นประกอบ ซึ่งความหนาของแผ่นประกอบจะมีผลต่อการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา กล่าวคือ วัสดุยิ่งมีความหนามากผลต่างอุณหภูมิแต่ละชั้นของแผ่นประกอบจะมาก และในทางกลับกัน ถ้าวัสดุที่มีความหนาน้อยจะทำให้ผลต่างอุณหภูมิแต่ละชั้นของแผ่นประกอบจะน้อยตาม สาม จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ จำนวนชั้นจะมีผลต่อการนำความร้อนในทิศทางความหนา ยิ่งจำนวนชั้นยิ่งมากการหักเหการนำความร้อนในแต่ละชั้นวัสดุในแผ่นประกอบยิ่งมากตาม และสี่อัตราส่วนของความกว้างต่อความหนา (L/h) ซึ่งตัวพารามิเตอร์นี้จะเป็นตัวชี้บ่งว่าแผ่นประกอบมีพฤติกรรมแบบสามมิติหรือสองมิติ ถ้าแผ่นประกอบมีค่า L/h ต่ำ พฤติกรรมของแผ่นประกอบจะมีพฤติกรรมแบบสามมิติ และในทางกลับกัน ถ้าค่า L/h สูง พฤติกรรมของแผ่นประกอบจะมีพฤติกรรมแบบสองมิติ ซึ่งพารามิเตอร์ทั้งสี่มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1.3.1 อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

ในการหาพารามิเตอร์ของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนจะพิจารณาแผ่นประกอบ 2 วัสดุหนาเท่ากัน แผ่นประกอบมีขนาดเท่ากับ 1.0×1.0×0.3 ม. กำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างเท่ากับ 100°C และ 0°C

ตามลำดับ แสดงในรูปที่ 5.23 ทำการแปรผันค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน 0.01 $\le \frac{k_1}{k_2} \le 100$ โดยที่ผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิจะเกิดขึ้นในมิติความหนาเท่านั้น จึงไม่จำเป็นต้องหาค่าการลู่เข้าของยูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองหารค่าผลรวมของผลลัพธ์กำลังสอง



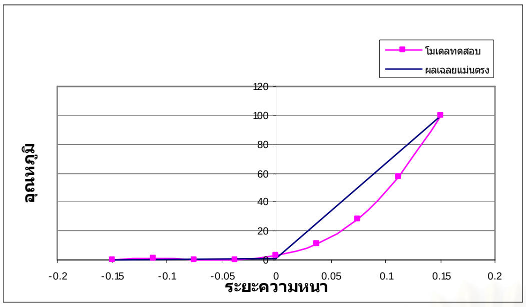
รูปที่ 5.20 กรณีศึกษาพารามิเตอร์อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

ในวิทยานิพนธ์นี้จึงทำการหาค่าคลาดเคลื่อนการนำความร้อนในทิศทางความหนาในแต่ละกรณีดังสมการ (5.2)

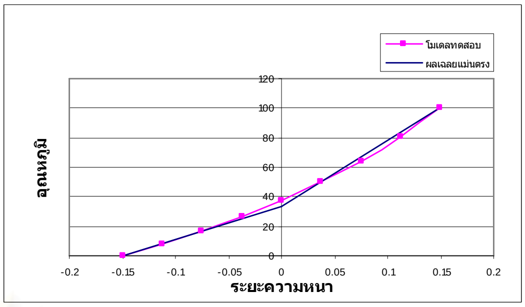
$$\lambda = \int_z \left(T_{exact} - T_{poly}\right)^2 dz \qquad (5.2)$$

ค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์ (λ) คือค่าผลต่างกำลังสองของอุณหภูมิที่วิเคราะห์ด้วยวิธีผลเฉลยแม่นตรง (T_{exact}) และอุณหภูมิที่วิเคราะห์ด้วยแบบจำลองในงานวิจัยนี้ (T_{poly}) แล้วทำการอินทิเกรตตลอดความหนาซึ่งค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์นี้จะชี้ให้เห็นว่า การกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนามีค่าคลาดเคลื่อนมากน้อยเพียงใด กล่าวคือ ถ้าค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์นี้มีค่ามาก หมายความว่า ค่าคลาดเคลื่อนของผลการวิเคราะห์มีค่าคลาดเคลื่อนมากนั่นเอง

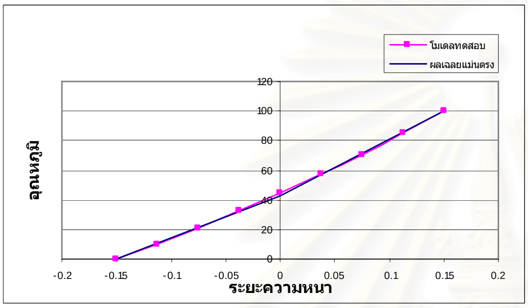
ในการเปรียบเทียบในปัญหานี้ทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2002) โดยพิจารณาค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ 0.01 $\le \frac{k_1}{k_2} \le$ 100 โดยแสดงการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาดังรูปที่ 5.21 และผลการวิเคราะห์เมื่อพิจารณาค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์ (λ) ดังแสดงในรูปที่ 5.22 เห็นได้ว่าในช่วงที่อัตราส่วนค่า $\frac{k_1}{k_2}$ อยู่ระหว่าง 0.2 ถึง 5 โดยประมาณ ค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์จะมีค่าน้อย ซึ่งหมายความว่าถ้าใช้ค่าอัตราส่วน $\frac{k_1}{k_2}$ อยู่ในช่วงนี้จะทำให้ค่าการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนามีค่าคลาดเคลื่อนน้อย และในทางกลับกันถ้าให้ค่าน้อยกว่า 0.5 หรือมากกว่า 2 โดยประมาณจะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมากขึ้นนั่นเอง



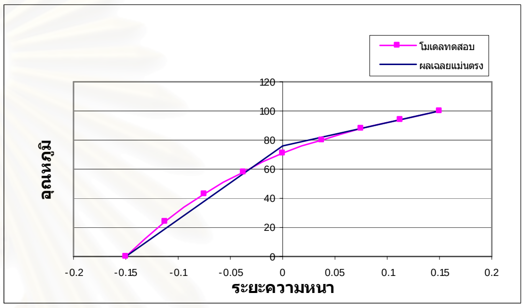
ก) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =0.01



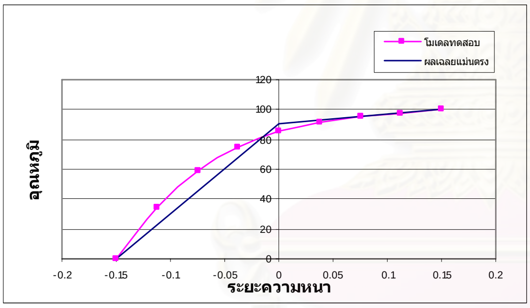
ข) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =0.50



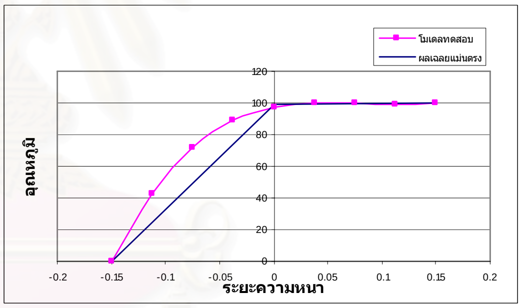
ค) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =0.75



ง) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =3.125

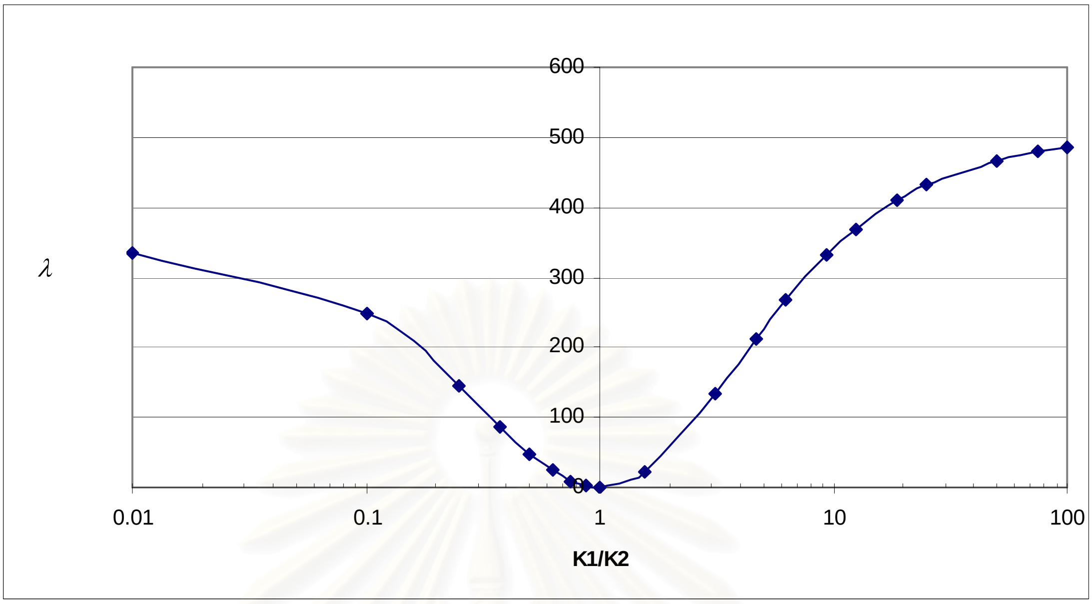


จ) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =12.5



ฉ) เมื่อ $\frac{k_1}{k_2}$ =100

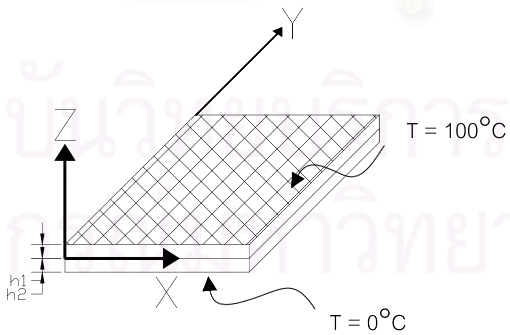
รูปที่ 5.21 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนากับผลเฉลยแม่นตรงที่ $\frac{k_1}{k_2}$ ใด ๆ



รูปที่ 5.22 ค่า λ ของอุณหภูมิที่อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนใด ๆ

5.1.3.2 **อัตราส่วนความหนา**

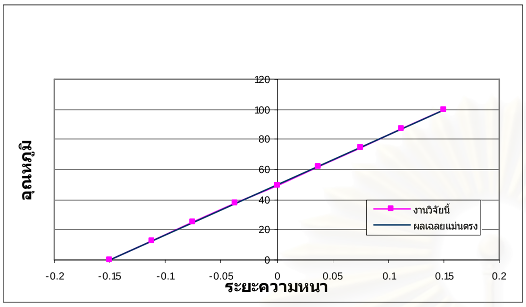
ในการหาพารามิเตอร์ของอัตราส่วนความหนา จะทำในลักษณะคล้ายกันกับการหาพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การนำความร้อน แต่จะทำการแปรผันค่าอัตราส่วนความหนาชั้นที่หนึ่งต่อความหนาชั้นที่สองตั้งแต่ 0.01 ถึง 100 ดังแสดงในรูป 5.23 โดยกำหนดวัสดุชั้นแรกคือ อลูมิเนียม 2024-T6 วัสดุชั้นที่สองคือ อลูมิเนียม มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน 150 และ 240 W/m°C ตามลำดับ



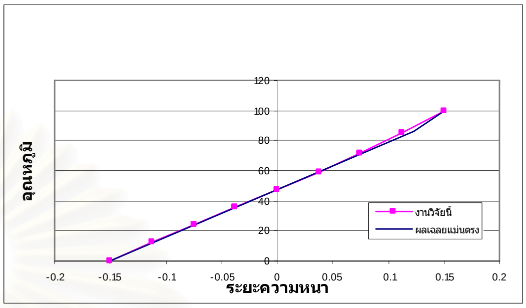
รูปที่ 5.23 กรณีศึกษาพารามิเตอร์อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น

ในกรณีปัญหานี้ทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2002) โดยพิจารณาอัตราส่วนความหนาแต่ละชั้น $0.01 \le \frac{h_1}{h_2} \le 100$ โดยแสดงดังรูปที่ 5.24 และเมื่อพิจารณาค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์รูปที่ 5.25 จะเห็นได้ว่าค่า λ จะสูงเมื่ออัตราส่วน $\frac{h_1}{h_2}$ อยู่ในช่วง 0.50 ถึง 2.0 โดยประมาณ

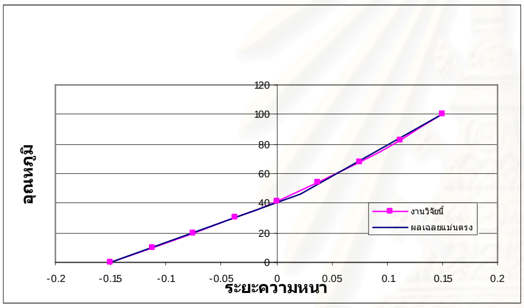
ส่งผลทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนมากในช่วงระหว่างนี้ และในทางกลับกัน ถ้า $\frac{h_1}{h_2}$ น้อยกว่า 0.50 หรือมากกว่า 2.0 โดยประมาณจะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่าน้อย



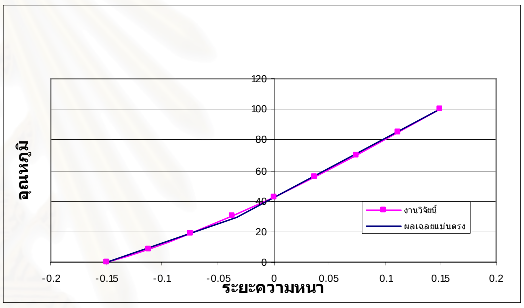
ก) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=0.01$



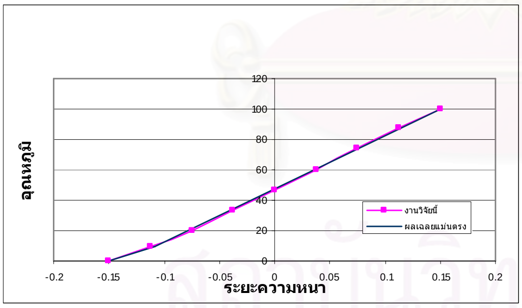
ข) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=0.1$



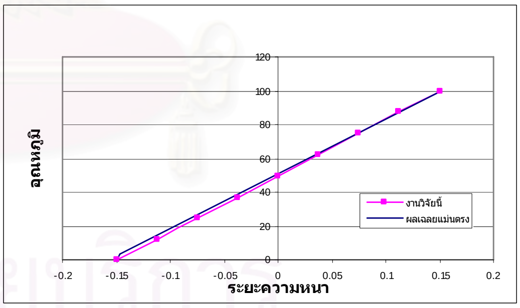
ค) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=0.75$



ง) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=1.5625$

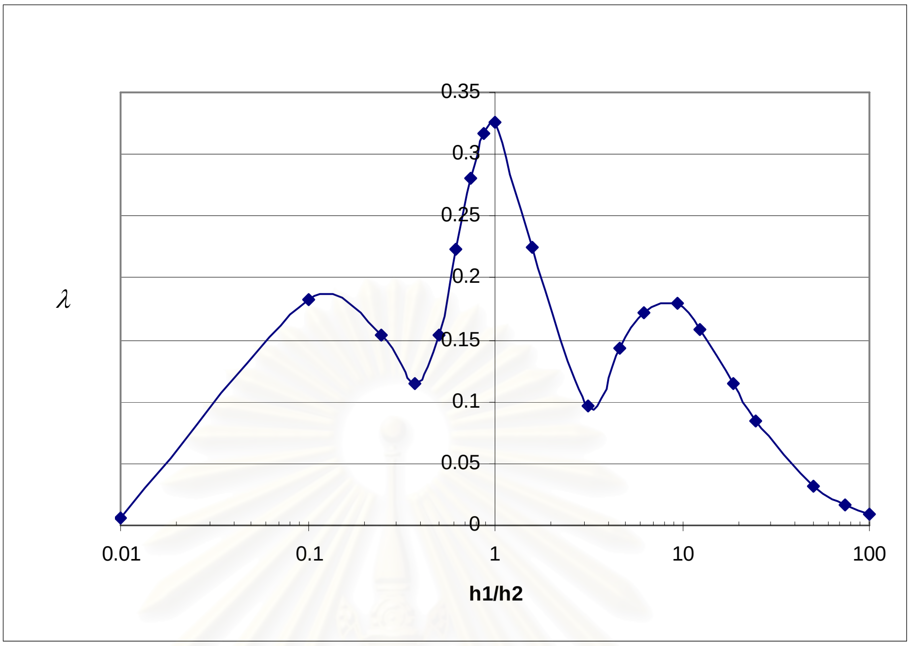


จ) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=6.25$



ฉ) เมื่อ $\frac{h_1}{h_2}=100$

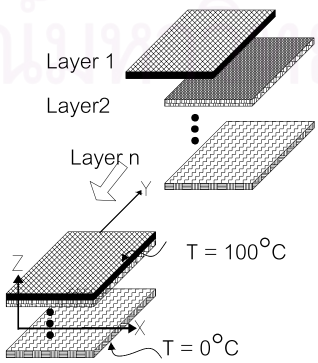
รูปที่ 5.24 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนากับผลเฉลยแม่นตรงที่ $\frac{h_1}{h_2}$ ใด ๆ



รูปที่ 5.25 ค่า λ ของอุณหภูมิที่อัตราส่วนความหนาแต่ละชั้นใด ๆ

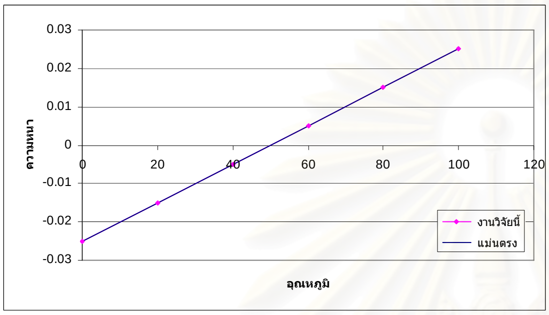
5.1.3.3 **จำนวนชั้น**

เมื่อทำการศึกษาพารามิเตอร์อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้น และอัตราส่วนความหนาในแต่ละชั้นแล้ว ลำดับต่อไปเราจะพิจารณาถึงความสำคัญของจำนวนชั้นของแผ่นประกอบว่าการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาจะใช้ได้ดีเมื่อจำนวนชั้นไม่เกินกี่ชั้น ซึ่งในกรณีศึกษานี้ได้ทำการกำหนดปัญหา ซึ่งแปรผันจำนวนชั้นหนึ่งถึงหกชั้น โดยที่แต่ละชั้นมีค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k_1, k_3, k_5 \ldots$ มีค่าเท่ากับ 0.5 k_2 และ k_2, k_4, k_6 มีค่าเท่ากับ k_2 โดยที่ k_1 / k_2 เท่ากับ 0.5 ความหนาแต่ละชั้นเท่ากัน และกำหนดความกว้างต่อความหนาของแผ่นประกอบเท่ากับ 20 ซึ่งกำหนดอุณหภูมิที่ผิวบนเท่ากับ 100°C และที่ผิวล่าง 0°C ซึ่งแสดงดังรูปที่ 5.28

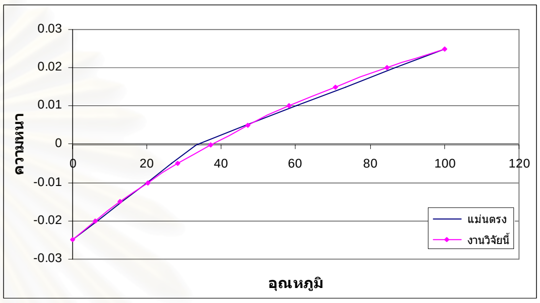


รูปที่ 5.26 กรณีศึกษาพารามิเตอร์จำนวนชั้น

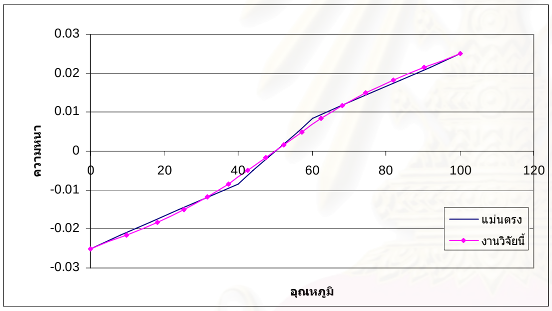
ผลการวิเคราะห์นี้ทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2002) ผลการศึกษาได้แสดงการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาจำนวนหนึ่งถึงหกชั้นดังรูปที่ 5.27 และเมื่อพิจารณาค่า λ ดังรูปที่ 5.29 แสดงให้เห็นได้ว่าเมื่อใช้แผ่นประกอบจำนวนหนึ่งถึงหกชั้น ค่า λ ถือว่าใกล้เคียงกัน โดยที่ทุกกรณีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเมื่อจำนวนชั้นเท่ากับสี่ ดังนั้นแบบจำลองพหุนามกำลังสามใช้ได้ดีเมื่อมีจำนวนชั้นใด ๆ โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนไม่มากนัก



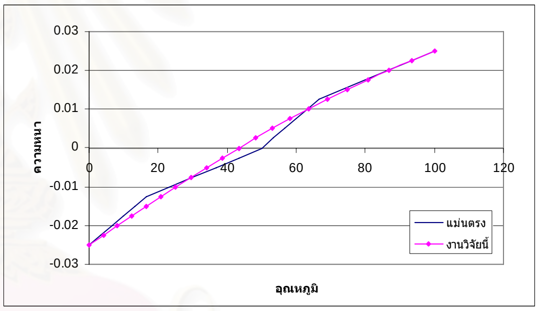
ก) แผ่นประกอบ 1 ชั้น



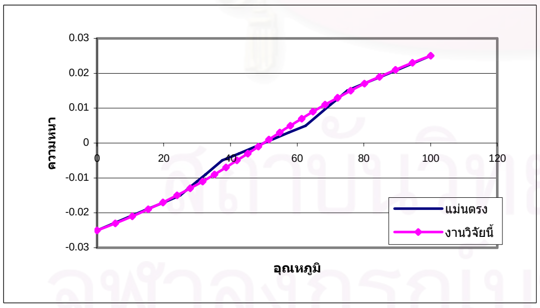
ข) แผ่นประกอบ 2 ชั้น



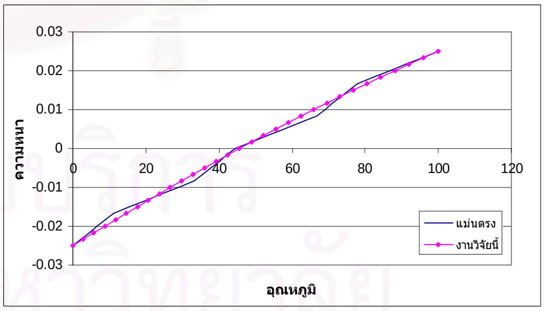
ค) แผ่นประกอบ 3 ชั้น



ง) แผ่นประกอบ 4 ชั้น

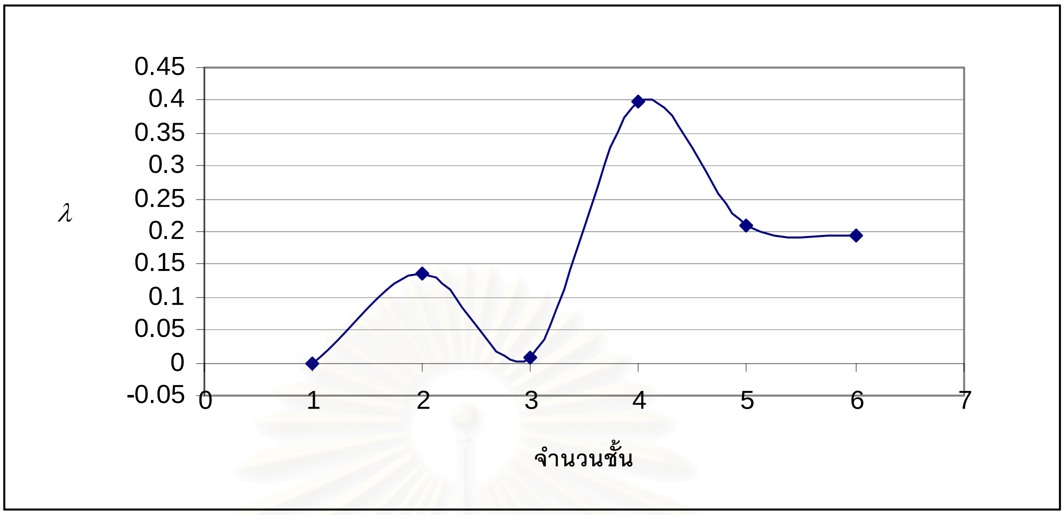


จ) แผ่นประกอบ 5 ชั้น



ฉ) แผ่นประกอบ 6 ชั้น

รูปที่ 5.27 การกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาเมื่อแผ่นประกอบมีจำนวนชั้นใด ๆ



รูปที่ 5.28 ค่า λ ของอุณหภูมิเมื่อแผ่นประกอบประกอบด้วยจำนวนชั้นใด ๆ

5.1.3.4 อัตราส่วนความกว้างต่อความหนา

ปัญหาในกรณีนี้ได้ใช้ปัญหาเช่นเดียวกับปัญหาการนำความร้อนสามมิติ ของแผ่นเรียบจตุรัสชั้นเดียว กำหนดอุณหภูมิการพาความร้อนที่ผิวโดยรอบ และกำหนดความเข้มของฟลักซ์ความร้อนที่ผิวแสดงดังรูป 5.29 (จึงไม่จำเป็นต้องหาค่าการลู่เข้าของ β_T) แต่จะทำการแปรผันอัตราส่วนของ L/h ตั้งแต่ 2.5 $\leq$ L/h $\leq$ 100 โดยจะกำหนดขนาด L ที่ 0.09 ม. และทำการแปรผันค่า h ที่ค่าต่าง ๆ โดยเริ่มค่า L/h ที่ 2.5, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 75 และ 100

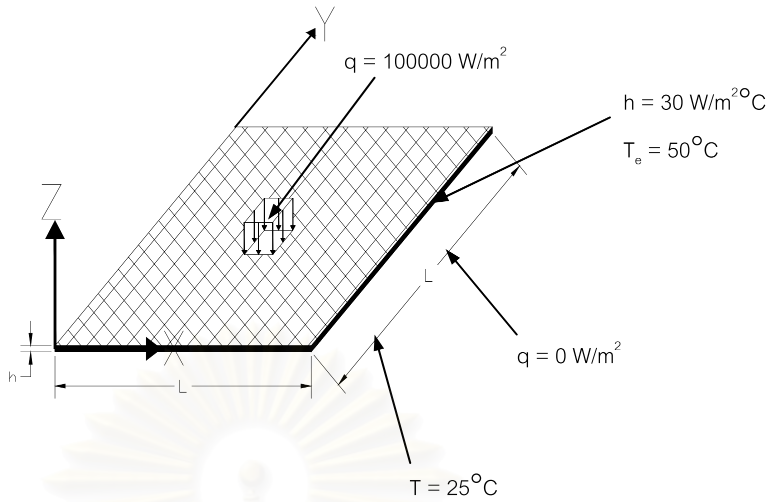
ผลการวิเคราะห์นี้ทำการเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ANSYS ใช้เอลิเมนต์สามมิติ 20 โนด เช่นเดียวในหัวข้อที่ 5.1.2 ข้อ 2 ใช้จำนวน 576 เอลิเมนต์ ในการเปรียบเทียบ ซึ่งในกรณีนี้ไม่สามารถหาค่าอินทิเกรตผลต่างกำลังสองของผลลัพธ์ได้ เนื่องจากค่าผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ANSYS เป็นค่าที่โนดจึงหาค่าคลาดเคลื่อนดังสมการ (5.3) ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนได้แสดงดังรูปที่ 5.30 แสดงให้เห็นว่า เมื่อค่า L/h มากกว่า 40 จะให้ค่าการกระจายอุณหภูมิคลาดเคลื่อนน้อยอย่างมากเมื่อเทียบกับ L/h มากกว่า 40

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \left(T^{i}_{ANSYS} - T^{i}_{poly}\right)^2 \qquad (5.3)$$

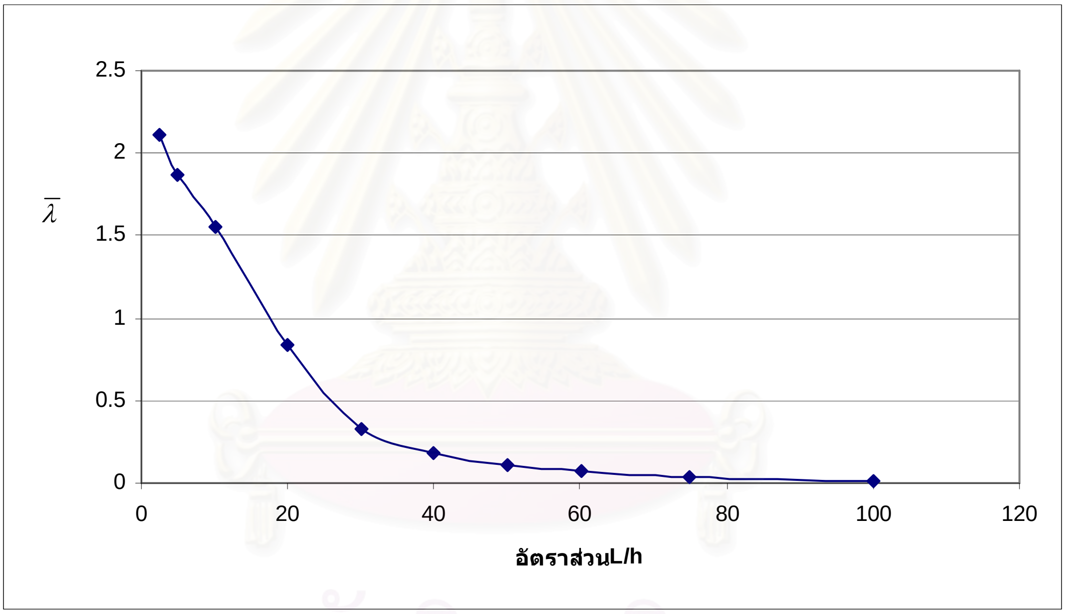
เมื่อ $\bar{\lambda}$ คือยูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสอง

T^{i}_{ANSYS} คืออุณหภูมิที่โนด i วิเคราะห์ด้วย ANSYS

T^{i}_{poly} คืออุณหภูมิที่โนด i วิเคราะห์ด้วยแบบจำลองพหุนามกำลังสาม



รูปที่ 5.29 กรณีศึกษาพารามิเตอร์ความกว้างต่อความหนา



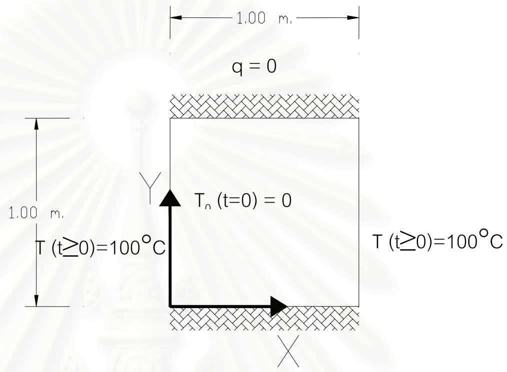
รูปที่ 5.30 ค่า $\bar{\lambda}$ ของอุณหภูมิที่อัตราส่วน L/h ใด ๆ

5.2 ปัญหาการนำความร้อนภาวะไม่คงที่

ในหัวข้อที่ 5.1 ได้กล่าวถึงปัญหาการนำความร้อนในกรณีต่าง ๆ ภาวะคงที่ ลำดับต่อไปจะกล่าวถึงปัญหาการนำความร้อนที่มีผลของเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยผลลัพธ์ของการกระจายอุณหภูมิ จะมีค่าแตกต่างกันไปเมื่อเวลาผ่านไป ในที่นี้จะกล่าวถึงการนำความร้อนภาวะไม่คงที่สองกรณีคือ การนำความร้อนในระนาบ x-y และการนำความร้อนในทิศทางความหนา โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงและงานวิจัยเก่าที่ผ่านมา โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.2.1 แผ่นจตุรัสชั้นเดียว

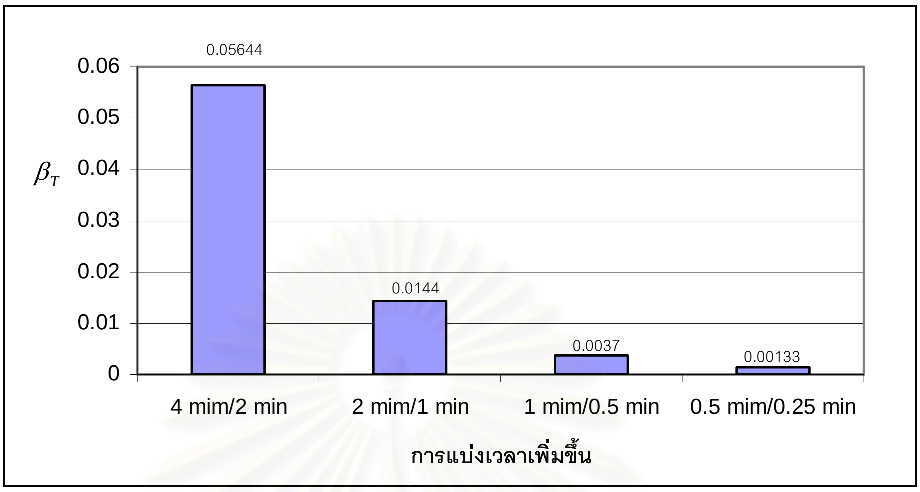
ปัญหานี้ทำการวิเคราะห์หาค่าการกระจายอุณหภูมิในระนาบ x-y ภาวะไม่คงที่สำหรับวัสดุเนื้อเดียวสม่ำเสมอมีขนาด 1×1ม. โดยกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสองข้าง ซ้ายและขวาเท่ากับ 0°C และให้อุณหภูมิที่เวลา t ใด ๆเท่ากับ 100°C ดังแสดงในรูปที่ 5.31 กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 236 W/m^2°C ความร้อนจำเพาะเท่ากับ 896 J/kg°C และความหนาแน่นของมวลเท่ากับ 2702 kg/m^3



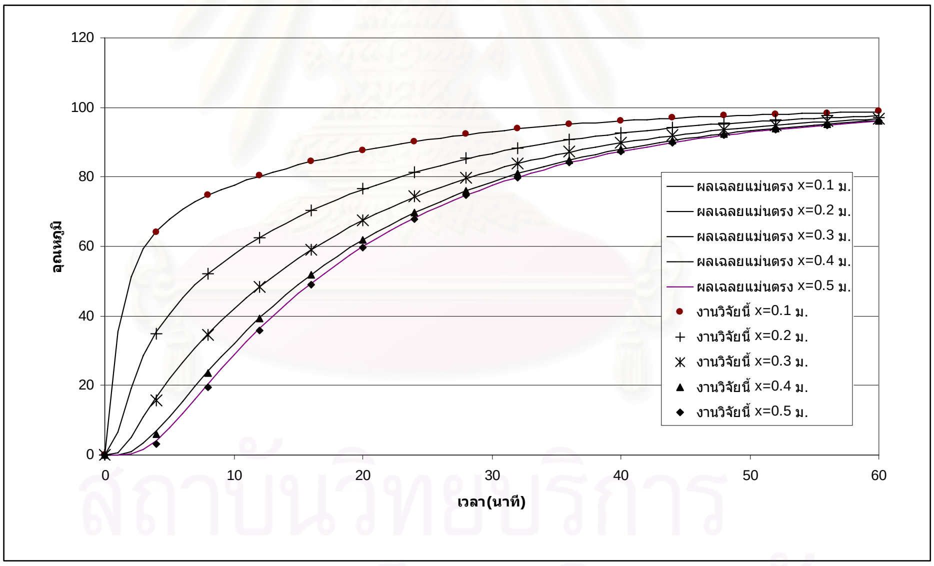
รูปที่ 5.31 แผ่นจตุรัสชั้นเดียว

ในการวิเคราะห์จะเริ่มจากการหาค่าการลู่เข้าของ β_T โดยแยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนของการแบ่งเอลิเมนต์ในปัญหานี้เมื่อพิจารณาภาวะคงที่ทำการกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสองด้านเท่ากับ 0°C เมื่อทำการวิเคราะห์พบว่า ค่าผลลัพธ์การกระจายอุณหภูมิคงเดิมเมื่อแบ่งเอลิเนต์ใดๆ 100°C ในที่นี้จึงไม่แสดงค่าการลู่เข้าของ β_T เมื่อทำการแบ่งเอลิเนต์เพิ่มขึ้น ส่วนที่สอง เป็นการหาค่าการลู่เข้าในการแบ่งช่วงเวลาในการวิเคราะห์ ในที่นี้จึงเริ่มทำการแบ่งเวลาช่วงละ 4, 2, 1, 0.5 และ 0.25 นาที และเมื่อพิจารณาค่าการลู่เข้าของ β_T จะเห็นได้ว่าเมื่อทำการแบ่งเวลาเพิ่มจาก 0.5 นาทีเป็น 0.25 นาที ค่าของ β_T มีค่าน้อย จึงเลือกใช้การแบ่งเวลาที่ 0.25 นาที ดังแสดงในรูปที่ 5.32

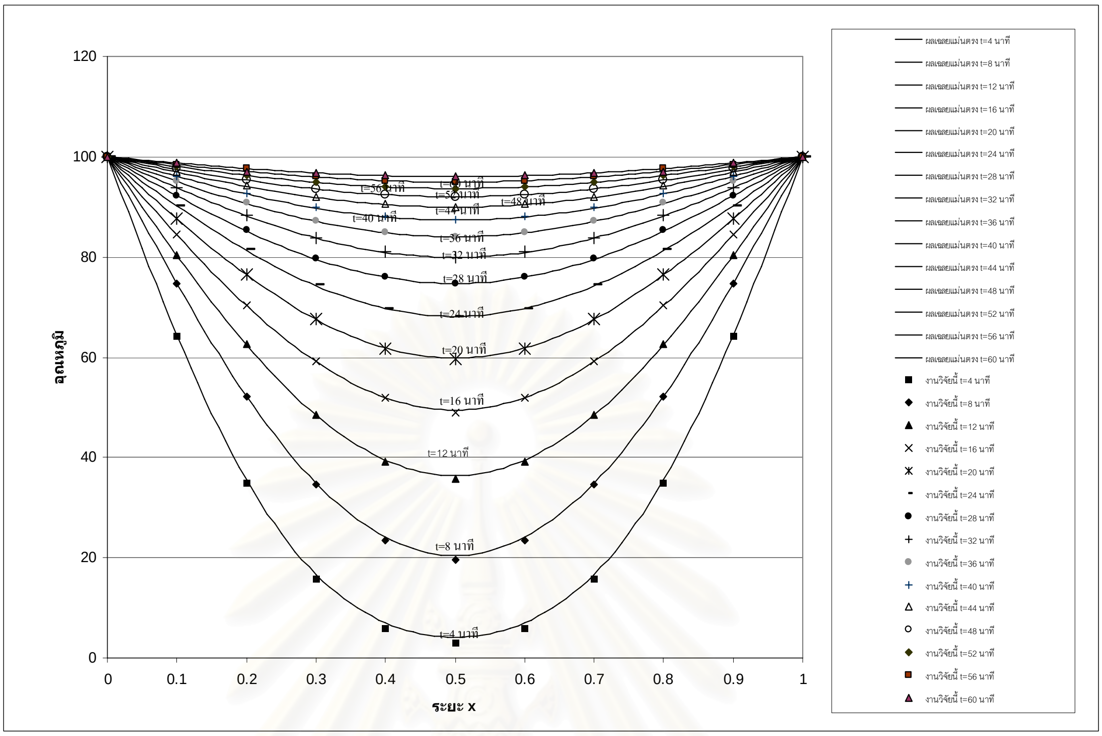
ผลการเปรียบเทียบระหว่างงานวิจัยนี้กับผลเฉลยแม่นตรง (สุนันท์ ศรัณยนิตย์, 2002) โดยแสดงการกระจายอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ของเผ่นประกอบที่เวลาใด ๆ ในรูปที่ 5.33 และ 5.34 ผลการศึกษาจะเห็นได้ว่าในช่วงเริ่มต้นของเวลาที่ 0 ถึง 12 นาที จะมีค่าคลาดเคลื่อนสูง 27.049% แต่เมื่อเวลาผ่านไปมากกว่า 12 นาที ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเพียง 0.814%



รูปที่ 5.32 ค่า β_T ของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางเมื่อแบ่งช่วงเวลาต่าง ๆ



รูปที่ 5.33 เปรียบเทียบค่าการกระจายอุณหภูมิระยะ x ต่าง ๆ ที่เวลาใด ๆ กับผลเฉลยแม่นตรง



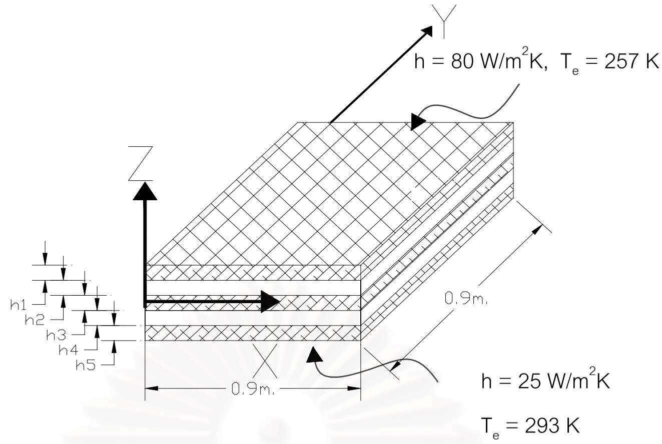
รูปที่ 5.34 เปรียบเทียบค่าการกระจายอุณหภูมิที่เวลาใด ๆ กับผลเฉลยแม่นตรง

5.2.2 แผ่นประกอบ 5 ชั้น

ในปัญหานี้ทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบจำนวน 5 ชั้น ใช้วัสดุ 2 วัสดุ โดยมีลักษณะการวางของวัสดุสลับชั้น และความหนาในแต่ละชั้นแตกต่างกัน มีคุณสมบัติดังตาราง 5.7 กำหนดการพาความร้อนที่ผิวบนและผิวล่าง โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 80 และ 25 W/m^2K ตามลำดับ และอุณหภูมิบรรยากาศโดยรอบ 257 และ 293 K ตามลำดับแสดงดังรูปที่ 5.35

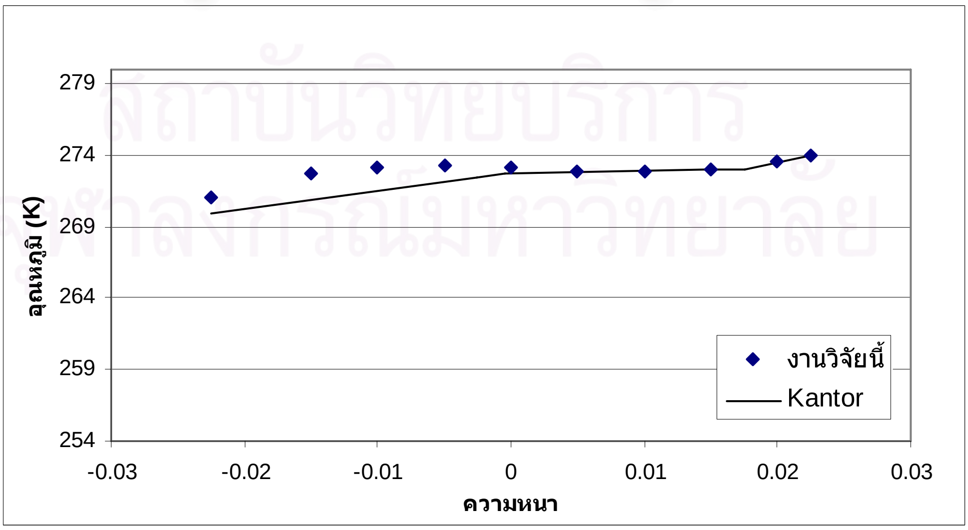
ตารางที่ 5.7 คุณสมบัติวัสดุแต่ละชั้นกรณีแผ่นประกอบ 5 ชั้น

ชั้นที่	ความหนา (m.)	k (W/m K)	c_v (J/kg K)	ρ (kg/m^3)
1	5×10^{-3}	1.60	0.75	2500
2	3×10^{-3}	0.17	1.50	1200
3	1.5×10^{-2}	1.60	0.75	2500
4	2×10^{-3}	0.17	1.50	1200
5	2×10^{-2}	1.60	0.75	2500

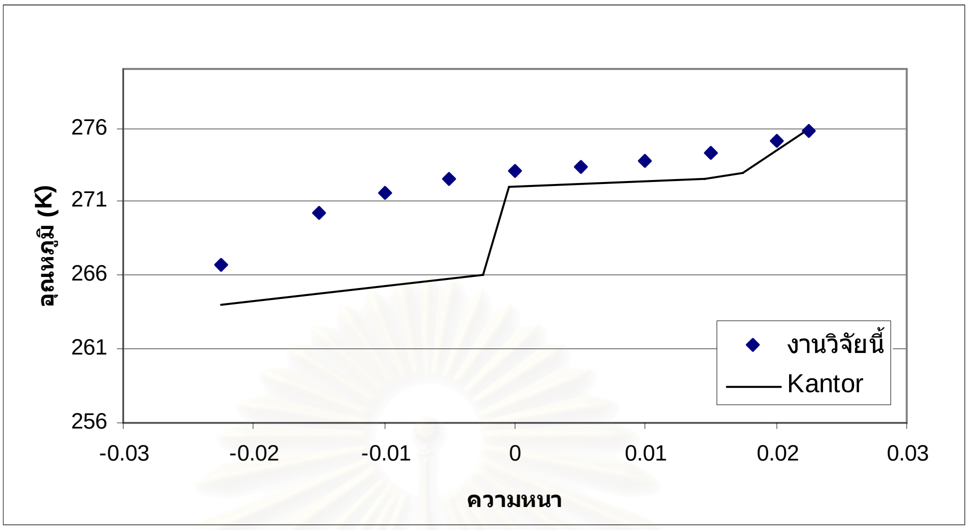


รูปที่ 5.35 แผ่นประกอบ 5 ชั้น

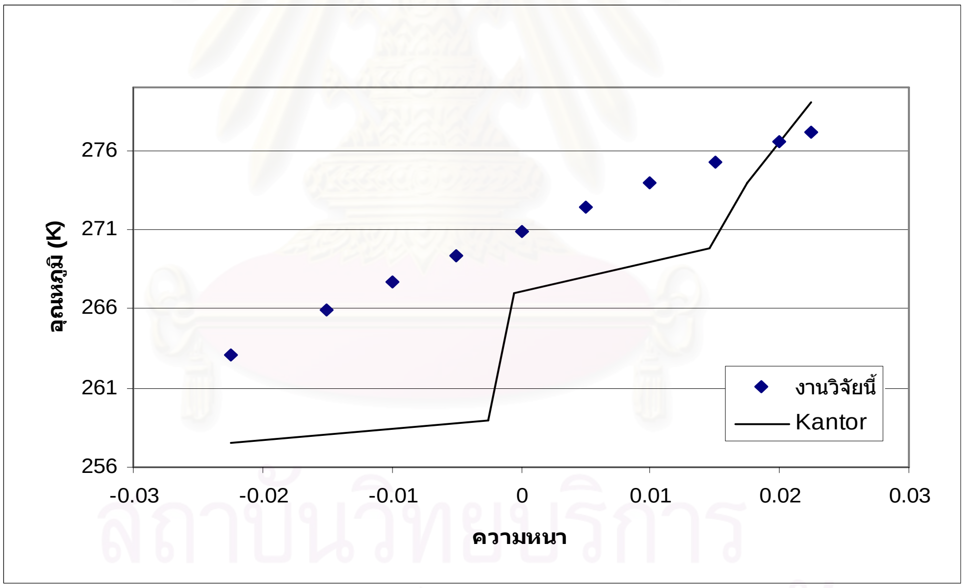
ผลการเปรียบเทียบระหว่างงานวิจัยนี้กับ Kantor (2001) ซึ่งได้ใช้ Legendre polynomials แทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา แล้วหาผลเฉลยในรูปผลเฉลยแผ่นตรง ซึ่งผลการเปรียบเทียบได้แสดงการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาเมื่อเวลา 10, 100, 1000 วินาที ดังแสดงในรูปที่ 5.36 ถึง 5.38 จะเห็นได้ว่า เมื่อเวลาที่ 10 วินาที การกระจายอุณหภูมิของงานวิจัยนี้มีแนวโน้มในทิศทางเดียวกันกับ Kantor และเมื่อเวลาที่ 100 วินาที ค่าการกระจายอุณหภูมิใน 3 ชั้นแรกมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ในชั้นที่ 4 และ 5 ค่าจะต่างกันมาก และเมื่อเวลาผ่านไป 1000 วินาที การกระจายอุณหภูมิในวิจัยนี้มีค่าแตกต่างกันกับ Kantor ทั้งนี้ผลสืบเนื่องจากขอจำกัดของขอบเขตการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม โดยที่จะใช้ได้ดีเมื่อช่วงของอัตราส่วน $\frac{k_1}{k_2}$ อยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 2 และจำนวนชั้นของแผ่นประกอบไม่ควรเกิน 3 ชั้น แต่ในที่นี้มีค่าอัตราส่วน $\frac{k_1}{k_2}$ เท่ากับ 9.41 และมีจำนวน 5 ชั้นซึ่งมากเกินขอบเขตของงานวิจัยนี้



รูปที่ 5.36 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาที่เวลา t = 10 วินาที



รูปที่ 5.37 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาที่เวลา t = 100 วินาที



รูปที่ 5.38 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาที่เวลา t = 1000 วินาที

5.3 สรุปผล

จากการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิ ระหว่างงานวิจัยนี้กับผลเฉลยแม่นตรง งานวิจัยเก่าที่ผ่านมาและโปรแกรม ANSYS เมื่อพิจารณาภาวะคงที่ในกรณีสองมิติเห็นได้ว่า แบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้ใช้ได้ดีไม่ว่ารูปร่างของปัญหาจะมีรูปร่างอย่างไร และภายใต้การกำหนดอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน และการพาความร้อน ลักษณะต่าง ๆ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 1.0% แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นขึ้นอยู่กับจำนวน รูปร่าง

ของเอลิเมนต์ในการแบ่งรูปร่างของแผ่นประกอบและเงื่อนไขขอบเขตซึ่งควรพิจารณาขนาดและจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ไปตามแต่ละกรณี บริเวณที่มีความเข้มของอุณหภูมิหรือบริเวณเงื่อนไขขอบเขตควรจะมีการแบ่ง เอลิเมนต์ให้มากกว่าบริเวณที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิแตกต่างไม่มากนัก และในกรณีแผ่นเรียบชั้นเดียวสามมิติภาวะคงที่แบบจำลองในวิจัยนี้ใช้ได้ดีเช่นเดียวกับในกรณีสองมิติ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 1% แต่ค่าคลาดเคลื่อนนี้จะขึ้นอยู่กับความหนาของแผ่นเรียบ ในกรณีที่แผ่นเรียบมีความหนาน้อยค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่าน้อย และในทางกลับกัน ในกรณีที่แผ่นเรียบมีความหนามาก ค่าคลาดเคลื่อนย่อมมากตามไปด้วย

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิภาวะไม่คงที่ ในกรณีสองมิติระนาบ x-y เห็นได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนจะสูงในช่วงเวลาเริ่มต้น แต่เมื่อเวลาผ่านไปช่วงหนึ่ง ค่าคลาดเคลื่อนจะน้อย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการแบ่งเวลาในการวิเคราะห์ ถ้าในกรณีที่ปัญหานั้น ๆ มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในช่วงเวลาเริ่มต้นสูง ควรทำการแบ่งจำนวนช่วงเวลาให้มากขึ้น เพื่อให้ค่าการกระจายอุณหภูมิในช่วงเวลาเริ่มต้นใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง และในกรณีปัญหาการกระจายอุณหภูมิแผ่นประกอบหลายชั้นภาวะไม่คงที่ ค่าคลาดเคลื่อนจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการกระจายอุณหภูมิภาวะคงที่ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์สี่ตัว หนึ่งค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $\frac{k_1}{k_2}$ ถ้าค่าอัตราส่วน $\frac{k_1}{k_2}$ มีค่ามาก หรือว่าน้อยเกินไปนั้นหมายความว่าการสัมประสิทธิ์การนำความร้อนวัสดุสองวัสดุแตกต่างกันมาก ทำให้การนำความร้อนในทิศทางความหนาแต่ละชั้นมีการหักเหระหว่างชั้นซึ่งกันและกัน ทำให้แบบจำลองการกระจายอุณหภูมิโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม มีความโค้งไม่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงจะทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนบริเวณรอยต่อระหว่างแผ่นประกอบ ซึ่งในงานวิจัยนี้เสนอว่าควรมีค่าอยู่ระห่าง $0.5 \leq \frac{k_1}{k_2} \leq 2$ (ดูรูปที่ 5.21 และ 5.22 ประกอบ) ส่วนพารามิเตอร์ที่สองคืออัตราส่วนความหนาในแต่ละชั้น $\frac{h_1}{h_2}$ ค่านี้จะมีค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดเมื่อค่า $\frac{h_1}{h_2}$ มีค่าเข้าใกล้กับ 1 (ดูรูปที่ 5.24 และ 5.25 ประกอบ) กล่าวคือ ถ้าในกรณีที่ $\frac{h_1}{h_2}$ เท่ากับ 1 จะทำให้การหักเหระหว่างสองชั้นเกิดค่ามากที่สุด เป็นผลให้ค่าคลาดเคลื่อนการกระจายอุณหภูมิระหว่างรอยต่อของแผ่นประกอบมากตาม ซึ่งในงานวิจัยนี้เสนอว่าค่า $\frac{h_1}{h_2}$ ควรมีค่าน้อยกว่า 0.5 หรือมีค่ามากกว่า 2 แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากผลของอัตราส่วน $\frac{h_1}{h_2}$ มีนัยสำคัญน้อยกว่าอัตราส่วน $\frac{k_1}{k_2}$ สาม จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ซึ่งจำนวนชั้นจะมีผลต่อการหักเหของอุณหภูมิในแต่ละชั้น ในงานวิจัยนี้ได้แปรผันจำนวนหนึ่งชั้นถึงหกชั้น และพบว่าแบบจำลองในงานวิจัยนี้ใช้ได้ดีเมื่อจำนวนชั้นของแผ่นประกอบไม่เกิน 3 ชั้น สี่ อัตราส่วนความกว้างต่อความหนา (L/h) ซึ่งมีผลต่อการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาเนื่องจากแบบจำลองในงานวิจัยนี้ ลดการวิเคราะห์ 3 มิติเหลือ 2 มิติ ดังนั้นถ้า L/h มีค่าน้อยรูปร่างของแผ่นประกอบมีลักษณะใกล้เคียงกับ 3 มิติมากขึ้น และในกรณีเดียวกันถ้า L/h มีค่ามาก รูปร่างแผ่นประกอบมีลักษณะ 2 มิติ ซึ่งในงานวิจัยนี้เสนอว่า L/h ควรมากกว่า 40 จึงจะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่าน้อย (ดูรูปที่ 5.30 ประกอบ)

เมื่อได้ตรวจสอบโปรแกรมการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิพบว่า มีความถูกต้องแล้วลำดับต่อไปจะเป็นส่วนของการหาหน่วยแรงภายใต้อุณหภูมิด้วยวิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม (TSDT) ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป

บทที่ 6

กรณีศึกษาเปรียบเทียบหน่วยแรงภายใต้อุณหภูมิ

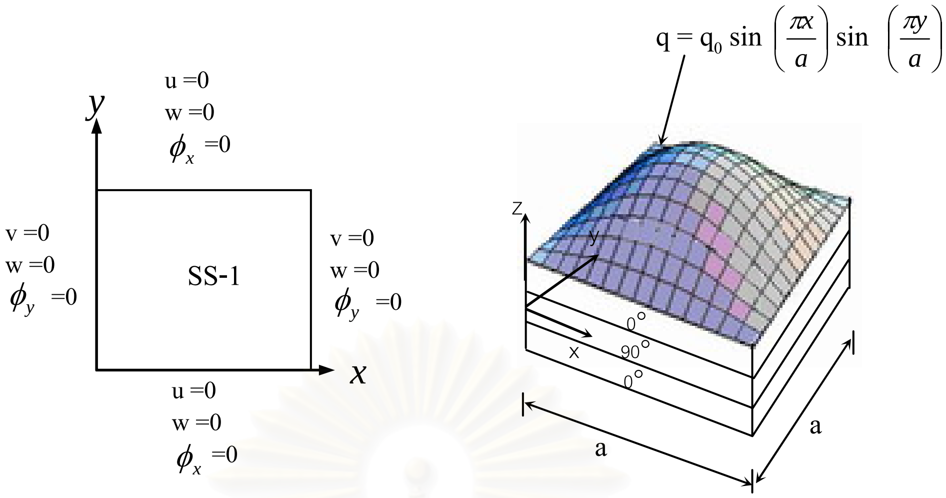
ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิของแผ่นประกอบ โดยนำผลการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิมารวมเข้ากับสมการการหาหน่วยแรงของแผ่นประกอบ ด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม (TSDT) ในที่นี้จะแยกการพิจารณาออกเป็น 2 ส่วน คือ การวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้แรงกระทำ และการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ โดยในส่วนแรกเพื่อตรวจสอบความถูกต้องการวิเคราะห์แผ่นประกอบกรณีที่ยังไม่คำนึงถึงอุณหภูมิมาเกี่ยวข้อง ส่วนที่สองจะทำการตรวจสอบว่า เมื่อนำฟังก์ชันการกระจายอุณหภูมิแบบพหุนามกำลังสามผนวกเข้ากับทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สามจะมีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด ซึ่งการตรวจสอบความถูกต้องนี้ได้ทำการตรวจสอบเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตที่มีผู้ได้ทำมาแล้ว โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

6.1 ปัญหาแผ่นประกอบภายใต้แรงกระทำ

ในการตรวจสอบเปรียบเทียบปัญหาแผ่นประกอบภายใต้แรงกระทำ จะทำการตรวจสอบโดยแยกออก 5 กรณี โดยแต่ละกรณีจะมีจุดประสงค์ในการเปรียบเทียบแตกต่างกัน ทั้งนี้เนื่องจากลักษณะแผ่นประกอบมีตัวแปรหลายตัวแปร เช่น จำนวนชั้น ทิศทางคุณสมบัติ ขนาด ลักษณะแรงกระทำ ความหนา และลักษณะจุดรองรับ จึงได้แยกกรณีศึกษาต่าง ๆ โดยมีรายละเอียดดังนี้

6.1.1 แผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

กรณีศึกษานี้จะทำการวิเคราะห์หาหน่วยแรงภายใต้แรงกระทำแบบไซน์ (sinusoidal load) ของแผ่นประกอบจำนวน 3 ชั้น ทิศทางคุณสมบัติวัสดุแต่ละชั้นแผ่นประกอบ ประกอบด้วยวัสดุชั้นที่หนึ่ง 0 องศา ชั้นที่สอง 90 องศา และชั้นที่สาม 0 องศา หรือเขียนโดยย่อได้ว่า 0/90/0 โดยมีขนาดสี่เหลี่ยมจตุรัส และมีจุดรองรับแบบง่าย SS-1 มีคุณสมบัติวัสดุในแต่ละชั้นคือ ค่า $E_1 = 25\ E_2$, G_{12} และ $G_{13} = 0.5\ E_2$, ν_{12} และ $\nu_{13} = 0.25$ เมื่อ E_1, E_2 คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในแกน 1 และแกน 2 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ ส่วน G_{12}, G_{13} คือค่าโมดูลัสเฉือนยืดหยุ่นในระนาบ 1-2 และ 1-3 และ ν_{12}, ν_{13} คืออัตราส่วนปัวส์ซองระนาบ 1-2 และ 1-3 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ ลักษณะปัญหาแสดงดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 แผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

ในการวิเคราะห์จะเริ่มจากการหาค่า β_w ดังได้กล่าวไว้ในสมการ (5.1) โดยที่ผลลัพธ์ x_i^{Δ} จะพิจารณาค่าการกระจัดในทิศทางความหนา โดยเริ่มจากการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 100, 400, 900 และ 1600 เอลิเมนต์ ผลการลู่เข้าแสดงดังรูปที่ 6.2 ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ 900 เป็น 1600 เอลิเมนต์แล้วค่า β_w มีค่าน้อยมาก ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำการแบ่งเอลิเมนต์ 1600 เอลิเมนต์

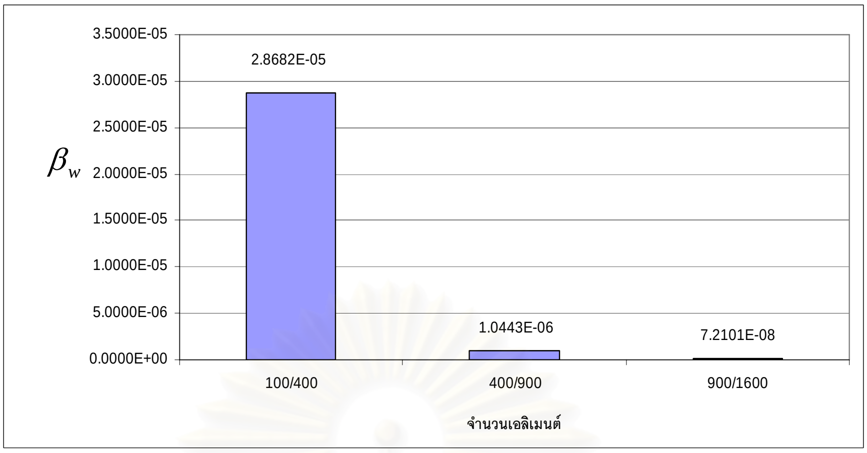
ในการหาผลลัพธ์การกระจัดและความเค้น ในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการแปลงค่าผลลัพธ์นี้ให้อยู่ในเทอมไร้มิติ ทั้งนี้เพื่อที่สะดวกในการนำไปเปรียบเทียบงานวิจัยเก่าที่ผ่านมา โดยในที่นี้จะให้ค่าผลลัพธ์อยู่ในเทอมไร้มิติ คือ

$$\bar{w} = w_0\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)\times\frac{E_2h^3}{a^4q_0}\times 100 \qquad \text{(6.1ก)} \quad , \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{a^2q_0} \qquad \text{(6.1ข)}$$

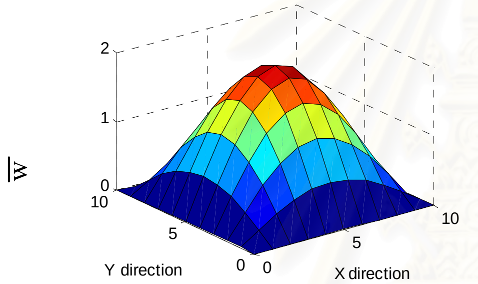
$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\times\frac{h^2}{a^2q_0} \qquad \text{(6.1ค)} \quad , \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}\left(0,0,\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{a^2q_0} \qquad \text{(6.1ง)}$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}\left(0,\frac{b}{2},0\right)\times\frac{h}{aq_0} \qquad \text{(6.1จ)} \quad , \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2},0,0\right)\frac{h}{aq_0} \qquad \text{(6.1ฉ)}$$

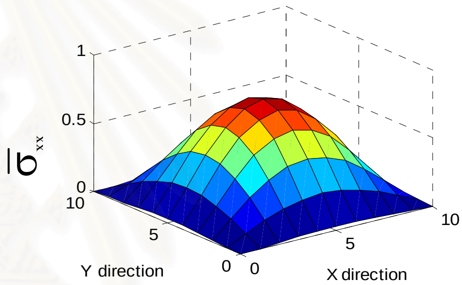
จากการเปรียบเทียบหน่วยแรงของแผ่นประกอบระหว่างงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของ Sheikh และ Chakrabarti (2003) ซึ่งได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงด้วยวิธี TSDT, Reddy (1996) ซึ่งใช้วิธี Levy ในการหาผลลัพธ์ในรูปของไซน์และโคไซน์, Pagano (1970) ได้หาผลเฉลยแม่นตรงในการคิดแรงเฉือนแยกออกเป็นแต่ละชั้นตามจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ และทำการแก้ทั้งระบบสมการ, Wu และคณะ (2004) ได้ใช้วิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นสูง (HSDT) โดยคิดแรงเฉือนแยกเป็นชั้น ๆ ตามจำนวนชั้นของแผ่นประกอบ, Rastagar และคณะ (2003) ได้ใช้วิธี TSDT ผนวกกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตใช้วิธีของ Navier ค่าเปรียบเทียบดังกล่าวได้แสดงตารางเปรียบเทียบที่ 6.1 และ 6.2 จะพบว่า ผลลัพธ์จะมีค่าใกล้เคียงกับ Reddy โดยมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.1261%, 0.278%, 40.133% สำหรับ $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}$ และ $\bar{\sigma}_{yz}$ ส่วนค่า $\bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ มีค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับ Sheikh และ Chakrabarti เท่ากับ 1.422%, 0.930% และ 20.533% ตามลำดับ โดยแสดงรูปการกระจายในระนาบ x-y ของ $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yz}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ ในรูปที่ 6.3



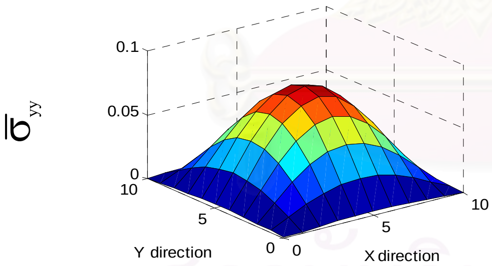
รูปที่ 6.2 ค่า β_w ของการกระจัดในทิศทางความหนาเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์มากขึ้นเมื่อ a/h=4



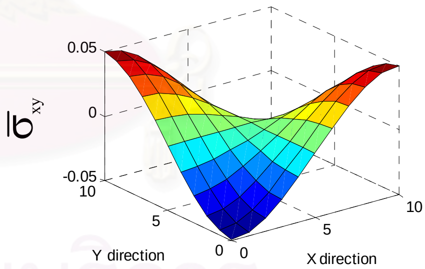
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



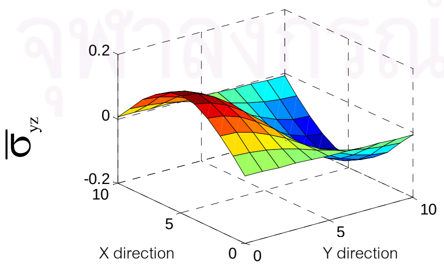
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



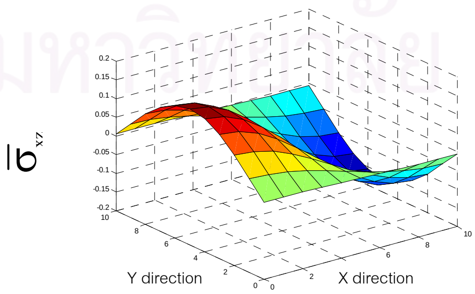
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$



จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0



ฉ) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

รูปที่ 6.3 ผลลัพธ์ $\overline{w}, \overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}, \overline{\sigma}_{xy}, \overline{\sigma}_{yz}$ และ $\overline{\sigma}_{xz}$ ของแผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์เมื่อ a/h=4

ตารางที่ 6.1 เปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของแผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

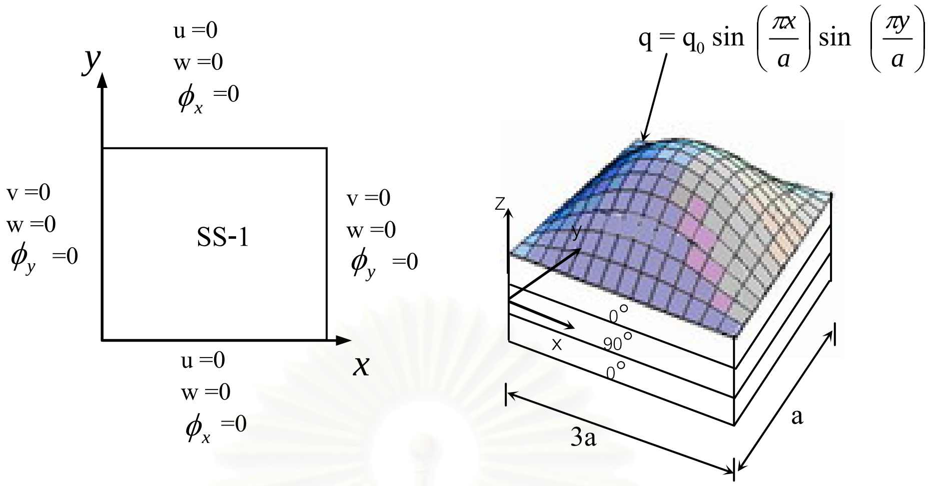
a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{yy}$	$\overline{\sigma}_{xy}$	$\overline{\sigma}_{yz}$	$\overline{\sigma}_{xz}$
4	10x10	TSDT	1.9074	0.7084	0.4854	0.0465	0.1828	0.1955
	20x20	TSDT	1.9182	0.7279	0.4984	0.0487	0.1836	0.2007
	30x30	TSDT	1.9200	0.7315	0.5008	0.0498	0.1833	0.2016
	40x40	TSDT	1.9208	0.7328	0.5017	0.0498	0.1833	0.2020
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	1.9230	0.7500	0.5080	0.0499	0.1831	0.2023
	Reddy	TSDT	1.9220	0.7345	-	-	0.1832	-
	Pagano	แม่นตรง	2.006	0.801	0.534	0.0505	0.217	0.256
	Wu	HSDT	2.0724	0.7669	0.5764	0.0523	0.2152	0.2576
	Rastagar Aagaah	TSDT	1.97	0.775	-	-	0.217	-
10	10x10	TSDT	0.7069	0.5450	0.2599	0.0268	0.1134	0.2400
	20x20	TSDT	0.7111	0.5625	0.2667	0.0274	0.1076	0.2437
	30x30	TSDT	0.7119	0.5658	0.2680	0.0278	0.1055	0.2443
	40x40	TSDT	0.7121	0.5669	0.2684	0.0278	0.1045	0.2444
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	0.7140	0.5806	0.2722	0.0279	0.1015	0.2437
	Reddy	TSDT	0.7130	0.5684	-	-	0.1033	-
	Pagano	แม่นตรง	0.7405	0.5900	0.2850	0.0289	0.1228	0.3570
	Wu	HSDT	0.7637	0.5864	0.2946	0.0290	0.1222	0.3561
	Rastagar Aagaah	TSDT	0.773	0.571	-	-	0.0915	-
100	10x10	TSDT	0.4271	0.5164	0.1733	0.0204	0.3567	0.4698
	20x20	TSDT	0.4328	0.5333	0.1789	0.0208	0.1576	0.3502
	30x30	TSDT	0.4337	0.5364	0.1799	0.0213	0.1193	0.3086
	40x40	TSDT	0.4339	0.5375	0.1802	0.0213	0.1051	0.2894
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	0.4350	0.5496	0.1828	0.0215	0.0749	0.2401
	Reddy	TSDT	0.4340	0.5390	-	-	0.0750	-
	Pagano	แม่นตรง	0.4368	0.539	0.181	0.0213	0.0828	0.395
	Wu	HSDT	0.463	0.5426	-	-	0.0791	-
	Rastagar Aagaah	TSDT	0.4351	0.552	0.1743	0.0213	0.0667	0.3723

ตารางที่ 6.2 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนกรณีแผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

a/h	งานวิจัยเก่า	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
4	Sheikh,Chakrabarti	0.114	2.293	1.240	0.200	0.109	0.148
	Reddy	0.062	0.231	-	-	0.055	-
	Pagano	4.247	8.514	6.049	1.386	15.530	21.094
	Wu	7.315	4.446	12.960	4.780	14.823	21.584
	Rastagar Aagaah	2.497	5.445	-	-	15.530	-
10	Sheikh,Chakrabarti	0.266	2.360	1.396	0.358	2.956	0.287
	Reddy	0.1261	0.264	-	-	1.162	-
	Pagano	3.835	3.915	5.825	3.806	14.902	31.541
	Wu	6.757	3.325	8.893	4.138	14.484	31.368
	Rastagar Aagaah	7.878	0.770	-	-	14.208	-
100	Sheikh,Chakrabarti	0.253	2.202	1.422	0.9302	40.320	20.533
	Reddy	0.023	0.278	-	-	40.133	-
	Pagano	0.664	0.278	0.442	0	26.932	26.734
	Wu	6.285	0.940	-	-	32.870	-
	Rastagar Aagaah	0.276	2.644	3.385	0	57.571	22.267

6.1.2 แผ่นประกอบสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

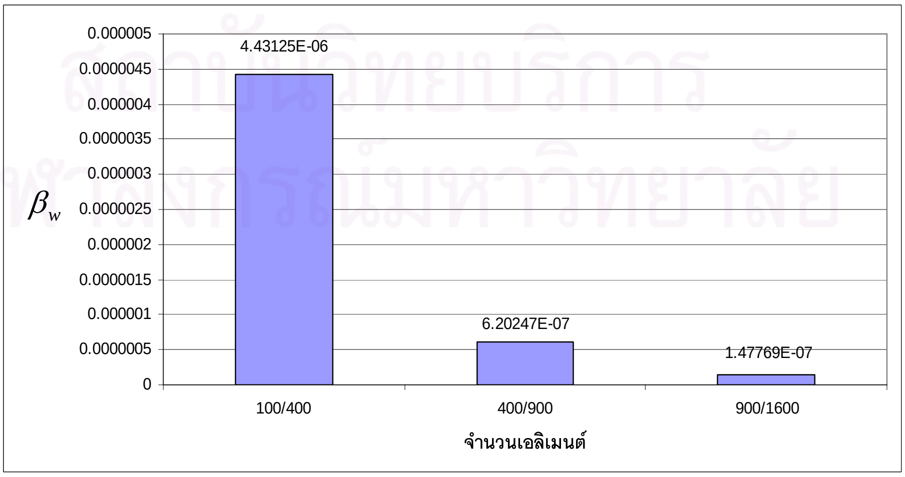
กรณีศึกษานี้ ทำการวิเคราะห์หาหน่วยแรงภายใต้แรงกระทำแบบไซน์ของแผ่นประกอบจำนวน 3 ชั้น ทิศทางวัสดุ 0/90/0 และมีจุดรองรับแบบง่าย SS-1 คุณสมบัติในแต่ละชั้นคือ E_1=25 E_2 , G_{12} และ G_{13}=0.5 E_2 , ν_{12} และ ν_{13}=0.25 เช่นเดียวกันกับกรณีที่ผ่านมาแต่จะมีขนาดความยาวเป็นสามเท่ากับความกว้าง ลักษณะปัญหาแสดงดังรูปที่ 6.4



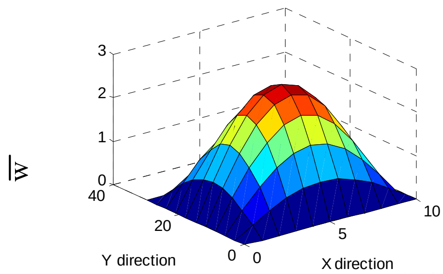
รูปที่ 6.4 แผ่นประกอบสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

เริ่มวิเคราะห์โดยการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อหาค่า β_w เช่นเดียวกับปัญหาที่ผ่านมา โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์ 100, 400, 900 และ 1600 เอลิเมนต์ เมื่อพิจารณาการลู่เข้าของ ค่า β_w ในรูปที่ 6.5 เห็นได้ว่า เมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ 900 เป็น 1600 เอลิเมนต์ แล้วค่า β_w มีค่าน้อย จึงพิจารณาการแบ่งเอลิเมนต์ 1600 เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์สำหรับปัญหานี้

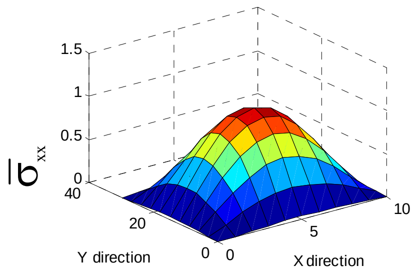
จากการวิเคราะห์และเปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของ Sheikh และ Chakrabarti (2003) , Reddy (1996) และ Pagano (1970) ได้แสดงตารางเปรียบเทียบที่ 6.3 และ 6.4 พบว่า ในงานวิจัยนี้มีค่าใกล้เคียงกันกับ Reddy โดยมีค่าคลาดเคลื่อนสูงเท่ากับ 0.0592%, 0.281%, 0.395%, 18.064%, 53.488% และ 12.335% สำหรับค่า $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yz}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ ตามลำดับ และได้แสดงรูปการกระจายผลลัพธ์ในระนาบ x-y ในรูปที่ 6.6



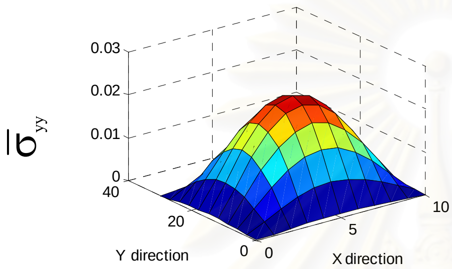
รูปที่ 6.5 ค่า β_w ของการกระจัดในทิศทางความหนาเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์มากขึ้นเมื่อ a/h=4



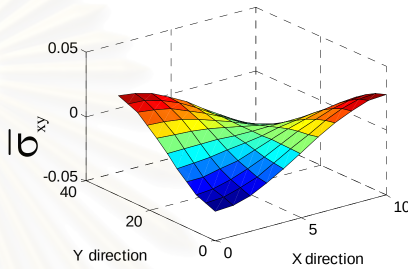
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



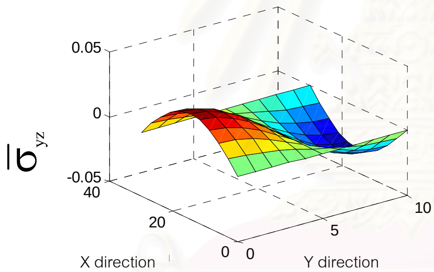
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



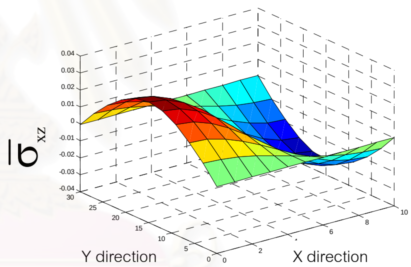
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$



จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0



ฉ) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

รูปที่ 6.6 ผลลัพธ์ $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yz}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ ของแผ่นประกอบสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์เมื่อ a/h=4

ตารางที่ 6.3 เปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของแผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

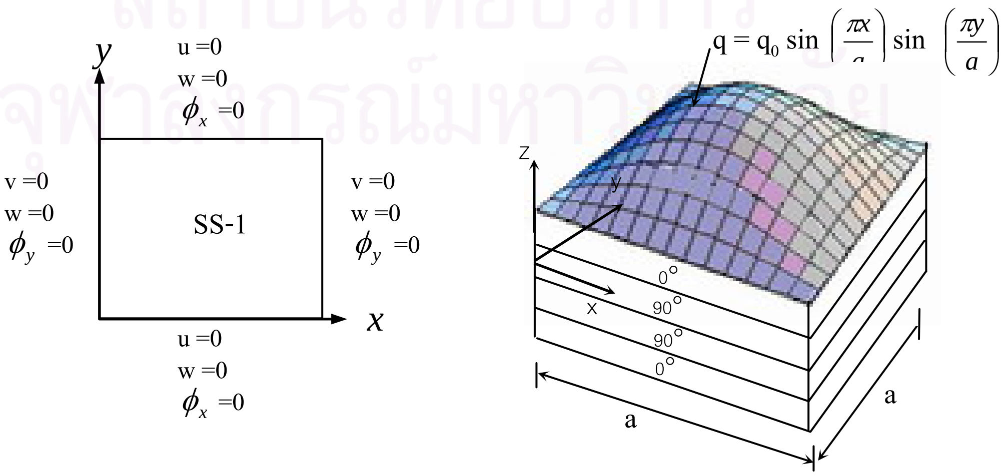
a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
4	10x10	TSDT	2.6333	0.9996	0.0998	0.0335	0.0331	0.2605
	20x20	TSDT	2.6363	1.0265	0.1019	0.0305	0.0343	0.2698
	30x30	TSDT	2.6387	1.0317	0.1024	0.0294	0.0350	0.2713
	40x40	TSDT	2.6397	1.0335	0.1026	0.0277	0.0350	0.2718
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	**2.6437**	**1.0650**	**0.1209**	**0.0264**	**0.0320**	**0.2723**
	Reddy	TSDT	**2.6411**	**1.0356**	**0.1028**	**0.0263**	**0.0348**	**0.2724**
	Pagano	แม่นตรง	**2.820**	**1.100**	**0.119**	**0.0281**	**0.0334**	**0.387**
10	10x10	TSDT	0.8592	0.6639	0.0388	0.0147	0.0115	0.2750
	20x20	TSDT	0.8607	0.6851	0.0395	0.0137	0.0168	0.2839
	30x30	TSDT	0.8614	0.6891	0.0397	0.0131	0.0172	0.2852
	40x40	TSDT	0.8617	0.6905	0.0397	0.0127	0.0172	0.2855
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	**0.8649**	**0.7164**	**0.0383**	**0.0177**	**0.0106**	**0.2851**
	Reddy	TSDT	**0.8622**	**0.6924**	**0.0398**	**0.0155**	**0.0170**	**0.2859**
	Pagano	แม่นตรง	**0.9190**	**0.7250**	**0.0435**	**0.0123**	**0.0152**	**0.4200**
20	20x20	TSDT	0.5925	0.6337	0.0287	0.0098	0.0139	0.2901
	30x30	TSDT	0.5932	0.6376	0.0288	0.0098	0.0143	0.2892
	40x40	TSDT	0.5934	0.6389	0.0288	0.0098	0.0143	0.2887
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	**0.5965**	**0.6634**	**0.0274**	**0.0092**	**0.0135**	**0.2859**
	Reddy	TSDT	**0.5937**	**0.6407**	**0.0289**	**0.0091**	**0.0139**	**0.2880**
	Pagano	แม่นตรง	**0.6100**	**0.650**	**0.030**	**0.0093**	**0.0119**	**0.434**
100	100x10	TSDT	0.4991	0.5982	0.0243	0.0080	0.1222	0.5242
	20x20	TSDT	0.5054	0.6174	0.0251	0.0082	0.0389	0.3935
	30x30	TSDT	0.5064	0.6210	0.0252	0.0084	0.0247	0.3462
	40x40	TSDT	0.5067	0.6223	0.0252	0.0084	0.0198	0.3242
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	**0.5097**	**0.6457**	**0.0253**	**0.0084**	**0.0129**	**0.2847**
	Reddy	TSDT	**0.5070**	**0.6240**	**0.0253**	**0.0083**	**0.0129**	**0.2886**
	Pagano	แม่นตรง	**0.5080**	**0.6240**	**0.0253**	**0.0083**	**0.0108**	**0.4390**

ตารางที่ 6.4 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีแผ่นประกอบจตุรัสสามชั้น 0/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

a/h	งานวิจัยเก่า	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
4	Sheikh,Chakrabarti	0.151	2.958	15.136	4.924	9.375	0.184
	Reddy	0.053	0.203	0.195	5.323	0.575	0.220
	Pagano	6.394	6.045	13.781	1.423	4.790	29.767
10	Sheikh,Chakrabarti	0.370	3.615	3.655	28.249	62.264	0.140
	Reddy	0.058	0.274	0.251	18.064	1.176	0.140
	Pagano	6.235	4.759	8.736	3.252	13.158	32.024
20	Sheikh,Chakrabarti	0.520	3.693	5.109	6.522	5.926	0.979
	Reddy	0.051	0.281	0.346	7.692	2.878	0.243
	Pagano	2.721	1.708	3.679	5.376	20.168	33.479
100	Sheikh,Chakrabarti	0.589	3.624	0.395	0	53.488	13.874
	Reddy	0.059	0.272	0.395	1.205	53.488	12.335
	Pagano	0.256	0.272	0.395	1.205	83.333	26.150

6.1.3 **แผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น** 0/90/90/0 **ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์**

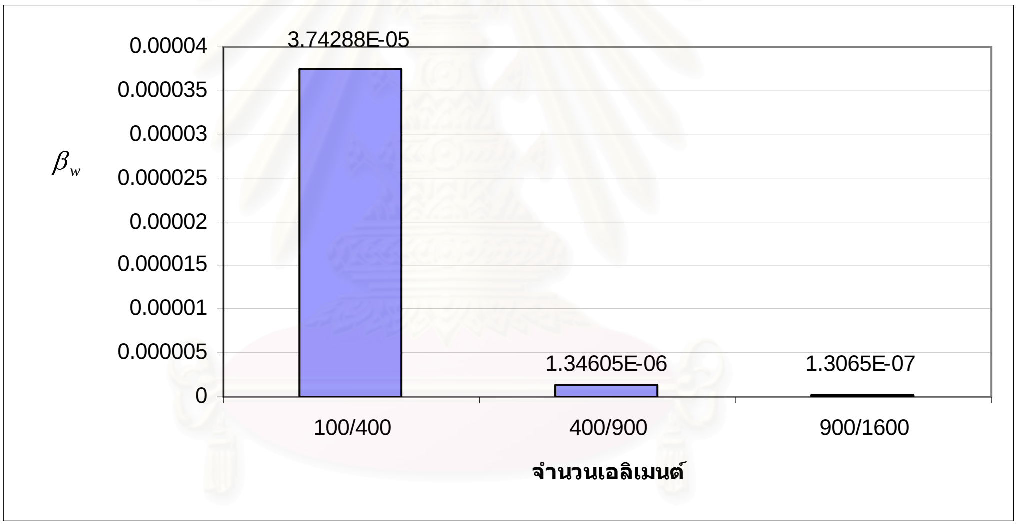
ปัญหากรณีศึกษานี้ ทำการวิเคราะห์หาการกระจัด และหน่วยแรงภายใต้แรงกระทำแบบไซน์ของแผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น ทิศทางคุณสมบัติ 0/90/90/0 โดยมีจุดรอบรับแบบง่าย SS-1 และมีคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้นคือ E_1=25 E_2 , G_{12} และ G_{13}=0.5 E_2 , ν_{12} และ ν_{13}=0.25 ลักษณะปัญหาแสดงดังรูปที่ 6.7



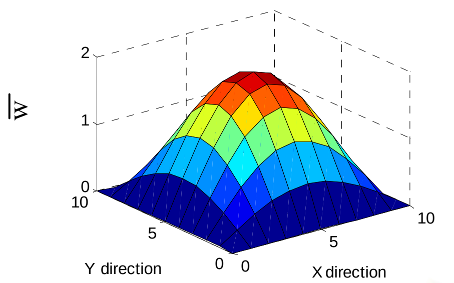
รูปที่ 6.7 แผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น 0/90/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

ในการวิเคราะห์จำเป็นต้องหาค่าการลู่เข้าของ β_w เพื่อหาจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อนำไปเปรียบเทียบ ในปัญหานี้เริ่มทำการแบ่งเอลิเมนต์ที่ 100, 400, 900 และ 1600 เอลิเมนต์ เมื่อพิจารณารูปที่ 6.8 เห็นได้ว่า เมื่อทำการเพิ่มเอลิเมนต์จาก 900 เป็น 1600 เอลิเมนต์ ค่า β_w มีค่าน้อยมากในปัญหานี้จึงเลือกใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 1600 เอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์

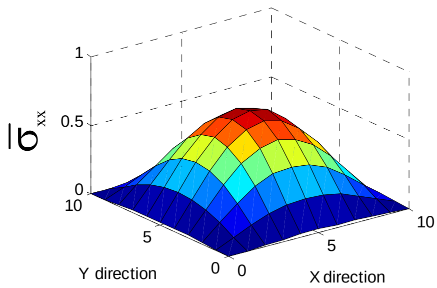
การวิเคราะห์และเปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาได้ทำการเปรียบเทียบกับ Wu และคณะ (2004) , Reddy (1996) , Akhras (2004) โดยแสดงการเปรียบเทียบดังตารางที่ 6.5 และ 6.6 แสดงรูปการกระจัดในทิศทางความหนาและความเค้นไร้มิติในแต่ละแกนดังรูปที่ 6.9 และแสดงความเค้นในทิศทางความหนาดังรูปที่ 6.10 และ 6.11 เมื่อพิจารณาตารางการเปรียบเทียบ 6.5 และ 6.6 เห็นได้ว่างานวิจัยนี้มีค่าใกล้เคียงกันกับ Reddy โดยมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเมื่อเทียบกับ Reddy เท่ากับ 0.115%, 0.278%, 7.303%, 0.373% และ 10.700% สำหรับค่า $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ ส่วนค่าผลลัพธ์ของ Aagaah และ Akhras จะมีค่าใกล้เคียงซึ่งกันและกัน โดยทั้งสองมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 2.944%, 2.649%, 2.420%, 40.355%, 13.410% และ 24.976% สำหรับ $\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yz}$ และ $\bar{\sigma}_{xz}$ ตามลำดับ



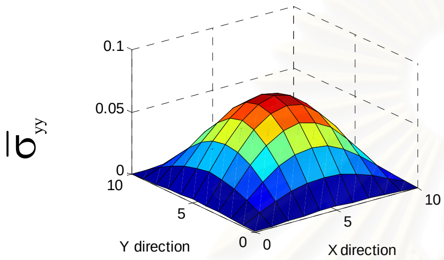
รูปที่ 6.8 ค่า β_w ของการกระจัดในทิศทางความหนาเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์มากขึ้นเมื่อ a/h=4



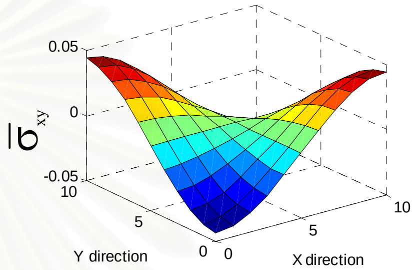
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



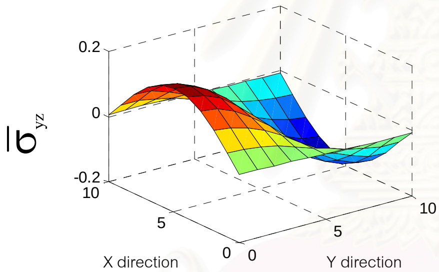
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



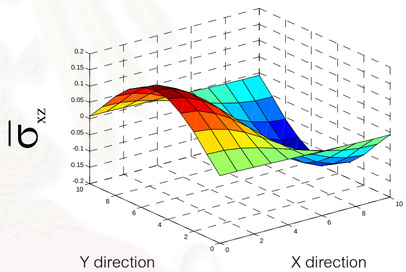
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$

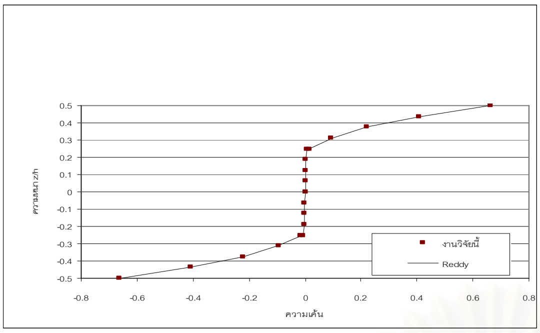


จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0

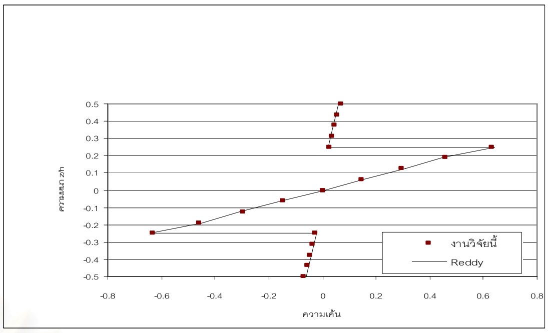


ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที z = 0

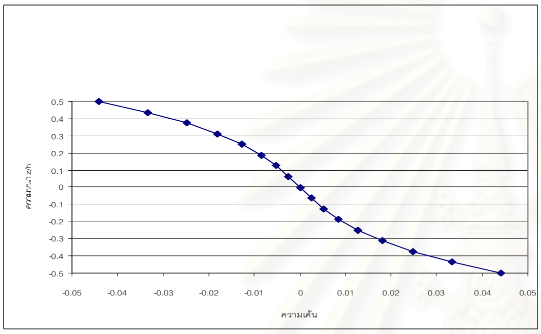
รูปที่ 6.9 ผลลัพธ์ $\overline{w}, \overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}, \overline{\sigma}_{xy}, \overline{\sigma}_{yz}$ และ $\overline{\sigma}_{xz}$ ของแผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น 0/90/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์เมื่อ a/h=4



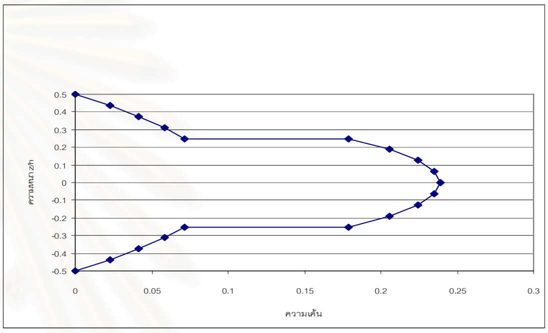
ก) $\overline{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)$



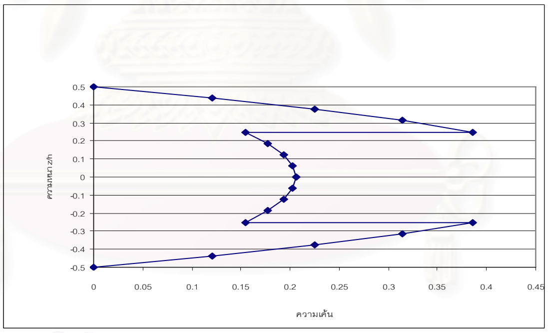
ข) $\overline{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)$



ค) $\overline{\sigma}_{xy}\left(0,0,z\right)$

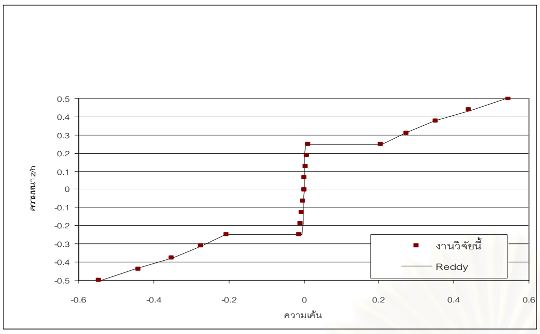


ง) $\overline{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2},0,z\right)$

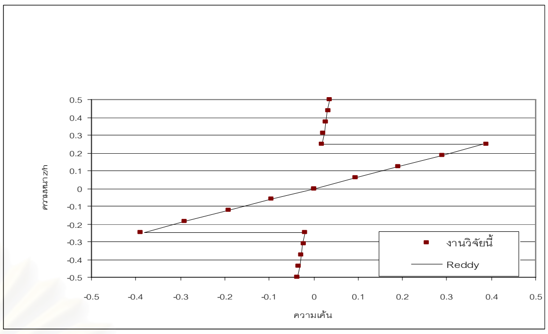


จ) $\overline{\sigma}_{xz}\left(0,\frac{b}{2},z\right)$

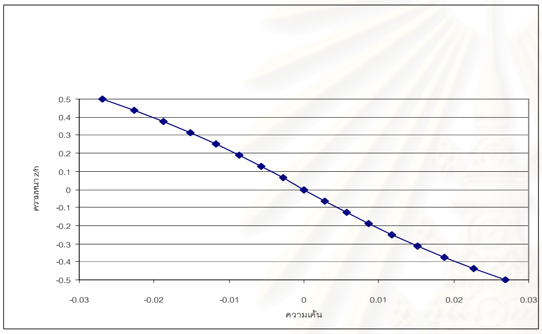
รูปที่ 6.10 การกระจายความเค้นไร้มิติเมื่อ a/h=4



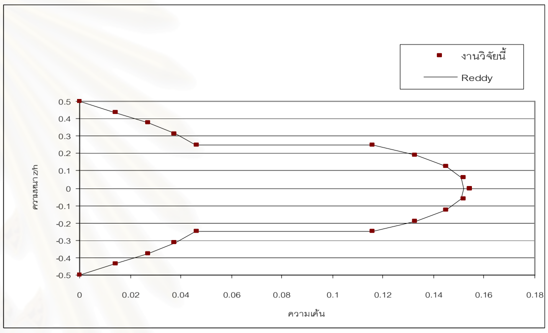
ก) $\overline{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)$



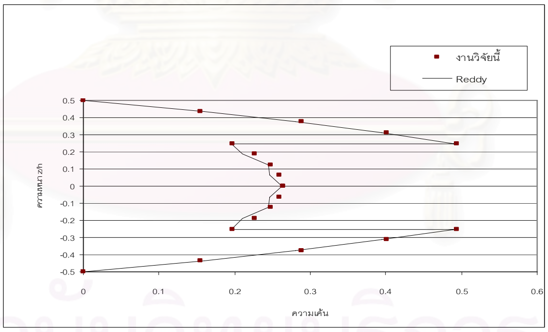
ข) $\overline{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)$



ค) $\overline{\sigma}_{xy}\left(0,0,z\right)$



ง) $\overline{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2},0,z\right)$



จ) $\overline{\sigma}_{xz}\left(0,\frac{b}{2},z\right)$

รูปที่ 6.11 การกระจายความเค้นไร้มิติเมื่อ a/h=10

ตารางที่ 6.5 เปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของแผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น 0/90/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

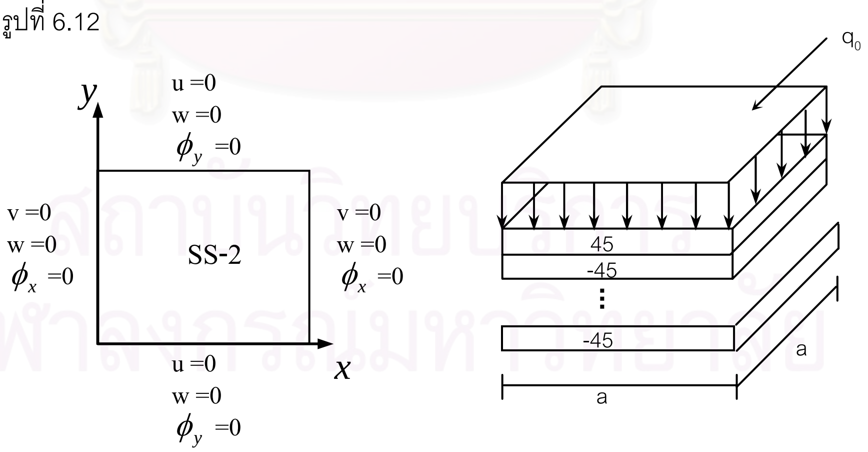
a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{yy}$	$\overline{\sigma}_{xy}$	$\overline{\sigma}_{yz}$	$\overline{\sigma}_{xz}$
4	10x10	TSDT	1.8778	0.6416	0.6082	0.0424	0.2375	0.1991
	20x20	TSDT	1.8896	0.6592	0.6261	0.0430	0.2388	0.2046
	30x30	TSDT	1.8919	0.6625	0.6295	0.0438	0.2389	0.2056
	40x40	TSDT	1.8926	0.6636	0.6307	0.0441	0.2389	0.2059
	Wu	TSDT	1.9500	0.6810	0.6470	0.0451	0.2440	0.2110
	Reddy	TSDT	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	-	0.2064
	Akhras	-	1.894	0.681	0.646	0.0450	-	0.211
10	10x10	TSDT	0.7086	0.5229	0.3749	0.0263	0.1645	0.2582
	20x20	TSDT	0.7132	0.5399	0.3852	0.0265	0.1579	0.2627
	30x30	TSDT	0.7141	0.5431	0.3872	0.0267	0.1555	0.2635
	40x40	TSDT	0.7143	0.5441	0.3879	0.0269	0.1545	0.2637
	Wu	TSDT	0.7320	0.5510	0.3940	0.0451	0.1630	0.2110
	Reddy	TSDT	0.7147	0.5456	0.3615	0.0268	-	0.2640
	Akhras	-	0.7149	0.5589	0.3974	0.0273	-	0.2697
100	10x10	TSDT	0.4273	0.5160	0.2600	0.0204	0.3955	0.5168
	20x20	TSDT	0.4329	0.5329	0.2683	0.0209	0.1992	0.3855
	30x30	TSDT	0.4338	0.5361	0.2697	0.0212	0.1609	0.3408
	40x40	TSDT	0.4340	0.5372	0.2702	0.0213	0.1463	0.3207
	Wu	TSDT	0.4350	0.5390	0.2750	0.0216	0.129	0.3080
	Reddy	TSDT	0.4345	0.5387	0.2708	0.0213	-	0.2897
	Akhras	-	0.4345	0.5507	0.2769	0.0217	-	0.2948

ตารางที่ 6.6 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีแผ่นประกอบจตุรัสสี่ชั้น 0/90/90/0 ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

a/h	งานวิจัยเก่า	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
4	Wu	2.944	2.555	2.519	2.217	2.090	2.417
	Reddy	0.059	0.226	0.237	0.227	-	0.242
	Akhras	0.069	2.498	2.414	2	-	2.371
10	Wu	2.419	1.252	1.548	40.355	5.215	24.976
	Reddy	0.056	0.275	7.303	0.373	-	0.114
	Akhras	0.084	2.649	2.391	1.466	-	2.225
100	Wu	0.230	0.334	1.745	1.389	13.410	4.123
	Reddy	0.115	0.278	0.222	0	-	10.700
	Akhras	0.115	2.451	2.420	1.843	-	8.786

6.1.4 แผ่นประกอบจตุรัสวางมุม 45 องศา ภายใต้แรงกระทำสม่ำเสมอ

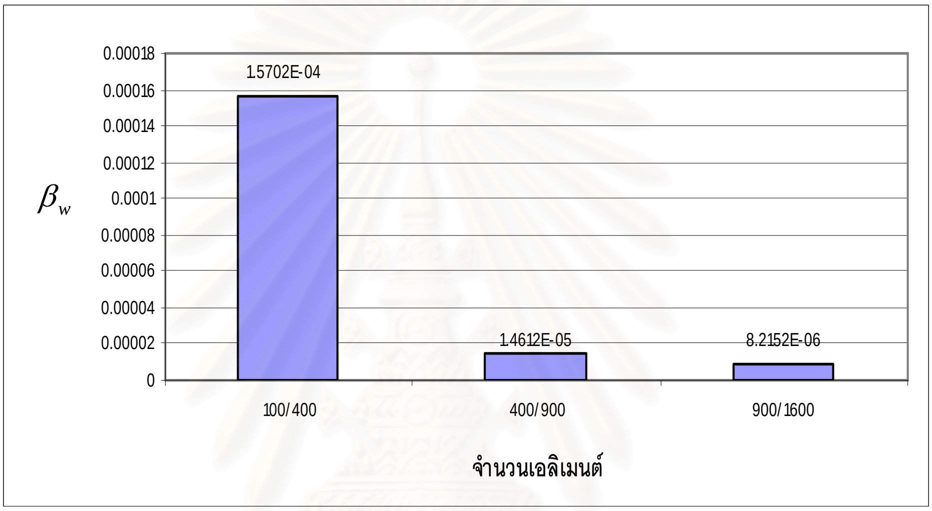
ปัญหานี้ได้ศึกษาแผ่นประกอบจำนวน 2 ชั้น และ 10 ชั้น โดยวางวัสดุแผ่นประกอบ 45/-45 สำหรับกรณี 2 ชั้น และ $[45/-45]_{5T}$ (เมื่อ 5T คือการวางสลับแบบไม่สมมาตร 45/-45 จำนวน 5 ชั้น) สำหรับกรณี 10 ชั้น และกำหนดความกว้างต่อความหนา a/h เท่ากับ 10 ภายใต้แรงกระทำสม่ำเสมอตลอดทั้งแผ่น โดยมีชนิดจุดรองรับแบบง่าย SS-2 และค่าคุณสมบัติวัสดุ คือ $E_1 = 25 E_2$, G_{12} และ $G_{13} = 0.5 E_2$, ν_{12} และ $\nu_{13} = 0.25$ โดยแสดงดังรูปที่ 6.12



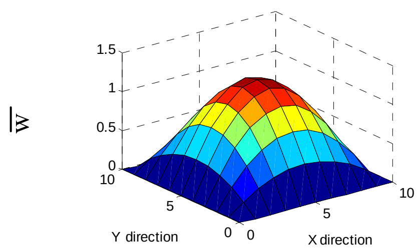
รูปที่ 6.12 แผ่นประกอบจตุรัสวางมุม 45 องศา ภายใต้แรงกระทำสม่ำเสมอ

ในการวิเคราะห์เริ่มจากการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์หาค่า β_w เมื่อหาจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ จึงเริ่มทำการแบ่งเอลิเมนต์ โดยเริ่มต้นที่ 100 เอลิเมนต์ แล้วเพิ่มเป็น 400, 900 และ 1600 เอลิเมนต์ เมื่อพิจารณาค่า β_w ดังรูปที่ 6.13 จะเห็นได้ว่าเมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์จาก 900 เอลิเมนต์เป็น 1600 เอลิเมนต์ ค่า β_w มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการแบ่ง 100 เป็น 400 เอลิเมนต์ และจาก 400 เอลิเมนต์ เป็น 900 เอลิเมนต์

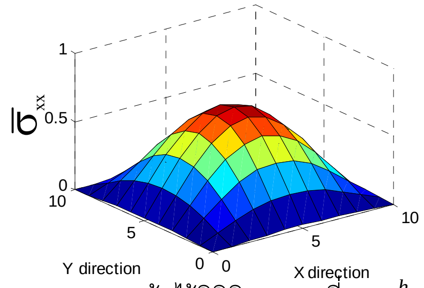
ผลการวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของ Sheikh และ Chakrabarti (2003) และ Reddy (1989) ได้แสดงผลลัพธ์การกระจัดในทิศทางความหนา และความเค้นไร้มิติในแต่ละทิศทางดังรูปที่ 6.14 และได้แสดงดังตารางที่ 6.7 และ 6.8 โดยในตารางนี้ได้แสดงค่าการกระจัดในทิศทางความหนาที่ระยะ x/a เท่ากับ 0.5, 0.375, 0.25 และ 0.125 โดยค่าการกระจัดในทิศทางความหนาในงานวิจัยนี้เมื่อเปรียบเทียบกับ Sheikh และ Chakrabarti มีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.095% และมีค่า 4.624% เมื่อเทียบกับ Reddy และในที่นี้ได้แสดงรูปการกระจัดในทิศทางความหนาและความเค้นต่าง ๆ ในรูปที่ 6.14



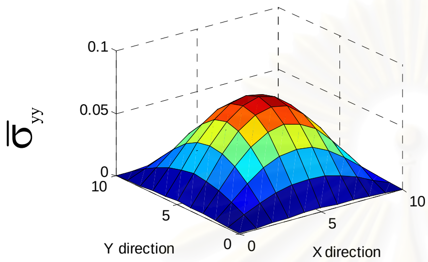
รูปที่ 6.13 ค่า β_w การกระจัดในทิศทางความหนาเมื่อจำนวนแผ่นประกอบ 2 ชั้น มีการเพิ่มเอลิเมนต์มากขึ้น



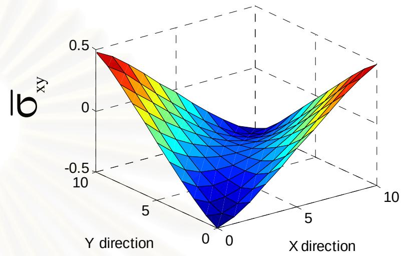
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



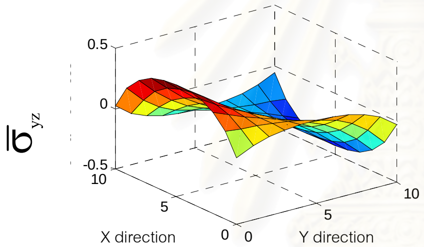
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



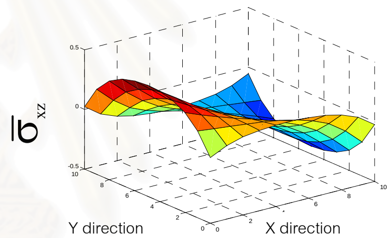
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$



จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0



ฉ) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

รูปที่ 6.14 ผลลัพธ์ $\overline{w}, \overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}, \overline{\sigma}_{xy}, \overline{\sigma}_{yz}$ และ $\overline{\sigma}_{xz}$ ของแผ่นประกอบจตุรัสวางมุม 45 องศา จำนวน 2 ชั้น ภายใต้แรงกระทำแบบสม่ำเสมอ

ตารางที่ 6.7 เปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาของแผ่นประกอบจตุรัสวางมุม 45 องศา ภายใต้แรงกระทำแบบสม่ำเสมอ

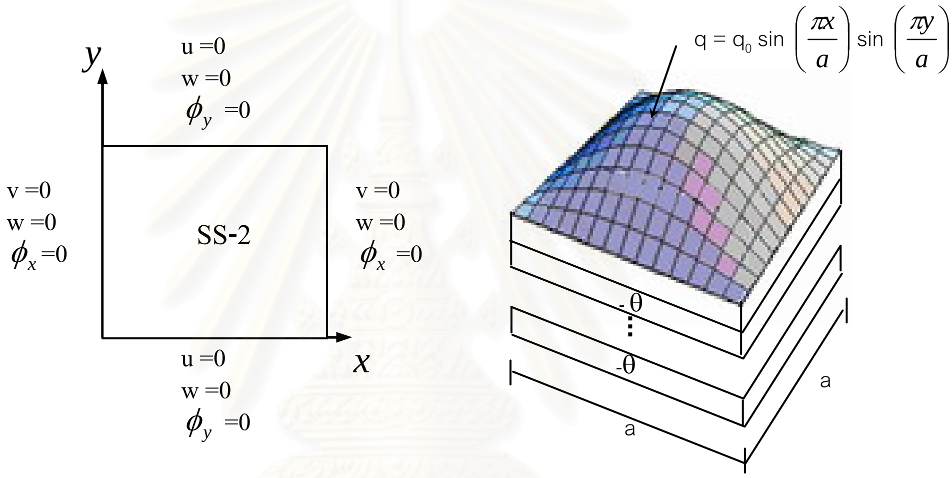
จำนวนชั้น	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	$\bar{w}$			
			x/a=0.500	x/a=0.375	x/a=0.250	x/a=0.125
2	10x10	TSDT	1.2642	1.2113	1.0527	0.7904
	20x20	TSDT	1.2505	1.1980	0.9236	0.6151
	30x30	TSDT	1.2464	1.1533	0.9191	0.5528
	40x40	TSDT	1.2420	1.1604	0.9169	0.5198
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	1.2420	1.1610	0.9170	0.5200
	Reddy	FSDT	1.2810	1.1960	0.9480	0.5450
10	10x10	TSDT	0.6480	0.6223	0.5449	0.4145
	20x20	TSDT	0.6375	0.6123	0.4787	0.3242
	30x30	TSDT	0.6345	0.6095	0.4758	0.2757
	40x40	TSDT	0.6314	0.5925	0.4734	0.2750
	Sheikh,Chakrabarti	TSDT	0.6320	0.5930	0.4740	0.2750
	Reddy	FSDT	0.6310	0.5910	0.4740	0.2740

ตารางที่ 6.8 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีแผ่นประกอบจตุรัสวางมุม 45 องศา ภายใต้แรงกระทำแบบสม่ำเสมอ

จำนวนชั้น	งานวิจัยเก่า	$\bar{w}$			
		x/a=0.500	x/a=0.375	x/a=0.250	x/a=0.125
2	Sheikh,Chakrabarti	0	0.052	0.011	0.038
	Reddy	3.044	2.977	3.281	4.624
10	Sheikh,Chakrabarti	0.095	0.084	0.127	0
	Reddy	0.063	0.254	0.127	0.365

6.1.5 แผ่นประกอบจตุรัสวางมุมใด ๆ ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

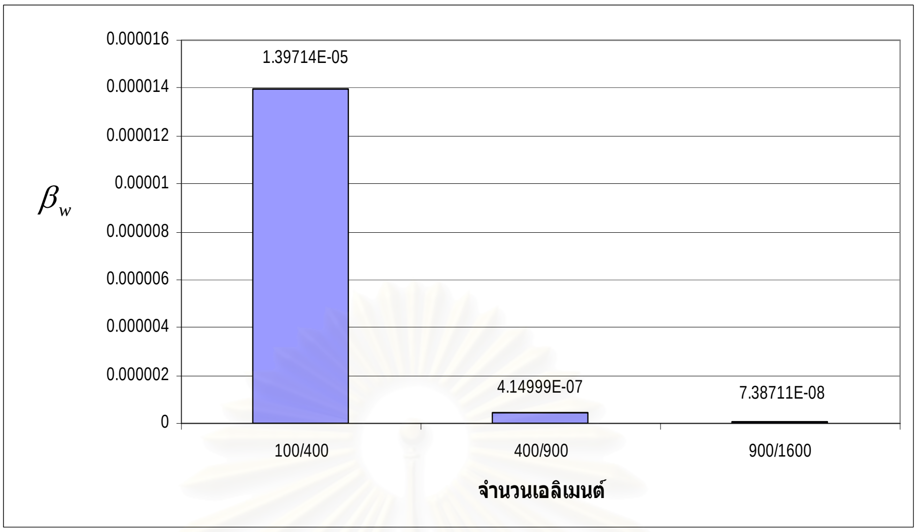
ปัญหานี้ได้ทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบจำนวน 2 ชั้น และ 6 ชั้น โดยแปรผันทิศทางคุณสมบัติที่ 5, 30 และ 45 องศา ลักษณะการวางมุม $\theta/-\theta$ และ $\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta$ สำหรับกรณี 2 ชั้น และ 6 ชั้น ตามลำดับ ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์ ซึ่งมีจุดรองรับแบบ SS-2 วัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหานี้คือ $E_1 = 40\ E_2$ และ G_{12} และ $G_{13} = 0.6\ E_2$, $G_{23} = 0.5\ E_2$, ν_{12} และ $\nu_{13} = 0.25$ โดยแสดงปัญหาการวิเคราะห์ดังรูปที่ 6.15



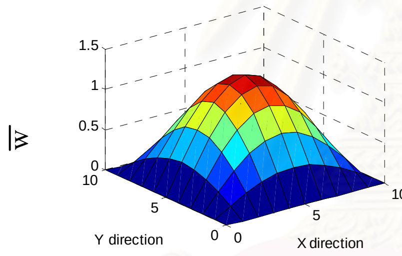
รูปที่ 6.15 แผ่นประกอบจตุรัสวางมุมใด ๆ ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

ในการวิเคราะห์ในปัญหานี้ กระทำการเช่นปัญหาที่ผ่านมาโดยเริ่มทำการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อหาค่า β_w โดยทำการเริ่มแบ่งที่ 100 เอลิเมนต์ แล้วเพิ่มเป็น 400, 900 และ 1600 ตามลำดับ โดยได้แสดงค่าการลู่เข้าของ β_w ในรูปที่ 6.16 เมื่อพิจารณาค่าการลู่เข้าเห็นได้ว่า เมื่อเพิ่มการแบ่งเอลิเมนต์จาก 900 เอลิเมนต์เป็น 1600 เอลิเมนต์ ค่า β_w มีค่าน้อยมาก จึงใช้จำนวน 1600 เอลิเมนต์ในการพิจารณาในปัญหานี้

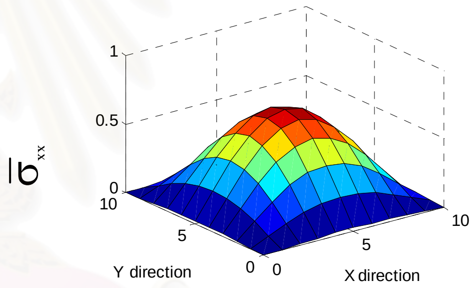
จากการวิเคราะห์และเปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับ Reddy (1996) ได้แสดงการกระจัดและความเค้นไร้มิติในแต่ละทิศทางดังรูปที่ 6.17 และได้แสดงค่าคลาดเคลื่อนในตารางที่ 6.9 และ 6.10 โดยในตารางแสดงการแปรผันค่ามุมที่ 5, 30 และ 45 แปรผันจำนวนชั้น 2 ชั้น และ 6 ชั้น และแปรผันค่า a/h ที่ 4, 10, 20, 50 และ 100 จากการเปรียบเทียบพบว่าค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.280%, 0.094% และ 0.120% สำหรับค่ามุมที่ 5, 30 และ 45 องศา ตามลำดับ



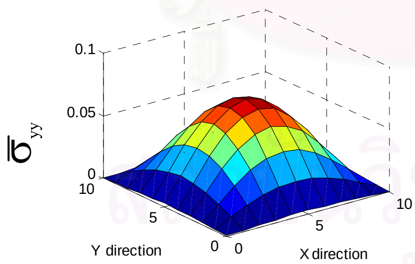
รูปที่ 6.16 ค่า β_w การกระจัดในทิศทางความหนาจำนวนแผ่นประกอบ 2 ชั้น ทิศทางคุณสมบัติ 5 องศา a/h=4 เมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น



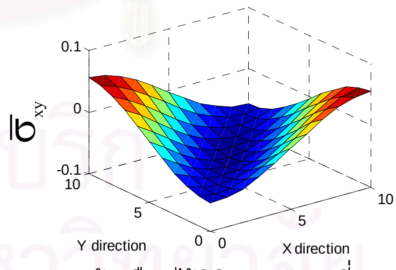
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



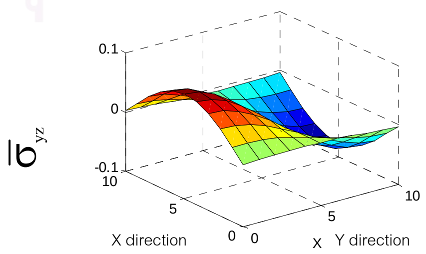
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



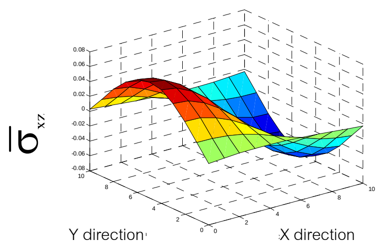
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$



จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0



ฉ) ความเค้นเฉือนไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

รูปที่ 6.17 ผลลัพธ์ $\overline{w}, \overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}, \overline{\sigma}_{xy}, \overline{\sigma}_{yz}$ และ $\overline{\sigma}_{xz}$ ของแผ่นประกอบจตุรัสทิศทางคุณสมบัติ 5 องศา จำนวน 2 ชั้น ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์เมื่อ a/h=4

ตารางที่ 6.9 เปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับ Reddy กรณีแผ่นประกอบจตุรัสวางมุมใด ๆ ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

a/h	จำนวนชั้น	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	θ (องศา)		
				5	30	45
4	2	10x10	TSDT	1.2553	1.0903	1.0265
		20x20	TSDT	1.2608	1.0864	1.0225
		30x30	TSDT	1.2618	1.0851	1.0214
		40x40	TSDT	1.2618	1.0831	1.0197
		Reddy	TSDT	**1.2625**	**1.0838**	**1.0203**
	6	10x10	TSDT	1.2224	0.8952	0.8405
		20x20	TSDT	1.2269	0.8888	0.8387
		30x30	TSDT	1.2275	0.8869	0.8381
		40x40	TSDT	1.2275	0.8846	0.8371
		Reddy	TSDT	**1.2282**	**0.8851**	**0.8375**
10	2	10x10	TSDT	0.4812	0.5936	0.5618
		20x20	TSDT	0.4839	0.5931	0.5602
		30x30	TSDT	0.4844	0.5925	0.5593
		40x40	TSDT	0.4846	0.5912	0.5577
		Reddy	TSDT	**0.4848**	**0.5916**	**0.5581**
	6	10x10	TSDT	0.4454	0.3054	0.2787
		20x20	TSDT	0.4477	0.3028	0.2763
		30x30	TSDT	0.4482	0.3019	0.2754
		40x40	TSDT	0.4482	0.3005	0.2744
		Reddy	TSDT	**0.4485**	**0.3007**	**0.2745**
20	2	10x10	TSDT	0.3546	0.5165	0.4907
		20x20	TSDT	0.3571	0.5185	0.4904
		30x30	TSDT	0.3576	0.5179	0.4894
		40x40	TSDT	0.3577	0.5176	0.4893
		Reddy	TSDT	**0.3579**	**0.5180**	**0.4897**
	6	10x10	TSDT	0.3180	0.2144	0.1923
		20x20	TSDT	0.3190	0.2138	0.1915
		30x30	TSDT	0.3200	0.2136	0.1911
		40x40	TSDT	0.3200	0.2125	0.1903
		Reddy	TSDT	**0.3209**	**0.2127**	**0.1905**

a/h	จำนวนชั้น	การแบ่งเอลิเมนต์	วิธี	θ (องศา)		
				5	30	45
50	2	10x10	TSDT	0.3173	0.4921	0.4662
		20x20	TSDT	0.3206	0.4966	0.4701
		30x30	TSDT	0.3211	0.4968	0.4701
		40x40	TSDT	0.3212	0.4968	0.4701
		Reddy	TSDT	0.3215	0.4972	0.4704
	6	10x10	TSDT	0.2806	0.1870	0.1664
		20x20	TSDT	0.2834	0.1881	0.1671
		30x30	TSDT	0.2838	0.1883	0.1670
		40x40	TSDT	0.2840	0.1877	0.1666
		Reddy	TSDT	0.2842	0.1878	0.1668
100	2	10x10	TSDT	0.3109	0.4865	0.4609
		20x20	TSDT	0.3152	0.4929	0.4666
		30x30	TSDT	0.3158	0.4938	0.4673
		40x40	TSDT	0.3160	0.4938	0.4673
		Reddy	TSDT	0.3162	0.4942	0.4676
	6	10x10	TSDT	0.2743	0.1823	0.1619
		20x20	TSDT	0.2780	0.1840	0.1633
		30x30	TSDT	0.2785	0.1841	0.1633
		40x40	TSDT	0.2787	0.1841	0.1633
		Reddy	TSDT	0.2789	0.1842	0.1634

ตารางที่ 6.10 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีแผ่นประกอบจตุรัสวางมุมใด ๆ ภายใต้แรงกระทำแบบไซน์

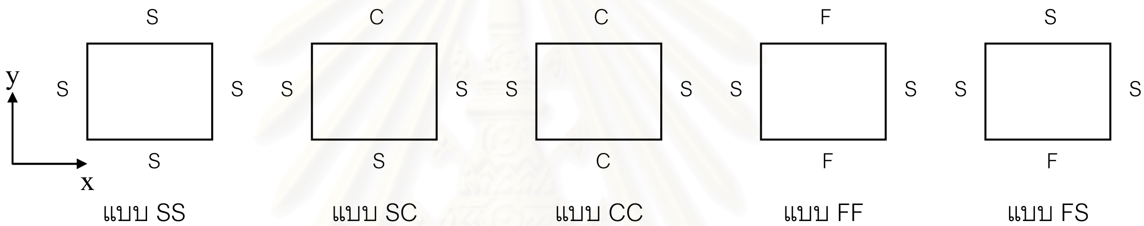
a/h	จำนวนชั้น	งานวิจัยเก่า	θ (องศา)		
			5	30	45
4	2	Reddy	0.055	0.065	0.059
	6	Reddy	0.057	0.057	0.048
10	2	Reddy	0.041	0.068	0.072
	6	Reddy	0.067	0.067	0.036
20	2	Reddy	0.056	0.077	0.082
	6	Reddy	0.280	0.094	0.105
50	2	Reddy	0.093	0.080	0.064
	6	Reddy	0.070	0.053	0.120
100	2	Reddy	0.063	0.081	0.064
	6	Reddy	0.072	0.054	0.061

6.2 ปัญหาแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิกระทำ

เมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงภายใต้แรงกระทำแล้ว ในลำดับต่อไปเป็นการตรวจสอบความถูกต้องในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงภายใต้อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด โดยจะพิจารณาแผ่นประกอบ มีคุณสมบัติแต่ละชั้นคือ E_1 = 25 E_2, G_{12} และ G_{13} = 0.5 E_2 , ν_{12} และ ν_{13}=0.25 , $\alpha_2 = 3\ \alpha_1$ (เมื่อ α_1 และ α_2 คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในทิศทาง 1 และ 2 ในระบบพิกัดเฉพาะที่ตามลำดับ) ภายใต้อุณหภูมิกระทำดังสมการ 6.2

$$T(x,y,z) = z\,\overline{T_1}\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \tag{6.2}$$

โดยมีลักษณะจุดรองรับแบบง่าย (s) แบบยึดแน่น (c) และแบบปล่อยอิสระ (F) ผสมกันแยกออกเป็น 5 กรณี โดยแสดงดังรูปที่ 6.18



รูปที่ 6.18 จุดรองรับชนิดต่าง ๆ ของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ

เมื่อ S คือการกำหนดให้ u=0, w=0, ϕ_x=0 สำหรับทิศทางในแกน x และสำหรับทิศทางในแกน y กำหนด v=0, w=0, ϕ_y=0 C คือการกำหนดให้ u=0, v=0, w=0, ϕ_x=0, ϕ_y=0 และ F คือการกำหนดให้มีการอิสระในการกระจัดใด ๆ

ในการหาผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ จะแปลงค่าให้อยู่ในเทอมไร้มิติเช่นเดียวกันกับปัญหาแผ่นประกอบภายใต้แรงกระทำ โดยในที่นี้จะให้ค่าผลลัพธ์อยู่ในเทอมไร้มิติคือ

$$\overline{w} = w_0\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 b} \quad (6.3ก) \quad , \quad \overline{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 E_2 b} \quad (6.3ข)$$

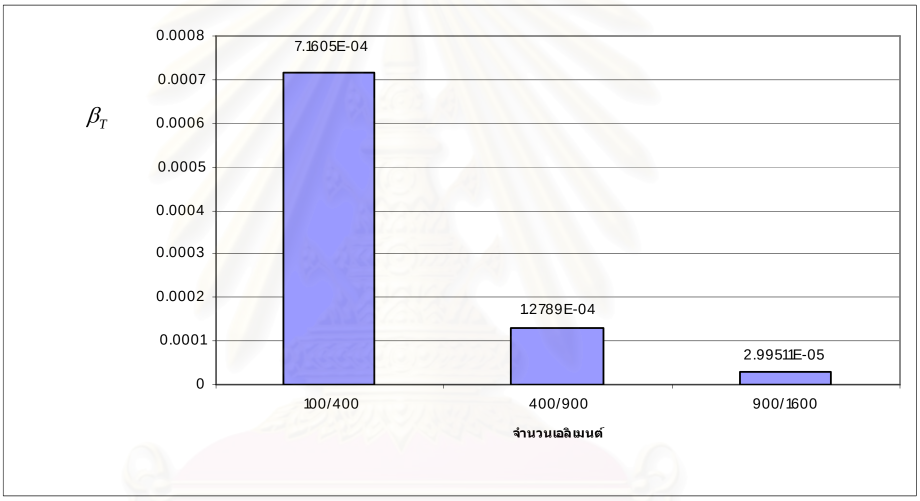
$$\overline{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 E_2 b} \quad (6.3ค) \quad , \quad \overline{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}\left(0,0,\frac{h}{2}\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 E_2 b} \quad (6.3ง)$$

$$\overline{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}\left(0,\frac{b}{2},0\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 E_2 b} \quad (6.3จ) \quad , \quad \overline{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2},0,0\right)\frac{10}{\overline{T_1}\alpha_1 E_2 b} \quad (6.3ฉ)$$

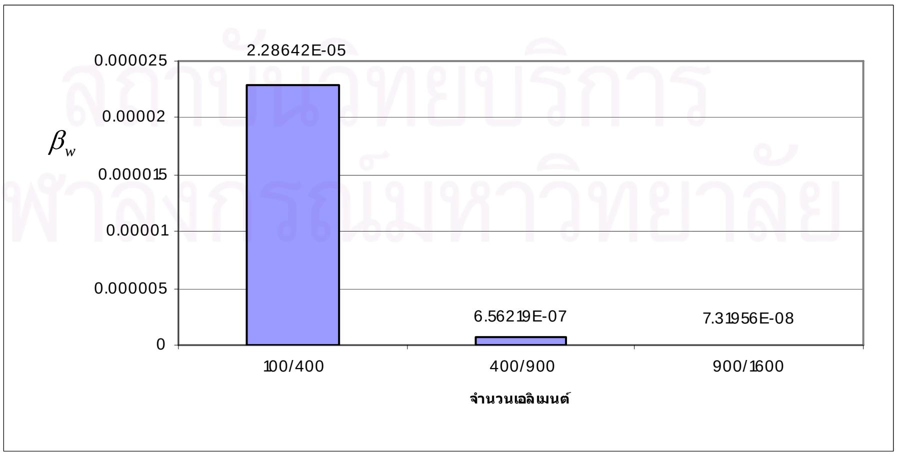
การวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิทำการเริ่มวิเคราะห์หาค่า β เพื่อหาจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยในปัญหานี้แยกการหา β ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นส่วนการหาค่า β_T ของการกระจายอุณหภูมิ และส่วนที่สองเป็นส่วนของการหาค่า β_w สำหรับการหาหน่วยแรง เมื่อพิจารณาในส่วนแรก ส่วนของการหาอุณหภูมิกระทำโดยการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 100, 400, 900 และ 1600 เมื่อพิจารณาค่า β_T ในรูปที่ 6.19 จะเห็นได้ว่าเมื่อแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มจาก 900 เอลิเมนต์เป็น 1600 เอลิเมนต์ จะพบว่าค่า β_T มีค่าน้อยมาก ดังนั้นปัญหานี้ทำการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ 1600 เอลิเมนต์ ในการหาการกระจายอุณหภูมิ ส่วนการวิเคราะห์หาค่าหน่วยแรง เลือกหาค่าการลู่เข้าของ β_w หนึ่งกรณีต่อหนึ่งแบบจุดรองรับ โดยเลือกลักษณะการวางแผ่นประกอบหนึ่งชั้นวางมุม 0 องศา และค่า a/h เท่ากับ 5 ในการหาค่าการลู่เข้าของ β_w ในแต่ละกรณีของจุดรองรับ จะเริ่มแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 100 เอลิเมนต์ แล้วเพิ่มการแบ่งเอลิเมนต์เป็น 400, 900 และ 1600

เอลิเมนต์ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า β_w ดังรูปที่ 6.20 ถึง 6.24 ในแต่ละกรณีจะเห็นได้ว่าค่าทุกกรณีมีค่าน้อยเมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์จาก 900 เอลิเมนต์ เพิ่มเป็น 1600 เอลิเมนต์ ดังนั้นจึงพิจารณาการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ 1600 เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์

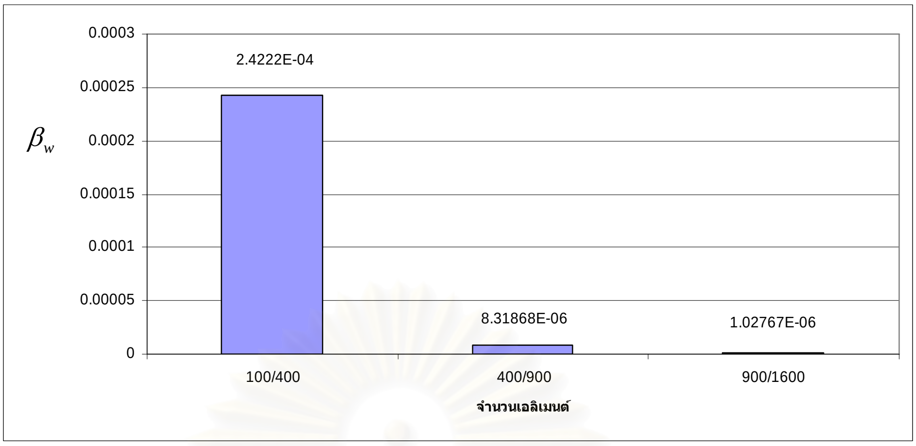
ในการวิเคราะห์และเปรียบเทียบงานวิจัยนี้กับ Reddy (1996) ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจัดไร้มิติที่จุดกึ่งกลางแผ่นประกอบในทิศทางความหนาของจุดรองรับแบบต่าง ๆ ในตาราง 6.11 และ 6.12 โดยในแต่ละชนิดของจุดรองรับมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเท่ากับ 0.048%, 0.147%, 0.244%, 0.888% และ 0.209% สำหรับจุดรองรับแบบ SS, SC, CC, FF และ FS ตามลำดับ และในตารางที่ 6.13 และ 6.14 ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นไร้มิติ $\overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}$ และ $\overline{\sigma}_{yz}$ สำหรับกรณีการวางแผ่นประกอบแบบ 0/90/0, 0/90 และ 0 ตามลำดับ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของ $\overline{\sigma}_{xx}, \overline{\sigma}_{yy}$ และ $\overline{\sigma}_{yz}$ ในกรณีจุดรองรับแบบต่าง ๆ เท่ากับ 11.559%, 2.51% และ 3.407% ตามลำดับ



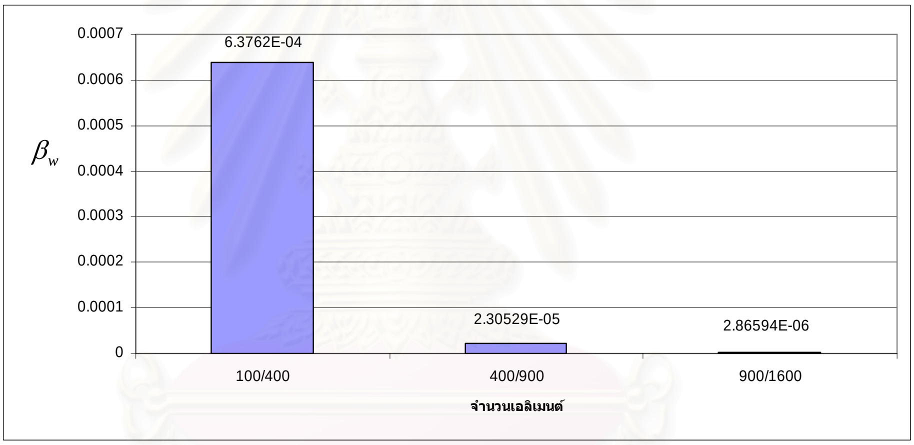
รูปที่ 6.19 ค่า β_T ของอุณหภูมิเมื่อทำการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น



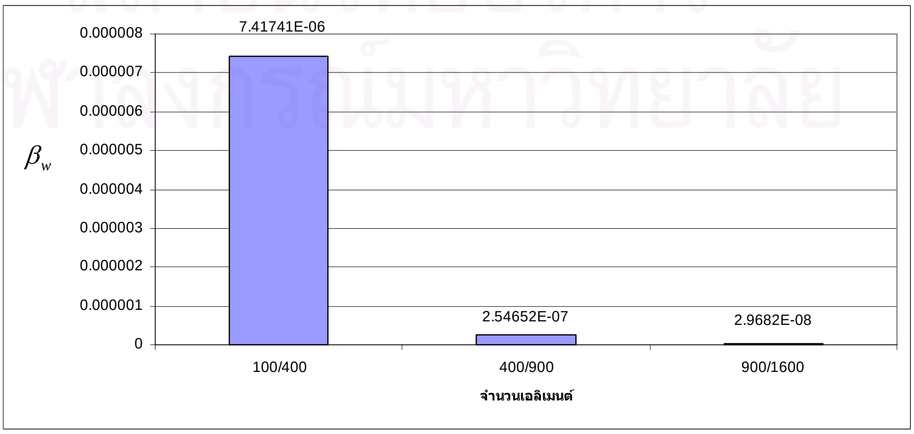
รูปที่ 6.20 ค่า β_w การกระจัดจุดรองรับแบบ SS ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5 เมื่อมีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น



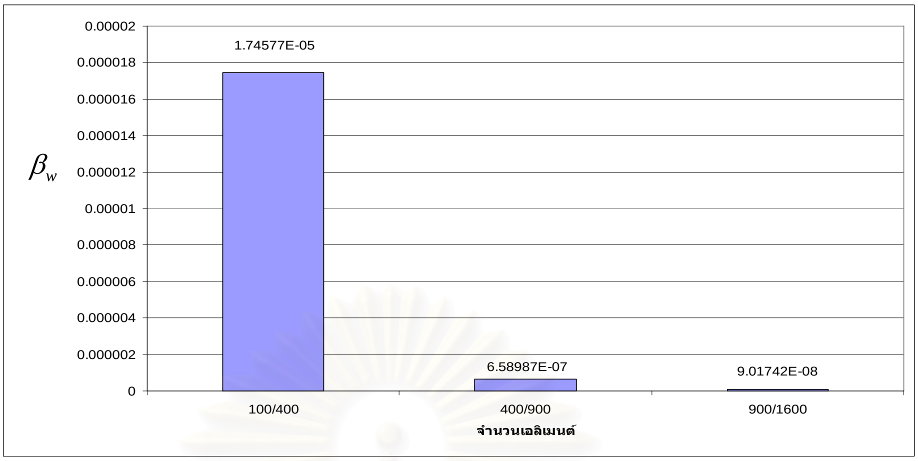
รูปที่ 6.21 ค่า β_w การกระจัดจุดรองรับแบบ SCทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5 เมื่อมีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น



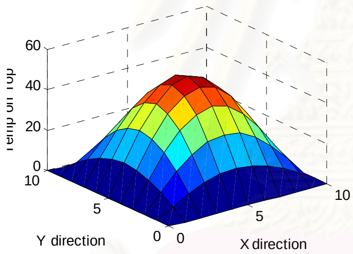
รูปที่ 6.22 ค่า β_w การกระจัดจุดรองรับแบบ CC ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5 เมื่อมีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น



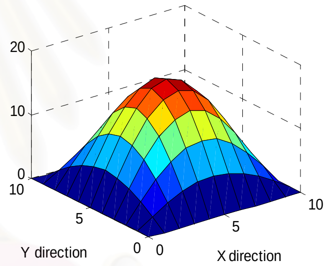
รูปที่ 6.23 ค่า β_w การกระจัดจุดรองรับแบบ FF ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5 เมื่อมีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น



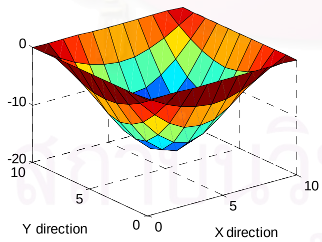
รูปที่ 6.24 ค่า β_w การกระจัดจุดรองรับแบบ FS ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5 เมื่อมีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น



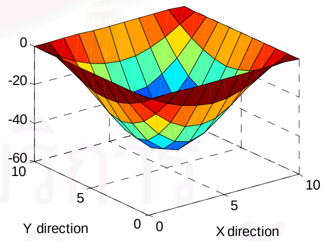
ก) การกระจายอุณหภูมิที่ระยะ $\frac{h}{2}$



ข) การกระจายอุณหภูมิที่ระยะ $\frac{h}{6}$

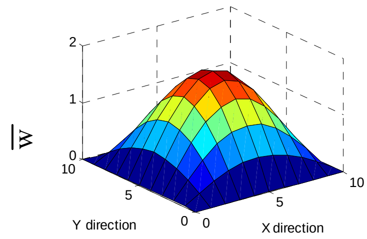


ค) การกระจายอุณหภูมิที่ระยะ $-\frac{h}{2}$

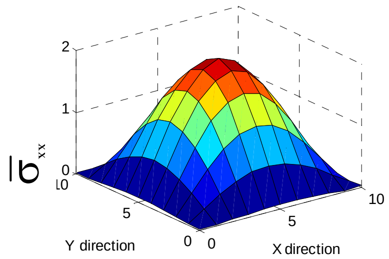


ง) การกระจายอุณหภูมิที่ระยะ $-\frac{h}{6}$

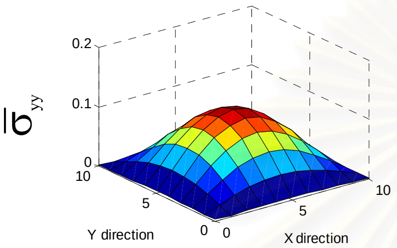
รูปที่ 6.25 การกระจายอุณหภูมิที่ระยะ $\frac{h}{2},\frac{h}{6},-\frac{h}{6},-\frac{h}{2}$ เมื่อกำหนดให้ $\overline{T}_1 = 1000$ และ h= 0.10 ม.



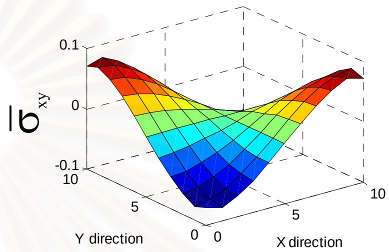
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



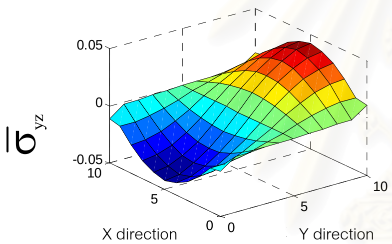
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ $z = \frac{h}{2}$



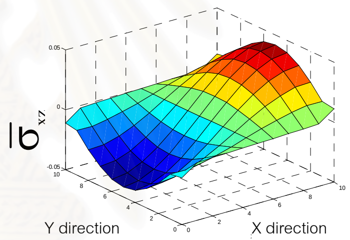
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ $z = \frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ $z = \frac{h}{2}$

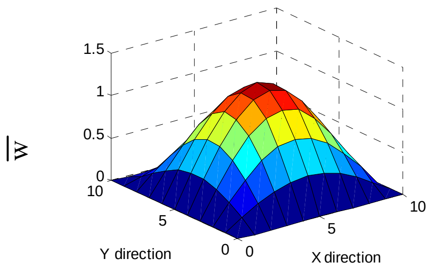


จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0

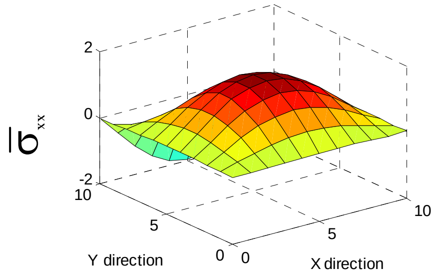


ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

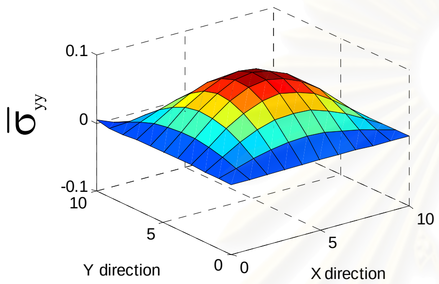
รูปที่ 6.26 ผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นไร้มิติจุดรองรับแบบ SSทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5



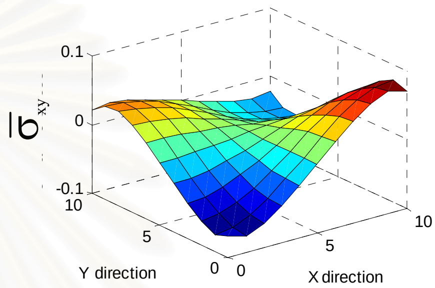
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



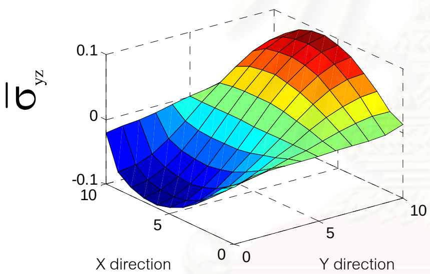
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



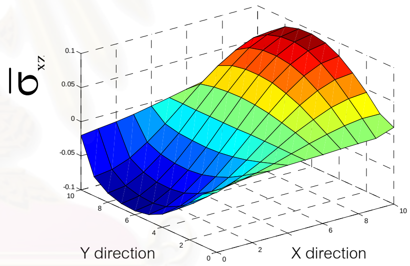
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$

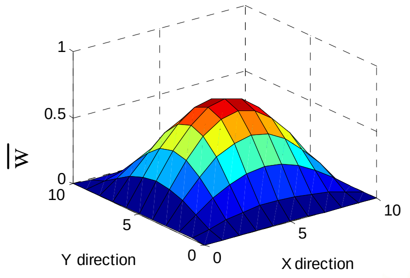


จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0

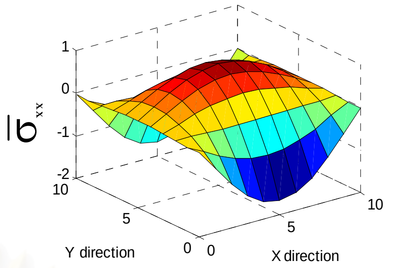


ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

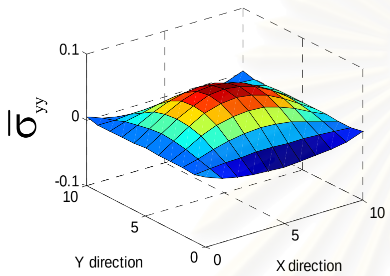
รูปที่ 6.27 ผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นไร้มิติจุดรองรับแบบ SC ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5



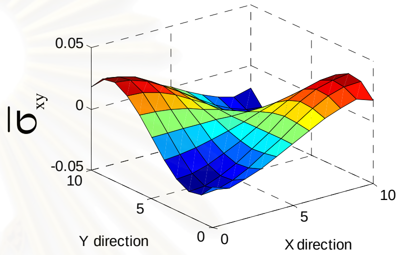
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



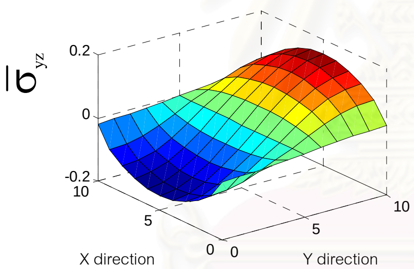
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



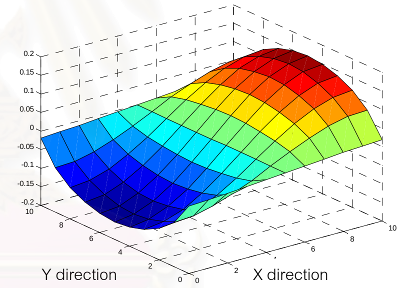
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$

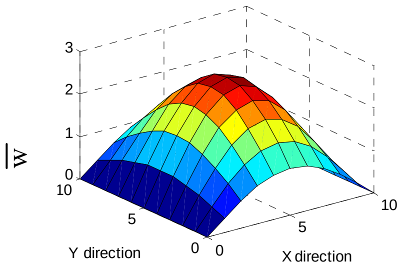


จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0

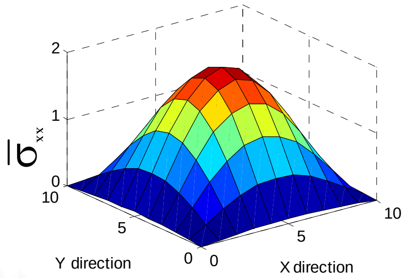


ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

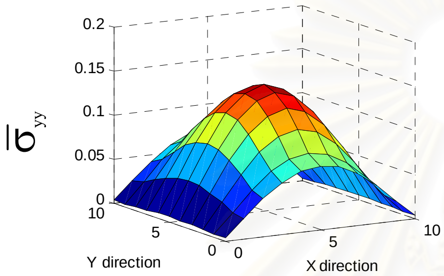
รูปที่ 6.28 ผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นไร้มิติจุดรองรับแบบ CC ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5



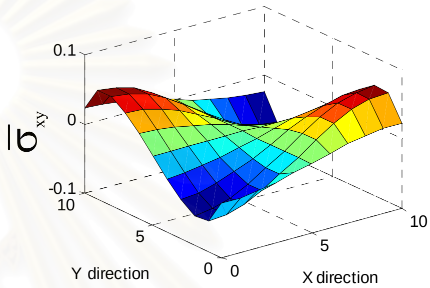
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



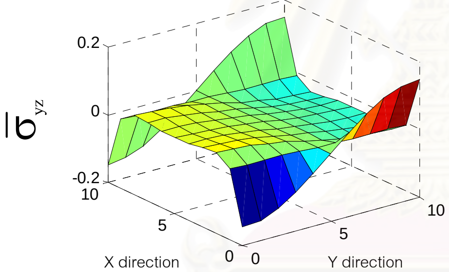
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



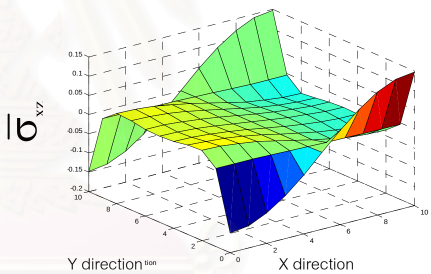
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$

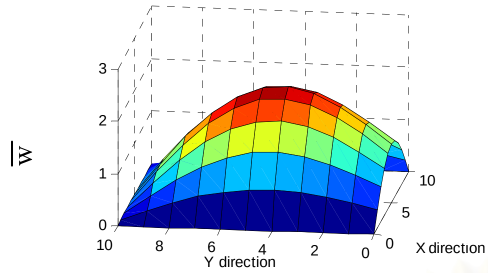


จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0

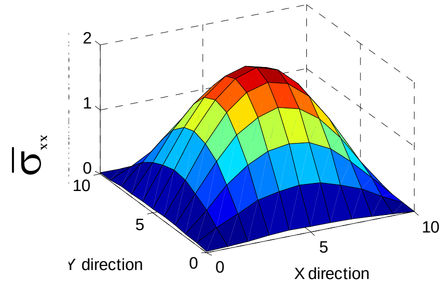


ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

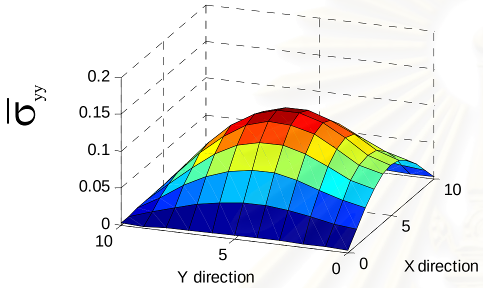
รูปที่ 6.29 ผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นไร้มิติจุดรองรับแบบ FF ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5



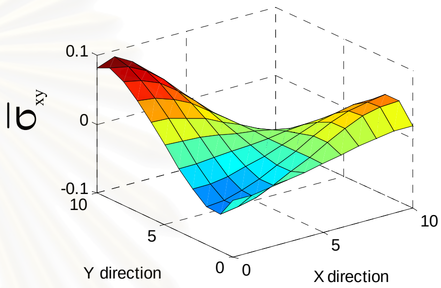
ก) การกระจัดในทิศทางความหนาไร้มิติ



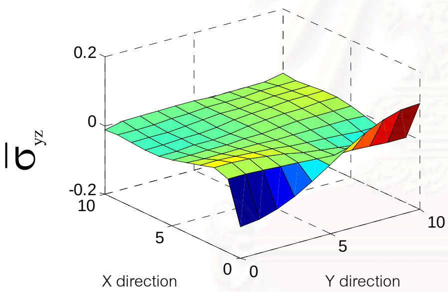
ข) ความเค้นไร้มิติทิศทาง x ที่ z = $\frac{h}{2}$



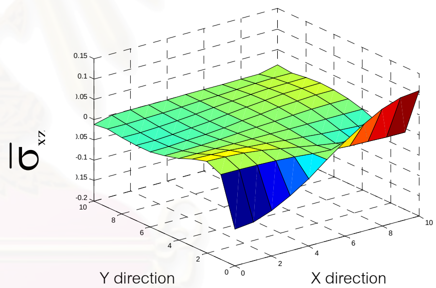
ค) ความเค้นไร้มิติทิศทาง y ที่ z = $\frac{h}{2}$



ง) ความเค้นไร้มิติระนาบ xy ที่ z = $\frac{h}{2}$



จ) ความเค้นไร้มิติระนาบ yz ที่ z = 0



ฉ) ความเค้นไร้มิติระนาบ xz ที่ z = 0

รูปที่ 6.30 ผลลัพธ์การกระจัดและความเค้นไร้มิติจุดรองรับแบบ FS ทิศทางคุณสมบัติ 0 องศา a/h=5

ตารางที่ 6.11 การกระจัดไร้มิติของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิจุดรองรับแบบต่าง ๆ เทียบกับ Reddy

ลักษณะ	อัตราส่วน a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	ชนิดจุดรองรับ				
			SS	SC	CC	FF	FS
0	5	10x10	1.0653	0.7053	0.3551	2.2857	1.5905
		20x20	1.0699	0.7145	0.3635	2.2887	1.5877
		30x30	1.0706	0.7162	0.3650	2.2892	1.5868
		40x40	1.0708	0.7168	0.3656	2.2893	1.5864
		Reddy	**1.0711**	**0.7175**	**0.3663**	**2.2812**	**1.5831**
	10	10x10	1.0365	0.5474	0.2770	2.2894	1.5977
		20x20	1.0422	0.5556	0.2845	2.2920	1.5967
		30x30	1.0432	0.5573	0.2859	2.2924	1.5961
		40x40	1.0435	0.5579	0.2864	2.2926	1.5958
		Reddy	**1.0439**	**0.5587**	**0.2871**	**2.2854**	**1.5931**
0/90	5	10x10	1.1369	0.8076	0.5678	1.2611	1.2026
		20x20	1.1415	0.8161	0.5778	1.2655	1.2065
		30x30	1.1423	0.8177	0.5798	1.2663	1.2072
		40x40	1.1426	0.8183	0.5805	1.2666	1.2075
		Reddy	**1.1430**	**0.8190**	**0.5814**	**1.2652**	**1.2068**
	10	10x10	1.1418	0.7474	0.5034	1.2639	1.2094
		20x20	1.1470	0.7556	0.5128	1.2688	1.2139
		30x30	1.1479	0.7573	0.5148	1.2698	1.2147
		40x40	1.1481	0.7578	0.5155	1.2702	1.2149
		Reddy	**1.1485**	**0.7586**	**0.5164**	**1.2693**	**1.2145**
0/90/0	5	10x10	1.0801	0.7899	0.4431	1.6665	1.3789
		20x20	1.0857	0.7999	0.4524	1.6713	1.3817
		30x30	1.0866	0.8017	0.4542	1.6722	1.3821
		40x40	1.0870	0.8024	0.4548	1.6726	1.3822
		Reddy	**1.0874**	**0.8032**	**0.4556**	**1.6687**	**1.3805**
	10	10x10	1.0422	0.6021	0.3169	1.6618	1.3747
		20x20	1.0480	0.6109	0.3246	1.6656	1.3769
		30x30	1.0491	0.6127	0.3262	1.6664	1.3772
		40x40	1.0494	0.6133	0.3267	1.6667	1.3773
		Reddy	**1.0499**	**0.6142**	**0.3275**	**1.6632**	**1.3757**

ลักษณะ	อัตราส่วน a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	ชนิดจุดรองรับ				
			SS	SC	CC	FF	FS
$[0/90]_{5T}$	5	10x10	1.0255	0.7874	0.5496	1.0689	1.0494
		20x20	1.0316	0.7962	0.5589	1.0729	1.0540
		30x30	1.0328	0.7979	0.5608	1.0737	1.0549
		40x40	1.0331	0.7986	0.5614	1.0739	1.0551
		Reddy	1.0336	0.7993	0.5623	1.0733	1.0549
	10	10x10	1.0250	0.6989	0.4762	1.0665	1.0495
		20x20	1.0313	0.7069	0.4846	1.0708	1.0543
		30x30	1.0324	0.7086	0.4865	1.0717	1.0552
		40x40	1.0328	0.7092	0.4871	1.0720	1.0555
		Reddy	1.0333	0.7101	0.4880	1.0816	1.0556

ตารางที่ 6.12 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีการกระจัดไร้มิติของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิจุดรองรับแบบต่าง ๆเทียบกับ Reddy

ลักษณะ	อัตราส่วน a/h	ชนิดจุดรองรับ				
		SS	SC	CC	FF	FS
0	5	0.028	0.098	0.191	0.355	0.209
	10	0.038	0.143	0.244	0.315	0.170
0/90	5	0.035	0.086	0.155	0.111	0.058
	10	0.035	0.106	0.174	0.071	0.033
0/90/0	5	0.037	0.100	0.176	0.234	0.123
	10	0.048	0.147	0.244	0.210	0.116
$[0/90]_{5T}$	5	0.048	0.088	0.160	0.060	0.019
	10	0.048	0.127	0.184	0.888	0.010

ตารางที่ 6.13 ความเค้นไร้มิติของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิจุดรองรับแบบต่าง ๆเทียบกับ Reddy

ความเค้น	ลักษณะ	อัตราส่วน a/h	การแบ่งเอลิเมนต์	ชนิดจุดรองรับ				
				SS	SC	CC	FF	FS
$\overline{\sigma}_{xx}$	0/90/0	5	10x10	0.2482	5.3359	14.6549	1.3146	0.8501
			20x20	0.1501	5.6047	14.6897	1.2010	0.7255
			30x30	0.1309	5.7024	14.6944	1.1782	0.6990
			40x40	0.1229	5.7530	14.6958	1.1701	0.6889
			Reddy	**0.1154**	**5.9126**	**14.6976**	**1.1490**	**0.6671**
		10	10x10	0.1015	4.0129	7.5280	0.7185	0.4575
			20x20	0.0546	4.2464	7.5394	0.6573	0.3941
			30x30	0.0449	4.3270	7.5407	0.6444	0.3804
			40x40	0.0415	4.3681	7.5411	0.6397	0.3753
			Reddy	**0.0372**	**4.4944**	**7.5416**	**0.6291**	**0.3648**
$\overline{\sigma}_{yy}$	0/90	5	10x10	-0.4560	2.5310	5.1556	-1.7642	-1.2576
			20x20	-0.5516	2.5579	5.1088	-1.8599	-1.2716
			30x30	-0.5699	2.5764	5.0979	-1.8790	-1.2813
			40x40	-0.5764	2.5879	5.0939	-1.8858	-1.2886
			Reddy	**-0.5846**	**2.6319**	**5.0886**	**-1.8754**	**-1.2598**
		10	10x10	-0.2376	1.9655	3.6994	-0.9930	-0.8809
			20x20	-0.2874	2.0202	3.6955	-1.0423	-0.7367
			30x30	-0.2965	2.0416	3.6932	-1.0525	-0.7337
			40x40	-0.2996	2.0531	3.6922	-1.0562	-0.7310
			Reddy	**-0.3036**	**2.0911**	**3.6908**	**-1.0526**	**-0.7131**
$\overline{\sigma}_{yz}$	0	5	10x10	0.1208	0.2042	0.3054	-0.0297	0.0491
			20x20	0.1129	0.1980	0.2950	-0.0329	0.0497
			30x30	0.1117	0.1973	0.2928	-0.0336	0.0480
			40x40	0.1113	0.1972	0.2920	-0.0339	0.0482
			Reddy	**0.1109**	**0.1981**	**0.2909**	**-0.0332**	**0.0499**
		10	10x10	0.0460	0.0828	0.1079	-0.0045	0.0209
			20x20	0.0384	0.0741	0.0964	-0.0071	0.0171
			30x30	0.0364	0.0718	0.0932	-0.0079	0.0161
			40x40	0.0356	0.0709	0.0920	-0.0083	0.0157
			Reddy	**0.0347**	**0.0702**	**0.0903**	**-0.0085**	**0.0157**

ตารางที่ 6.14 เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อน กรณีความเค้นไร้มิติของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิจุดรองรับแบบต่าง ๆ เทียบกับ Reddy

ความเค้น	ลักษณะ	อัตราส่วน a/h	ชนิดจุดรองรับ				
			SS	SC	CC	FF	FS
$\bar{\sigma}_{xx}$	0/90/0	5	6.499	2.699	0.012	1.836	3.268
		10	11.559	2.810	0.007	1.685	2.878
$\bar{\sigma}_{yy}$	0/90	5	1.403	1.672	0.104	0.555	2.286
		10	1.318	1.817	0.038	0.342	2.510
$\bar{\sigma}_{yz}$	0	5	0.361	0.454	0.378	2.108	3.407
		10	2.594	0.997	1.883	2.353	0.000

6.3 สรุป

ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงของแผ่นประกอบนี้ ได้แยกออกเป็นสองส่วนคือส่วนทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้แรงกระทำ และส่วนของการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิโดยวิธีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สาม ซึ่งในส่วนแรกนี้เมื่อทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบโดยมีขนาดรูปร่าง จำนวนชั้น ชนิดแรงกระทำ ทิศทางคุณสมบัติ และจุดรองรับแบบต่าง ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเก่าที่ผ่านมาส่วนใหญ่จะมีค่าใกล้เคียงกับ Reddy โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนของการกระจัดในทิศทางความหนา มีค่าไม่เกิน 0.15% และเมื่อเปรียบเทียบกับ Sheikh และ Chakrabarti มีค่าสูงสุดไม่เกิน 1% Wu และคณะ และ Aagaah ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 8.0% และเมื่อเปรียบเทียบกับ Pagano ค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่ามากโดยมีค่าสูงสุดไม่เกิน 8.0% กรณีศึกษาต่าง ๆ แสดงให้เห็นว่า ในงานวิจัยนี้เหมาะสำหรับแผ่นประกอบที่มีลักษณะรูปร่าง ทิศทางคุณสมบัติ จำนวนชั้น แบบใด ๆ ได้โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนไม่มากนัก และเมื่อทำการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิโดยมีจุดรองรับชนิดต่าง ๆ ค่าคลาดเคลื่อนการกระจัดทิศทางความหนาไม่เกิน 0.25% แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนาด้วยฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม สามารถประยุกต์เข้ากับทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สามโดยมีค่าคลาดเคลื่อนยอมรับได้

บทที่ 7

สรุปผลการศึกษา

วิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาการวิเคราะห์อุณหภูมิและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในโครงสร้างแผ่นประกอบ โดยที่การวิเคราะห์การนำความร้อนใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา เพื่อลดขั้นตอนการวิเคราะห์การนำความร้อนในสามมิติให้เป็นเสมือนสองมิติ ส่วนการวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนขั้นที่สาม (third-order shear deformation theory) โดยใช้แบบจำลองการกระจัดในแต่ละทิศทางตามที่เสนอโดย Reddy ทั้งนี้จะพิจารณาโครงสร้างแผ่นประกอบที่วัสดุในแต่ละชั้นมีความหนาเท่ากันและมีคุณสมบัติแบบออโธทรอปิก เงื่อนไขขอบเขตมีการกำหนดอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน การพาความร้อน และอาศัยเทคนิคของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดในการแก้ปัญหาการนำความร้อนภาวะไม่คงที่ โดยแบ่งช่วงเวลาออกเป็นช่วง ๆ แล้วทำการแก้ปัญหาทีละช่วงต่อเนื่องกันไป

ผลจากการวิเคราะห์การนำความร้อนโดยวิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้เปรียบเทียบกับ ผลเฉลยแม่นตรงและโปรแกรม ANSYS เมื่อพิจารณาพารามิเตอร์ต่างๆคือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน ความหนาในแต่ละชั้น จำนวนชั้น ความกว้างต่อความหนา พบว่าความถูกต้องแม่นยำของการวิเคราะห์จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์เหล่านี้ ดังนี้

อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้น เนื่องจากสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้นมีผลต่อการหักเหของอุณหภูมิในแต่ละชั้นวัสดุ ดังนั้นในที่นี้จึงได้ทำการแปรผันค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้นตั้งแต่ 0.01 ถึง 100 ผลการศึกษาพบว่า ค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่าน้อยเมื่อค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์ในแต่ละชั้นมีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง 0.5 ถึง 2.0

อัตราส่วนความหนาของวัสดุในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบสองชั้น จากการศึกษาได้แปรผันอัตราส่วนความหนาในแต่ละชั้นตั้งแต่ 0.01 ถึง 100 ซึ่งพบว่าอัตราส่วนของความหนาของวัสดุในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบ มีผลต่อความคลาดเคลื่อนน้อยมาก

จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ ในการศึกษาครั้งนี้ได้ทำการแปรผันจำนวนชั้นของแผ่นประกอบตั้งแต่หนึ่งถึงหกชั้น เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนพบว่าค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดเมื่อจำนวนชั้นเท่ากับ 4 ชั้น และเมื่อแผ่นประกอบมีจำนวนชั้นมากกว่า 4 ชั้น ค่าคลาดเคลื่อนจะลดน้อยลงและมีแนวโน้มลู่เข้าค่าคงที่ค่าหนึ่ง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิในทิศทางความหนา สามารถใช้กับแผ่นประกอบไม่จำกัดจำนวนชั้น

อัตราส่วนความกว้างต่อความหนา ค่าอัตราส่วนนี้จะบ่งชี้ว่าแผ่นประกอบนี้จะมีลักษณะของการวิเคราะห์แบบสามมิติหรือสองมิติ กล่าวคือ ถ้าค่าอัตราส่วนความกว้างต่อความหนามีค่าน้อยแผ่นประกอบนั้นจะมีความหนามาก ลักษณะพฤติกรรมมีลักษณะแบบสามมิติ และถ้าค่าอัตราส่วนความกว้างต่อความหนามีค่าน้อย พฤติกรรมจะมีลักษณะแบบสองมิติ ดังนั้นในการวิเคราะห์สามมิติเสมือนสองมิติจึงควรพิจารณาให้ค่าอัตราส่วนความกว้างต่อความหนามีค่ามาก ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการศึกษาผลกระทบของอัตราส่วนความกว้างต่อความหนาพบว่า อัตราส่วนความกว้างต่อความหนามากกว่า 40 จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่าน้อย

จากผลการศึกษาการนำความร้อนโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามจะเห็นได้ว่า ตัวแปรที่สำคัญที่สุดคือ ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแต่ละชั้น ยิ่งมีค่าแตกต่างกันมากเท่าไร ค่าคลาดเคลื่อนก็จะมากตาม ส่วนความกว้างต่อความหนามีความสำคัญรองลงมา เนื่องจากค่าอัตราส่วนนี้จะบ่งถึงพฤติกรรมของแผ่นประกอบว่ามีพฤติกรรมของแผ่นประกอบแบบหนา 3 มิติ หรือพฤติกรรมของแผ่นประกอบแบบบาง 2 มิติ ส่วนค่าอัตราส่วนความหนาของแต่ละชั้น และจำนวนชั้นของวัสดุประกอบ มีความสำคัญน้อยกว่าพารามิเตอร์ทั้งสองที่กล่าวมา

ส่วนผลการวิเคราะห์หน่วยแรงของแผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิ ด้วยทฤษฎีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับขั้นที่สามสำหรับปัญหาตัวอย่างที่มี จำนวนชั้นตั้งแต่ 1 ชั้นถึง 10 ชั้น ความกว้างต่อความหนาตั้งแต่ 4 ถึง 100 ทิศทางของวัสดุเป็นมุมองศาใดๆ จุดรองรับ แบบง่าย แบบยึดแน่น แบบปล่อยอิสระ พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยในอดีต

ประโยชน์ในการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้พบว่า การใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามแทนการกระจายอุณหภูมิแทนทิศทางความหนาสามารถทำได้ และค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่าน้อยเมื่อค่าพารามิเตอร์อยู่ในช่วงที่ได้เสนอข้างต้น และสามารถนำค่าการกระจายอุณหภูมิผนวกเข้ากับสมการการหาหน่วยแรงได้ดี ทำให้ลดขั้นตอนการวิเคราะห์แผ่นประกอบภายใต้อุณหภูมิแบบสามมิติเสมือนเหลือสองมิติ ทำให้ง่ายและสะดวกในการพัฒนาโปรแกรม ซึ่งลดหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์เนื่องจากตัวแปรของแบบจำลองในงานวิจัยนี้ใช้น้อยกว่าการวิเคราะห์ 3 มิติ และโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนและหน่วยแรงของแผ่นประกอบได้เป็นอย่างดี

การลดขั้นตอนการวิเคราะห์สามมิติเสมือนสองมิติโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม มีข้อเสนอแนะอยู่สองประการ ประการแรก การใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามที่สามารถขยับตำแหน่งของโนดในทิศทางความหนา (ระยะห่างของโนดไม่เท่ากับ $\frac{h}{3}$) ให้สอดคล้องสัมประสิทธิ์การนำความร้อน จำนวนชั้นของแผ่นประกอบ และความหนาของแผ่นประกอบ จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยลง ทั้งนี้สืบเนื่องจากค่าคุณสมบัติดังกล่าวของวัสดุในแต่ละชั้นของแผ่นประกอบแตกต่างกันในแต่ละชั้น ทำให้การหักเหของอุณหภูมิไม่เท่ากันในแต่ละชั้น ดังนั้นการที่ใช้ฟังก์ชันพหุนามกำลังสามที่สามารถขยับตำแหน่งของโนด จะทำให้การกระจายอุณหภูมิมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น ประการที่สองคือ ระดับชั้นของพหุนาม เนื่องจากระดับขั้นของพหุนามที่สูงมากขึ้นจะทำให้แนวโน้มของการกระจายอุณหภูมิดีขึ้นตามระดับขั้น ดังนั้นการที่ใช้ระดับขั้นของพหุนามระดับขั้นที่สูงกว่าระดับขั้นที่สาม ก็ย่อมจะแทนการกระจายอุณหภูมิได้ดียิ่งขึ้นตามลำดับ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

เดช พุทธเจริญทอง. การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีดจำกัด, 1998.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 1999.

สุนันท์ ศรัณยนิตย์. การถ่ายเทความร้อน. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย – ญี่ปุ่น), 2002.

ภาษาอังกฤษ

Argyris, J., Tenek, L. and F.Öberg. A multilayer composite triangular element for steady-state conduction/convection/radiation heat transfer in complex shells. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 120 (1995) : 271 – 301.

Carslaw, J.S. and Jaeger, J.C. Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford (1959).

Daneshjoo, K. and Ramezani, M. Coupled thermoelasticity in laminated composite plates based on Green-Lindsay model. Composite Structures 55 (2002) : 387 – 392.

Das, Y.C. and Rath, B.K., Thermal bending of moderately thick rectangular plate. AIAA J., 10 (1972) : 1349-51.

Fares, E.M. , Zenkour M.A. and El-Marghany K.M. Non-linear themal effects on the bending response of cross-ply laminated plates using refined first-order theory. Composite Structures 49 (2000) : 257 – 267.

Feijoo, L., Davis, T.H. and D.Ramkrishna. Heat Transfer in Composite Solids with Heat Generation. Journal of Heat Transfer 101, (February 1979).

Kantor, Y.B., N.V.Smetankina and A.N.Shupikov. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. International Journal of Solids and Structures 38 (2001) : 8673 – 8684.

Mukherjee, N. and Sinha, K.P. A Comparative finite element heat conduction analysis of laminated composite plates. Composite Structures 52(3) (1994) : 505 – 510.

Pagano NJ. Exact soltions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. J. Compos Mater (1970) ; 4 : 20 34.

Park, H.C., Goo, N.S., Min, K.J. and Yoon, K.J. Three-dimensional cure simulation of composite structures by the finite element method. Composite Structures 61 (2003).

Rastagar Aagaah, M., Mahinfalah, M. and Jazar, N.G. Linear static analysis and finite element modeling for laminated composite plates using third order shear deformation thory. Composite Structures (2003).

Reddy, J.N. An Introduction to The Finite Element Method. 2 d edition. McGraw-hill Inc. : New York, 1993.

Reddy, J.N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. Engineering Structures 21 (1999) : 568-593.

Reddy, J.N. Onrefined computational models of composite laminate, Int. J : Numer, Methods Eng. 27 (1989) : 361-382.

Reddy, J.N. and Hsu, Y.S. Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates, J.Thermal Stressed 3 (1980) : 475-93.

Reddy, J.N. Mechannics of Laminated Composite Plate Theory and Analysis, 1996.

Rohwer, K., Rolfes, R. and Sparr, H. Higher-order theories for thermal stresses in layered plates. International Journal of Solids and Structures 38 (2001) : 3673-3687.

Rolfes, R. and Rohwer, K. Integrated thermal and mechanical analysis of composite plates and shells. Composites Science and Technology 60 (2000) : 2097 – 2106.

Rolfes, R. and Teßmer, J. 2D Finite Element Formulation for 3D Temperature Analysis of Layered Hybrid Structures. Numerical Simulation of Heat Transfer, May 2001.

Rolfes, R., Noack, J. and Taeschner, M. High performance 3D-analysis of thermo-mechanically loaded composite structures. Composite Structures 46 (1999) : 367-379.

Rolfes, R., Rohwer, K. and Ballerstaedt, M. Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates. Computers and Structures 68 (1998) : 643-652.

Sheikh, H.A. and A.Chakrarti. A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates. Finite Elements in Analysis and Design 39 (2003) : 883 – 903.

Shuler, F.S., Advani, G.S. and Victor N.Kaliakin. Transient Analysis and Measurement of Anisotropic Heat Conduction in Transversely Isotrotropic Composite Materials. Journal of Composite Materials 33 (1999).

Smittakorn, W., Heyliger, P.R., An adaptive wood composite.Wood and Fiber Science (2001).

Timoshenko, S.P. & Woinowaky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.

Wu, Z., Chen, R. and Chen, W. Refined laminated composite plate element ased on global-local higher-order shear deformation theory. Composite Structures (2004).

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันรูปร่าง

ฟังก์ชันรูปร่างในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็นสอบแบบ หนึ่ง ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้น (รูปที่ ก.1) ในที่นี้ใช้สมมติการกระจายอุณหภูมิและการกระจัด u_0, v_0, ϕ_x, ϕ_y สองฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิตเอลิเมนต์ 4 โนด 4 ระดับขั้นเสรี ประกอบด้วย $w_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$ (รูปที่ ก.2) ในที่นี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันในระบบไฮโซพาราเมตริกซ์ดังนี้

ก.1 ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้น

การสร้างฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้น สามารถทำได้หลายวิธี แต่ในที่นี้จะอธิบายด้วยการสมมติฟังก์ชันการประมาณระบบไอโซพาราเมตริกซ์โดยเริ่มจากการสมมติฟังก์ชันรูปร่างดังนี้

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \tag{ก.1}$$

สมการ (ก.1) สามารถเขียนการกระจัด u_1, u_2, u_3, u_4 ที่มุมทั้งสี่มุม (รูปที่ ก.1) ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1\eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2\eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3\eta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4\eta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{ก.2}$$

เมื่อแทนพิกัดแต่ละมุมของเอลิเมนต์ มุมที่ 1 พิกัด (-1, -1) มุมที่ 2 พิกัด (1, -1) มุมที่ 3 พิกัด (1, 1) มุมที่ 4 พิกัด (-1, 1) ในสมการ (ก.2) ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{ก.3}$$

ทำการหาค่าคงที่ a_1, a_2, a_3, a_4 กระทำโดยการผกผันสมการ (ก.3) จากนั้นแทนค่าคงที่ลงในสมการ (ก.1) ก็จะสามารถหาฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละมุมของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \lfloor 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rfloor \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix} \tag{ก.4}$$

โดยที่คุณสมบัติฟังก์ชันรูปร่างนี้คือ การกระจัดที่โนดที่พิจารณาจะมีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วยและที่โนดอื่น ๆ จะเท่ากับศูนย์ (รูปที่ ก.3)

ก.2 ฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต 4 โนด 4 ระดับขั้นเสรี

การหาฟังก์ชันประมาณภายในของเฮอมิต มีวิธีคล้ายกับวิธีการหาฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์ แต่จะแตกต่างกันที่ว่า ในแต่ละโนดจะมีตัวไม่ทราบค่า 4 ตัวแปร คือ $w_0, \dfrac{\partial w_0}{\partial x}, \dfrac{\partial w_0}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$ ดังนั้นในหนึ่งเอลิเมนต์จะมีตัวไม่ทราบค่า 16 ตัว จึงทำการสมมติฟังก์ชันพหุนาม 16 ตัวแปร ซึ่งจะได้ว่า

$$w_0 = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^3 + a_8\xi^2\eta + a_9\xi\eta^2 + a_{10}\eta^3$$
$$+ a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi^2\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{14}\xi^3\eta^2 + a_{15}\xi^2\eta^3 + a_{16}\xi^3\eta^3 \quad (ก.5)$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์สมการ (ก.5) เทียบกับ ξ จะได้ว่า

$$\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = a_2 + 2a_4\xi + a_5\eta + 3a_7\xi^2 + 2a_8\xi\eta + a_9\eta^2 + 3a_{11}\xi^2\eta + 2a_{12}\xi\eta^2 + a_{13}\eta^2 +$$
$$3a_{14}\xi^2\eta^2 + 2a_{15}\xi\eta^3 + 3a_{16}\xi^2\eta^3 \quad (ก.6)$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์สมการ (ก.5) เทียบกับ η จะได้ว่า

$$\frac{\partial w_0}{\partial \eta} = a_3 + a_5\xi + 2a_6\eta + a_8\xi^2 + 2a_9\xi\eta + 3a_{10}\eta^2 + a_{11}\xi^3 + 2a_{12}\xi^2\eta + 3a_{13}\xi\eta^2$$
$$+ 2a_{14}\xi^3\eta + 3a_{15}\xi^2\eta^2 + 3a_{16}\xi^3\eta^2 \quad (ก.7)$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์สมการ (ก.6) เทียบกับ η จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} = a_5 + 2a_8\xi + 2a_9\eta + 3a_{11}\xi^2 + 4a_{12}\xi\eta + 3a_{13}\eta^2 + 6a_{14}\xi^2\eta + 6a_{15}\xi\eta^2 + 9a_{16}\xi^2\eta^2$$
$$(ก.8)$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_i & \eta_i & \xi_i^2 & \xi_i\eta_i & \eta_i^2 & \xi_i^3 & \xi_i^2\eta_i & \xi_i\eta_i^2 & \eta_i^3 & \xi_i^3\eta_i & \xi_i^2\eta_i^2 & \xi_i\eta_i^3 & \xi_i^3\eta_i^2 & \xi_i^2\eta_i^3 & \xi_i^3\eta_i^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi_i & \eta_i & 0 & 3\xi_i^2 & 2\xi_i\eta_i & \eta_i^2 & 0 & 3\xi_i^2\eta_i & 2\xi_i\eta^2 & \eta_i^2 & 3\xi_i^2\eta_i^2 & 2\xi_i\eta_i^3 & 3\xi_i^2\eta_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_i & 2\eta_i & 0 & \xi_i^2 & 2\xi_i\eta_i & 3\eta_i^2 & \xi_i^3 & 2\xi_i^2\eta_i & 3\xi_i\eta^2 & 2\xi_i^3\eta_i & 3\xi_i^2\eta_i^2 & 3\xi_i^3\eta_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi_i & 2\eta_i & 0 & 3\xi_i^2 & 4\xi_i\eta_i & 2\eta_i^2 & 6\xi_i^2\eta_i & 6\xi_i\eta_i^2 & 9\xi_i^2\eta_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_{i+4} \\ a_{i+8} \\ a_{i+12} \end{Bmatrix}$$
$$(ก.9)$$

โดยที่ i คือ โนดของเอลิเมนต์ในแต่ละโนด โดยที่โนดที่ 1 แทน ξ = -1 และ η = -1 โนดที่ 2 แทน ξ = +1 และ η = -1 โนดที่ 3 แทน ξ = +1 และ η = +1 และโนดที่ 4 แทน ξ = -1 และ η = +1 เมื่อแทนลงในสมการ (ก.9) และทำการผกผันสมการจะได้ค่า a_j เมื่อ j คือ 1 ถึง 16 และเมื่อแทนค่าแล้ว a_j ลงในสมการ ก.5 จะได้ว่า

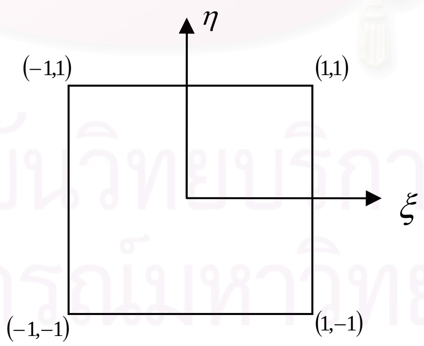
$$\varphi_1 = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$

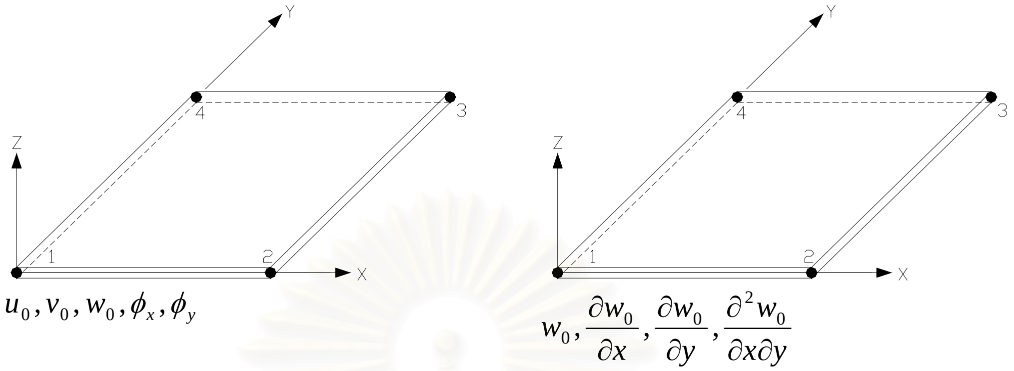
$$\varphi_3 = \frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$\varphi_5 = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-1)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$\varphi_6 = -\frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$\varphi_7 = -\frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$\varphi_8 = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-1)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$\varphi_9 = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-1)$$
$$\varphi_{10} = \frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-1)$$
$$\varphi_{11} = -\frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-1)$$
$$\varphi_{12} = -\frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-1)$$
$$\varphi_{13} = \frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-1)(\eta-1)^2(-\eta-1)$$
$$\varphi_{14} = -\frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)(\eta-1)^2(-\eta-1)$$
$$\varphi_{15} = \frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)(\eta+1)^2(\eta-1)$$
$$\varphi_{16} = -\frac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-1)(\eta+1)^2(\eta-1) \qquad (ก.10)$$

เมื่อนำสมการที่ (ก.10) เขียนกราฟพื้นผิวแสดงในรูปที่ (ก.4)

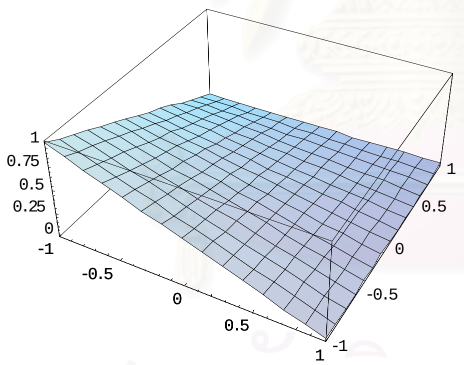


รูปที่ ก.1 ฟังก์ชันการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้นระบบไอโซพาราเมตริกซ์

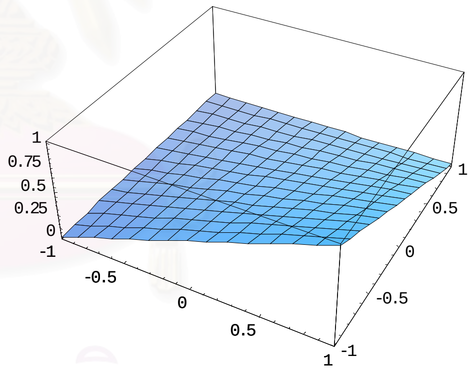


(a) (b)

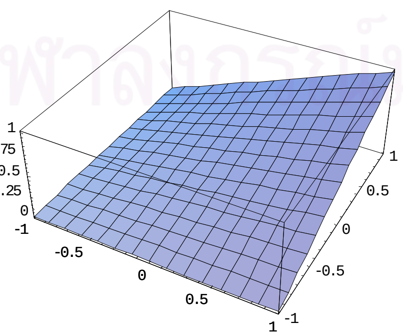
รูปที่ ก.2 ระดับขั้นเสรีของฟังก์ชันการประมาณของเฮอมิต



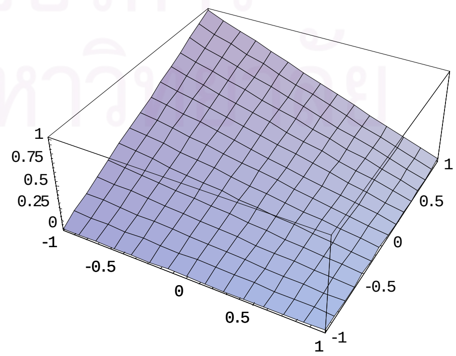
ก) ฟังก์ชันรูปร่าง ψ_1



ข) ฟังก์ชันรูปร่าง ψ_2

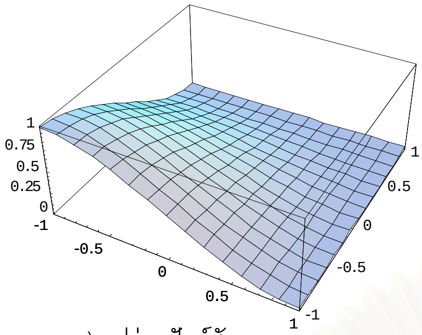


ค) ฟังก์ชันรูปร่าง ψ_3

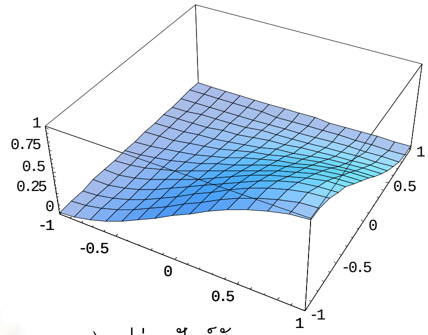


ง) ฟังก์ชันรูปร่าง ψ_4

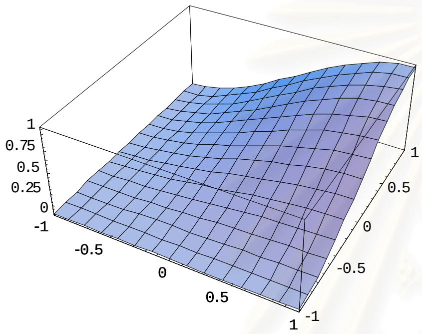
รูปที่ ก.3 ฟังก์ชันรูปร่างการประมาณของลากรานจ์สองมิติสี่เหลี่ยมเชิงเส้นระบบไอโซพาราเมตริกซ์



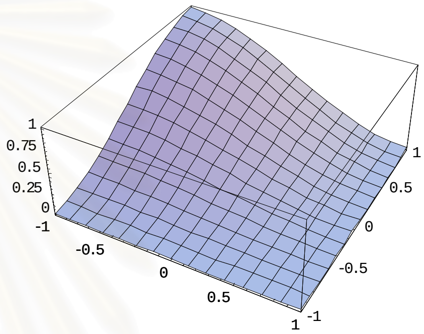
ก) รูปร่างฟังก์ชัน φ_1



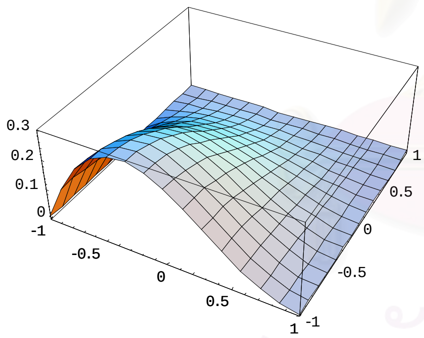
ข) รูปร่างฟังก์ชัน φ_2



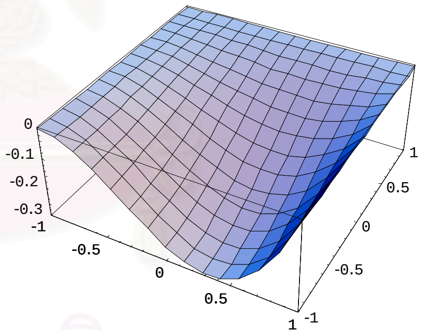
ค) รูปร่างฟังก์ชัน φ_3



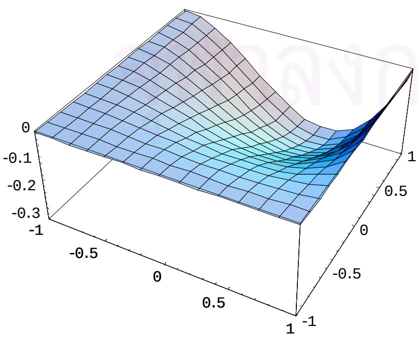
ง) รูปร่างฟังก์ชัน φ_4



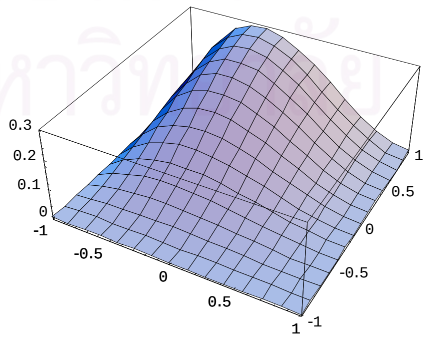
จ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_5



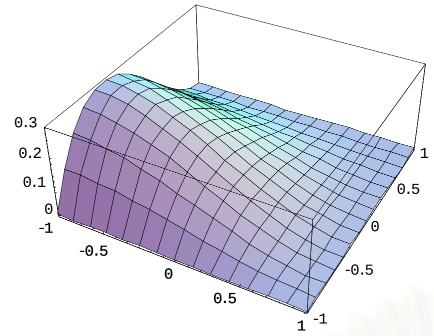
ฉ) รูปร่างฟังก์ชัน



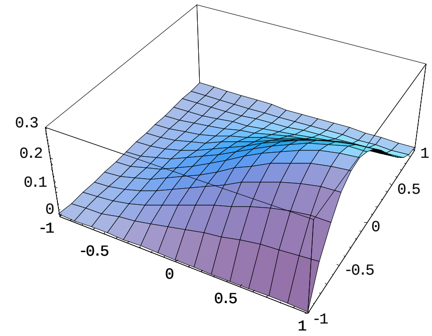
ช) รูปร่างฟังก์ชัน φ_7



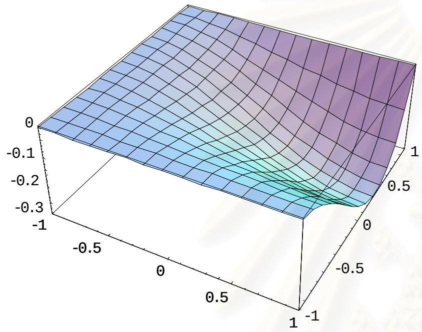
ซ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_8



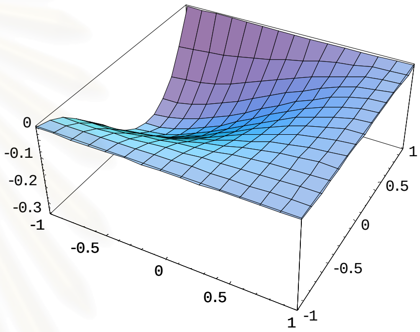
ฌ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_9



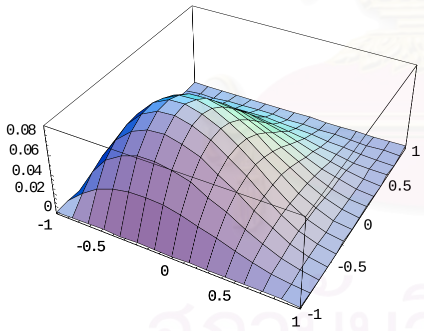
ญ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_{10}



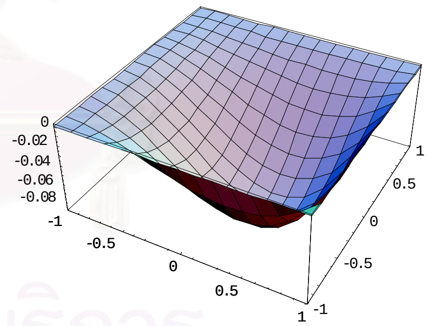
ฎ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_{11}



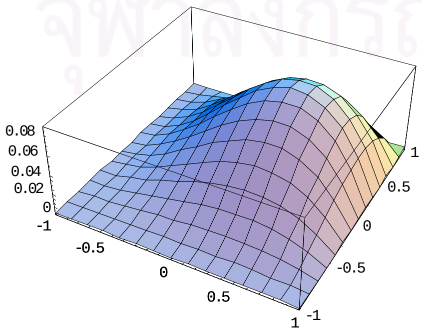
ฏ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_{12}

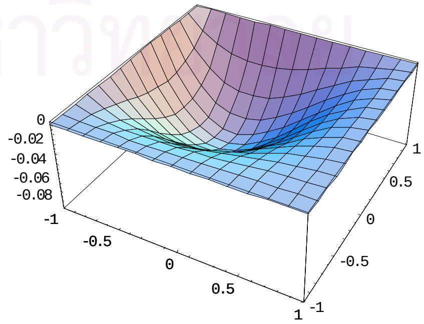


ฐ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_{13}



ฑ) รูปร่างฟังก์ชัน φ_{14}





รูปที่ ก.4 ฟังก์ชันรูปร่างของเฮอมิต 4 โนด 4 ระดับขั้นเสรี

ภาคผนวก ข

การอินทิเกรตแบบจุดของเกาส์

ในการประยุกต์ใช้วิธีของเกาส์ (Gauss's method) ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำไปใช้ในการอินทิเกรตปัญหาสองมิติ โดยมีหลักการที่ว่า การอินทิเกรตฟังก์ชันสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยการเลือกจุดเกาส์ (Gauss point) และน้ำหนัก (weight) ให้มีจำนวณมากเพียงพอ NG จุด แทนลงไปในฟังก์ชันนั้นแล้วทำการรวมค่าในแต่ละจุดเกาส์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \approx \sum_{i=1}^{NG}\sum_{j=1}^{NG} W_i W_j\, f(\xi_i,\eta_j) \qquad (ข.1)$$

โดยที่ W_i, W_j คือน้ำหนัก (weight) หาได้จากตาราง ข.1 และ ξ_i, η_j คือพิกัดจุดตัวอย่าง (sample) หรือเรียกว่าจุดเกาส์ (Gauss point) และ NG คือจำนวณจุดเกาส์ ซึ่งต้องมีจำนวณเพียงพอในการอินทิเกรต

ตาราง ข.1 ตำแหน่งของจุดเกาส์และค่าน้ำหนักที่ใช้ในสูตรการหาค่าอินทิเกรตแบบเกาส์

จำนวน	**ตำแหน่งจุดเกาส์**	**น้ำหนัก**
n	$\pm\xi_i$	w_i
1	0.0000000000	2.0000000000
2	±0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000	0.8888888889
	±0.7745966692	0.5555555556
4	±0.3399810436	0.6521451549
	±0.8611363116	0.3478548451
5	0.0000000000	0.5688888889
	±0.5384693101	0.4786286705
	±0.9061798459	0.2369268850
6	±0.2386191861	0.4679139346
	±0.6612093865	0.3607615730
	±0.9324695142	0.1713244924

ภาคผนวก ค

ปัญหาเชิงเส้นในภาวะไม่คงที่

การแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบเชิงเส้นภาวะไม่คงที่ (linear transient heat transfer problem) เพื่อหาอุณหภูมิที่เวลาต่าง ๆ กันเป็นผลลัพธ์ของปัญหาภายใต้ภาวะไม่คงที่ ก็เปรียบเสมือนการแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิของปัญหานั้นภายใต้ภาวะคงที่มาเรียงประกอบกันขึ้น ดังนั้น ในการแก้ปัญหาภายใต้ภาวะไม่คงที่ จำเป็นต้องทำการแก้ระบบสมการรวมหลาย ๆ ครั้งแทนที่จะต้องแก้สมการเพียงครั้งเดียว สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาอุณหภูมิที่ไม่คงที่ในวิทยานิพนธ์ที่นี้คือ

$$[C]\{\dot{T}\}+[[K_c]+[K_h]]\{T\}=\{Q_q\}+\{Q_h\} \qquad (ค.1)$$

สมการ (ค.1) สามารถเขียนโดยย่อได้ว่า

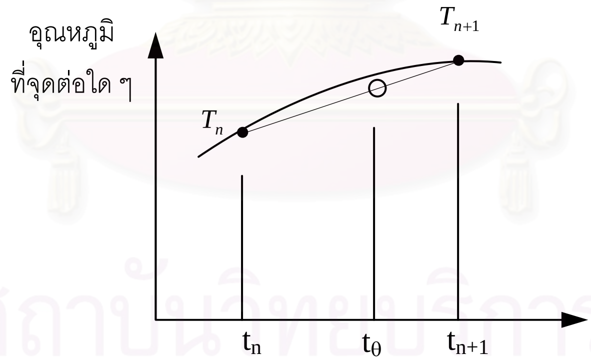
$$[C]\{\dot{T}\}+[K]\{T\}=\{Q\} \qquad (ค.2)$$

โดย

$$[K]=[K_c]+[K_h]$$

$$\{Q\}=\{Q_q\}+\{Q_h\}$$

วิธีการแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (ค.2) ใช้วิธีของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relatations) (ปราโมทย์,1999) (รูปที่ ค.1) ที่เวลา t_n เรารู้ค่าอุณหภูมิ T_n และเราจะใช้ช่วงเวลา (Time Step) Δt เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิ T_{n+1} ที่เวลา t_{n+1}



รูปที่ ค.1 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเมื่อเวลาเปลี่ยน

จากรูปจะเห็นได้ว่าที่เวลา t_θ ใดๆ ซึ่งอยู่ในช่วงเวลา Δt ดังกล่าวสามารถเขียนสมการขึ้นมาได้

$$t_\theta = t_n + \theta\Delta t \qquad (ค.3)$$

โดย $0 \le \theta \le 1$ ในช่วงเวลาดังกล่าวความชันของอุณหภูมิโดยประมาณ คือ

$$\dot{T}_\theta \cong \frac{T_{n+1}-T_n}{\Delta t} \qquad (ค.4)$$

และอุณหภูมิโดยประมาณที่เวลา t_θ คือ

$$t_\theta \cong (1-\theta)T_n + \theta T_{n+1} \qquad (ค.5)$$

ใช้หลักการดังแสดงในสมการ (ค.4) และ (ค.5) เพื่อการคำนวณหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิภาวะไม่คงที่จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (ค.2) โดยเริ่มจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังกล่าวที่เวลา t_θ ดังนี้

$$[C]\{\dot{T}\}_\theta + [K]\{T\}_\theta = \{Q\}_\theta \qquad \text{(ค.6)}$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (ค.4) เวกเตอร์ของความชันของอุณหภูมิที่จุดต่อต่าง ๆ คือ

$$\{\dot{T}\}_\theta \cong \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \qquad \text{(ค.7)}$$

และในทำนองเดียวกันกับสมการ (ค.5) เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อต่าง ๆ คือ

$$\{\dot{T}\}_\theta = (1-\theta)\{T\}_n + \theta\{T\}_{n+1} \qquad \text{(ค.8)}$$

โหลดเวกเตอร์ทางด้านขวามือของสมการ (ค.2) เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา โหลดเวกเตอร์ดังกล่าวที่เวลา t_θ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\{Q\}_\theta = (1-\theta)\{Q\}_n + \theta\{Q\}_{n+1} \qquad \text{(ค.9)}$$

แทนสมการ (ค.7) ถึง (ค.9) ลงในสมการ (ค.6) แล้วจัดพจน์ให้เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่ไม่รู้ค่าทางซ้ายของสมการจะได้

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C] + \theta[K]\right)\{T\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C] - (1-\theta)[K]\right)T_n + (1-\theta)\{Q\}_n + \theta\{Q\}_{n+1} \qquad \text{(ค.10)}$$

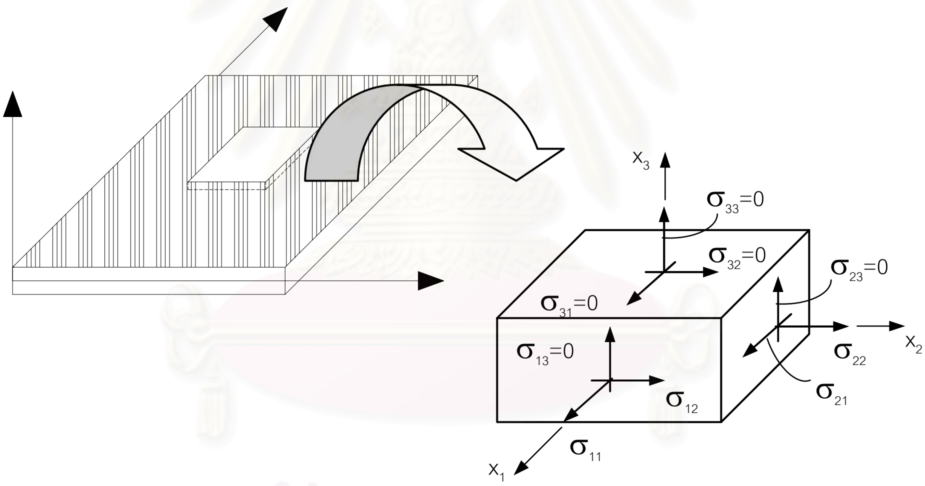
ทำการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (ค.2) มาให้อยู่ในรูปแบบระบบสมการ (ค.10) ซึ่งสามารถทำการแก้ได้โดยตรง โดยในที่นี้ใช้ θ เท่ากับ 2/3 ในการวิเคราะห์ ซึ่งเรียกว่า วิธีกาเลอร์คิน

การเลือกช่วงเวลา (time step) Δt นั้นมีผลเป็นอย่างมากต่อการคำนวณ การใช้ช่วงเวลา Δt ที่ต่ำมากเกินไปถึงแม้จะได้ผลที่แม่นยำ แต่ก็จะเสียเวลาที่จำเป็นต้องใช้ในการทำการคำนวณมาก ซึ่งต้องคำนึงเป็นอย่างยิ่งโดยเฉพาะปัญหาในทางปฏิบัติที่รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยจุดต่อที่มีจำนวนมากในทางตรงกันข้าม การใช้ช่วงเวลา Δt ที่สูงมากเกินไป จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง

ภาคผนวก ง

ความเค้นระนาบ

การพิจารณาระบบสามมิติ บางครั้งสามารถวิเคราะห์อยู่ในระบบสองมิติได้โดยการสมมติเงื่อนไขบ้างอย่างให้กับระบบสามมิติ ในการวิเคราะห์แผ่นประกอบ เมื่อเปรียบเทียบความหนาต่อความกว้างและความยาวนั้นมีค่าน้อย จึงสามารถวิเคราะห์แผ่นประกอบระบบสามมิติให้มีลักษณะแบบสองมิติโดยมีสมมติฐานที่ว่า (รูปที่ ง.1)ให้ความเค้นในแนวแกน z มีค่าเท่ากับศูนย์ (มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเค้นทิศทางแกน x และแกน y) ทำให้ส่วนประกอบความเครียดและความเค้นมีขนาด 6x6 ลดเหลือขนาด 3x3 โดยที่ความเค้นในแนวแกน z=0 (σ_z=0) ความเค้นเฉือนระนาบ xz เท่ากับศูนย์ (σ_{xz}=0) ความเค้นเฉือนระนาบ yz เท่ากับศูนย์ (σ_{yz}=0) จะเหลือเพียงความเค้นในทิศทาง x (σ_x)ความเค้นในทิศทาง y (σ_y) ความเค้นเฉือนระนาบ xy (σ_{xy}) ที่พิจารณา(รูปที่ ง.1)



รูปที่ ง.1 ความเค้นระนาบ

การที่พิจารณาให้ความเค้นในแนวแกน z มีค่าเท่ากับศูนย์ ไม่ได้หมายความว่าความเครียดในแกน z จะพิจารณาให้เท่ากับศูนย์ ($\varepsilon_z \neq 0$) เนื่องจากความเครียดที่เกิดขึ้นในทิศทางแกน z มีค่านัยสำคัญน้อยเมื่อเทียบกับความเครียดในทิศทางแกน x และความเครียดในทิศทางแกน y เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้นโดยให้ $\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_z=0$ จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (ง.1)$$

สมการ (ง.1) สามารถ ลดขนาดเมตริกซ์ 6x6 เหลือ 3x3 ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{22} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}_1 = [Q]\{\varepsilon\}_1 \qquad (ง.2)$$

โดยที่

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}Q_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

และ

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \qquad (ง.3)$$

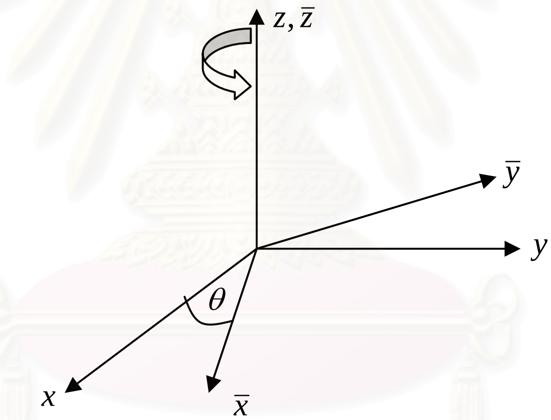
ภาคผนวก จ

การแปลงพิกัด

การแปลงพิกัดในที่นี้จะแบ่งออกเป็นสี่ส่วนคือ การย้ายแกน (coordinate transformation) การแปลงพิกัดความเค้นและความเครียด (transformation of stress and strain components) การแปลงพิกัดสัมประสิทธิ์วัสดุ (transformation of material coefficients) และการแปลงพิกัดสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (transformation of thermal coefficients) ซึ่งจะกล่าวเป็นลำดับดังต่อไปนี้

จ.1 การย้ายแกน

เมื่อพิจารณารูปที่ (จ.1) ระบบพิกัดฉากเฉพาะที่ (local coordinate) x, y, z ทำมุม θ กับระบบพิกัดฉากรวม (gobal coordinate) รอบแกน z



รูปที่ จ.1 การย้ายแกนรอบแกน z

สามารถเขียนการย้ายแกนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\{x\} = [Tr]\{\bar{x}\} \tag{จ.1}$$

โดยที่ $\{x\} = \lfloor x \quad y \quad z \rfloor^T$, $\{\bar{x}\} = \lfloor \bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z} \rfloor^T$ คือระบบพิกัดฉากเฉพาะที่และระบบพิกัดฉากรวมตามลำดับและ

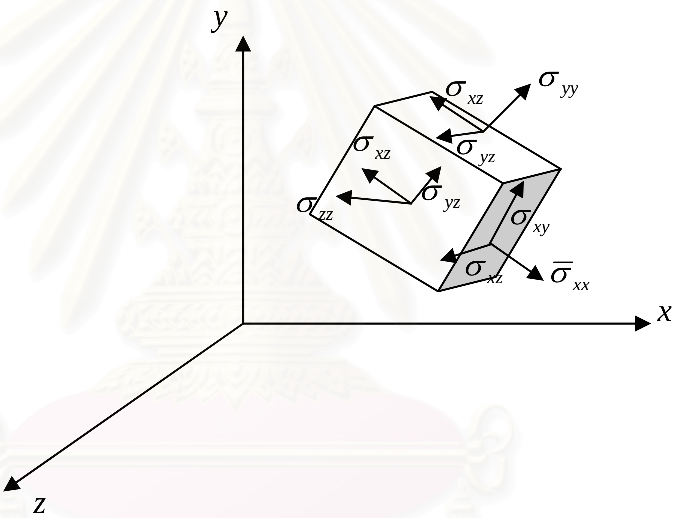
$$[Tr] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $l_1 = \cos\theta,\ m_1 = \sin\theta,\ n_1 = 0,\ l_2 = -\sin\theta,\ m_2 = \cos\theta,\ n_2 = 0,\ l_3 = 0,\ m_3 = 0,\ n_3 = 1$

จ.2 การแปลงพิกัดความเค้นและความเครียด

จากรูป จ.2 เมื่อแปลงความเค้นในระบบพิกัดรวม ($\left[\bar{\sigma}\right]$) ให้เป็นความเค้นลัพธ์ในแต่ละทิศทาง t_x, t_y, t_z (ในทิศทาง x,y,z ตามลำดับ) ในระบบพิกัดรวมได้ว่า

$$t_x = \left[\bar{\sigma}\right]\lfloor l_1 \quad l_2 \quad l_3 \rfloor$$
$$t_y = \left[\bar{\sigma}\right]\lfloor m_1 \quad m_2 \quad m_3 \rfloor$$
$$t_z = \left[\bar{\sigma}\right]\lfloor n_1 \quad n_2 \quad n_3 \rfloor \qquad \text{(จ.2)}$$



รูปที่ จ.2 การย้ายแกนความเค้น

ทำแปลงความเค้นในแต่ละทิศทางในระบบพิกัดรวมให้เป็นความเค้นในระบบพิกัดเฉพาะที่โดยการนำความเค้นในแต่ละทิศทางดอทกับเวคเตอร์ในแต่ละทิศทาง จะได้ว่าความเค้นตั้งฉากแกน x $\sigma_{11} = t_x \cdot i,\ \sigma_{12} = t_x \cdot j,$ $\sigma_{13} = t_x \cdot k$ ความเค้นตั้งฉากกับแกน y $\sigma_{12} = t_x \cdot i,\ \sigma_{22} = t_x \cdot j,\ \sigma_{23} = t_x \cdot k$ ความเค้นตั้งฉากกับแกน z $\sigma_{13} = t_x \cdot i,\ \sigma_{23} = t_x \cdot j,\ \sigma_{33} = t_x \cdot k$ โดยที่ $\lfloor i \quad j \quad k \rfloor^T = \left[Tr\right]$ สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\left[\sigma\right] = \left[Tr\right]\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \qquad \text{(จ.3)}$$

เมื่อแทนสมการ (จ.2) ลงในสมการ(จ.3) จะได้ว่า

$$\left[\sigma\right] = \left[Tr\right]\left[\bar{\sigma}\right]\left[Tr\right]^T \qquad \text{(จ.4)}$$

เมื่อแทนค่า $\left[Tr\right]$ แต่ละตัวลงในสมการ (จ..4) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\{\sigma\} = [R]\{\overline{\sigma}\} \tag{จ.5}$$

เมื่อ $$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

และในทางกลับกันเมื่อทำการผกผันสมการ (จ.5) จะได้ว่า

$$\{\overline{\sigma}\} = [T]\{\sigma\} \tag{จ.6}$$

เมื่อ $$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ในลักษณะเดียวกันกับความเครียด (strain) สามารถทำการย้ายแกนในลักษณะเดียวกันกับความเค้น (stress)จะได้ว่า

$$\{\varepsilon\} = [T]^T \{\overline{\varepsilon}\} \tag{จ.7}$$

และในทางกลับกันเมื่อทำการผกผันสมการ (จ.7)จะได้ว่า

$$\{\overline{\varepsilon}\} = [R]^T \{\varepsilon\} \tag{จ.8}$$

เมื่อ $\{\overline{\sigma}\} = \lfloor \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy} \rfloor^T$ คือความเค้นในระบบพิกัดฉากรวม

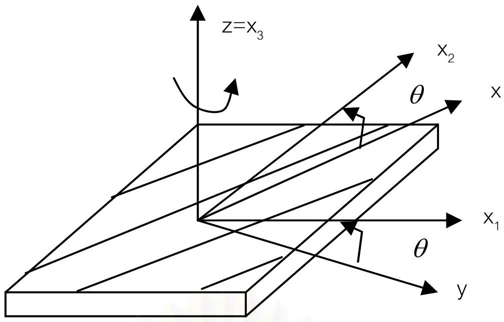
$\{\sigma\} = \lfloor \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12} \rfloor^T$ คือความเค้นในระบบพิกัดฉากเฉพาะที่

$\{\overline{\varepsilon}\} = \lfloor \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{xy} \rfloor^T$ คือความเครียดในระบบพิกัดฉากรวม

$\{\varepsilon\} = \lfloor \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12} \rfloor^T$ คือความเครียดในระบบพิกัดฉากเฉพาะที่

จ.3 การแปลงพิกัดสัมประสิทธิ์วัสดุ

คุณสมบัติของสัมประสิทธิ์วัสดุ (material coefficients) จะเปลี่ยนไปเมื่อพิกัดเฉพาะที่ทำมุมกับระบบพิกัดรวม เมื่อพิจารณารูป จ.3 ดังรูปด้านล่าง



รูปที่ จ.3 คุณสมบัติวัสดุทำมุมกับพิกัดเฉพาะที่

จำเป็นต้องทำการแปลงพิกัดโดยใช้ความสัมพันธ์ของการแปลงพิกัดความเค้นและการแปลงพิกัดความเครียดประกอบกันจาก

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \qquad \text{(จ.9)}$$

โดยที่ $[Q]$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธ์วัสดุในระบบพิกัดฉากเฉพาะที่เมื่อแทนสมการ (จ.5),(จ.7) ลงในสมการ (จ.9) ได้ว่า

$$[R]\{\overline{\sigma}\} = [Q][T]^T\{\overline{\varepsilon}\} \qquad \text{(จ.10)}$$

เมื่อ $[R]^{-1} = [T]$ จะได้ว่า

$$\{\overline{\sigma}\} = [T][Q][T]^T\{\overline{\varepsilon}\} \qquad \text{(จ.11)}$$

สำหรับความเค้นระนาบ เมตริกซ์ $\{\overline{\sigma}\},\{\overline{\varepsilon}\}$ จะประกอบด้วย $\lfloor \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rfloor^T$ และ $\lfloor \varepsilon_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rfloor^T$ ตามลำดับจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{16} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{26} \\ \sigma_{16} & \sigma_{26} & \sigma_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{\sigma}\} = [\overline{Q}]\{\overline{\varepsilon}\} \qquad \text{(จ.12)}$$

โดยที่ $[\overline{Q}]$ คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์วัสดุในระบบพิกัดฉากรวม

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

สำหรับผลของแรงเฉือน σ_{yz} และ σ_{xz} สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{44} & 0 \\ 0 & \sigma_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \qquad (\text{จ}.13)$$

โดยที่

$$\overline{Q}_{44} = Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta$$
$$\overline{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})\cos\theta\sin\theta$$
$$\overline{Q}_{55} = Q_{44}\sin^2\theta + Q_{55}\cos^2\theta$$

จ.4 การแปลงสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ

สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิจำเป็นต้องแปลงพิกัดเช่นเดียวกับความเครียด เมื่อผลของ $\alpha_{xz}, \alpha_{yz}, \alpha_{zz}$ น้อยมากจึงไม่พิจารณา สามารถเขียนความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในแกน x-y ได้ว่า

$$\alpha_{xx} = \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta$$
$$\alpha_{yy} = \alpha_{11}\sin^2\theta + \alpha_{22}\cos^2\theta$$
$$\alpha_{xy} = (\alpha_{11} - \alpha_{22})\sin\theta\cos\theta$$
$$\alpha_{xz} = 0, 2\alpha_{yz} = 0, \alpha_{zz} = \alpha_{33}$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 2\sin\theta\cos\theta & -2\sin\theta\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{\alpha}\} = [A]\{\alpha\} \qquad (\text{จ}.15)$$

โดยที่

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 2\sin\theta\cos\theta & -2\sin\theta\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\{\overline{\alpha}\}, \{\alpha\}$ คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในพิกัดฉากรวมและพิกัดฉากเฉพาะที่ตามลำดับ

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายคทาวุธ ไชยแสน เกิดวันที่ 17 ตุลาคม พ.ศ.2521 ที่จังหวัดเชียงใหม่ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่นในปีการศึกษา 2543 และได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์ มหาบัณฑิตที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2545 เคยได้รับทุนนักเรียนดีเด่นในปีการศึกษา 2535 จากโรงเรียนปรินส์ลอยแยลวิทยาลัย และได้รับทุนนักศึกษาดีเด่นอันดับหนึ่งในปีการศึกษา 2542 และปีการศึกษา 2543 จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น