

การวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่งแต่ไม่อัดตัวโดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ
และเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดได้



นางสาวพัชรี ชีระเอก

สถาบันวิทยบริการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1696-2

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ADAPTIVE MESHING AND CHARACTERISTIC-BASED SPLIT METHODS
FOR VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS



Miss Patcharee Theeraek

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1696-2

พัชรี ชีระเอก : การวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยระเบียบวิธีการแยกด้วย
 คุณลักษณะและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดได้. (ADAPTIVE MESHING AND
 CHARACTERISTIC - BASED SPLIT METHODS FOR VISCOUS
 INCOMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์
 เดชะอำไพ, 169 หน้า. ISBN 974-53-1696-2.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัวภายใต้
 สถานะอยู่ตัวในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ สมการ
 ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวลและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลใช้
 ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อเพื่อหาผลลัพธ์ และ
 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาอย่าง
 ง่ายที่มีผลเฉลยแน่นอนตรงและปัญหาที่มีผู้หาผลลัพธ์ไว้แล้ว

เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องยิ่งขึ้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ
 ลง จึงได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
 เทคนิคดังกล่าวจะใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูงและใช้
 เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ต่ำ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนแสดงให้เห็นถึง
 ประสิทธิภาพของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธี
 ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ภาควิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล.....

สาขาวิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล.....

ปีการศึกษา 2547.....

ลายมือชื่อนิสิต.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

4470733021 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD: FINITE ELEMENT / VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW / CHARACTERISTIC-BASED SPLIT / ADAPTIVE MESHING

PATCHAREE THEERAEEK : ADAPTIVE MESHING AND CHARACTERISTIC - BASED SPLIT METHODS FOR VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D. 169pp. ISBN 974-53-1696-2.

In this thesis, a finite element method for two-dimensional, steady-state viscous incompressible flow using characteristic-based split algorithm is presented. The corresponding finite element equations are derived from the set of partial differential equations which satisfy the law of conservation of mass and conservation of momentum. To analyze fluid flow problems, the linear interpolation function with three-node triangular elements are used. Finite element computer program from finite element equations is developed and verified by solving fluid flow problems of which exact solutions and previous numerical results are available.

To improve solution accuracy and save computational time, an adaptive meshing technique is applied to the finite element method. The technique places small elements in the region of high solution gradients, and vice versa.

Results from complex geometries assure the efficiency of applying the finite element method with adaptive meshing technique, which are proposed in this thesis.

Department Mechanical Engineering Student's signature _____
 Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature _____
 Academic Year 2004

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ซึ่งท่านได้ถ่ายทอดความรู้ คำแนะนำ รวมถึงให้โอกาส กำลังใจ การสนับสนุน ตลอดจนข้อคิดต่าง ๆ ที่มีคุณค่าอย่างยิ่งในการดำเนินชีวิต อันเป็นแรงผลักดันให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง ดังคำกล่าวที่ว่า คำแนะนำที่ดีมีค่ายิ่งกว่าทองคำ

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.มานิจ ทองประเสริฐ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.คุณทีนิ มณีรัตน์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ คณะกรรมการ รวมทั้งรองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.อสิ บุญจิตราคุลย์ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ คุณสุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช อาจารย์นิพนธ์ วรรณโสภากย์ คุณเสฏฐวรรธ สุจริตกวัตสกุล และ คุณปริญญา บุญมาเลิศ ตลอดจนสมาชิกในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณทั้งในอดีตและปัจจุบันทุกท่านที่ได้กล่าวถึง ณ ที่นี้ สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือ และกำลังใจในระหว่างการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา รวมถึงญาติพี่น้องที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตราบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ญ
สารบัญตาราง.....	ด
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ต
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	5
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	5
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์.....	5
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	6
บทที่ 2 สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหล.....	7
2.1 สมการอนุพันธ์มวล.....	7
2.2 สมการอนุพันธ์โมเมนตัม.....	10
บทที่ 3 ระเบียบวิธีการจำแนกด้วยคุณลักษณะ.....	14
บทที่ 4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีซีบีเอส.....	27
4.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	27
4.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ ที่ได้จากวิธีซีบีเอส.....	31
4.2.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีซีบีเอส.....	31
4.2.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับวิธีซีบีเอส.....	37
4.2.3 การกำหนดช่วงเวลาในการคำนวณสำหรับวิธีซีบีเอส.....	51

บทที่ 5	ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์	52
5.1	ลักษณะของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS.....	52
5.2	รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS.....	57
5.3	ตัวอย่างการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ในการวิเคราะห์ปัญหา การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ.....	60
บทที่ 6	ผลการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการวิเคราะห์ ปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ	67
6.1	ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด (Couette flow).....	67
6.2	ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน (Poiseuille flow).....	71
6.3	ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม (cavity flow).....	75
6.4	ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัด ทันทีทันใด (backward facing step flow).....	81
6.5	ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ (flow over two-dimensional obstacle).....	87
6.5.1	ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปกล่องสี่เหลี่ยม (flow over block).....	88
6.5.2	ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปแท่งสี่เหลี่ยม (flow over fence).....	91
บทที่ 7	เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	96
7.1	หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	96
7.2	โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	102
7.3	ขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....	103
7.4	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม FEMESH.....	106
7.5	ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ.....	107
บทที่ 8	การวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	113
8.1	ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง.....	113
8.2	ปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว.....	119

บทที่ 9	บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ	128
9.1	บทสรุป	128
9.2	ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์	129
9.3	ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	130
	รายการอ้างอิง	131
	ภาคผนวก	136
	ภาคผนวก ก. รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS	136
	ภาคผนวก ข. รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ FEMCBS	162
	ภาคผนวก ค. รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ CBSFEM	166
	ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	169

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 6.1	การเปรียบเทียบระยะเวลาการแตะสัมผัสของการไหลหมุนวนระหว่างผลจากการทดลองกับผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยโปรแกรม LOCBS	85
ตารางที่ 6.2	รูปร่างและค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ	87
ตารางที่ 6.3	การเปรียบเทียบระยะเวลาการแตะสัมผัสของการไหลหมุนวนและระยะเวลาเกิดการแยกตัวของการไหลระหว่างผลการทดลองกับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรม LOCBS	93



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญญภาพ

	หน้า	
รูปที่ 2.1	รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลของไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ ที่ตั้งอยู่ในโดเมนของการไหล	8
รูปที่ 2.2	แรงต่าง ๆ ที่กระทำบนผิวของก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล	10
รูปที่ 4.1	การแบ่งพื้นที่โดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ	27
รูปที่ 4.2	เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่ 3 จุดต่อ	28
รูปที่ 4.3	การคำนวณเวกเตอร์ที่ขอบโดเมนของการไหล	43
รูปที่ 4.4	ขั้นตอนการทำงานของวิธีซีบีเอส	50
รูปที่ 5.1	ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS	56
รูปที่ 5.2	ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	61
รูปที่ 5.3	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	62
รูปที่ 5.4	ข้อมูลไฟล์นำเข้าชื่อ 'cav.in'	63
รูปที่ 5.5	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS	64
รูปที่ 5.6	ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.op'	65
รูปที่ 5.7	ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.er'	65
รูปที่ 5.8	ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.re'	66
รูปที่ 6.1	ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด	68
รูปที่ 6.2	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด	69
รูปที่ 6.3	การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด	70
รูปที่ 6.4	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด	70
รูปที่ 6.5	ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	71
รูปที่ 6.6	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	73
รูปที่ 6.7	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	74

รูปที่ 6.8	การเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับผลเฉลยแม่นยำตรง	74
รูปที่ 6.9	การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	74
รูปที่ 6.10	การเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของความดันที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง y ต่าง ๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับผลเฉลยแม่นยำตรง	75
รูปที่ 6.11	ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม	76
รูปที่ 6.12	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม	76
รูปที่ 6.13	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ	77
	(ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 100$	77
	(ข) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 400$	77
รูปที่ 6.14	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 1,000 และ 5,000 ตามลำดับ	77
	(ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 1,000$	77
	(ข) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 5,000$	77
รูปที่ 6.15	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอสกับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสลับเนื่องเมื่อ $Re = 100$ และ 400 ตามลำดับ	78
	(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 100$	78
	(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 400$	78
รูปที่ 6.16	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอสกับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสลับเนื่องเมื่อ $Re = 1,000$ และ 5,000 ตามลำดับ	79
	(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 1,000$	79
	(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 5,000$	79
รูปที่ 6.17	รูปแบบจำลองแบบไม่สม่ำเสมอของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม	80
รูปที่ 6.18	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 5,000	80
รูปที่ 6.19	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วจากวิธีซีบีเอสกับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสลับเนื่องที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 5,000	81

รูปที่ 6.20	ลักษณะของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด	82
รูปที่ 6.21	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด	82
รูปที่ 6.22	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=50$	83
รูปที่ 6.23	การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=50$	83
รูปที่ 6.24	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.22 ที่แสดงการไหลหมุนวนของปัญหาที่ค่า $Re=50$	83
รูปที่ 6.25	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=150$	84
รูปที่ 6.26	การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=150$	84
รูปที่ 6.27	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.25 ที่แสดงการไหลหมุนวนของปัญหาที่ค่า $Re=150$	84
รูปที่ 6.28	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอสกับผลการทดลองที่ตำแหน่งต่าง ๆ สำหรับปัญหาที่มีค่า $Re = 150$	86
	(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 3.8$	86
	(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 5.0$	86
	(ค) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 7.0$	86
	(ง) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 15.0$	86
รูปที่ 6.29	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ	87
รูปที่ 6.30	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม	88
รูปที่ 6.31	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144	88
รูปที่ 6.32	การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144	89

รูปที่ 6.33	การกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.31 ที่แสดงรายละเอียดของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 144	89
รูปที่ 6.34	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วที่คำนวณได้กับผลการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ	90
	(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 68$	90
	(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 80$	90
	(ค) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 90$	90
	(ง) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 100$	90
	(จ) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 110$	90
รูปที่ 6.35	การกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ	91
รูปที่ 6.36	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยม	91
รูปที่ 6.37	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5	92
รูปที่ 6.38	การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5	92
รูปที่ 6.39	การกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.37 ที่แสดงรายละเอียดของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5	92
รูปที่ 6.40	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วที่คำนวณได้กับผลการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ	94
	(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 53$	94
	(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 63$	94
	(ค) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 81$	94
	(ง) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 101$	94
	(จ) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 131$	94
รูปที่ 6.41	การกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ	95
รูปที่ 7.1	หลักการของการหาความเค้นในแนวแกนหลัก	97
รูปที่ 7.2	พื้นที่ผิวและแรงที่กระทำบนด้านต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในสองมิติ	97
รูปที่ 7.3	การวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ Y	100

รูปที่ 7.4	ขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	105
รูปที่ 7.5	ส่วนคำสั่งของไฟล์ ‘cylinder0.out’	106
รูปที่ 7.6	ส่วนผลลัพธ์ของไฟล์ ‘cylinder0.out’	106
รูปที่ 7.7	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก	107
รูปที่ 7.8	รูปแบบจำลองเริ่มต้นของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก	108
รูปที่ 7.9	การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบสำหรับ แบบจำลองเริ่มต้นของปัญหาการไหลภายในท่อ	109
รูปที่ 7.10	รูปแบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกหลังจากทำการปรับ ขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	109
รูปที่ 7.11	การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบสำหรับ แบบจำลองของปัญหาการไหลภายในท่อหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	110
รูปที่ 7.12	รูปแบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกหลังจากทำการปรับ ขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	111
รูปที่ 7.13	การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบสำหรับ แบบจำลองของปัญหาการไหลภายในท่อหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	111
รูปที่ 8.1	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง	113
รูปที่ 8.2	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่ง สี่เหลี่ยมสองแท่ง	114
รูปที่ 8.3	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่ง สี่เหลี่ยมสองแท่ง	114
รูปที่ 8.4	รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่ง ภายในกรอบประของรูปที่ 8.2	114
	(ก) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	114
	(ข) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางบน	114
รูปที่ 8.5	รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยม ทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.3	115
	(ก) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	115
	(ข) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางบน	115
รูปที่ 8.6	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่ง สี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	115

รูปที่ 8.7	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	115
รูปที่ 8.8	รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.6 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	116
	(ก) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	116
	(ข) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางบน	116
รูปที่ 8.9	รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.7 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	116
	(ก) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	116
	(ข) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางบน	116
รูปที่ 8.10	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	116
รูปที่ 8.11	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	116
รูปที่ 8.12	รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.10 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	117
	(ก) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	117
	(ข) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางบน	117
รูปที่ 8.13	รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.11 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	117
	(ก) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางล่าง	117
	(ข) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางบน	117
รูปที่ 8.14	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วบริเวณด้านหน้าและหลังแท่งสี่เหลี่ยมล่าง	118
	(ก) ความเร็วด้านหน้าแท่งสี่เหลี่ยมล่าง	118
	(ข) ความเร็วด้านหลังแท่งสี่เหลี่ยมล่าง	118
รูปที่ 8.15	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วบริเวณด้านหน้าและหลังแท่งสี่เหลี่ยมบน	118
	(ก) ความเร็วด้านหน้าแท่งสี่เหลี่ยมบน	118
	(ข) ความเร็วด้านหลังแท่งสี่เหลี่ยมบน	118

รูปที่ 8.16	ลักษณะของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว	119
รูปที่ 8.17	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว	120
รูปที่ 8.18	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว	120
รูปที่ 8.19	รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.18	121
รูปที่ 8.20	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์วหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	122
รูปที่ 8.21	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์วหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	122
รูปที่ 8.22	รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.21	123
รูปที่ 8.23	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์วหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	123
รูปที่ 8.24	ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์วหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	124
รูปที่ 8.25	รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.24	124
รูปที่ 8.26	รายละเอียดการกระจายความเร็วบริเวณป่าวาล์วด้านซ้ายมือภายในกรอบประของรูปที่ 8.25	125
รูปที่ 8.27	รายละเอียดการกระจายความเร็วบริเวณป่าวาล์วด้านขวามือภายในกรอบประของรูปที่ 8.25	125
รูปที่ 8.28	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วด้านซ้ายและขวามือในแนว A-A สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากทำการปรับขนาดครั้งที่ 2	126
รูปที่ 8.29	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วด้านซ้ายและขวามือในแนว B-B สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากทำการปรับขนาดครั้งที่ 2	126
รูปที่ 8.30	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วซ้ายมือในแนว A-A	127
รูปที่ 8.31	การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วซ้ายมือในแนว B-B	127

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่, ค่าคงที่จากการอินทิเกรต
\bar{a}	เวกเตอร์ความเร่ง
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
a_x	ความเร่งในแนวแกน x
a_y	ความเร่งในแนวแกน y
B	ค่าคงที่จากการอินทิเกรต
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
C_{u1}, C_{v1}	เวกเตอร์ของการพาภายในเอลิเมนต์ในชั้นตอนที่ 1
C_{u2}, C_{v2}	เวกเตอร์เนื่องมาจากการพาภายในเอลิเมนต์ในชั้นตอนที่ 1
C_{u2s}, C_{v2s}	เวกเตอร์เนื่องมาจากการพาบนขอบเอลิเมนต์ในชั้นตอนที่ 1
c	ความเร็วเสียง
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
D	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
e	เอลิเมนต์
\bar{F}	เวกเตอร์แรง
F_X	แรงในแนวแกนหลัก X
F_x	แรงในแนวแกน x
F_Y	แรงในแนวแกน Y
F_y	แรงในแนวแกน y
f	แรงโน้มถ่วงของโลก
G_u, G_v	เวกเตอร์ของพจน์ความเร็วในชั้นตอนที่ 3
H, h	ความสูงของปัญหา
h_1	ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X
h_2	ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y
i	เทนเซอร์
\bar{i}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x
j	เทนเซอร์
\bar{j}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y
K_u, K_v	เวกเตอร์ของความหนืดภายในเอลิเมนต์ในชั้นตอนที่ 1

K_{us}, K_{vs}	เวกเตอร์ของความหนืดบนขอบเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 1
k	เทนเซอร์, สัมประสิทธิ์ของพจน์การแพร่
k_{ij}	สัมประสิทธิ์ของตัวไม่รู้ค่า
L	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์, ความยาวด้านของเอลิเมนต์, ความยาวของปัญหา
M_p	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของความดัน
M_u, M_v	เมตริกซ์มวลแบบรวมก้อน
m	มวล
N_i, N_α	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
\tilde{n}	เวกเตอร์ตั้งฉาก
P_u, P_v	เวกเตอร์เนื่องมาจากความดันภายในเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 1
P_{us}, P_{vs}	เวกเตอร์เนื่องมาจากความดันบนขอบเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 1
$P_{u1}, P_{v1}, P_{u2}, P_{v2}$	เวกเตอร์ของพจน์ความดันในขั้นตอนที่ 3
p	ความดัน
p_α	ความดันที่จุดต่อ
Q	พจน์เนื่องจากแหล่งกำเนิด
R	เศษตกค้าง
Re	เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์
R_p	เวกเตอร์ของพจน์ความดันในขั้นตอนที่ 2
R_u	เวกเตอร์ของพจน์ความเร็วในขั้นตอนที่ 2
$R_{\Delta u^{**}}$	เวกเตอร์ของพจน์ความเร็วช่วยในขั้นตอนที่ 2
S	ระยะทาง
sys	ระบบสมการรวม
s_1, s_2, s_3	ระยะการเกิดการไหลหมุนวน
t	เวลา
U_{\max}	ความเร็วสูงสุด
u	ความเร็วในแนวแกน x
\bar{u}	ความเร็วเฉลี่ยในแนวแกน x'
u^{**}	ความเร็วช่วยในแนวแกน x
u_α	ความเร็วในแนวแกน x ที่จุดต่อ
V	ความเร็วในการไหล
\bar{V}	เวกเตอร์ความเร็ว

$V_{(e)}$	ความเร็วในการไหลสำหรับแต่ละเอลิเมนต์
v	ความเร็วในแนวแกน y
\bar{v}	ความเร็วเฉลี่ยในแนวแกน y'
v^{**}	ความเร็วช่วยในแนวแกน y
v_α	ความเร็วในแนวแกน y ที่จุดต่อ
W_i, W_α	ฟังก์ชันน้ำหนัก
x	ระยะในแนวราบ
x'	ระยะในแนวราบที่เคลื่อนที่ไปกับการไหล
x_r, x_{r1}	ระยะการแตะสัมผัส
x_{r2}, x_{r3}	ระยะการเกิดการแยกตัวของการไหล
y	ระยะในแนวตั้ง
y'	ระยะในแนวตั้งที่เคลื่อนที่ไปกับการไหล
Δ	ผลต่าง
Γ	ขอบของการไหล
$\Gamma_{(e)}$	ขอบของเอลิเมนต์
κ	ค่าบัลค์โมดูลัส
Σ	ผลรวม
Ω	โดเมนของการไหล
$\Omega_{(e)}$	โดเมนของเอลิเมนต์
δ_x	ระยะทางบนแกน x'
δ_y	ระยะทางบนแกน y'
ϕ	ตัวแปรใดๆ
$\bar{\phi}$	ผลเฉลยแม่นยำ
λ	ความหนืดที่สอง, ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
μ	ความหนืดพลศาสตร์
ν	ความหนืดจลนศาสตร์
θ	มุมที่แกนหลัก X ทำกับแกน x , ค่าคงที่ตั้งแต่ 0 ถึง 1
$\theta, \theta_1, \theta_2$	ค่าคงที่ตั้งแต่ 0 ถึง 1
ρ	ความหนาแน่น
τ_{XX}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกนหลัก X
τ_{xx}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x

$\tau_{x'x'}$	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x'
τ_{XY}	ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกนหลัก Y
τ_{xy}	ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน y
$\tau_{x'y'}$	ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน y'
τ_{yx}	ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน x
$\tau_{y'x'}$	ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน x'
τ_{YY}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกนหลัก Y
τ_{yy}	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y
$\tau_{y'y'}$	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y'
ω	ตัวแปรออร์ทิซิดี
ψ	ตัวแปรสตรีมฟังก์ชัน
∞	อนันต์
∂	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย
\approx	ประมาณ
\bigcirc	เส้นผ่านศูนย์กลาง
\bar{V}	เกรเดียนต์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาการไหลแบบไม่มีการอัดตัว (incompressible flow) เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการไหลหนืดที่มีความเร็วต่ำซึ่งมีความซับซ้อน เนื่องจากการอธิบายพฤติกรรมการไหลนี้จำเป็นต้องอาศัยการแก้สมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่เกี่ยวข้องคือระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) และการหาผลเฉลยแม่นยำ (exact solutions) สำหรับปัญหาการไหลที่พบโดยทั่วไปนั้นทำได้ยากลำบาก จึงมีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) มาใช้วิเคราะห์หาผลเฉลยโดยประมาณจากระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์นี้แทน

ในอดีตที่ผ่านมาระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากเนื่องจากสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย แต่มีข้อจำกัดคือในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีนี้จำเป็นต้องแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม ซึ่งหากปัญหาที่นำมาทำการวิเคราะห์มีรูปร่างซับซ้อนจะทำให้เกิดความยากลำบากในการจำลองรูปร่างลักษณะของปัญหา จึงได้มีการพัฒนาการหาผลเฉลยวิธีใหม่เรียกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) โดยระเบียบวิธีนี้สามารถแบ่งขอบเขตของปัญหาให้อยู่ในรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ และสามารถแบ่งให้มีขนาดแตกต่างกันออกไปได้เป็นผลให้จำลองรูปร่างลักษณะของปัญหาได้ใกล้เคียงยิ่งขึ้น ทำให้ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้น

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีหลักการคร่าว ๆ คือเริ่มจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ออกเป็นเอลิเมนต์ (elements) ย่อย ๆ แล้วจึงเลือกฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation function) เพื่อประมาณค่าของตัวไม่ทราบค่า (unknowns) บนเอลิเมนต์นั้น ๆ และประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ของปัญหาโดยจะประดิษฐ์ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย ๆ สุดท้ายจึงนำเอลิเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้มารวมกันเป็นระบบสมการรวม (system of equations) และประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม จากนั้นจึงทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของตัวไม่ทราบค่าเหล่านั้น

ความยุ่งยากซับซ้อนประการแรกในการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาวิเคราะห์ปัญหาการไหลหนืดในสองมิติ มาจากการที่ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ประกอบไปด้วยสมการ

อนุกรมโมเมนต์จำนวน 2 สมการซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าได้แก่ความเร็วในแนวแกนทั้งสองและความดัน (u, v, p) และสมการอนุกรมมวลอีก 1 สมการซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าได้แก่ความเร็วในแนวแกนทั้งสองและความหนาแน่น (u, v, ρ) จะเห็นได้ว่าการที่สมการอนุกรมมวลไม่ปรากฏพจน์ของความดันในสมการโดยตรงทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่าย ในอดีตที่ผ่านมาได้มีการหลีกเลี่ยงการหาค่าความดันดังกล่าวโดย Ikegawa [1] ได้นำเสนอการแก้ปัญหาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยหาค่าตัวแปรสตรีมฟังก์ชัน (ψ , stream function) และค่าตัวแปรวอร์ทิซิตี (ω , vorticity) แทนการหาค่าความเร็วและความดันโดยตรง และทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิธีนี้กับผลการคำนวณจากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องและผลการทดลองการไหลผ่านช่องแคบ (channel with a cavity) พบว่าได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน วิธีการดังกล่าวช่วยลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงได้แต่มีความยุ่งยากในการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา และก่อให้เกิดความซับซ้อนหากนำไปประยุกต์กับปัญหาการไหลในสามมิติทำให้ในปัจจุบันจึงนิยมแก้ปัญหาจากตัวแปรตั้งต้น (primitive variables) มากขึ้น

ความซับซ้อนอีกประการหนึ่งของการวิเคราะห์การไหลมาจากการที่มีพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากการพา (convection term) ในระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น นอกจากนั้นยังมีความยุ่งยากจากการที่พจน์ของอนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับความเร็วมีอันดับสูงกว่าพจน์ของอนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับความดันอยู่หนึ่งอันดับ ซึ่งหากเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูงหรือเลือกใช้อันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและความดันที่เท่ากันในระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์แล้ว จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เกิดการสั่น (oscillation) และการลู่เข้า (converge) ของคำตอบเป็นไปได้ช้าหรืออาจไม่เกิดการลู่เข้าของคำตอบ โดยเฉพาะหากปัญหาที่ทำการวิเคราะห์มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynold number) สูง จากสาเหตุดังกล่าวจึงได้มีการพัฒนาการแก้ปัญหาการไหลโดย Chorin [2,3] นำความอัดตัวได้เทียม (artificial compressibility; AC) มาช่วยแก้ปัญหา โดยนำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ความดันและความหนาแน่นเพิ่มเติมลงในสมการอนุกรมมวลทำให้งานวิจัยในเวลาต่อมาสามารถนำหลักการนี้มาใช้กับปัญหาการไหลได้ โดยใช้หลักการนี้กับวิธีการคำนวณแบบแยกกัน (segregated solution method) ซึ่งอาศัยการคำนวณหาค่าความเร็วจากความดันที่สมมติขึ้น จากนั้นจึงใช้ความสัมพันธ์ของความอัดตัวได้เทียมมาคำนวณหาค่าความดันในสมการอนุกรมมวล ค่าความดันที่ได้นี้จะถูกนำกลับมาใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วใหม่ วิธีการดังกล่าวถูกปรับปรุงภายหลังเป็นผลให้สามารถเลือกใช้อันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่เท่ากันได้ ซึ่งช่วยลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณและได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้น

Yamada et al. [4] และ Kawahara et al. [5,6] เลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบผสม (mixed interpolation function) ทำการแก้ปัญหาคาร์ไหลแบบไม่อัดตัวโดยเลือกใช้อิเลเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ เลือกประมาณค่าความเร็วด้วยควอดราติกฟังก์ชันและใช้การประมาณภายในสำหรับความดันเป็นแบบเชิงเส้น วิธีการดังกล่าวถูกนำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) [7] ซึ่งช่วยลดการสั่นของผลลัพธ์และสามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่มีค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์สูงได้มากขึ้น

Christie et al. [8] และ Heinrich et al. [9] ทำการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighted function) ที่ใช้ในระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) เรียกว่าวิธีเพโทรฟ-กาลเออร์กิน (Petrov-Galerkin Method) เพื่อช่วยลดการสั่นของผลลัพธ์ ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องยิ่งขึ้นโดยไม่ต้องใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบผสม ส่งผลให้งานวิจัยในเวลาต่อมาของ Brooks and Hughes [10] ได้พัฒนาการหาผลลัพธ์ของปัญหาการไหลโดยรวมหลักการจากวิธีเพโทรฟ-กาลเออร์กินเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ เรียกว่าวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพโทรฟ-กาลเออร์กิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin method) วิธีการดังกล่าวส่งผลให้เกิดการแพร่ที่ผิดพลาดเล็กน้อยและลดการสั่นของผลลัพธ์ลงได้

นิพนธ์ วรรณโสภากย์ [11] นำระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์มาใช้ร่วมกับวิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันและประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับวิธีการดังกล่าว พบว่าสามารถลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงได้และทำให้วิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนได้มากขึ้น

Donea [12] และ Lohner et al. [13] นำเสนอการแก้ปัญหาคาร์ไหลด้วยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาลเออร์กิน (Taylor-Galerkin method) ซึ่งคำนวณหาผลลัพธ์ในลักษณะที่ก้าวไปกับเวลา โดยมีหลักการคือการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) เพื่อสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) [14] ที่เกี่ยวข้องกับเวลา (time) และใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะ (space) ในโดเมนของการไหลนั้น วิธีการดังกล่าวช่วยลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณลงได้อย่างมากและได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องสูง และยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้นอื่น ๆ ได้ เป็นผลให้ได้รับความนิยมน้อยแพร่หลายในเวลาต่อมา

Zienkiewicz and Codina [15] นำเสนอระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-Based Split algorithm; CBS) หรือวิธีที่เรียกกันโดยทั่วไปว่าวิธีซีบีเอสในการ

จัดการกับพจน์เนื่องจากการพา โดยย้ายพิกัดอ้างอิงไปอยู่บนแกนคุณลักษณะซึ่งเป็นแกนที่เคลื่อนที่ไปกับอนุภาคของของไหล เป็นผลให้สามารถรวมพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากเวลาเข้ากับพจน์เนื่องจากการพา จากนั้นจึงทำการประมาณค่าความเร็วและความดันกลับมาอยู่บนแกนอ้างอิงตามเดิม นอกจากนี้วิธีซีบีเอสยังได้ประยุกต์ใช้วิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันในการหาผลลัพธ์ของตัวแปรตั้งต้น วิธีการดังกล่าวลดการสั่นของผลลัพธ์เนื่องจากการพาและสามารถเลือกใช้อันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่เท่ากันได้ ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นและการคำนวณในลักษณะก้าวไปกับเวลาช่วยลดเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงได้อย่างมาก ซึ่งภายหลัง Zienkiewicz et al. [16, 17] และ Codina et al. [18] ได้ปรับปรุงวิธีซีบีเอสให้สามารถนำไปใช้ทดสอบกับปัญหาหลาย ๆ แบบได้อาทิ เช่น ปัญหาการไหลความเร็วต่ำแบบหนืด ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ปัญหาการไหลของน้ำตื้น และ ปัญหาการไหลในตัวกลางพรุน เป็นต้น

Nithiarasu and Zienkiewicz [19] และ Nithiarasu [20] เสนอการกำหนดช่วงเวลา (time step) และวิธีการกำหนดขอบเขตของปัญหาในการคำนวณด้วยวิธีซีบีเอสสำหรับปัญหาการไหลแบบไม่มีการอัดตัวเพื่อปรับปรุงผลลัพธ์ให้มีความถูกต้องยิ่งขึ้น

ในการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้วิเคราะห์หาผลเฉลยโดยทั่วไปนั้น ความถูกต้องของผลลัพธ์จะขึ้นอยู่กับขนาดของเอลิเมนต์ กล่าวคือหากต้องการความถูกต้องเที่ยงตรงสูงก็จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากโดยเฉพาะตรงบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากตลอดทั้งโดเมนของการไหลทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำเพิ่มมากขึ้นโดยไม่จำเป็น ดังนั้นการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) ซึ่งสามารถปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง และให้มีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ต่ำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะทำให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

งานวิทยานิพนธ์นี้จึงขอเสนอวิธีการหาผลลัพธ์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติภายใต้สถานะอยู่ตัว ด้วยการนำระเบียบวิธีซีบีเอสมาประยุกต์ใช้ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

เพื่อศึกษาระเบียบวิธีซีบีเอสและประติสัมพันธ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ย่อยที่ได้จากระเบียบวิธีซีบีเอส รวมถึงประติสัมพันธ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลราบเรียบแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติภายใต้สถานะอยู่ตัวสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

- 1.3.1 ประติสัมพันธ์สมการอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีซีบีเอสจากสมการอนุพันธ์โมเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลราบเรียบแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติภายใต้สถานะอยู่ตัว
- 1.3.2 ประติสัมพันธ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน
- 1.3.3 ประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประติสัมพันธ์ขึ้น
- 1.3.4 แสดงประสิทธิภาพของการใช้ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประติสัมพันธ์ขึ้น โดยนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อน

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

- 1.4.1 ศึกษาระเบียบวิธีซีบีเอสสำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ
- 1.4.2 ประติสัมพันธ์สมการอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีซีบีเอสจากสมการอนุพันธ์โมเมนต์
- 1.4.3 ประติสัมพันธ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ
- 1.4.4 ทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประติสัมพันธ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นยำหรือปัญหาที่มีผู้หาผลลัพธ์ไว้แล้ว
- 1.4.5 ประยุกต์ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์
- 1.4.6 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ปรับปรุงแล้วไปใช้แก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้น
- 1.4.7 เขียนวิทยานิพนธ์
- 1.4.8 สอบวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

- 1.5.1 สามารถนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากวิธีซีบีเอสได้
- 1.5.2 สามารถนำโปรแกรมที่ปรับปรุงแล้วไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนได้ โดยไม่ต้องทำการทดลอง
- 1.5.3 สามารถลดหน่วยความจำ (RAM) และเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงได้
- 1.5.4 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาวิชาการด้านไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับผู้วิจัยในอนาคตต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหล

ในบทนี้จะแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ [21] ได้แก่สมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมตามลำดับ

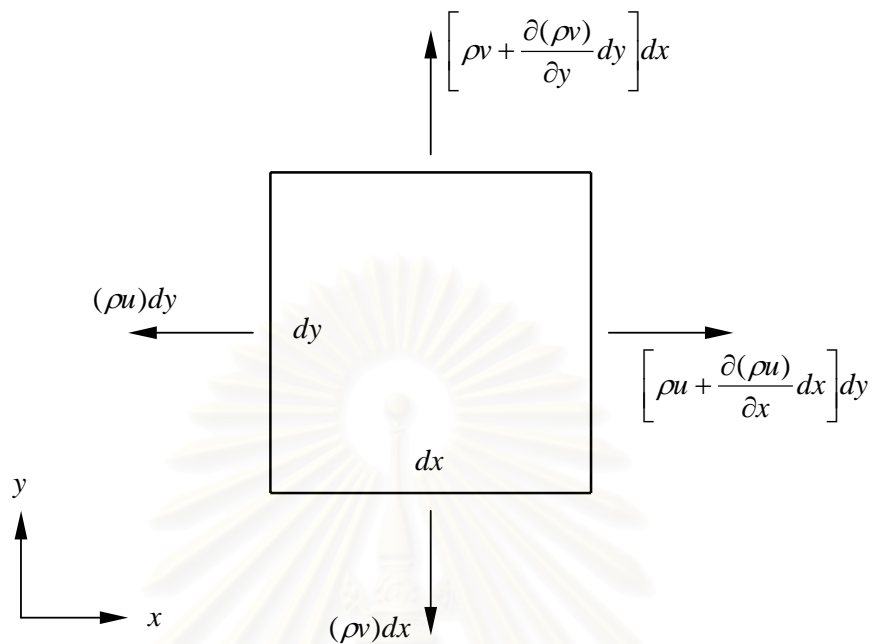
การวิเคราะห์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการไหลโดยทั่วไปจำเป็นต้องแก้สมการอนุพันธ์ย่อยที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของการไหลซึ่งประกอบด้วย

1. สมการอนุรักษ์มวล (conservation of mass)
2. สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum)
3. สมการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy)

ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาการไหลราบเรียบแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (viscous incompressible flow) ในสองมิติ ดังนั้นความหนาแน่นของการไหลอาจถูกสมมติให้มีค่าคงที่ได้ และสำหรับการไหลที่มีความเร็วต่ำนั้นอุณหภูมิของของไหลจะถูกสมมติให้กระจายสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนของการไหล ทำให้สมการอนุรักษ์พลังงานไม่มีความสัมพันธ์กับสมการอนุรักษ์อื่น ๆ ดังนั้นการแก้สมการที่เกี่ยวข้องจึงมีเพียงสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเท่านั้น

2.1 สมการอนุรักษ์มวล

การประดิษฐ์สมการอนุพันธ์ย่อยของการไหลในสองมิติที่ได้จากกฎการอนุรักษ์มวลสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ โดยพิจารณาจากการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล



รูปที่ 2.1 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลของไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ ที่ตั้งอยู่ในโดเมนของการไหล

เนื่องจากทั้งความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงไปตลอด ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในแนวแกน x ผ่านขอบ dy ของการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ นี้คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - [\rho u] dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy \quad (2.1)$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในการไหลผ่านขอบ dx ต่างไปยังขอบบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx - [\rho v] dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy \quad (2.2)$$

ดังนั้นผลรวมของปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ นี้มีค่าเท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.3)$$

และเนื่องจากปริมาณของมวลในกรอบเล็ก ๆ นี้คือ $\rho(dx dy)$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลหรือปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไปคือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.4)$$

แต่มวลในกรอบเล็ก ๆ นี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy ต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็ก ๆ ที่ลดลง นั่นคือ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.5)$$

หารสมการ (2.5) ตลอดด้วย $dx dy$ แล้วย้ายข้างจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.6)$$

หรือ
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.7)$$

โดยที่
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (2.8)$$

และ
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$
 แทนค่าเวกเตอร์ความเร็วของการไหล (2.9)

สมการ (2.6) นี้คือสมการอนุรักษ์มวลที่อยู่ในรูปแบบของพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า (unknowns) จำนวน 3 ค่า ได้แก่ ความเร็วของการไหล u , v และความหนาแน่น ρ แต่เนื่องจากในวิชานี้เป็นการศึกษาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวซึ่งความหนาแน่นของก้อนของไหลมีค่าคงที่ ดังนั้นสมการ (2.6) จึงลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

หรือ
$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.11)$$

สมการอนุรักษ์มวล (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้คือ

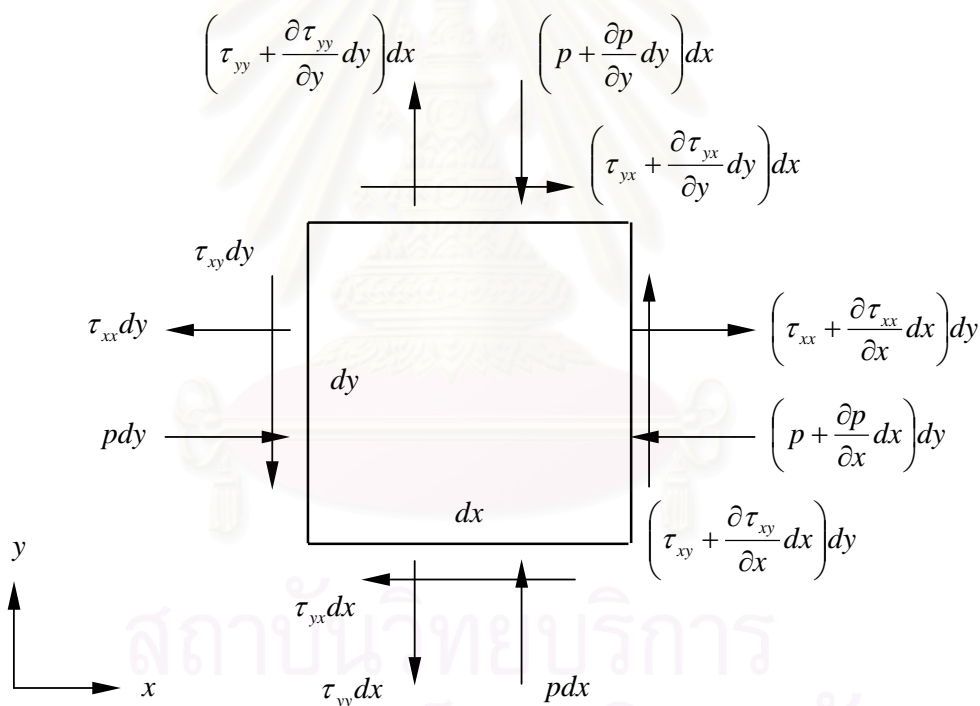
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.12)$$

2.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยอาศัยกฎข้อที่สองของ นิวตัน (Newton's second law) ที่กล่าวว่า ผลรวมของแรงภายนอกเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่งซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์โดยให้ \vec{F} แทนเวกเตอร์ของแรง m แทนมวล และ \vec{a} แทนเวกเตอร์ของความเร่ง ได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.13)$$

ดังนั้นหากพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหลดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แรงต่าง ๆ ที่กระทำบนผิวของก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล

แรงภายนอกทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.13) ประกอบด้วย

1. แรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของก้อนของไหลเอง (body force) ซึ่งเป็นแรงอันเนื่องมาจากความโน้มถ่วงของโลก

2. แรงกระทำที่ผิวต่าง ๆ บนก้อนของไหล (surface forces) ซึ่งประกอบด้วยแรงอันเนื่องมาจากความดัน p , ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) τ_{xx}, τ_{yy} และความเค้นเฉือน (shear stress) τ_{xy}, τ_{yx} สำหรับครรชนีล่างของความเค้นเฉือนต่าง ๆ นั้นกำหนดได้โดยให้ตัวห้อยแรกแทนทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศแกนของความเค้น ส่วนตัวห้อยหลังแทนทิศทางที่ความเค้นนี้กระทำ หากพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของกฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน x คือ

$$\sum F_x = ma_x \quad (2.14)$$

โดยที่ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในทิศแกน x ตามลำดับ

หากกำหนดให้ f แทนน้ำหนักของตัวของไหลแล้วแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวของไหลเองในทิศแกน x คือ

$$\rho f_x (dxdy) \quad (2.15)$$

และแรงรวมที่กระทำที่ผิวต่าง ๆ ในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้คือ

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx \quad (2.16)$$

ดังนั้นแรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.15) และ (2.16) คือ

$$\sum F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dxdy + \rho f_x dxdy \quad (2.17)$$

ส่วนมวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m = \rho(dxdy) \quad (2.18)$$

สำหรับค่าความเร่งของมวลในสมการ (2.14) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.19)$$

แทนค่าสมการ (2.17)-(2.19) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันในสมการ (2.14) แล้วหารตลอดด้วย $dxdy$ จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.20ก)$$

ในทำนองเดียวกันกฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการอนุพันธ์ที่สอดคล้องกันดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.20ข)$$

ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.20ก-ข) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์ย่อย โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (2.21) คือ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

หรือ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad (2.22)$$

เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์ในสมการ (2.21) เข้ากับความเร็ว u และ v ทำให้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.23ก)$$

และ

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.23ข)$$

แทนค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของความเร็ว u และ v ลงในสมการ (2.20ก-ข) จะได้

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.24ก)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.24ข)$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) ซึ่งมีคุณสมบัติว่าค่าความเค้นแปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.25ก)$$

$$\tau_{yy} = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.25ข)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.25ค)$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) และ λ แทนค่าความหนืดที่สอง (second viscosity) ซึ่งหากเป็นปัญหาการไหลแบบไม่อัดตัวค่า λ จะไม่ถูกนำมาใช้ในการคำนวณ

เมื่อแทนค่าความเค้นต่าง ๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.25ก-ค) ลงในสมการ (2.24ก-ข) จะก่อให้เกิดสมการอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ดังนี้

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \quad (2.26ก)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) \right) + \rho f_y \quad (2.26ข)$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวในสองมิติหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลจะทำให้สมการนาเวียร์-สโตกส์ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.27ก)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.27ข)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในสมการ (2.27ก-ข) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้คือ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (2.28)$$

พจน์ที่สองทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.28) นี้เป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear term) ซึ่งก่อให้เกิดความซับซ้อนในการแก้ระบบสมการ จึงได้ประยุกต์ระเบียบวิธีการ

แยกด้วยคุณลักษณะกับสมการดังกล่าวในบทที่ 3 เพื่อให้สามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้
สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ

ในบทนี้เป็นการนำเสนอระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ [15, 22] โดยจะแสดงถึงขั้นตอนของการเปลี่ยนสมการแบบอย่างของการพา-การแพร่จากระนาบอ้างอิงที่อยู่กับที่ไปบนระนาบอ้างอิงใหม่ซึ่งเคลื่อนที่ไปพร้อมกับการไหล จากนั้นจึงเปรียบเทียบสมการอนุพันธ์โมเมนต์กับสมการแบบอย่าง แล้วทำการประมาณค่าของสมการอนุพันธ์โมเมนต์ให้กลับมาอยู่บนระนาบอ้างอิงเดิม สุดท้ายจึงประยุกต์วิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันกับสมการที่ได้เพื่อให้สามารถคำนวณหาค่าความเร็วของการไหลและความดันได้

พิจารณาสมการแบบอย่างของการพา-การแพร่บนระนาบ $x_i - t$ (convection-diffusion equation) โดยมีตัวแปรตามเป็นปริมาณสเกลาร์ $\phi(x_i, t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้ดังสมการ (3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x_i, t) + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_i, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_i, t) \right) + Q(x_i, t) = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

หากทำการย้ายพิกัด $x_i - t$ ไปอยู่บนระนาบอ้างอิงใหม่ $x'_i - t$ ซึ่งเป็นระนาบแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ไปกับ การไหลของก้อนของไหล โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังนี้

$$dx'_i = dx_i - u_i dt \quad (3.2)$$

และจาก

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x'_i}{\partial t} dt \quad (3.3)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.2) กับสมการ (3.3) จะพบว่า $\frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = 1$ และ $\frac{\partial x'_i}{\partial t} = -u_i$

เนื่องจาก x'_i เป็นฟังก์ชันของ x_i และ t ดังนั้น

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(x'_i, t) \right|_{x_i = \text{const}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x'_i = \text{const}} = -u_i \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x'_i = \text{const}} \quad (3.4\text{ก})$$

และ

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x'_i, t) \right|_{t = \text{const}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \quad (3.4\text{ข})$$

จากความสัมพันธ์ (3.4ก) และ (3.4ข) ทำให้สมการ (3.1) บนระนาบ $x'_i - t$ ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x'_i, t) - \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(k \frac{\partial}{\partial x'_i} \phi(x'_i, t) \right) + Q = 0 \quad (3.5)$$

สมการอนุกรมโมเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาในบทที่ 2 คือ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.28)$$

หากเปรียบเทียบสมการอนุกรมโมเมนต์ (2.28) กับสมการแบบอย่างของการพา-การแพร่ ในสมการ (3.1) โดยแทนพจน์เนื่องจากแหล่งกำเนิด Q ด้วยพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากความดัน $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$ จะพบว่าสมการดังกล่าวมีลักษณะคล้ายคลึงกัน ทำให้สามารถประยุกต์วิธีการย้ายพิกัดไปบนระนาบ $x'_i - t$ กับสมการอนุกรมโมเมนต์ได้ โดยเปรียบเทียบสมการ (2.28) เข้ากับสมการ (3.5) ได้ ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x'_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'_i} = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.6)$$

กำหนดให้พจน์ $\frac{\partial p}{\partial x'_i}$ ที่พิจารณาเป็นปริมาณที่ทราบค่าที่เวลา $t^{n+\theta_2}$ ซึ่งอยู่ระหว่างช่วงเวลา t^n และ t^{n+1} ทำให้สมการ (3.6) กลายเป็น

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x'_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x'_i} = 0 \quad (3.7)$$

ประยุกต์วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) กับพจน์ $\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x'_i}$ จะได้

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x'_i} = \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x'_i} + (1 - \theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x'_i} \quad (3.8)$$

แทนค่าสมการ (3.8) ลงในสมการ (3.7) แล้วทำการย้ายข้างสมการ จะได้สมการโมเมนต์บนระนาบที่เคลื่อนที่ไปกับการไหล $x'_i - t$ ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x'_j} - \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x'_i} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x'_i} \quad (3.9)$$

ทำการประมาณค่าตัวแปรต่าง ๆ ในสมการ (3.9) โดยในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการประมาณสมการโมเมนต์บนระนาบ $x'_i - t$ เฉพาะสมการโมเมนต์ในทิศทาง x' เท่านั้น สำหรับสมการโมเมนต์ในทิศทาง y' จะใช้หลักการเดียวกันในการประมาณค่า สมการโมเมนต์ (3.9) ในทิศทาง x' สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \right) - \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x'} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p}{\partial x'}^{n+1} \quad (3.10)$$

ประยุกต์วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิดกับตัวแปรเวลา (time discretization) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[u^{n+1} - u^n \Big|_{(s-\delta)} \right] &= \theta \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \right) - \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x'} \right]^{n+1} \\ &+ (1 - \theta) \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \right) - \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x'} \right]^n \Big|_{(s-\delta)} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p}{\partial x'}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

โดยกรณีล่าง $(s - \delta)$ แสดงถึงพจน์เหล่านี้เป็นพจน์ที่อยู่บนระนาบที่เคลื่อนที่ไปกับการไหลที่เวลา t^n โดยที่ $\delta_x = \bar{u} \Delta t$ หรือ $\delta_y = \bar{v} \Delta t$ คือระยะทางที่ก้อนของไหลเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลา Δt ในทิศทาง x' และ y' ตามลำดับ

สมการ (3.11) เป็นสมการบนระนาบที่เคลื่อนที่ไปกับการไหล ในทางปฏิบัติหากทำการประยุกต์ระเบียบวิธีกาลิเลอ์คิน (Galerkin method) กับสมการดังกล่าวจะทำให้ต้องมีการแปลงระนาบอ้างอิงทุกช่วงเวลาซึ่งมีความยุ่งยากซับซ้อน เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงจะทำการประมาณค่าของตัวแปรตามกับระนาบอ้างอิงเดิม โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) [23] จากนั้นจึงประยุกต์วิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันกับสมการที่ได้แล้วจึงจะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีกาลิเลอ์คินภายหลัง การประมาณค่าด้วยอนุกรมเทย์เลอร์มีขั้นตอนดังนี้

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ประมาณค่าของพจน์ต่าง ๆ ที่เวลา t^n บนระนาบ $x'_i - t$ สำหรับพจน์ที่เวลา t^{n+1} เป็นพจน์ที่ใช้คำนวณหาค่าจึงไม่ต้องทำการประมาณค่า พจน์ที่เวลา t^n เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ประมาณค่าแล้วได้แก่

$$u^n \Big|_{(s-\delta)} \approx u^n - \delta_x \frac{\partial u}{\partial x} - \delta_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\delta_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta_x \delta_y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\delta_y^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.12g)$$

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{\partial \tau_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \right)^n \right|_{(s-\delta)} &\approx \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n - \delta_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ &\quad - \delta_y \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.12\text{ข})$$

$$\left. \frac{\partial p^n}{\partial x'} \right|_{(s-\delta)} \approx \frac{\partial p^n}{\partial x} - \delta_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \delta_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + O(\Delta t^2) \quad (3.12\text{ค})$$

โดยที่

$$\delta_x = \bar{u} \Delta t = \left[\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right]_{(s-\delta)} \Delta t \quad (3.13\text{ก})$$

$$\delta_y = \bar{v} \Delta t = \left[\frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right]_{(s-\delta)} \Delta t \quad (3.13\text{ข})$$

และ

$$u^n \Big|_{(s-\delta)} = u^n - \Delta t u \frac{\partial u}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial u}{\partial y} + O(\Delta t^2) \quad (3.14\text{ก})$$

$$v^n \Big|_{(s-\delta)} = v^n - \Delta t u \frac{\partial v}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial v}{\partial y} + O(\Delta t^2) \quad (3.14\text{ข})$$

เมื่อแทนค่าพจน์ต่าง ๆ ของสมการ (3.12ก-ค) ลงในสมการ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left\{ u^{n+1} - \left[u^n - \bar{u} \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} - \bar{v} \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{(\bar{u} \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \bar{u} \bar{v} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y} + \frac{(\bar{v} \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right] \right\} \\ &= \theta \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right]^{n+1} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \\ &+ (1 - \theta) \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n - \bar{u} \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n - \bar{v} \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n \right] \right\} \\ &- (1 - \theta_2) \left[\frac{\partial p^n}{\partial x} - \bar{u} \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n - \bar{v} \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

แทนค่า \bar{u} และ \bar{v} จากสมการ (3.13ก-ข) และ (3.14ก-ข) ลงในสมการ (3.15) ทำให้พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.15) มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left\{ u^{n+1} - \left[u^n - \frac{u^{n+1} + u^n - \Delta t u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial u^n}{\partial y}}{2} \right] \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} \right. \\
 & - \left[v^{n+1} + v^n - \Delta t u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \right] \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial y} \\
 & + \left. \frac{u^{n+1} + u^n - \Delta t u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial u^n}{\partial y}}{2} \right)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} \\
 & + \left. \frac{u^{n+1} + u^n - \Delta t u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial u^n}{\partial y}}{2} \right) \left(\frac{v^{n+1} + v^n - \Delta t u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial v^n}{\partial y}}{2} \right) (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 & + \left. \frac{v^{n+1} + v^n - \Delta t u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial v^n}{\partial y}}{2} \right)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \left. \right\} \tag{3.16ก}
 \end{aligned}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ส่วนพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.15) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}
& \theta \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - (1-\theta_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right]^{n+1} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \\
& + (1-\theta) \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n - \left(\frac{u^{n+1} + u^n - \Delta t u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial u^n}{\partial y}}{2} \right) \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{v^{n+1} + v^n - \Delta t u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial v^n}{\partial y}}{2} \right) \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n \right] \right. \\
& \left. - (1-\theta_2) \left[\frac{\partial p^n}{\partial x} - \left(\frac{u^{n+1} + u^n - \Delta t u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial u^n}{\partial y}}{2} \right) \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{v^{n+1} + v^n - \Delta t u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \Delta t v^n \frac{\partial v^n}{\partial y}}{2} \right) \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n \right] \right\} \quad (3.16\text{ข})
\end{aligned}$$

เนื่องจาก
$$\frac{u^{n+1} + u^n}{2} = u^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17\text{ก})$$

และ
$$\frac{v^{n+1} + v^n}{2} = v^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17\text{ข})$$

เมื่อกำหนดให้การแบ่งย่อยเวลามีความถูกต้องถึงอันดับสอง โดยให้ $\theta = \frac{1}{2}$ ทำให้สามารถรวมพจน์ของสมการ (3.16ข) ได้ดังนี้

$$\frac{1}{\rho} \left[\theta \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n \right] = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17\text{ค})$$

$$-\frac{1}{\rho}(1-\theta_2)\left[\theta\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}+(1-\theta)\frac{\partial p^n}{\partial x}\right]=-\frac{1}{\rho}(1-\theta_2)\frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \quad (3.17g)$$

แทนค่าสมการ (3.17ก-ง) ลงในสมการ (3.16ก-ข) ทำให้สมการลดรูปลงเหลือ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}\left[u^{n+1}-u^n+\left(u^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial u^n}{\partial x}\right. \\ & +\left(v^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial u^n}{\partial y} \\ & -\left(u^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} \\ & -\left(u^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\left(v^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u^n}{\partial x\partial y} \\ & \left.-\left(v^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right] \\ & =\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)-(1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x}\right]^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{\rho}\theta_2\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \\ & +\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left\{\left[-\left(u^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)^n\right.\right. \\ & \left.-\left(v^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)^n\right] \\ & + (1-\theta_2)\left[\left(u^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial u^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n\right. \\ & \left.+\left(v^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{2}u^n\frac{\partial v^n}{\partial x}-\frac{\Delta t}{2}v^n\frac{\partial v^n}{\partial y}\right)\Delta t\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n\right]\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

หากละทิ้งพจน์ที่มีอันดับสูง และเนื่องจากเลือกใช้การประมาณภายในเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นทำให้สามารถละทิ้งพจน์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับสามได้ สมการ (3.18) จึงลดรูปลงเหลือ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[u^{n+1} - u^n + \left(u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} \right. \\
& + \left. \left(v^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \right) \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial y} \right. \\
& - \left. \left(u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \left(u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(v^{n+\frac{1}{2}} \right) (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y} - \left(v^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right] \\
& = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x} \right]^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho} \theta_2 \frac{\partial p}{\partial x}^{n+1} \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[u^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n + v^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n \right] \tag{3.19}
\end{aligned}$$

ทำการประมาณค่าพจน์ต่าง ๆ ที่เวลา $t^{n+\frac{1}{2}}$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้งหนึ่ง ดังนี้

$$u^{n+\frac{1}{2}} \approx u^n + O(\Delta t) \tag{3.20ก}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}} \approx v^n + O(\Delta t) \tag{3.20ข}$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n + O(\Delta t) \right] \tag{3.20ค}$$

$$-\frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x}^{n+\frac{1}{2}} \approx -\frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[\frac{\partial p}{\partial x}^n + O(\Delta t) \right] \tag{3.20ง}$$

เมื่อแทนค่าพจน์ต่าง ๆ ของสมการ (3.20ก-ง) ลงในสมการ (3.19) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[u^{n+1} - u^n + \left(u^n - \frac{\Delta t}{2} u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} \right. \\
& + \left. \left(v^n - \frac{\Delta t}{2} u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \right) \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial y} \right. \\
& \left. - (u^n)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - (u^n)(v^n)(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x \partial y} - (v^n)^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right] \\
& = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)^n - \frac{1}{\rho} \left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + (1 - \theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[u^n \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n + v^n \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n \right] \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ย้ายข้างพจน์ทางด้านซ้ายมือแล้วจัดรูปใหม่ สมการ (3.21) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) & = \left[-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right]^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x} \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]^n \\
& + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]^n \tag{3.22ก}
\end{aligned}$$

ในการทำงานเกี่ยวกับสมการโมเมนตัมในทิศแกน y' สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1} - v^n) &= \left[-u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \right]^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial y} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left[\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]^n \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (3.22\text{ข})$$

คูณสมการ (3.22ก-ข) ด้วย Δt แล้วจัดรูปใหม่จะได้สมการโมเมนตัมซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้คือ

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \Delta t \left\{ -u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]^n \right\} \quad (3.23)$$

โดยที่ $i, j, k = 1, 2$

ขั้นตอนต่อไปเป็นการประยุกต์วิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันกับสมการ (3.23) โดยกำหนดให้

$$\Delta u_i^n = u_i^{n+1} - u_i^n = \Delta u_i^{**} - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (3.24)$$

$$\text{โดยที่} \quad \Delta u_i^{**} = \Delta t \left\{ -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]^n \right\} \quad (3.25)$$

พจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากความดัน $-\Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i}$ ในสมการ (3.24) นั้นไม่สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการอนุรักษ์มวล (2.12) เนื่องจากไม่มีพจน์ของความดันมาเกี่ยวข้อง แต่หากทำการประยุกต์ความอัดตัวได้เทียม (artificial compressibility) เข้ากับสมการอนุรักษ์มวล (2.12) จะทำให้สามารถคำนวณหาค่าความดันได้ โดยอาศัยสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. ปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์เป็นปัญหาที่อุณหภูมิของของไหลมีค่าคงที่สม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนของการไหล (isothermal)

2. การเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นเมื่อเทียบกับความดันมีค่าน้อยมาก หมายถึงมีการยอมให้ของไหลที่พิจารณามีการอัดตัวได้น้อยมาก

จากสมมติฐานทั้งสองข้อเป็นผลให้สมการของสถานะ (equation of state) $\rho = \rho(P, T)$ แสดงถึงค่าความหนาแน่นขึ้นกับความดันเพียงอย่างเดียว และสามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ได้คือ

$$d\rho = \frac{\rho}{\kappa} dp \quad (3.26)$$

โดยที่ κ แทนค่าบัลค์โมดูลัส (bulk modulus) ซึ่งเป็นค่าที่ใช้แสดงถึงความสามารถในการอัดตัวได้ของของไหล สมการ (3.26) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความเร็วเสียง (c) โดยที่ $c^2 = \frac{\kappa}{\rho}$ ได้ดังนี้

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp \quad (3.27)$$

หรือ
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.28)$$

เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์นี้กับสมการอนุกรมพล (2.12) โดยสมมติให้มีความอัดตัวได้เทียมสำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวคือกำหนดให้ $c^2 \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{c^2 \rightarrow \infty} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.29)$$

หรือ
$$\frac{1}{\rho} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.30)$$

ประยุกต์วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิดกับตัวแปรเวลา จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\rho} \frac{1}{c^2} (p^{n+1} - p^n) = - \left[\theta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^{n+1} + (1 - \theta_1) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^n \right] \quad (3.31)$$

เนื่องจากได้กำหนดให้ $c^2 \rightarrow \infty$ ดังนั้นพจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.31) จึงมีค่าเป็นศูนย์ สมการจะลดรูปลงเหลือ

$$\theta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^{n+1} + (1 - \theta_1) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^n = 0 \quad (3.32)$$

หรือ
$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i^n}{\partial x_i} = 0 \quad (3.33)$$

หากแทนค่า Δu_i^n จากสมการ (3.24) ลงในสมการ (3.33) จะทำให้สามารถคำนวณหาค่าความดันได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta u_i^{**} - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (3.34)$$

หรือ
$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i^{**}}{\partial x_i} - \theta_1 \frac{1}{\rho} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (3.35)$$

ย้ายข้างพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากความดันที่เวลา t^{n+1} มาไว้ทางด้านซ้ายมือและหารตลอดด้วย $\frac{\Delta t}{\rho}$ แล้วจึงจัดรูปใหม่ จะได้

$$\theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i^{**}}{\partial x_i} \right) - \theta_1 (1-\theta_2) \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.36)$$

เมื่อนำค่าที่ได้จากสมการ (3.25) และ (3.36) แทนกลับลงไปนสมการ (3.24) จะทำให้สามารถหาค่าความเร็วที่เวลา t^{n+1} ได้ดังนี้

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^{**} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] \quad (3.37)$$

จะเห็นว่าวิธีการคำนวณแบบแยกส่วนกันเมื่อนำมาประยุกต์เข้ากับสมการ (3.23) จะทำให้สามารถแบ่งขั้นตอนการคำนวณหาค่าความเร็วของการไหลและความดันออกเป็น 3 ขั้นตอน กล่าวโดยสรุปคือ

ขั้นตอนที่ 1 ใช้สมการ (3.25) คำนวณหาค่า Δu_i^{**} จากความเร็วและความดันที่สมมติขึ้น

$$\Delta u_i^{**} = \Delta t \left\{ -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \right\}^n$$

ขั้นตอนที่ 2 นำค่า Δu_i^{**} ที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 1 มาคำนวณหาค่าความดัน p^{n+1} จากสมการ (3.36)

$$\theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i^{**}}{\partial x_i} \right) - \theta_1 (1 - \theta_2) \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i}$$

ขั้นตอนที่ 3 แทนค่า Δu_i^{**} และ p^{n+1} กลับลงไปในสมการ (3.37) เพื่อคำนวณหาค่าความเร็ว u_i^{n+1}

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^{**} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1 - \theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right]$$

ขั้นตอนแต่ละขั้นตอนที่ได้กล่าวมานี้สามารถนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประมาณผลลัพธ์บนโดเมนของการไหลได้ โดยสามารถเลือกใช้อันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากัน จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มาเข้าสู่กระบวนการทำซ้ำ (iteration) จนกว่าผลลัพธ์จะเข้าสู่สภาวะอยู่ตัว ดังที่จะได้กล่าวถึงรายละเอียดในบทต่อไป

บทที่ 4

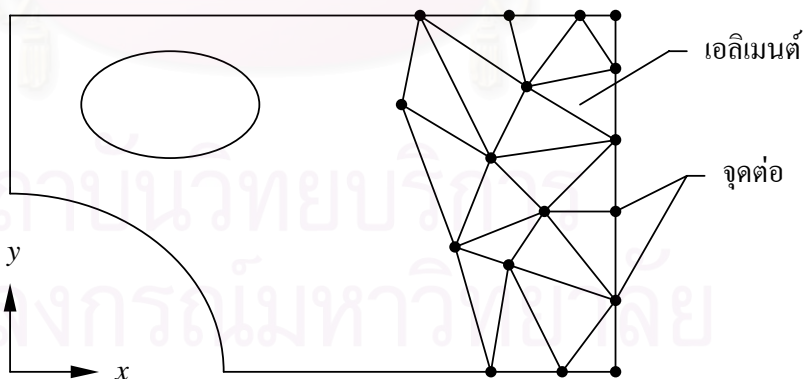
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีซีบีเอส

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจึงทำการประยุกต์ใช้กับสมการการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติที่ได้จากวิธีซีบีเอส โดยใช้การประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบเชิงเส้นสำหรับตัวไม่รู้ค่าทั้งความเร็วของการไหลและความดัน และอธิบายถึงขั้นตอนพร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตลอดจนเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ที่สามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง สุดท้ายจะแสดงแผนผังสรุปขั้นตอนการทำงานของขั้นตอนการทำงานของวิธีซีบีเอส

4.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนโดยทั่วไปประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก [21] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 โดยในที่นี้พื้นที่ทั้งหมดภายในโดเมนจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ (3 node triangular elements) ย่อย ๆ เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อเชื่อมกันที่จุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) คือความเร็วของการไหลและความดัน



รูปที่ 4.1 การแบ่งพื้นที่โดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งบนโดเมนนี้ดังแสดงในรูปที่ 4.2 และเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ (element interpolation function) โดยในที่นี้จะเลือก

ใช้การประมาณภายในแบบเชิงเส้น ซึ่งสามารถสร้างสมการที่แสดงการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ (ϕ) บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนี้ได้ดังนี้

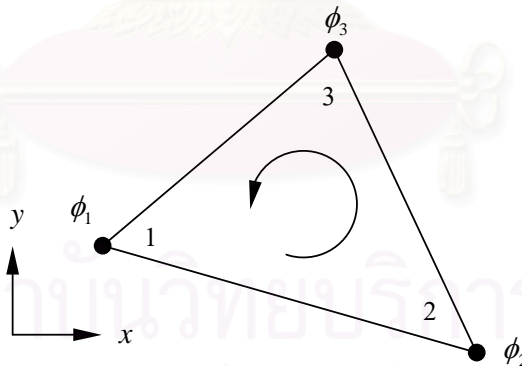
$$\phi = \phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (4.1)$$

โดย $N_i(x, y)$; $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
 ϕ_i ; $i = 1, 2, 3$ แทนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อทั้งสาม

สมการ (4.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N(x, y)]_{(1 \times 3)} \{\phi\}_{(3 \times 1)} = \sum_{i=1}^3 N_i \phi_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

โดย $[N]$ แทนเมทริกซ์แถวอน (row matrix) ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
 $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์หรือเมทริกซ์แถวตั้ง (column matrix) ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น



รูปที่ 4.2 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่ 3 จุดต่อ

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบเชิงเส้นคือ

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (4.3)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งสามารถคำนวณได้จากตำแหน่งของ โคออร์ดิเนตที่จุดต่อทั้งสามดังนี้

$$A = \frac{1}{2}[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (4.4)$$

และค่าสัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i ในสมการ (4.4) คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ขั้นตอนที่ 3 ประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) เข้ากับสมการอนุพันธ์ย่อย เพื่อให้ผลลัพธ์โดยประมาณนั้นมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีรายละเอียดดังนี้

สมการอนุพันธ์ย่อยของปัญหาที่สนใจสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ คือ

$$L(\bar{\phi}) = 0 \quad (4.6)$$

โดย L แทนตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)

$(\bar{\phi})$ แทนผลเฉลยแม่นยำ (exact solution)

ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) จากสมการอนุพันธ์ หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณที่สมมติขึ้น (ϕ) จากสมการ (4.1) ลงในสมการ (4.6) จะพบว่า

$$L(\phi) \text{ จะ } \neq 0 \text{ แต่จะ } = R$$

โดย R แทนเศษตกค้าง (residual) นั้นหมายถึงว่า

$$R = L(\phi) = L([N] \{\phi\}) \quad (4.7)$$

จากนั้นทำการประยุกต์วิธีการเลอว์น โดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (W_i , weighting function) แล้วจึงทำการอินทิเกรตตลอดพื้นที่โดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดผลลัพธ์ที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega_{(e)}} W_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

หากเลือก $W_i = N_i$ จะเรียกกันทั่วไปว่าวิธีบับ โนฟ-กาเลอร์กิน (Bubnov-Galerkin) และเมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) กับสมการ (4.8) จะก่อให้เกิดพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบของเอลิเมนต์ $\Gamma_{(e)}$ ตามมาดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{(e)}} W_i R d\Omega &= \int_{\Omega_{(e)}} W_i L \left(\sum_{i=1}^3 N_i \phi_i \right) d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega_{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์ } \Omega_{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบของเอลิเมนต์ } \Gamma_{(e)}} = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ซึ่งทฤษฎีบทของเกาส์กล่าวว่า

$$\int_A u (\nabla \cdot \vec{V}) dA = \int_S u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_A (\nabla u \cdot \vec{V}) dA \quad (4.10)$$

จากนั้นแทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบของเอลิเมนต์ $\Gamma_{(e)}$ ด้วยสภาวะต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นได้อันจะนำไปสู่สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น แล้วจึงเขียนเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_{(e)} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}_{(e)} \quad (4.11)$$

โดย k_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวไม่รู้ค่า

ดรรชนีล่าง (e) แสดงถึงเมตริกซ์เหล่านี้เป็นเมตริกซ์ระดับเอลิเมนต์

สมการ (4.11) สามารถเขียนโดยย่อได้เป็น

$$[K]_{(e)} \{\phi\}_{(e)} = \{F\}_{(e)} \quad (4.12)$$

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากทุก ๆ เอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดระบบสมการรวมขนาดใหญ่ดังนี้

$$\sum (\text{element equations}) \Rightarrow [K]_{(\text{sys})} \{\phi\}_{(\text{sys})} = \{F\}_{(\text{sys})} \quad (4.13)$$

โดย ครรชนีล่าง (sys) แสดงถึงเมตริกซ์เหล่านี้เป็นเมตริกซ์ของระบบสมการรวม

ขั้นตอนที่ 5 ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้าในระบบสมการรวม (4.13) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหาค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 6 คำนวณหาค่าอื่น ๆ ซึ่งเป็นผลต่อเนื่องจากค่าที่จุดต่อที่สามารถคำนวณได้อันจะเป็นประโยชน์ในการออกแบบต่อไป

4.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติที่ได้จากวิธีซิมิเอส

ในหัวข้อต่อไปนี้จะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับสมการอนุพันธ์ย่อยที่ได้จากระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะหรือวิธีซิมิเอสทั้งสามขั้นตอน จากนั้นจะแสดงตัวอย่างการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้

4.2.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีซิมิเอส

สมการอนุพันธ์ย่อยที่ได้จากวิธีซิมิเอสซึ่งกล่าวไปแล้วในบทที่ 3 ประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1

$$\Delta u_i^{**} = \Delta t \left\{ -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \right\}^n \quad (3.25)$$

ขั้นตอนที่ 2

$$\theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i^{**}}{\partial x_i} \right) - \theta_1 (1 - \theta_2) \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.36)$$

ขั้นตอนที่ 3

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^{**} - \Delta t \left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1 - \theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] \quad (3.37)$$

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการ (3.25), (3.36) และ (3.37) สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ จะสมมติรูปแบบการกระจายของตัวไม่รู้ค่าภายในเอลิเมนต์ให้เป็นแบบเชิงเส้นโดยเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ ตัวไม่รู้ค่าจากขั้นตอนทั้งสามประกอบด้วยความเร็วช่วย Δu_i^{**} , ความเร็ว u_i^{n+1}, u_i^n และความดัน p^{n+1}, p^n ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\Delta u_i^{**}(x, y) = \begin{cases} \Delta u^{**}(x, y) = N_\alpha \Delta u_\alpha^{**} = [N] \{ \Delta u^{**} \} \\ \Delta v^{**}(x, y) = N_\alpha \Delta v_\alpha^{**} = [N] \{ \Delta v^{**} \} \end{cases} \quad (4.14ก)$$

$$u_i^{n+1}(x, y) = \begin{cases} u^{n+1}(x, y) = N_\alpha u_\alpha^{n+1} = [N] \{ u^{n+1} \} \\ v^{n+1}(x, y) = N_\alpha v_\alpha^{n+1} = [N] \{ v^{n+1} \} \end{cases} \quad (4.14ข)$$

$$u_i^n(x, y) = \begin{cases} u^n(x, y) = N_\alpha u_\alpha^n = [N] \{ u^n \} \\ v^n(x, y) = N_\alpha v_\alpha^n = [N] \{ v^n \} \end{cases} \quad (4.14ค)$$

$$p^{n+1}(x, y) = N_\alpha p_\alpha^{n+1} = [N] \{ p^{n+1} \} \quad (4.14ง)$$

$$p^n(x, y) = N_\alpha p_\alpha^n = [N] \{ p^n \} \quad (4.14จ)$$

โดย $N_\alpha(x, y)$; $\alpha = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ซึ่งมีรายละเอียดดัง
แสดงในสมการ (4.3)-(4.5)

ดรรชนีล่าง i ; $i = 1, 2$ เป็นเทนเซอร์ที่แสดงถึงค่าในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

เมื่อกำหนดฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แล้วจึงทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษ
ตกค้างเข้ากับขั้นตอนทั้งสาม โดยให้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันน้ำหนักตาม
วิธีของบับโนฟ-กาลอร์คินคือเลือก $W_\alpha = N_\alpha$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \Delta u_i^{**} dA = \Delta t \left[- \int_A N_\alpha u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dA + \frac{1}{\rho} \int_A N_\alpha \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dA \right]^n \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_A N_\alpha u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dA + \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \int_A N_\alpha u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dA \right]^n \end{aligned} \quad (4.15ก)$$

$$\theta_1 \theta_2 \int_A N_\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}{}^{n+1} dA = \frac{\rho}{\Delta t} \int_A N_\alpha \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}{}^n + \theta_1 \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i}{}^{**} \right) dA - \theta_1 (1 - \theta_2) \int_A N_\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}{}^n dA \quad (4.15ข)$$

$$\int_A N_\alpha u_i{}^{n+1} dA = \int_A N_\alpha (u_i{}^n + \Delta u_i{}^{**}) dA - \Delta t \frac{1}{\rho} \int_A N_\alpha \left[\theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}{}^{n+1} + (1 - \theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i}{}^n \right] dA \quad (4.15ค)$$

ทำการแปลงอินทิกรัลบางพจน์ในสมการ (4.15ก-ข) ให้อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลตลอดขอบของเอลิเมนต์ โดยอาศัยทฤษฎีบทของเกาส์ในสมการ (4.10) ที่ได้กล่าวมาแล้ว สำหรับสมการ (4.15ก) นั้นทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์กับพจน์ที่สอง สาม และสี่ทางขวามือของสมการดังนี้

$$\Delta t \frac{1}{\rho} \int_A N_\alpha \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}{}^n dA = \Delta t \frac{1}{\rho} \left(\int_S N_\alpha \tau_{ij} n_j dS - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \tau_{ij} dA \right) \quad (4.16ก)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{2} \int_A N_\alpha u_k{}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dA \\ = \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_S (N_\alpha u_k) \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_k dS - \int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} u_k \right) \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dA \right] \quad (4.16ข) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \int_A N_\alpha u_k{}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dA \\ = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1 - \theta_2) \left[\int_S (N_\alpha u_k) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) n_k dS - \int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} u_k \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dA \right] \quad (4.16ค) \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (4.16ก-ค) ลงในสมการ (4.15ก) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 1 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_A N_\alpha \Delta u_i^{**} dA &= \Delta t \left[- \int_A N_\alpha u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dA - \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \tau_{ij} dA \right]^n \\
&- \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} u_k \right) \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dA + \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_k} u_k \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dA \right]^n \\
&+ \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \int_S N_\alpha \tau_{ij} n_j dS + \frac{\Delta t}{2} \int_S (N_\alpha u_k) \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_k dS \right]^n \\
&\left[+ \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S (N_\alpha u_k) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) n_k dS \right]^n \quad (4.17)
\end{aligned}$$

ในส่วนของสมการ (4.15ข) ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์เช่นเดียวกันกับพจน์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\theta_1 \theta_2 \int_A N_\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} dA = \theta_1 \theta_2 \left[\int_S N_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dA \right]^{n+1} \quad (4.18ก)$$

$$\frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \int_A N_\alpha \frac{\partial \Delta u_i^{**}}{\partial x_i} dA = \frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \left[\int_S N_\alpha \Delta u_i^{**} n_i dS - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \Delta u_i^{**} dA \right] \quad (4.18ข)$$

$$-\theta_1 (1-\theta_2) \int_A N_\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} dA = -\theta_1 (1-\theta_2) \left[\int_S N_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dA \right]^n \quad (4.18ค)$$

แทนค่าสมการ (4.18ก-ค) ลงในสมการ (4.15ข) แล้วย้ายพจน์ที่อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลตลอดขอบของเอลิเมนต์มาไว้ทางด้านขวามือและจัดรูปใหม่ จะได้เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 2 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\theta_1 \theta_2 \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dA &= -\frac{\rho}{\Delta t} \left(\int_A N_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA - \theta_1 \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \Delta u_i^{**} dA \right) \\
-\theta_1 (1-\theta_2) \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dA &+ \theta_1 \int_S N_\alpha \left[\theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} + (1-\theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i}^n - \frac{\rho}{\Delta t} \Delta u_i^{**} \right] n_i dS \quad (4.19)
\end{aligned}$$

หากพิจารณาเฉพาะพจน์ที่อยู่ในรูปอินทิกรัลตลอดขอบของเอลิเมนต์ จะพบว่า

$$\theta_1 \int_S N_\alpha \left[\theta_2 \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} + (1-\theta_2) \frac{\partial p}{\partial x_i}^n - \frac{\rho}{\Delta t} \Delta u_i^{**} \right] n_i dS = \theta_1 \frac{\rho}{\Delta t} \int_S N_\alpha \Delta u_i^{**} n_i dS \quad (4.20)$$

ดังนั้นการกำหนดค่าอินทิกรัลตลอดขอบของเอลิเมนต์ของชั้นตอนที่ 2 จึงเป็นการกำหนดค่าของ Δu_i^n ซึ่งหากกำหนดความเร็วตลอดขอบทางเข้าและบริเวณผนังของโดเมนจะทำให้ $\Delta u_i^n = 0$ ส่วนบริเวณทางออกของโดเมนเป็นการกำหนดแรงรวมที่ผิว ซึ่งในขณะที่คำนวณหาความดันในชั้นตอนที่ 2 นั้นค่า Δu_i^n ยังเป็นปริมาณที่ไม่รู้ค่าจึงอาจจะทิ้งได้ [20] ทำให้สมการ (4.19) ลดรูปลงเหลือ

$$\begin{aligned} \theta_1 \theta_2 \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+1} dA = -\frac{\rho}{\Delta t} \left(\int_A N_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^n dA - \theta_1 \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \Delta u_i^{**} dA \right) \\ - \theta_1 (1 - \theta_2) \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i}^n dA \end{aligned} \quad (4.21)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสามชั้นตอนดังสมการ (4.17), (4.21) และ (4.15ก) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับชั้นตอนที่ 1

$$[M_u] \{\Delta u^{**}\} = -\{C_{u1}\} - \{K_u\} - \{C_{u2}\} - \{P_u\} + \{K_{us}\} + \{C_{u2s}\} + \{P_{us}\} \quad (4.22ก)$$

$$[M_v] \{\Delta v^{**}\} = -\{C_{v1}\} - \{K_v\} - \{C_{v2}\} - \{P_v\} + \{K_{vs}\} + \{C_{v2s}\} + \{P_{vs}\} \quad (4.22ข)$$

โดยที่ $[M_u] = [M_v] = \int_A \{N\} [N] dA \quad (4.23ก)$

$$\{C_{u1}\} = \Delta t \int_A \{N\} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n dA \quad (4.23ข)$$

$$\{C_{v1}\} = \Delta t \int_A \{N\} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n dA \quad (4.23ค)$$

$$\{K_u\} = \Delta t \frac{1}{\rho} \int_A \left(\left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right)^n dA \quad (4.23ง)$$

$$\{K_v\} = \Delta t \frac{1}{\rho} \int_A \left(\left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)^n dA \quad (4.23จ)$$

$$\{C_{u2}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \int_A \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) \right\} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)^n dA \quad (4.23ก)$$

$$\{C_{v2}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \int_A \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) \right\} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)^n dA \quad (4.23ข)$$

$$\{P_u\} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) \right\} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^n dA \quad (4.23ค)$$

$$\{P_v\} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) \right\} \frac{\partial P}{\partial y} \right)^n dA \quad (4.23ง)$$

$$\{K_{us}\} = \Delta t \frac{1}{\rho} \int_S \{N\} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right)^n dS \quad (4.23จ)$$

$$\{K_{vs}\} = \Delta t \frac{1}{\rho} \int_S \{N\} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right)^n dS \quad (4.23ฉ)$$

$$\{C_{u2s}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)^n dS \quad (4.23ฎ)$$

$$\{C_{v2s}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)^n dS \quad (4.23ฏ)$$

$$\{P_{us}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S \left(\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^n dS \quad (4.23ท)$$

$$\{P_{vs}\} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S \left(\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \} \frac{\partial P}{\partial y} \right)^n dS \quad (4.23ฑ)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 2

$$[M_P] \{P^{n+1}\} = -\{R_u\} + \{R_{\Delta u}\} - \{R_P\} \quad (4.24)$$

โดยที่

$$[M_P] = \theta_1 \theta_2 \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) dA \quad (4.25ก)$$

$$\{R_u\} = \frac{\rho}{\Delta t} \int_A \{N\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n dA \quad (4.25\text{ข})$$

$$\{R_{\Delta u^{**}}\} = \frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \Delta u^{**} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \Delta v^{**} \right) dA \quad (4.25\text{ค})$$

$$\{R_p\} = \theta_1 (1 - \theta_2) \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \frac{\partial P}{\partial y} \right)^n dA \quad (4.25\text{ง})$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 3

$$[M_u] \{u^{n+1}\} = \{G_u\} - \{P_{u1}\} - \{P_{u2}\} \quad (4.26\text{ก})$$

$$[M_v] \{v^{n+1}\} = \{G_v\} - \{P_{v1}\} - \{P_{v2}\} \quad (4.26\text{ข})$$

โดยที่ $[M_u] = [M_v] = \int_A \{N\} [N] dA \quad (4.27\text{ก})$

$$\{G_u\} = \int_A \{N\} (u^n + \Delta u^{**}) dA \quad (4.27\text{ข})$$

$$\{G_v\} = \int_A \{N\} (v^n + \Delta v^{**}) dA \quad (4.27\text{ค})$$

$$\{P_{u1}\} = \frac{\Delta t}{\rho} \theta_2 \int_A \{N\} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} dA \quad (4.27\text{ง})$$

$$\{P_{v1}\} = \frac{\Delta t}{\rho} \theta_2 \int_A \{N\} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} dA \quad (4.27\text{จ})$$

$$\{P_{u2}\} = \frac{\Delta t}{\rho} (1 - \theta_2) \int_A \{N\} \frac{\partial P^n}{\partial x} dA \quad (4.27\text{ฉ})$$

$$\{P_{v2}\} = \frac{\Delta t}{\rho} (1 - \theta_2) \int_A \{N\} \frac{\partial P^n}{\partial y} dA \quad (4.27\text{ช})$$

4.2.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับวิธีซีบีเอส

การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ จากสมการ (4.23ก-ค) สมการ (4.25ก-ง) และสมการ (4.27ก-ช) เพื่อใช้ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามขั้นตอนคือสมการ (4.22ก-ข) สมการ(4.24) และสมการ (4.26ก-ข) มีรายละเอียดดังนี้

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับขั้นตอนที่ 1

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 1 ประกอบด้วยสมการ (4.22ก-ข) คือ

$$[M_u]\{\Delta u^{**}\} = -\{C_{u1}\} - \{K_u\} - \{C_{u2}\} - \{P_u\} + \{K_{uS}\} + \{C_{u2S}\} + \{P_{uS}\} \quad (4.22ก)$$

$$[M_v]\{\Delta v^{**}\} = -\{C_{v1}\} - \{K_v\} - \{C_{v2}\} - \{P_v\} + \{K_{vS}\} + \{C_{v2S}\} + \{P_{vS}\} \quad (4.22ข)$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ทางด้านซ้ายมือ $[M_u]$ และ $[M_v]$ ของสมการทั้งสอง มีค่าเท่ากันดังแสดงในสมการ (4.23ก)

$$[M_u] = [M_v] = \int_A \{N\} [N] dA \quad (4.23ก)$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (4.23ก) สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$[M_u] = [M_v] = \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} dA \quad (4.28)$$

เนื่องจากการผลลัพธ์ของการอินทิเกรตฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้น สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ [24] มีค่าเท่ากับ

$$\int_A N_1^\alpha N_2^\beta N_3^\gamma dA = \left(\frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \right) * 2A \quad \text{ทำให้ผลของสมการ (4.28) คือ}$$

$$[M_u] = [M_v] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

หากพิจารณาเมตริกซ์ดังกล่าวซึ่งเป็นเมตริกซ์เต็มให้อยู่ในรูปเมตริกซ์แบบรวมกันอยู่ที่จุดต่อทั้งสาม คือให้ค่าสัมประสิทธิ์รวมอยู่ในแนวทแยงของเมตริกซ์มวลแบบรวมก้อน (lumped mass matrix) [14] เพื่อให้สมการย่อยต่าง ๆ ในระบบสมการรวมไม่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน (uncoupled equations) ทำให้สามารถแก้สมการทีละสมการได้โดยตรง โดยไม่ต้องแก้ระบบสมการรวมช่วยลดเวลาในการคำนวณลงเป็นอย่างมาก ซึ่งเมตริกซ์มวลแบบรวมก้อนสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อคือ

$$[M_u] = [M_v] = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

สำหรับพจน์เวกเตอร์ต่าง ๆ ทางด้านขวามือของสมการ (4.22ก-ข) นั้นในที่นี้จะแสดงการประดิษฐ์
 เอลิเมนต์เมตริกซ์เฉพาะพจน์จากสมการ (4.22ก) เท่านั้น ส่วนพจน์จากสมการ (4.22ข) ก็สามารถ
 ประดิษฐ์ได้ด้วยวิธีเดียวกัน พจน์ทางขวามือของสมการ (4.22ก-ข) สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \{C_{u1}\} &= \Delta t \int_A \{N\} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n dA \\ &= \frac{\Delta t}{2A} \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left((N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \right)^n dA \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2A} \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left((N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \right)^n dA \\ &= \frac{\Delta t}{24} \left\{ \begin{array}{l} (2u_1 + u_2 + u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (2v_1 + v_2 + v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \\ (u_1 + 2u_2 + u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (v_1 + 2v_2 + v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \\ (u_1 + u_2 + 2u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (v_1 + v_2 + 2v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \end{array} \right\}^n \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \{C_{v1}\} &= \frac{\Delta t}{24} \left\{ \begin{array}{l} (2u_1 + u_2 + u_3)(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) + (2v_1 + v_2 + v_3)(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \\ (u_1 + 2u_2 + u_3)(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) + (v_1 + 2v_2 + v_3)(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \\ (u_1 + u_2 + 2u_3)(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) + (v_1 + v_2 + 2v_3)(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \end{array} \right\}^n \end{aligned} \quad (4.32)$$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{aligned}
\{K_u\} &= \Delta t \frac{1}{\rho} \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)^n dA \\
&= \Delta t \frac{\mu}{\rho} \int_A \left(\frac{1}{2A^2} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] + \frac{1}{4A^2} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \right) dA \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix} \\
&\quad + \Delta t \frac{\mu}{\rho} \int_A \left(\frac{1}{4A^2} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \right) dA \begin{Bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{Bmatrix} \\
&= \frac{\Delta t}{4A} \frac{\mu}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} 2b_1(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3) + c_1(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + c_1(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) \\ 2b_2(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3) + c_2(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + c_2(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) \\ 2b_3(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3) + c_3(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + c_3(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) \end{array} \right\}^n
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
\{K_v\} &= \frac{\Delta t}{4A} \frac{\mu}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} b_1(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + b_1(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) + 2c_1(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \\ b_2(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + b_2(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) + 2c_2(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \\ b_3(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) + b_3(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) + 2c_3(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \end{array} \right\}^n
\end{aligned} \tag{4.34}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

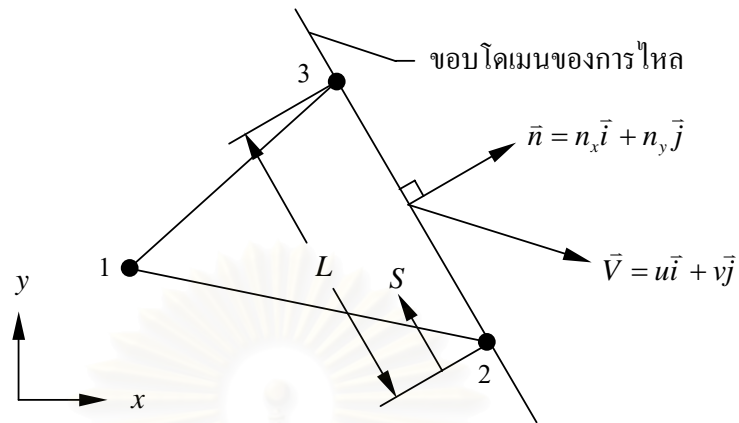
$$\begin{aligned}
\{C_{u2}\} &= \frac{\Delta t^2}{2} \int_A \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \frac{\partial}{\partial y}(Nv) \right\} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)^n dA \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} \int_A \frac{1}{4A^2} \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \right)^n \\
&\quad \left((N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \right. \\
&\quad \left. + (N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \right)^n dA \\
&= \frac{\Delta t^2}{24A} \left((u_1 + u_2 + u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (v_1 + v_2 + v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_1 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_1 \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_2 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_2 \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_3 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_3 \right)^n
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\{C_{v2}\} &= \frac{\Delta t^2}{24A} \left((u_1 + u_2 + u_3)(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) + (v_1 + v_2 + v_3)(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_1 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_1 \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_2 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_2 \right)^n \\
&\quad \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) b_3 + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) c_3 \right)^n
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\{P_u\} &= \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (Nu) + \frac{\partial}{\partial y} (Nv) \right] \frac{\partial P}{\partial x} \right\}^n dA \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \frac{1}{4A^2} \left(\left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) \right)^n dA \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \frac{1}{4A^2} \left(\left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) \right)^n dA \\
&= \frac{\Delta t^2}{8A} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_1 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_1 \\ \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_2 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_2 \\ \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_3 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_3 \end{array} \right\}^n \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{P_v\} &= \frac{\Delta t^2}{8A} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_1 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_1 \\ \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_2 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_2 \\ \left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3} \right) b_3 + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3} \right) c_3 \end{array} \right\}^n \quad (4.38)
\end{aligned}$$

สำหรับเมตริกซ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการอินทิเกรตตลอดขอบเขต $\{K_{us}\}$, $\{K_{vs}\}$, $\{C_{u2s}\}$, $\{C_{v2s}\}$, $\{P_{us}\}$ และ $\{P_{vs}\}$ เมื่อประกอบเอลิเมนต์ต่าง ๆ เข้าเป็นระบบสมการรวมแล้วหากขอบของเอลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่ภายในโดเมนของการไหลจะทำให้เมตริกซ์เหล่านี้หักล้างกันไปเอง ดังนั้นในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงไม่ต้องคำนวณหาค่าของเมตริกซ์เหล่านี้ ยกเว้นหากมีขอบของเอลิเมนต์ที่พิจารณาวางตัวอยู่บนขอบของโดเมนดังแสดงในรูปที่ 4.3 ซึ่งสมมติให้ขอบของจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L เป็นขอบโดเมนของการไหล



รูปที่ 4.3 การคำนวณเวกเตอร์ที่ขอบโดเมนของการไหล

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ตลอดขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 นี้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นค่าของ $\{K_{us}\}$, $\{K_{vs}\}$, $\{C_{u2s}\}$, $\{C_{v2s}\}$, $\{P_{us}\}$ และ $\{P_{vs}\}$ ที่สอดคล้องกับจุดต่อ 2-3 นี้คือ

$$\begin{aligned}
 \{K_{us}\} &= \Delta t \frac{1}{\rho} \int_s \{N\} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right) dS \\
 &= \Delta t \frac{\mu}{\rho} \int_s \frac{1}{A} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left((b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) n_x \right) dS \\
 &\quad + \Delta t \frac{\mu}{\rho} \int_s \frac{1}{2A} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left((c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \right) n_y dS \\
 &= \Delta t \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{4A} \left(2(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) n_x + ((c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3)) n_y \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
& \{K_{vs}\} \\
& = \Delta t \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{4A} \left((c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \right) n_x + 2(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) n_y \left. \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \\
& \hspace{15em} (4.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{P_{us}\} & = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S \left(\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^n dS \\
& = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \\ \frac{S}{L} \end{array} \right] \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right)^n \frac{1}{2A} (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) n_x dS \\
& \quad + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{\rho} (1-\theta_2) \int_S \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \\ \frac{S}{L} \end{array} \right] \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right)^n \frac{1}{2A} (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) n_y dS \\
& = \frac{\Delta t^2}{\rho} \frac{L}{8A} (1-\theta_2) (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) n_x + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) n_y \right)^n \left. \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \\
& \hspace{15em} (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{P_{vs}\} \\
& = \frac{\Delta t^2}{\rho} \frac{L}{8A} (1-\theta_2) (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) n_x + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) n_y \right)^n \left. \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \\
& \hspace{15em} (4.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{C_{u_2S}\} &= \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left\{ (Nu)n_x + (Nv)n_y \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}^n dS \\
&= \\
&\frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left[0 \quad \left(1 - \frac{S}{L} \right) \quad \frac{S}{L} \right] \begin{array}{c} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right)^n \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)^n n_x dS \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left[0 \quad \left(1 - \frac{S}{L} \right) \quad \frac{S}{L} \right] \begin{array}{c} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right)^n \frac{1}{2A} (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)^n n_x dS \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left[0 \quad \left(1 - \frac{S}{L} \right) \quad \frac{S}{L} \right] \begin{array}{c} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right)^n \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)^n n_y dS \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_S \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{S}{L} \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) \\ \frac{S}{L} \end{array} \right) \left[0 \quad \left(1 - \frac{S}{L} \right) \quad \frac{S}{L} \right] \begin{array}{c} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right)^n \frac{1}{2A} (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)^n n_y dS \\
&= \Delta t^2 \frac{L}{24A} \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) n_x + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) n_y \right)^n \left(\begin{array}{c} 0 \\ (2u_2 + u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \\ (u_2 + 2u_3)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \end{array} \right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} 0 \\ (2v_2 + v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \\ (v_2 + 2v_3)(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \end{array} \right)^n \\
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
& \{C_{v2s}\} \\
& = \Delta t^2 \frac{L}{24A} \left(\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} \right) n_x + \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \right) n_y \right)^n \left(\begin{array}{c} 0 \\ (2u_2 + u_3)(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) \\ (u_2 + 2u_3)(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) \end{array} \right) \\
& \quad + \left(\begin{array}{c} 0 \\ (2v_2 + v_3)(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \\ (v_2 + 2v_3)(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \end{array} \right)^n \\
& \hspace{15em} (4.44)
\end{aligned}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับขั้นตอนที่ 2

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 2 คือสมการ (4.24)

$$[M_p]\{P^{n+1}\} = -\{R_u\} + \{R_{\Delta u}\} - \{R_p\} \quad (4.25)$$

โดยที่
$$[M_p] = \theta_1 \theta_2 \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) dA \quad (4.26\text{ก})$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[M_p]$ สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
[M_p] & = \theta_1 \theta_2 \int_A \frac{1}{4A^2} \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right) \left[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \right] + \left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right) \left[c_1 \quad c_2 \quad c_3 \right] dA \\
& = \theta_1 \theta_2 \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \\
& \hspace{15em} (4.45)
\end{aligned}$$

สำหรับพจน์ทางขวามือของสมการ (4.24) สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \{R_u\} &= \frac{\rho}{\Delta t} \int_A \{N\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n dA \\
 &= \frac{\rho}{\Delta t} \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \frac{1}{2A} \left((b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \right)^n dA \\
 &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{1}{6} \left((b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \right)^n \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{R_{\Delta u^{**}}\} &= \frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \int_A \left\{ \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \Delta u^{**} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \Delta v^{**} \right\} dA \\
 &= \frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \int_A \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} (N_1 \Delta u_1^{**} + N_2 \Delta u_2^{**} + N_3 \Delta u_3^{**}) dA \\
 &\quad + \frac{\rho}{\Delta t} \theta_1 \int_A \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} (N_1 \Delta v_1^{**} + N_2 \Delta v_2^{**} + N_3 \Delta v_3^{**}) dA \\
 &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{1}{6} \theta_1 \begin{Bmatrix} b_1 (\Delta u_1^{**} + \Delta u_2^{**} + \Delta u_3^{**}) + c_1 (\Delta v_1^{**} + \Delta v_2^{**} + \Delta v_3^{**}) \\ b_2 (\Delta u_1^{**} + \Delta u_2^{**} + \Delta u_3^{**}) + c_2 (\Delta v_1^{**} + \Delta v_2^{**} + \Delta v_3^{**}) \\ b_3 (\Delta u_1^{**} + \Delta u_2^{**} + \Delta u_3^{**}) + c_3 (\Delta v_1^{**} + \Delta v_2^{**} + \Delta v_3^{**}) \end{Bmatrix} \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{R_p\} &= \theta_1 (1 - \theta_2) \int_A \left\{ \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \frac{\partial P}{\partial y} \right\}^n dA \\
 &= \theta_1 (1 - \theta_2) \int_A \frac{1}{4A^2} \left(\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \right)^n dA \\
 &= \theta_1 (1 - \theta_2) \frac{1}{4A} \begin{Bmatrix} b_1 (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + c_1 (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \\ b_2 (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + c_2 (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \\ b_3 (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + c_3 (c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3) \end{Bmatrix} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับขั้นตอนที่ 3

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขั้นตอนที่ 3 ประกอบด้วยสมการ (4.26ก-ข) คือ

$$[M_u]\{u^{n+1}\} = \{G_u\} - \{P_{u1}\} - \{P_{u2}\} \quad (4.26ก)$$

$$[M_v]\{v^{n+1}\} = \{G_v\} - \{P_{v1}\} - \{P_{v2}\} \quad (4.26ข)$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ทางด้านซ้ายมือ $[M_u]$ และ $[M_v]$ ของทั้งสองสมการ มีค่าเท่ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[M_u]$ และ $[M_v]$ ของขั้นตอนที่ 1 ในสมการ (4.30) ส่วนพจน์เวกเตอร์ต่าง ๆ ทางด้านขวามือของสมการในที่นี้จะแสดงการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์เฉพาะพจน์ของสมการ (4.26ก) เท่านั้น สำหรับพจน์ของสมการ (4.26ข) ก็สามารถหาค่าได้ด้วยวิธีเดียวกัน พจน์ทางขวามือของขั้นตอนที่ 3 สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \{G_u\} &= \int_A \{N\}(u^n + \Delta u^{**}) dA \\ &= \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left(N_1(u_1^n + \Delta u_1^{**}) + N_2(u_2^n + \Delta u_2^{**}) + N_3(u_3^n + \Delta u_3^{**}) \right) dA \\ &= \frac{A}{12} \begin{Bmatrix} 2(u_1^n + \Delta u_1^{**}) + (u_2^n + \Delta u_2^{**}) + (u_3^n + \Delta u_3^{**}) \\ (u_1^n + \Delta u_1^{**}) + 2(u_2^n + \Delta u_2^{**}) + (u_3^n + \Delta u_3^{**}) \\ (u_1^n + \Delta u_1^{**}) + (u_2^n + \Delta u_2^{**}) + 2(u_3^n + \Delta u_3^{**}) \end{Bmatrix} \quad (4.49) \end{aligned}$$

$$\{G_v\} = \frac{A}{12} \begin{Bmatrix} 2(v_1^n + \Delta v_1^{**}) + (v_2^n + \Delta v_2^{**}) + (v_3^n + \Delta v_3^{**}) \\ (v_1^n + \Delta v_1^{**}) + 2(v_2^n + \Delta v_2^{**}) + (v_3^n + \Delta v_3^{**}) \\ (v_1^n + \Delta v_1^{**}) + (v_2^n + \Delta v_2^{**}) + 2(v_3^n + \Delta v_3^{**}) \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

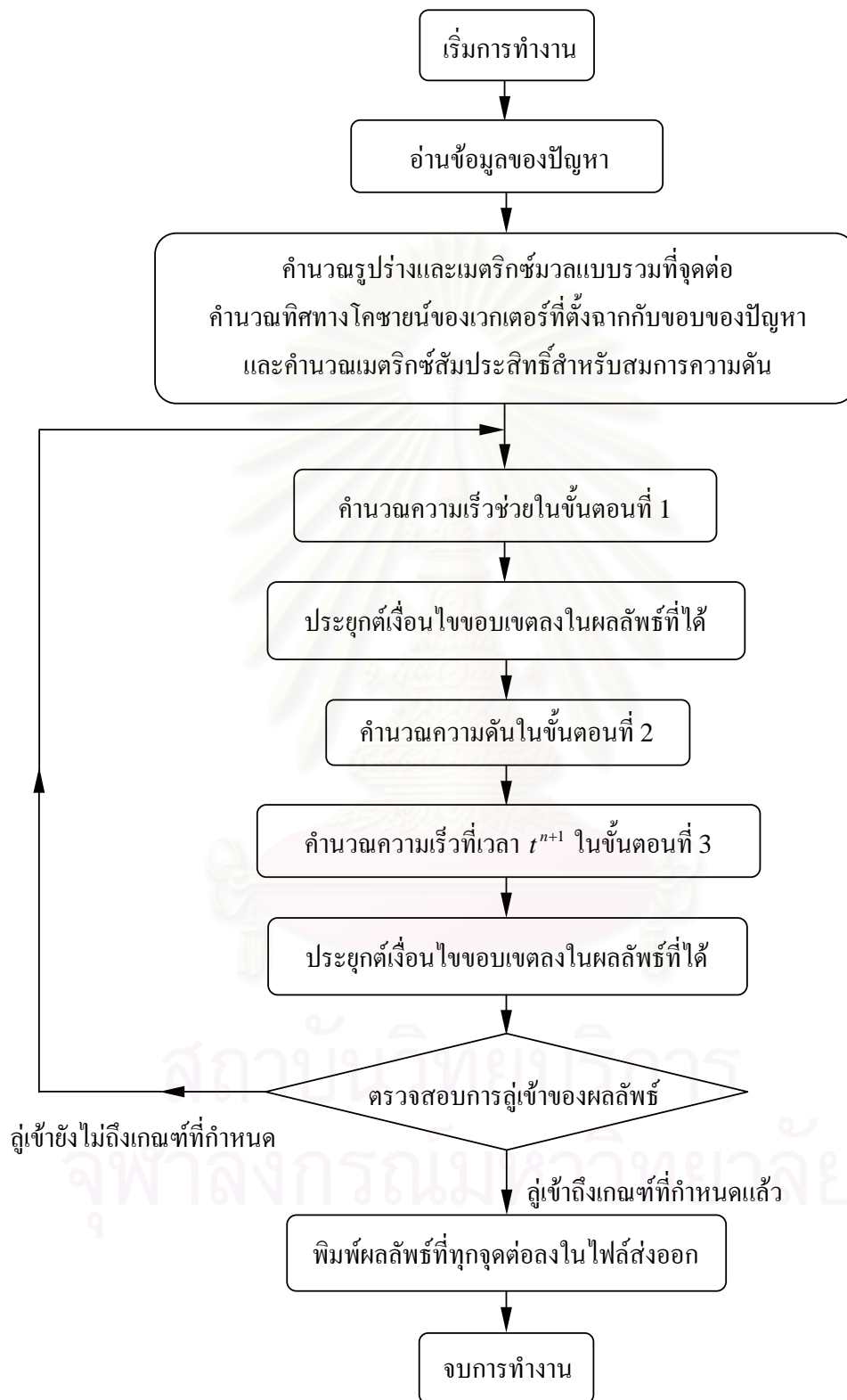
$$\begin{aligned}
\{P_{u1}\} &= \frac{\Delta t}{\rho} \theta_2 \int_A \{N\} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} dA \\
&= \frac{\Delta t}{\rho} \theta_2 \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \frac{1}{2A} (b_1 P_1^{n+1} + b_2 P_2^{n+1} + b_3 P_3^{n+1}) dA \\
&= \frac{\Delta t}{\rho} \frac{1}{6} \theta_2 (b_1 P_1^{n+1} + b_2 P_2^{n+1} + b_3 P_3^{n+1}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\{P_{v1}\} = \frac{\Delta t}{\rho} \frac{1}{6} \theta_2 (c_1 P_1^{n+1} + c_2 P_2^{n+1} + c_3 P_3^{n+1}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
\{P_{u2}\} &= \frac{\Delta t}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \{N\} \frac{\partial P^n}{\partial x} dA \\
&= \frac{\Delta t}{\rho} (1-\theta_2) \int_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \frac{1}{2A} (b_1 P_1^n + b_2 P_2^n + b_3 P_3^n) dA \\
&= \frac{\Delta t}{\rho} \frac{1}{6} (1-\theta_2) (b_1 P_1^n + b_2 P_2^n + b_3 P_3^n) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$\{P_{v2}\} = \frac{\Delta t}{\rho} \frac{1}{6} (1-\theta_2) (c_1 P_1^n + c_2 P_2^n + c_3 P_3^n) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ที่ได้แสดงในหัวข้อนี้สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง ซึ่งขั้นตอนการทำงานของวิธีซีบีเอสได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.4 สำหรับรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในบทที่ 5



รูปที่ 4.4 ขั้นตอนการทำงานของวิธีซีบีเอส

4.2.3 การกำหนดช่วงเวลาในการคำนวณสำหรับวิธีซีบีเอส

ในการคำนวณหาความเร็วของการไหลจากขั้นตอนดั่งที่กล่าวมาแล้วนั้น การคำนวณเมตริกซ์มวลแบบรวมก้อน (lumped mass matrix) แทนการคำนวณเมตริกซ์แบบเต็มทำให้สามารถแก้สมการที่ละสมการได้โดยตรงโดยไม่ต้องแก้ระบบสมการรวม ซึ่งช่วยลดเวลาในการคำนวณลงเป็นอย่างมาก วิธีการเช่นนี้เป็นการคำนวณโดยชัดแจ้ง (explicit algorithm) อย่างไรก็ตาม ผลเสียจากการใช้วิธีนี้ก็คือ ค่าช่วงเวลา (time step) Δt ที่ใช้ในการคำนวณนั้นมีความจำกัดเพื่อไม่ให้เกิดการลู่ออกของผลลัพธ์ (diverged solution)

สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว Nithiarasu and Zienkiewicz [19] ได้กำหนดค่าช่วงเวลาวิกฤต Δt_{cr} ไว้ดังนี้

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{h^2}{2\nu} \quad (4.55)$$

โดยที่ h แทนขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดภายในโดเมนของการไหล และ ν แทนความหนืดจลนศาสตร์

การเลือกใช้ค่าช่วงเวลาในการไหลจึงไม่ควรให้มีค่ามากกว่าค่าช่วงเวลาวิกฤตที่คำนวณได้ แต่หากเลือกใช้ค่าช่วงเวลาที่น้อยเกินไปก็จะทำให้ใช้เวลามากในการคำนวณ กว่าที่ผลลัพธ์ที่ได้จะเข้าสู่ภาวะอยู่ตัวซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ความแม่นยำชั่วขณะ (transient accurate) เท่ากับ $10E-10$ เป็นตัวกำหนดสถานะอยู่ตัวโดยคำนวณความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ในแต่ละช่วงเวลา หากการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่มีค่ามากที่สุดจากทุก ๆ จุดต่อมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดนี้จึงจะหยุดการคำนวณ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะอธิบายถึงรายละเอียดขั้นตอนการคำนวณจริงของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อใช้กับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติที่ได้จากวิธีซีบีเอสในบทที่ 4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวมีชื่อว่า LOw-speed flow Characteristic-Based Split program หรือ โปรแกรม LOCBS ซึ่งเขียนขึ้นด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย และสามารถทำงานได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (personal computer) ที่ใช้กันทั่วไปในปัจจุบันได้

5.1 ลักษณะของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS

โปรแกรม LOCBS ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) จำนวน 25 โปรแกรม โดยมีรายละเอียดขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

5.1.1 เริ่มต้นการทำงานในโปรแกรมหลัก [main] โดยเริ่มจากเรียกโปรแกรมย่อย [input] สำหรับอ่านข้อมูลนำเข้าเบื้องต้นของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์ของปัญหา จำนวนด้านที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหล จำนวนครั้งในกระบวนการทำซ้ำ ค่าการเปลี่ยนแปลงน้อยที่สุด (tolerance) ค่าคุณสมบัติของของไหล ได้แก่ ค่าความหนาแน่นและค่าความหนืดพลศาสตร์ ตำแหน่งโคออร์ดิเนตของจุดต่อ ค่าเริ่มต้นของความเร็วและความดันที่กำหนดขึ้นในแต่ละจุดต่อ หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์ และหมายเลขของจุดต่อที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหล เป็นต้น หากเป็นการคำนวณที่ต่อเนื่องจากการคำนวณครั้งที่แล้วจะเรียกโปรแกรมย่อย [restar] เพื่อนำค่าความเร็วและความดันสุดท้ายที่ได้จากการคำนวณครั้งที่แล้วมาเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณครั้งนี้

5.1.2 เมื่ออ่านข้อมูลเบื้องต้นเสร็จแล้วจึงเริ่มการคำนวณในโปรแกรมหลักโดยเริ่มจากการคำนวณหาค่าความหนืดจลนศาสตร์ เรียกโปรแกรมย่อย [identm] จากนั้นจึงระบุและนับจำนวนจุดต่อที่กำหนดเงื่อนไขความดันบนขอบโดเมนของการไหล และระบุเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ประกอบด้วยด้านที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหล

5.1.3 คำนวณค่าเบื้องต้นต่าง ๆ ที่จำเป็นในการแก้ระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรมย่อยตามลำดับดังนี้

5.1.3.1 โปรแกรมย่อย [getgeo] เพื่อคำนวณหาพื้นที่และค่าการประมาณภายในที่จุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์

5.1.3.2 โปรแกรมย่อย [getmat] เพื่อคำนวณหาเมตริกซ์มวลแบบรวมก้อน โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillv] ในตอนเริ่มการทำงานของโปรแกรมย่อย [getmat]

5.1.3.3 โปรแกรมย่อย [getnor] เพื่อคำนวณหาความยาวด้านที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหลรวมทั้งหาค่าทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับด้านนั้น ๆ โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillm] ในตอนเริ่มการทำงานของโปรแกรมย่อย [getnor]

5.1.3.4 โปรแกรมย่อย [getnrw] เพื่อระบุและนับจำนวนจุดต่อที่กำหนดเงื่อนไขขอบผนังแบบไม่ลื่น (no-slip condition) บนขอบโดเมนของการไหล

5.1.3.5 โปรแกรมย่อย [dtfix] เพื่อคำนวณหาค่าช่วงเวลาวิกฤต (critical time step) และค่าช่วงเวลาที่ใช้จริงในการคำนวณ

5.1.3.6 โปรแกรมย่อย [pstiff] เพื่อคำนวณหาค่าของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของความดันในขั้นตอนที่ 2 ของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillv] ในตอนเริ่มการทำงานของโปรแกรมย่อย [pstiff]

5.1.4 เริ่มต้นกระบวนการทำซ้ำโดยเรียกโปรแกรมย่อย [identm] ในตอนเริ่มกระบวนการทำซ้ำแล้วจึงเรียกชุดของโปรแกรมย่อยทั้งสิ้น 3 ชุดตามลำดับดังนี้

5.1.4.1 ชุดโปรแกรมย่อยที่ 1 ซึ่งประกอบไปด้วยโปรแกรมย่อย [step1] และโปรแกรมย่อย [bound] ตามลำดับ โดยในโปรแกรมย่อย [step1] จะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillm] ในตอนเริ่มการทำงานแล้วจึงเรียกโปรแกรมย่อยอีก 2 โปรแกรมได้แก่ โปรแกรมย่อย [advect] เพื่อคำนวณหาพจน์เวกเตอร์เนื่องจากการพาและความดันสำหรับขั้นตอนที่ 1 ของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ และเรียกโปรแกรมย่อย [difuse] เพื่อคำนวณหาพจน์เวกเตอร์เนื่องจากความหนืดของการไหล โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillv] ในตอนเริ่มการทำงานของโปรแกรมย่อย [difuse] จากนั้นจึงรวมพจน์เวกเตอร์จากโปรแกรมย่อย [advect] และ [difuse] เข้าด้วยกันเป็นโพลดเวกเตอร์ทั้งหมดของระบบสมการรวมของขั้นตอนที่ 1 และแก้ระบบสมการดังกล่าวเพื่อหาค่าความเร็วช่วยแล้วจึงใช้โปรแกรมย่อย [bound] เพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของการไหล

5.1.4.2 โปรแกรมย่อยชุดที่ 2 ได้แก่โปรแกรมย่อย [step2] โดยในโปรแกรมย่อยนี้จะเรียกโปรแกรมย่อยอีก 2 โปรแกรมได้แก่

5.1.4.2.1 โปรแกรมย่อย [pload] ซึ่งในโปรแกรมย่อยนี้จะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillv] ในตอนเริ่มการทำงานแล้วจึงเรียกโปรแกรมย่อยอีก 2 โปรแกรมได้แก่ โปรแกรมย่อย [getrth] เพื่อคำนวณพจน์เวกเตอร์ในขั้นตอนที่ 2 ที่เกี่ยวข้องกับความเร็วที่ได้จากข้อ 5.1.4.1 และโปรแกรมย่อย [prhp] เพื่อคำนวณพจน์เวกเตอร์ในขั้นตอนที่ 2 ที่เกี่ยวข้องกับความเร็ว จากนั้นจึงรวมพจน์เวกเตอร์จากโปรแกรมย่อย [getrth] และ [pehp] เข้าด้วยกันเป็นโหนดเวกเตอร์ทั้งหมดของระบบสมการรวม

5.1.4.2.2 โปรแกรมย่อย [solver] เพื่อทำการแก้ระบบสมการรวมหาค่าความดันในช่วงเวลาถัดไป โดยในโปรแกรมย่อยนี้จะเรียกโปรแกรมย่อย [conjug] และระหว่างการแก้สมการจะเรียกโปรแกรมย่อย [mult3n]

5.1.4.3 โปรแกรมย่อยชุดที่ 3 ซึ่งประกอบไปด้วยโปรแกรมย่อย [step3] และ โปรแกรมย่อย [bound] ตามลำดับ โดยในโปรแกรมย่อย [step3] จะเรียกโปรแกรมย่อย [rfillm] ในตอนเริ่มการทำงานแล้วจึงเรียกโปรแกรมย่อย [correct] เพื่อคำนวณพจน์เวกเตอร์ทางขวาของขั้นตอนที่ 3 ของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ ทำการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าความเร็วของการไหลในช่วงเวลาถัดไป แล้วจึงใช้โปรแกรมย่อย [bound] เพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของการไหล

5.1.5 ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์โดยหาค่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็วและความดันระหว่างค่าที่คำนวณได้ในช่วงเวลาถัดไปจากข้อ 5.1.4.2 และ 5.1.4.3 กับค่าเดิมก่อนการคำนวณในขั้นตอนที่ 1 จากทุกจุดต่อ และเลือกใช้ค่าที่มากที่สุดเป็นตัวกำหนดการลู่เข้าของผลลัพธ์ หากค่าการเปลี่ยนแปลงนั้นมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้หรือได้ทำซ้ำจนครบจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดให้แล้ว จะดำเนินการต่อไปในข้อ 5.1.6 แต่หากค่าดังกล่าวยังคงมากกว่าค่าที่กำหนดให้ก็ให้วนย้อนกลับไปทำซ้ำใหม่ในข้อ 5.1.4 ข้างต้น กระบวนการทำซ้ำเช่นนี้จะทำเรื่อยไปจนกว่าค่าการเปลี่ยนแปลงนั้นน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้หรือได้ทำซ้ำจนครบจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดให้แล้ว

5.1.6 แสดงผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่คำนวณได้ ได้แก่ ค่าความเร็วของการไหล ค่าความดัน ค่าช่วงเวลาวิกฤต ค่าช่วงเวลาที่ใช้จริง จำนวนรอบและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และค่าการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดของความเร็วและความดันในแต่ละรอบที่กำหนดไว้ ค่าต่าง ๆ เหล่านี้จะถูกบันทึกลงในไฟล์ส่งออกที่ต้องการเพื่อนำไปใช้แสดงผลทางด้านกราฟต่อไป

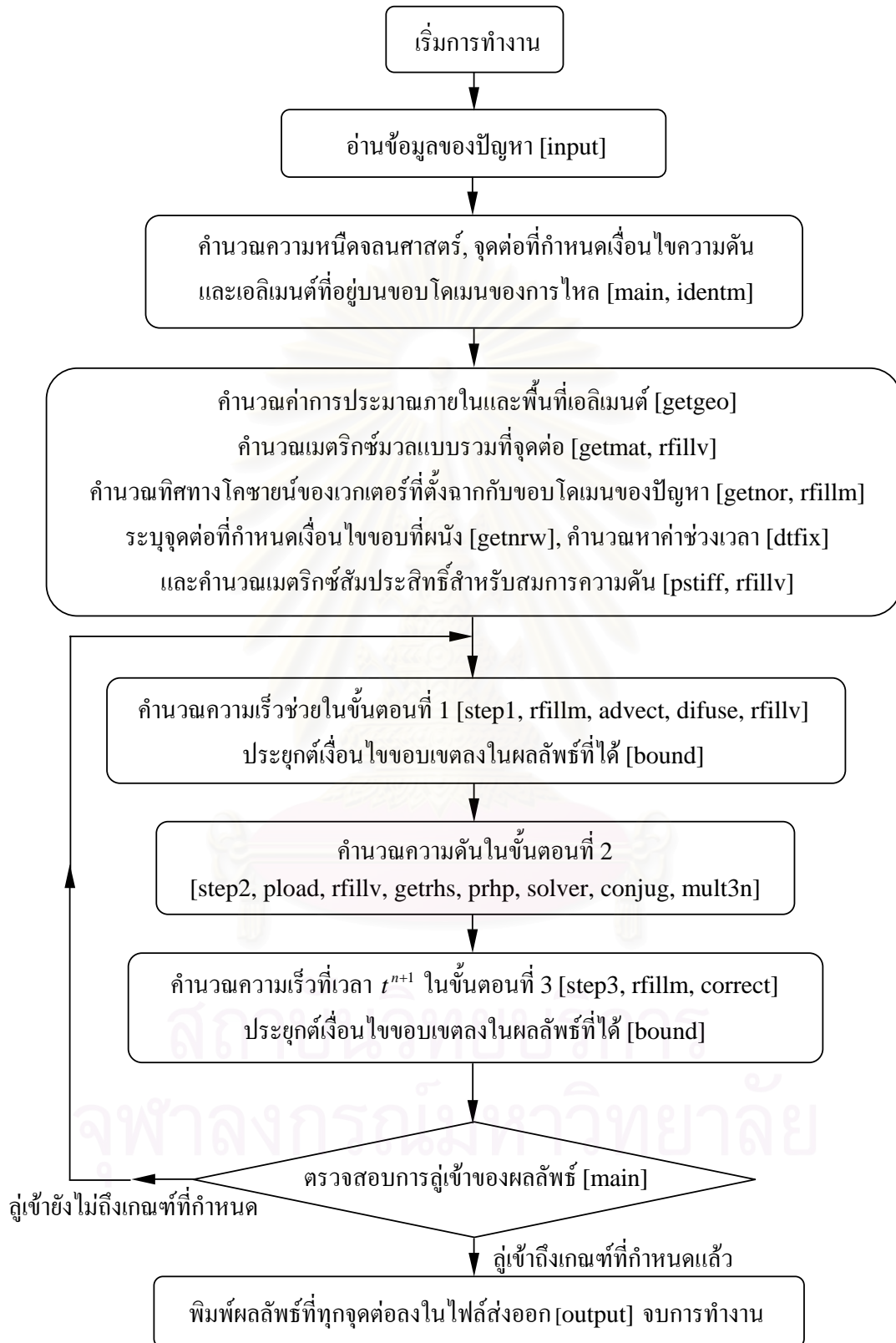
5.1.7 โปรแกรมย่อยอื่น ๆ ได้แก่โปรแกรมย่อย [rfillv] โปรแกรมย่อย [rfillm] และโปรแกรมย่อย [identm] ที่ได้กล่าวถึงข้างต้นนั้นเป็นโปรแกรมย่อยเพื่อช่วยแปลงเวกเตอร์หรือเมตริกซ์สำหรับค่าจำนวนจริงที่ต้องการ โดยจะแทรกไว้ในตอนต้นของโปรแกรมย่อยบาง

โปรแกรมที่ได้กล่าวมาแล้ว โปรแกรมย่อยเหล่านี้มีหน้าที่ดังนี้ โปรแกรมย่อย [rfillv] สำหรับตั้ง
ค่าแวกเตอร์ให้เท่ากับศูนย์ โปรแกรมย่อย [rfillm] สำหรับตั้งค่าเมตริกซ์ให้เท่ากับศูนย์ และ
โปรแกรมย่อย [identm] สำหรับแทนค่าเมตริกซ์จากตัวแปรหนึ่งให้กับอีกตัวแปรหนึ่ง

สำหรับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.1



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS

ส่วนที่ 3 ค่าตัวประกอบของช่วงเวลา คุณสมบัติของการไหล และค่าการเปลี่ยนแปลงที่กำหนด

บรรทัดแรก คำระบุถึงค่าตัวประกอบของช่วงเวลา คุณสมบัติของการไหล และค่าการเปลี่ยนแปลงที่กำหนด

บรรทัดที่สอง ค่าตัวประกอบของช่วงเวลา ค่าความหนาแน่น ค่าความหนืดพลศาสตร์ และค่าการเปลี่ยนแปลงที่กำหนด

ตัวอย่างเช่น: csafm rho mu toler
 0.500 0.100000E+01 0.500000E-01 0.1E-05

ส่วนที่ 4 ข้อมูลของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุความหมายของการเชื่อมต่อของจุดต่อบนเอลิเมนต์และจำนวนเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ภายในวงเล็บ []

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ และหมายเลขของจุดต่อทั้งสามบนเอลิเมนต์นั้นในทิศทางเข็มนาฬิกา

ตัวอย่างเช่น: element nodal connection[1800]:
 1 1 33 32
 2 1 2 33
 3 2 3 33

 1798 929 960 959
 1799 929 961 960
 1800 929 930 961

ส่วนที่ 5 ข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุความหมายของตำแหน่งโคออร์ดิเนตของจุดต่อและจำนวนจุดต่อซึ่งอยู่ภายในวงเล็บ []

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขจุดต่อ และตำแหน่งโคออร์ดิเนตบนแกน x และ y ของจุดต่อนั้นตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น: nodal coordinates[961]:
 1 0.000000E+00 0.000000E+00
 2 0.333330E-01 0.000000E+00
 3 0.666670E-01 0.000000E+00
 . . .
 . . .

.	.	.
.	.	.
959	0.933330E+00	0.100000E+01
960	0.966670E+00	0.100000E+01
961	0.100000E+01	0.100000E+01

ส่วนที่ 6 ข้อมูลเริ่มต้นของค่าความเร็วและความดันของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุความหมายของค่าเริ่มต้น

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขจุดต่อ และค่าความเร็วของการไหล u และ v และค่าความดันเริ่มต้น

ตัวอย่างเช่น:

initial condition (u, v, p)

1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
959	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
960	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
961	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00

ส่วนที่ 7 ข้อมูลของเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหล

บรรทัดแรก คำระบุความหมายของด้านเอลิเมนต์และจำนวนเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหลซึ่งอยู่ภายในวงเล็บ []

บรรทัดต่อ ๆ ไป จุดต่อทั้งสองของด้านที่อยู่บนขอบโดเมนของการไหลในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา หมายเลขเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อนั้น และเงื่อนไขค่าที่ใช้กำหนดประเภทขอบเขตของปัญหา

ตัวอย่างเช่น:

boundary sides[121]:

32	1	1	2
1	2	2	2
2	3	3	2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
960	959	1798	5
961	960	1799	5
930	961	1800	2

หมายเหตุ: ตัวเลขแสดงเงื่อนไขค่าที่ใช้กำหนดประเภทขอบเขตของปัญหา กำหนดโดย

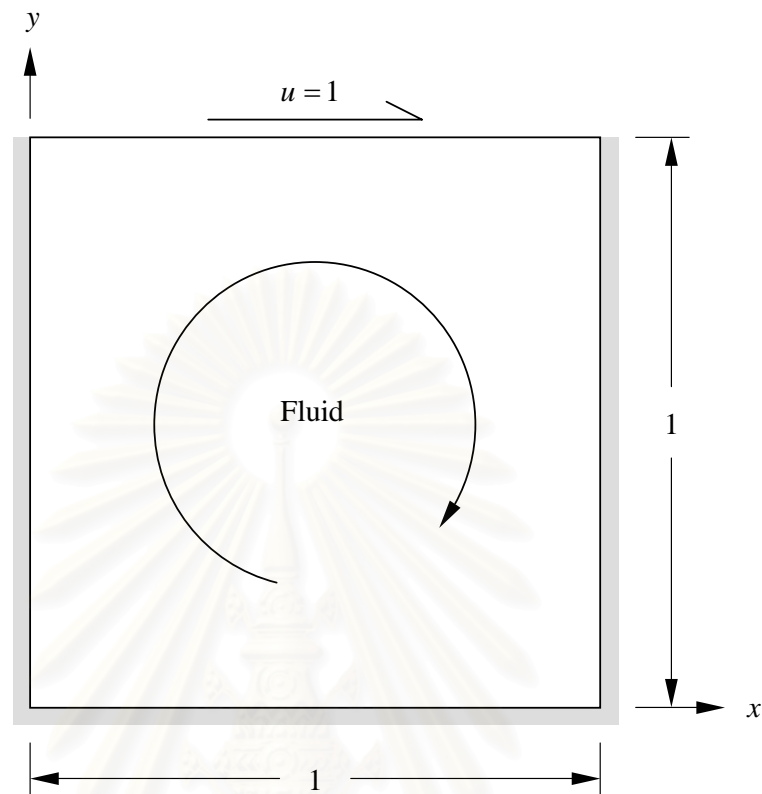
$rsido(4, nboun) = 1$	หมายถึงเป็นขอบเขตที่กำหนดค่าความเร็วของการไหล
$rsido(4, nboun) = 2$	หมายถึงเป็นขอบเขตผนังภายใต้เงื่อนไขผนังแบบไม่ลื่น
$rsido(4, nboun) = 3$	หมายถึงเป็นขอบเขตที่กำหนดค่าความดัน

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS รวมถึงรายละเอียดที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ทำการคำนวณ และไฟล์ผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่เกิดจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ สามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นโดยพิจารณาตัวอย่างการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในหัวข้อต่อไป

5.3 ตัวอย่างการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืด แต่ไม่อัดตัวในสองมิติ

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 หน่วย ที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynold number) เท่ากับ 100 โดยกำหนดให้ของไหลที่อยู่ภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ขอบทางด้านบนมีการเคลื่อนตัวในแนวแกน x ด้วยความเร็ว $u = 1$ การเคลื่อนตัวดังกล่าวจะชักนำให้ของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยมนี้เกิดการไหลหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 5.2

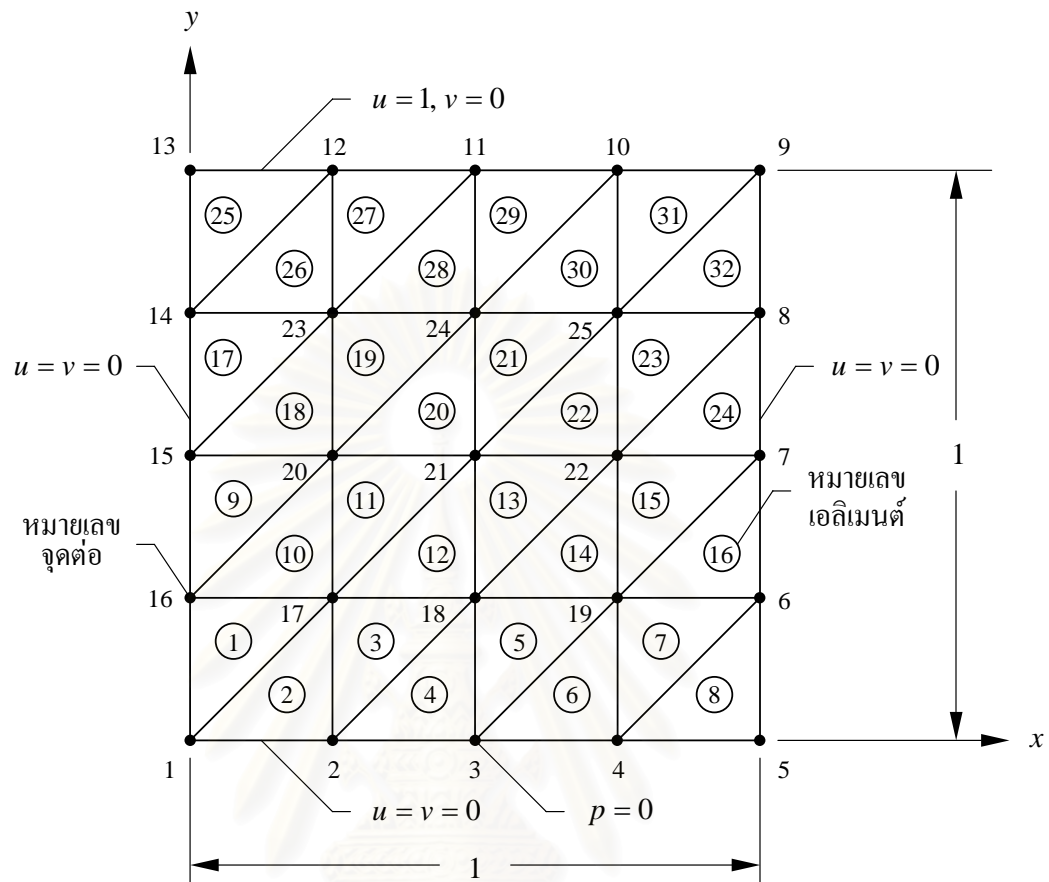
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5.2 ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม

รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 32 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อ 25 จุดต่อ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตประกอบด้วย การกำหนดความเร็วให้ $u = v = 0$ ที่ทุก ๆ จุดต่อที่อยู่บนผนังของช่องสี่เหลี่ยมและ $u = 1, v = 0$ สำหรับทุกจุดต่อที่อยู่บนขอบด้านบน นอกจากนี้ยังกำหนดความดันให้ $p = 0$ กับจุดต่อที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบด้านล่างเพื่อใช้เป็นความดันอ้างอิงของปัญหา ดังแสดงในรูปที่ 5.3

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS โดยกำหนดให้ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับปัญหานี้มีชื่อว่า 'cav.in' และกำหนดให้กระบวนการทำซ้ำจบสิ้นเมื่อค่าการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดจากทุกจุดต่อมีค่าน้อยกว่า 10^{-6} หรือหากได้ผ่านการคำนวณในกระบวนการทำซ้ำจนครบ 2000 รอบแล้วค่าการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดจากทุกจุดต่อยังคงมีค่ามากกว่า 10^{-6} ก็ให้หยุดทำการคำนวณและพิมพ์ผลลัพธ์ออกมา ไฟล์ข้อมูลนำเข้า 'cav.in' มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.4

```

nelem  npoin  nboun  iopt
32      25    17     0
ntime  istep  iwrite
2000   0      10
csafm      rho      mu      toler
0.100  0.100000E+01  0.100000E-01  0.1E-05
element nodal connection[ 32 ]:
  1      1      17     16
  2      1       2     17
  3      2      18     17
  4      2       3     18
  .      .      .      .
  .      .      .      .
  .      .      .      .
 29     24     10     11
 30     24     25     10
 31     25       9     10
 32     25       8       9
nodal coordinates[ 25 ]:
  1      0.000000E+00  0.000000E+00
  2      0.250000E+00  0.000000E+00
  3      0.500000E+00  0.000000E+00
  4      0.750000E+00  0.000000E+00
  .      .      .
  .      .      .
  .      .      .
 22     0.750000E+00  0.500000E+00
 23     0.250000E+00  0.750000E+00
 24     0.500000E+00  0.750000E+00
 25     0.750000E+00  0.750000E+00
initial condition (u, v, p)
  1      0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
  2      0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
  3      0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
  4      0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
  .      .      .      .
  .      .      .      .
  .      .      .      .
 22     0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 23     0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 24     0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 25     0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
boundary sides[ 17 ]:
 12     13     25     1
 11     12     27     1
 10     11     29     1
  9      9     31     1
  .      .      .      .
  .      .      .      .
  .      .      .      .
  7      8     24     2
 13     14     25     2
  8      9     32     2
  3      3      6      3

```

รูปที่ 5.4 ข้อมูลไฟล์นำเข้าชื่อ 'cav.in'

เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าให้ผู้ใช้พิมพ์ตอบกลับไป จากนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณตามขั้นตอนที่ได้อธิบายในหัวข้อย่อย 5.1 ขณะทำการคำนวณโดยใช้ไฟล์ข้อมูลนำเข้า cav จะเห็นรายละเอียดปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 5.5

```

please type your input file name :
cav
The finite element model consists of:
number of nodes           =           25
number of elements        =           32
number of boundary nodes  =           17
number of pressure boundary nodes =           1
with number of iterations required =        2000

performing iterations for convergence

iter          del U          del V          del P
  1    0.10000000E+01  0.28079809E-02  0.16076101E+00
 10    0.90026611E-02  0.74314513E-02  0.18122152E-02
 20    0.19489457E-02  0.20892477E-02  0.60878636E-03
 30    0.76611042E-03  0.66201285E-03  0.23194848E-03
 40    0.28070253E-03  0.24337008E-03  0.83470585E-04
 50    0.10040777E-03  0.88088247E-04  0.29819349E-04
 60    0.35570672E-04  0.31649132E-04  0.15946094E-04
 70    0.12597027E-04  0.10812885E-04  0.26783089E-05
 80    0.42012582E-05  0.38118879E-05  0.29980040E-05
 90    0.13791213E-05  0.12782594E-05  0.14079169E-05
 95    0.93990458E-06  0.68157513E-06  0.71294779E-06
Press any key to continue

```

รูปที่ 5.5 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS

หลังจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้คำนวณเสร็จสิ้นแล้ว โปรแกรมจะทำการพิมพ์ข้อมูลสำหรับส่งออกโดยแบ่งการแสดงผลพัทธ์ออกเป็น 3 ไฟล์ด้วยกัน ในที่นี้เนื่องจากตัวอย่างของปัญหาคือปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม ไฟล์ข้อมูลนำเข้าคือไฟล์ 'cav.in' ดังนั้นไฟล์ข้อมูลส่งออกจะได้แก่ 'cav.op', 'cav.er' และ 'cav.re' โดยที่ไฟล์ 'cav.op' แสดงผลลัพธ์ของความเร็วในแนวแกนทั้งสองของการไหลและความดัน ซึ่งมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.6

```

nelem      npoin      nboun      iopt
32          25          17          0
nstep      itime      intime      inpt          timt          toler
1           95          95          1  0.14844E+02  0.10000E-05
csafm      rho          mu          deltc          deltp
0.1000     1.00000     0.01000     0.15625E+01  0.15625E+00
node       velocity-u      velocity-v      pressure-p
1          0.000000E+00  0.000000E+00  -0.224284E-02
2          0.000000E+00  0.000000E+00  -0.824195E-02
3          0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
4          0.000000E+00  0.000000E+00  0.938617E-02
.          .          .          .
.          .          .          .
.          .          .          .
22         -0.132002E+00  -0.252903E+00  -0.736708E-02
23         -0.274105E+00  0.281267E+00  -0.815948E-01
24         -0.162845E+00  -0.342483E-01  -0.978529E-01
25         0.799973E-01  -0.266412E+00  0.235073E-01
start time :      2:35:18:95
end time   :      2:35:19:03

```

รูปที่ 5.6 ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.op'

สำหรับไฟล์ข้อมูลส่งออก 'cav.er' เป็นไฟล์แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงสูงสุดที่เกิดขึ้นของความเร็วของการไหลและความดันในรอบที่กำหนดไว้ ไฟล์ดังกล่าวมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.7

```

data of error convergence estimation
itime      delu          delv          delp
1          0.10000000E+01  0.28079809E-02  0.16076101E+00
10         0.90026611E-02  0.74314513E-02  0.18122152E-02
20         0.19489457E-02  0.20892477E-02  0.60878636E-03
30         0.76611042E-03  0.66201285E-03  0.23194848E-03
40         0.28070253E-03  0.24337008E-03  0.83470585E-04
50         0.10040777E-03  0.88088247E-04  0.29819349E-04
60         0.35570672E-04  0.31649132E-04  0.15946094E-04
70         0.12597027E-04  0.10812885E-04  0.26783089E-05
80         0.42012582E-05  0.38118879E-05  0.29980040E-05
90         0.13791213E-05  0.12782594E-05  0.14079169E-05
95         0.93990458E-06  0.68157513E-06  0.71294779E-06
start time :      2:35:18:95
end time   :      2:35:19:03

```

รูปที่ 5.7 ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.er'

สำหรับไฟล์ข้อมูลส่งออก 'cav.re' จะเป็นไฟล์แสดงผลลัพธ์ของความเร็วของการไหลและความดันสำหรับใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในการคำนวณครั้งต่อไป ไฟล์ดังกล่าวมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.8

```

inpt      itime      timt
1         95      0.14844E+02
node      velocity-u      velocity-v      pressure-p
1         0.000000E+00      0.000000E+00      -0.224284E-02
2         0.000000E+00      0.000000E+00      -0.824195E-02
3         0.000000E+00      0.000000E+00      0.000000E+00
4         0.000000E+00      0.000000E+00      0.938617E-02
5         0.000000E+00      0.000000E+00      0.182219E-02
6         0.000000E+00      0.000000E+00      -0.574194E-02
7         0.000000E+00      0.000000E+00      0.232328E-02
8         0.000000E+00      0.000000E+00      0.914241E-01
9         0.000000E+00      0.000000E+00      0.272805E+00
10        0.100000E+01      0.000000E+00      0.864956E-01
11        0.100000E+01      0.000000E+00      -0.632422E-01
12        0.100000E+01      0.000000E+00      -0.175366E+00
13        0.000000E+00      0.000000E+00      -0.383252E+00
14        0.000000E+00      0.000000E+00      -0.164472E+00
15        0.000000E+00      0.000000E+00      -0.200877E-01
16        0.000000E+00      0.000000E+00      0.429381E-02
17        -0.664199E-01      0.746964E-01      -0.704148E-02
18        -0.153629E+00      -0.134992E-01      -0.805182E-02
19        -0.745940E-01      -0.721673E-01      0.197599E-02
20        -0.908842E-01      0.188101E+00      -0.385892E-01
21        -0.236787E+00      -0.353678E-01      -0.482650E-01
22        -0.132002E+00      -0.252903E+00      -0.736708E-02
23        -0.274105E+00      0.281267E+00      -0.815948E-01
24        -0.162845E+00      -0.342483E-01      -0.978529E-01
25        0.799973E-01      -0.266412E+00      0.235073E-01
start time :      2:50:12:50
end time   :      2:50:12:53

```

รูปที่ 5.8 ข้อมูลไฟล์ผลลัพธ์ส่งออกชื่อ 'cav.re'

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

ผลการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ

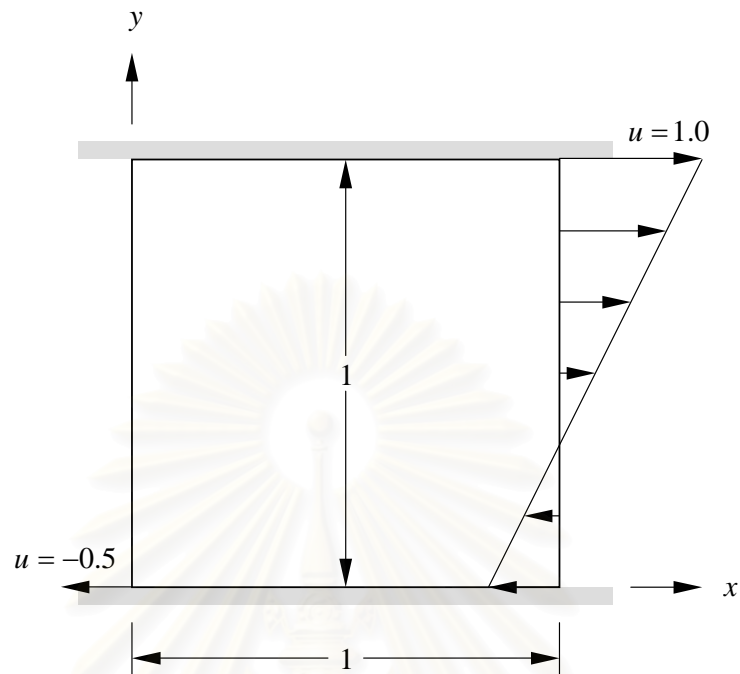
ในบทนี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนึ่งจำนวนทั้งสิ้น 5 ปัญหา ได้แก่

1. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด (Couette flow)
2. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน (Poiseuille flow)
3. ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม (cavity flow)
4. ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step flow)
5. ปัญหาการไหลภายในช่องแคบผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ (flow over two-dimensional obstacle) ซึ่งประกอบด้วย
 - 5.1 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปกล่องสี่เหลี่ยม (flow over block)
 - 5.2 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปแท่งสี่เหลี่ยม (flow over fence)

6.1 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด (Couette flow) [25, 26]

ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืดเป็นปัญหาที่สามารถตรวจสอบความถูกต้องเบื้องต้นของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้ เนื่องจากปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรง การไหลเกิดขึ้นจากความหนืดเนื่องจากแผ่นบนเคลื่อนที่ไปทางขวามือตามแนวแกน x ด้วยอัตราเร็ว $u = 1$ ในขณะที่แผ่นล่างเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือด้วยอัตราเร็ว $u = -0.5$ โดยมีระยะห่างระหว่างแผ่นทั้งสองเท่ากับ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.1

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 6.1 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด

รูปแบบการกระจายของความเร็วแม่นยำตรงที่ทุกตำแหน่งบนแกน x สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ โดยพิจารณาให้การไหลเป็นการไหลในหนึ่งมิติคือ $u = u(y)$ และ $v = 0$ รวมทั้งกำหนดค่าความดัน $p = 0$ ตลอดแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ซึ่งจะทำให้สมการอนุพันธ์โมเมนตัมลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6.1)$$

อินทิเกรตสมการ (6.1) เทียบกับตัวแปร y สองครั้ง จะได้

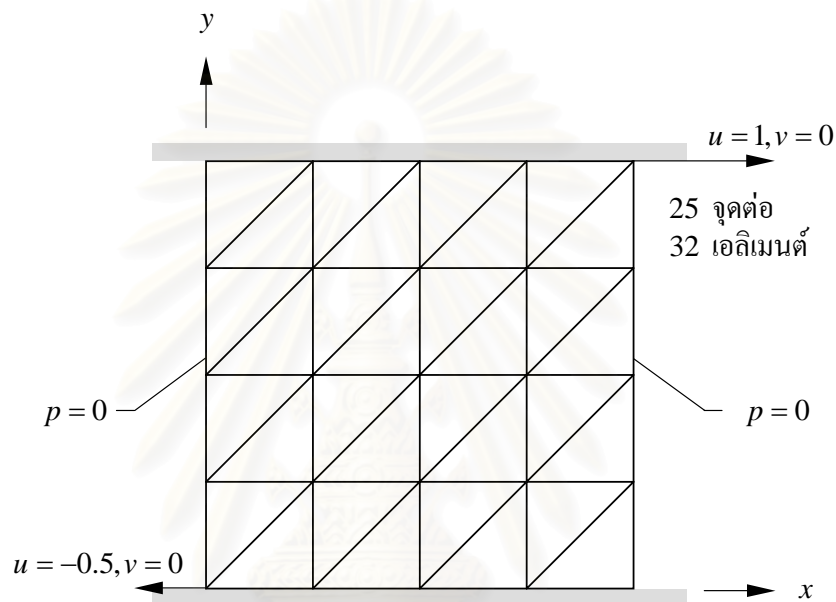
$$u(y) = Ay + B \quad (6.2)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งค่าทั้งสองสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบบนและล่างของปัญหาคือ $u(y=0) = -0.5$ และ $u(y=1) = 1.0$

เมื่อทำการแทนเงื่อนไขขอบเขตลงในสมการ (6.2) จะพบว่า $A = 1.5$ และ $B = -0.5$ จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของรูปแบบการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ คือ

$$u(y) = 1.5y - 0.5 \quad (6.3)$$

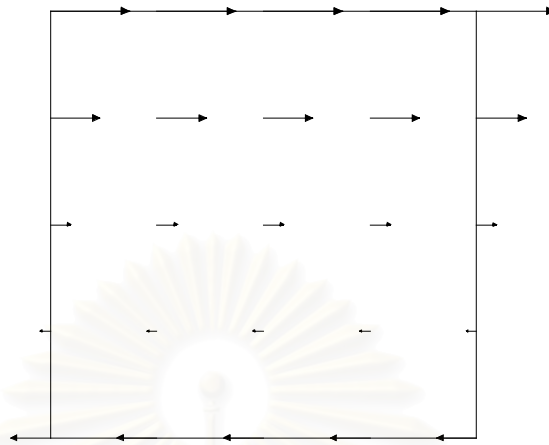
ปัญหาดังกล่าวถูกนำมาวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 32 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อ 25 จุดต่อ โดยกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบในแนวตั้งทั้งทางด้านซ้ายและขวาของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์



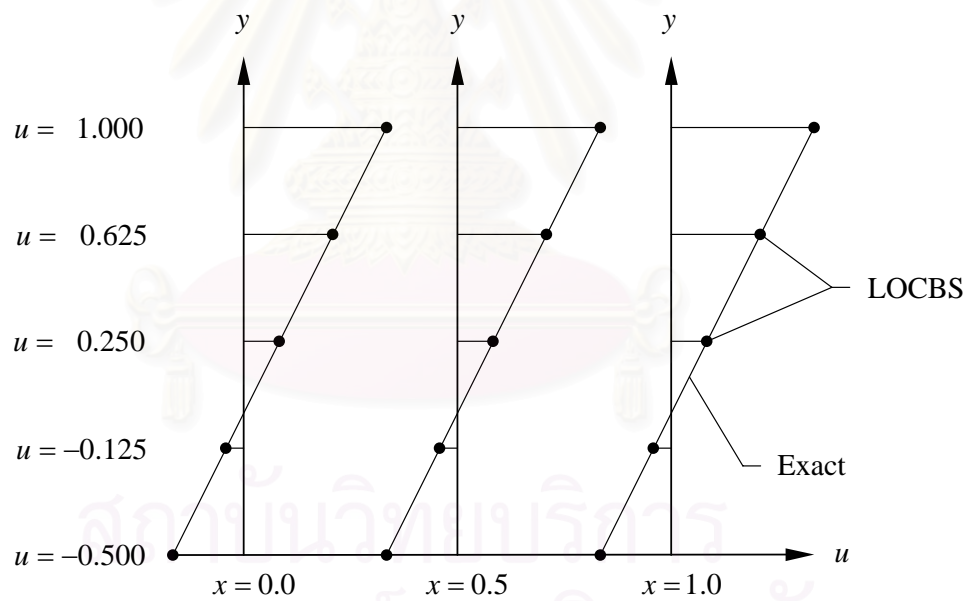
รูปที่ 6.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน เนื่องจากความหนืด

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS มีลักษณะการกระจายตัวดังแสดงในรูปที่ 6.3 และเมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ตำแหน่ง $x = 0.0, 0.5$ และ 1.0 ดังแสดงในรูปที่ 6.4 พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



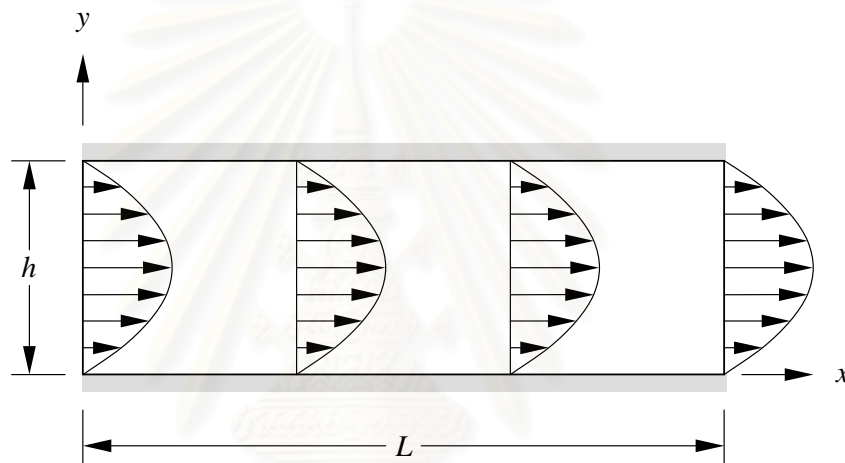
รูปที่ 6.3 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน
เนื่องจากความหนืด



รูปที่ 6.4 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำตรงของ
ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด

6.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน (Poiseuille flow) [26]

ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันเป็นปัญหาอีกหนึ่งปัญหาที่สามารถตรวจสอบความถูกต้องเบื้องต้นของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้กับผลเฉลยแม่นยำตรง ลักษณะของปัญหาดังกล่าวเป็นการไหลเนื่องจากความดันระหว่างแผ่นคู่ขนานสองแผ่นที่ถูกตรึงให้อยู่กับที่ การไหลระหว่างแผ่นทั้งสองมีลักษณะการกระจายความเร็วเป็นแบบพาราโบลา (parabola) ซึ่งมีความเร็วสูงสุดเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่งกึ่งกลางของระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนาน ดังแสดงในรูปที่ 6.5



รูปที่ 6.5 ลักษณะของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน

ผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายของความเร็วสำหรับปัญหานี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้หากพิจารณาการไหลให้เป็นการไหลแบบเต็มรูปแบบ (fully developed flow) ในหนึ่งมิติในแนวแกน x คือกำหนดให้ $v=0$ และ $u=u(y)$ ที่ตำแหน่ง x ใดๆ จากข้อสมมติดังกล่าวทำให้สมการอนุพันธ์โมเมนต์มัลติพลิงเป็น

$$\text{สมการโมเมนต์มัลติพลิงในแนวแกน } x: \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.4ก)$$

$$\text{สมการโมเมนต์มัลติพลิงในแนวแกน } y: \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.4ข)$$

อินทิเกรตสมการ (6.4ก) เทียบกับตัวแปร y สองครั้ง จะได้

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \frac{A}{\mu} y + B \quad (6.5)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งค่าทั้งสองสามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบบนและล่างของปัญหาคือ $u(y=0) = 0$ และ $u(y=h) = 0$

เมื่อทำการแทนเงื่อนไขขอบเขตลงในสมการ (6.5) จะพบว่า $A = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$ และ $B = 0$ จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของรูปแบบการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x ใดๆ คือ

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - yh) \quad (6.6)$$

เนื่องจากกำหนดให้ความเร็วสูงสุดเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่งกึ่งกลางของระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนาน นั่นคือ $u\left(y = \frac{h}{2}\right) = 1$ เมื่อแทนค่าดังกล่าวลงในสมการ (6.6) จะได้

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\mu}{h^2} \quad (6.7)$$

แทนค่าพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเนื่องจากความดันกลับเข้าไปในสมการ (6.6) ดังนั้น

$$u(y) = \frac{4y}{h^2} (h - y) \quad (6.8)$$

จากสมการ (6.8) หากกำหนดให้ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานมีค่าเท่ากับ 1 จะได้สมการของการกระจายตัวของความเร็วในแนวแกน x ดังนี้

$$u(y) = 4y(1 - y) \quad (6.9)$$

สมการอนุพันธ์โมเมนต์ในแนวแกน y ในสมการ (6.4ข) คือ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ แสดงถึงค่าความดันแปร

ผันในแนวแกน x เพียงทิศทางเดียวเท่านั้น นั่นคือ $p = p(x)$ และหากกำหนดให้ของไหลมีความหนืดเท่ากับ 0.125 จะทำให้สมการ (6.7) มีค่าดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -1 \quad (6.10)$$

อินทิเกรตสมการ (6.10) เทียบกับตัวแปร x จะได้

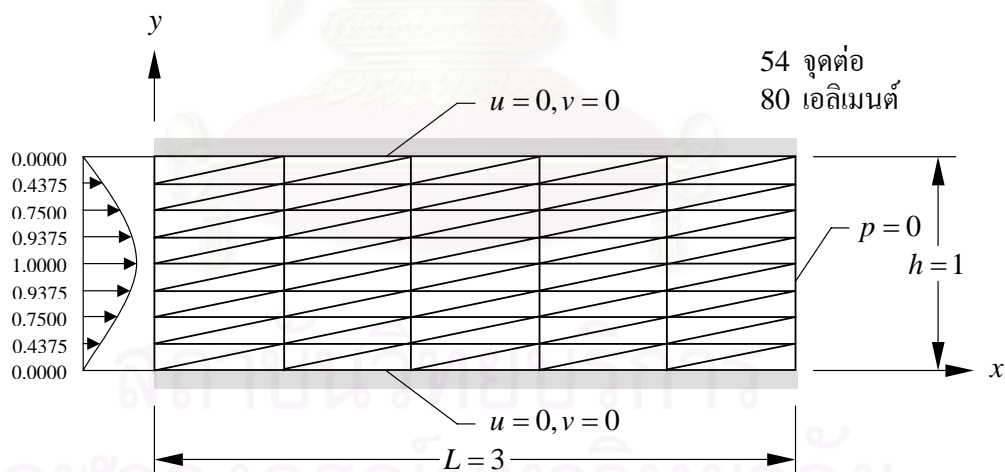
$$\int_{p_1}^p dp = -\int_0^x dx$$

$$p(x) - p_1 = -x \quad (6.11)$$

และถ้าหากกำหนดให้ความดัน p ตลอดแนวทางออกที่ตำแหน่ง $L = 3$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นลักษณะการกระจายของความดันแน่นอนตรง $p(x)$ ในแนวแกน x คือ

$$p(x) = 3 - x \quad (6.12)$$

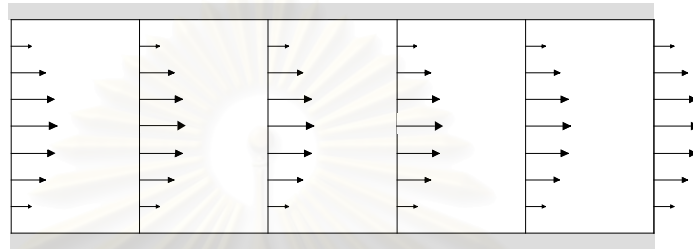
ปัญหาดังกล่าวถูกนำมาวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.6 ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 80 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อ 54 จุดต่อ โดยกำหนดให้ตลอดขอบทางด้านซ้ายมีการกระจายตัวของความเร็วแบบเต็มรูปแบบดังสมการ (6.9) ขอบผนังด้านบนและล่างมีความเร็วเท่ากับศูนย์ ส่วนตลอดขอบทางด้านขวาของแบบจำลองกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์



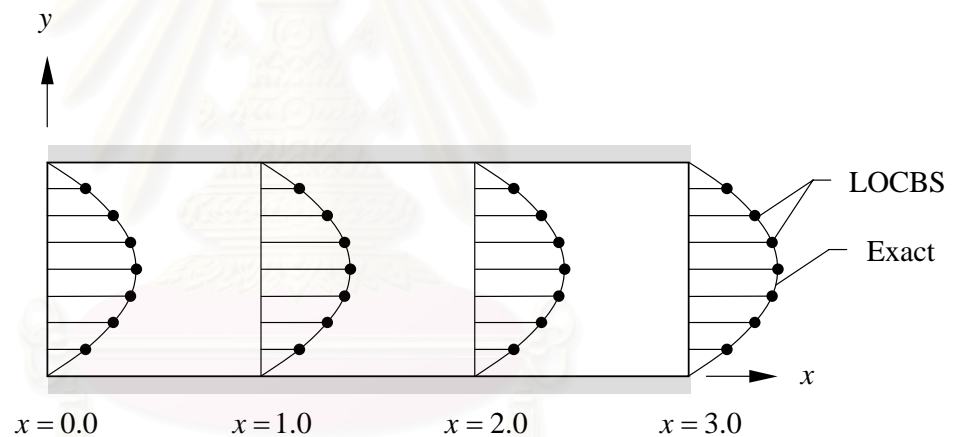
รูปที่ 6.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS มีลักษณะการกระจายตัวของความเร็วดังแสดงในรูปที่ 6.7 และนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแน่นอนที่ตำแหน่ง $x = 0.0, 1.0, 2.0$ และ 3.0 ดังแสดงในรูปที่ 6.8 ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้อง

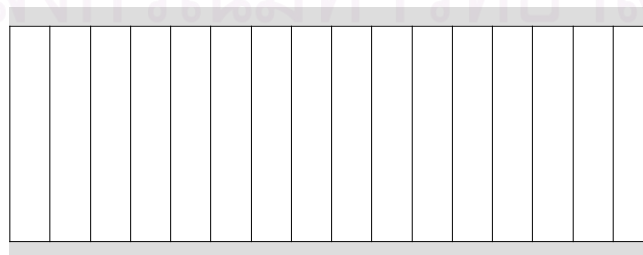
แม่นยำ สำหรับรูปที่ 6.9 และ 6.10 เป็นรูปแสดงลักษณะการกระจายตัวของความดันที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS และรูปแสดงการเปรียบเทียบความดันที่จุดต่อกับผลเฉลยแม่นยำที่ตำแหน่ง $y = 0.25, 0.50$ และ 0.75 ตามลำดับ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกัน



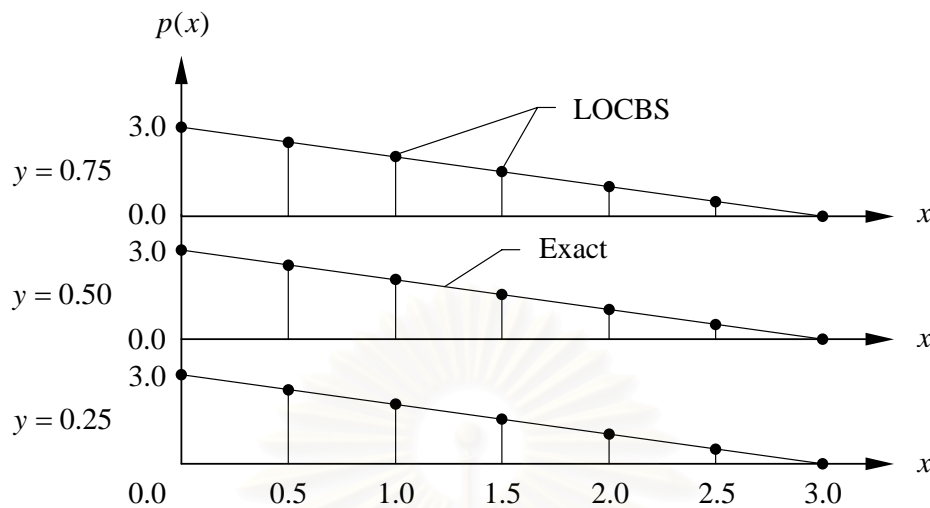
รูปที่ 6.7 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน



รูปที่ 6.8 การเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับผลเฉลยแม่นยำ



รูปที่ 6.9 การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน



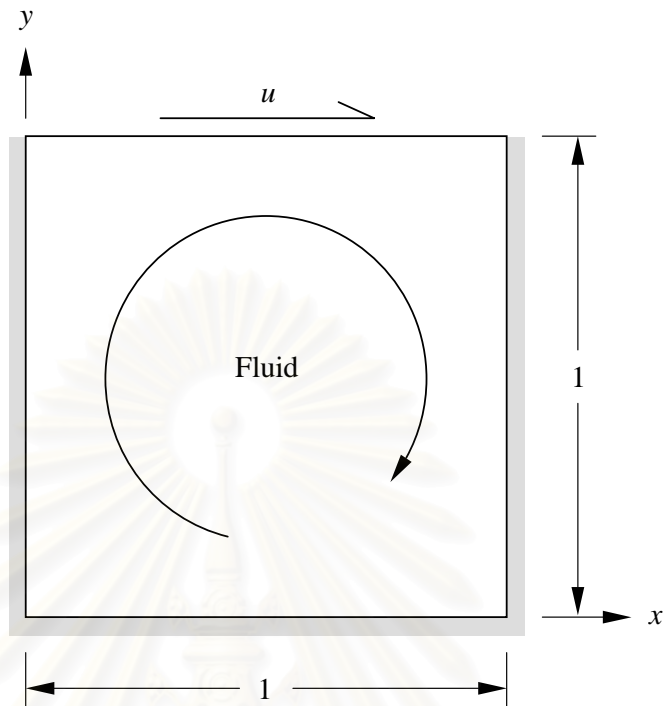
รูปที่ 6.10 การเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของความดันที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง y ต่าง ๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับผลเฉลยแม่นยำ

6.3 ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม (cavity flow)

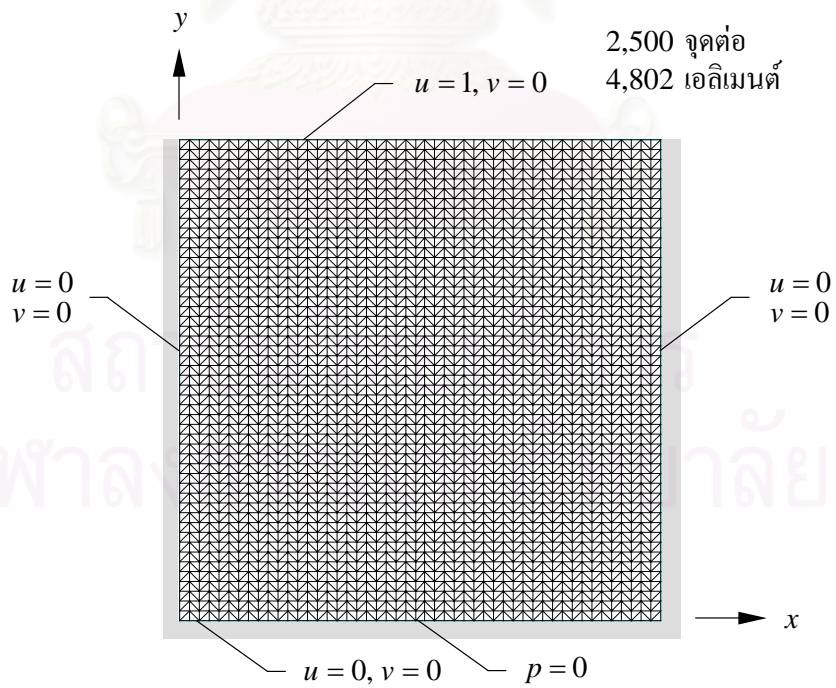
ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 หน่วยเป็นปัญหามาตรฐานที่นิยมนำมาใช้ทดสอบความเที่ยงตรงของระเบียบวิธีการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่อัดตัวสำหรับสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยกำหนดให้ขอบที่ไหลที่อยู่บริเวณขอบทางด้านบนเคลื่อนตัวไปทางขวามือในแนวแกน x ด้วยความเร็ว $u = 1$ การเคลื่อนตัวดังกล่าวจะทำให้ของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยมนี้เกิดการหมุนวนในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 6.11 โดยลักษณะของการไหลจะขึ้นกับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynold number) [26] คือ

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (6.13)$$

การทดสอบปัญหาดังกล่าวสำหรับการศึกษาครั้งนี้จะทดสอบที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 100, 400, 1,000 และ 5,000 ตามลำดับ โดยใช้แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเดียวกันซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 4,802 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 2,500 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.12 โดยกำหนดความเร็วให้ $u = v = 0$ ที่ทุก ๆ จุดต่อที่อยู่บนผนังของช่องสี่เหลี่ยม และ $u = 1, v = 0$ สำหรับทุกจุดต่อที่อยู่บนขอบด้านบน นอกจากนั้นยังกำหนดความดันให้ $p = 0$ กับจุดต่อที่ตำแหน่งกึ่งกลางของขอบด้านล่างเพื่อใช้เป็นความดันอ้างอิงของปัญหา

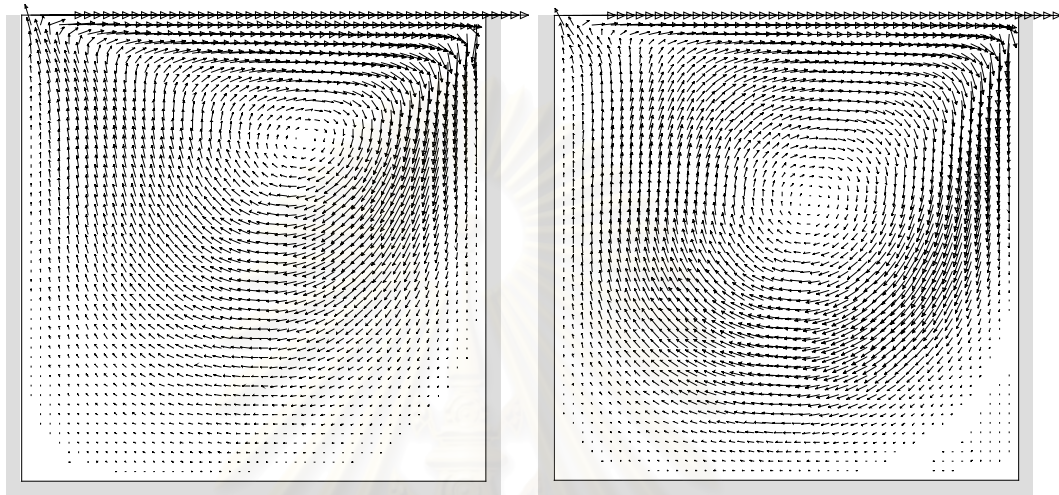


รูปที่ 6.11 ลักษณะของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม



รูปที่ 6.12 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม

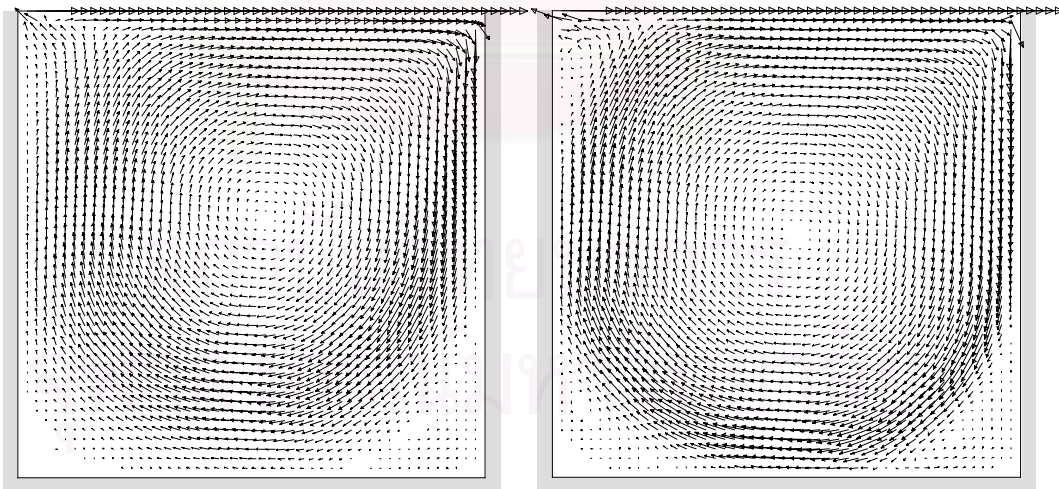
ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 6.13 และ 6.14 โดยรูปที่ 6.13 (ก-ข) แสดงการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ ส่วนรูปที่ 6.14 (ก-ข) แสดงการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 1,000 และ 5,000 ตามลำดับ



(ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 100$

(ข) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 400$

รูปที่ 6.13 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ

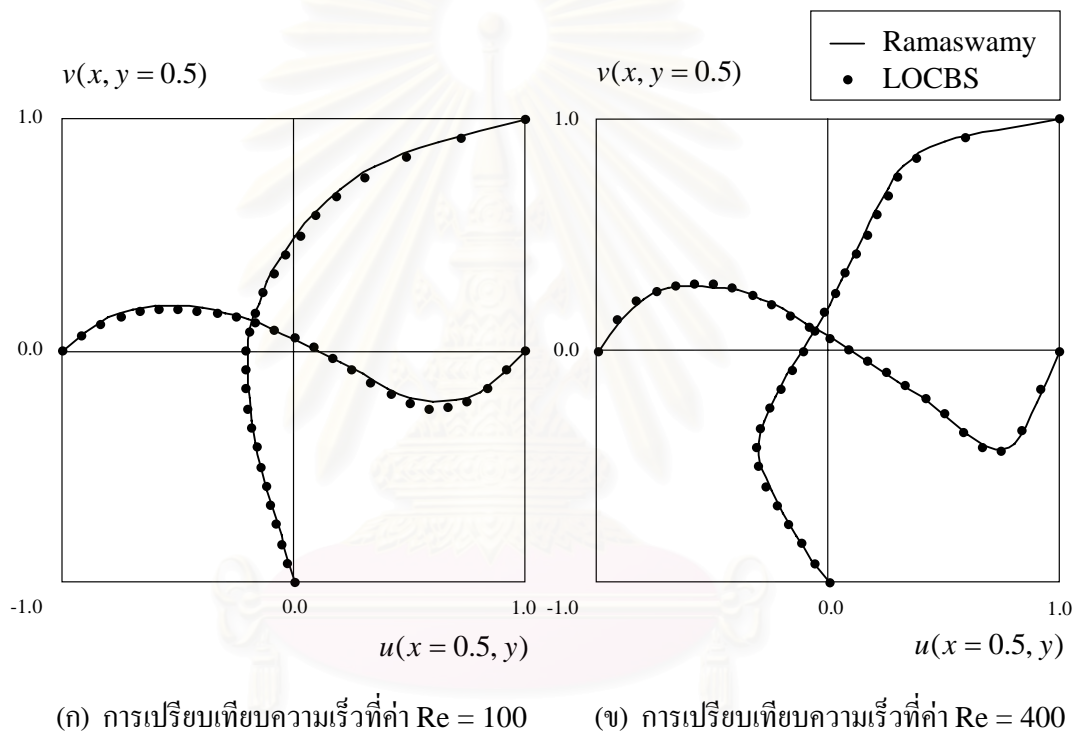


(ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 1,000$

(ข) เวกเตอร์ความเร็วที่ค่า $Re = 5,000$

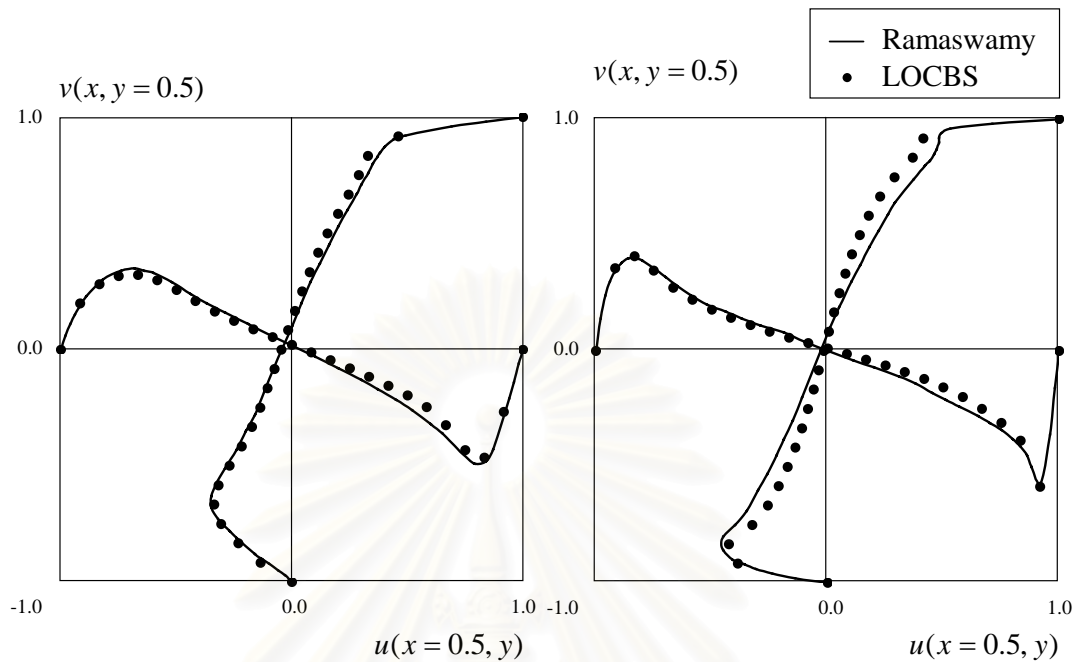
รูปที่ 6.14 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 1,000 และ 5,000 ตามลำดับ

ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method) ของ Ramaswamy [27] โดยเปรียบเทียบลักษณะการกระจายความเร็ว $u(y)$ ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ และความเร็ว $v(x)$ ที่ตำแหน่ง $y = 0.5$ ดังแสดงในรูปที่ 6.15 และ 6.16 การเปรียบเทียบดังกล่าวดังแสดงให้เห็นว่าได้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องกัน โดยรูปที่ 6.15 (ก-ข) แสดงการเปรียบเทียบที่ค่า $Re = 100$ และ 400 ตามลำดับ ส่วนรูปที่ 6.16 (ก-ข) แสดงการเปรียบเทียบที่ค่า $Re = 1,000$ และ $5,000$ ตามลำดับ



รูปที่ 6.15 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอส กับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมเมื่อ $Re = 100$ และ 400 ตามลำดับ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

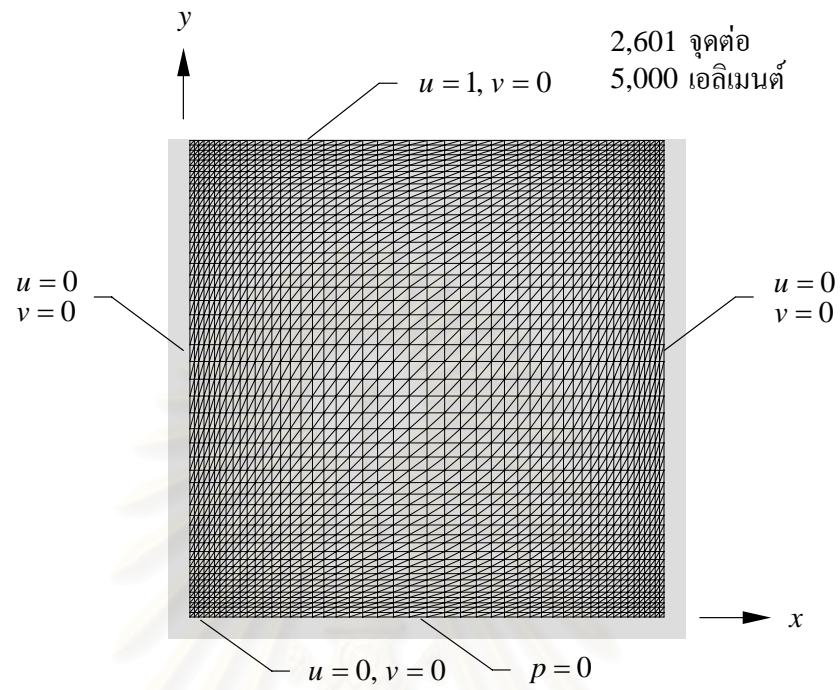


(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 1,000$ (ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $Re = 5,000$

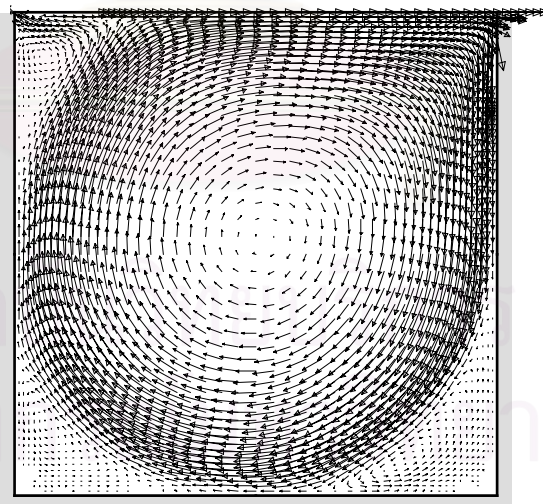
รูปที่ 6.16 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอส
กับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมเมื่อ $Re = 1,000$ และ $5,000$ ตามลำดับ

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 5,000 พบว่ายังมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง จึงทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS อีกครั้งหนึ่ง โดยใช้เอลิเมนต์แบบไม่สม่ำเสมอขนาด 5,000 เอลิเมนต์ 2,601 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 6.17 ทำการคำนวณการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 5,000 ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 6.18 เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Ramaswamy [27] ดังแสดงในรูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าได้ผลการคำนวณทั้งสองมีความสอดคล้องกันมากยิ่งขึ้น

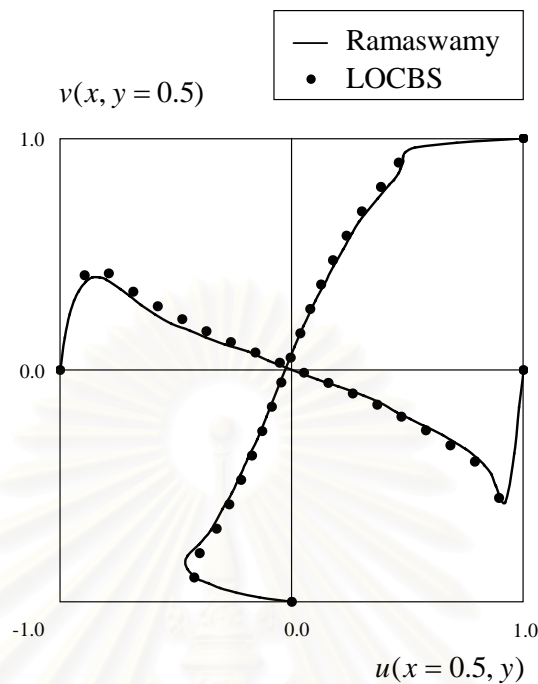
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 6.17 รูปแบบจำลองแบบไม่สม่ำเสมอของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม



รูปที่ 6.18 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม
ที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 5,000

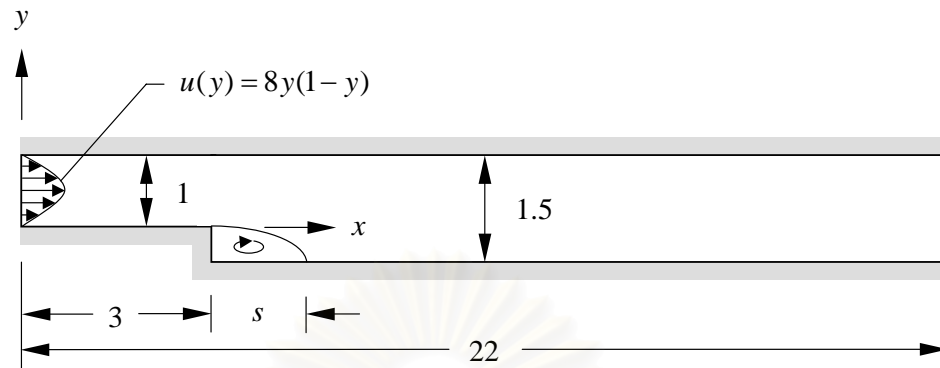


รูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วจากวิธีซีบีเอสกับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 5,000

6.4 ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step)

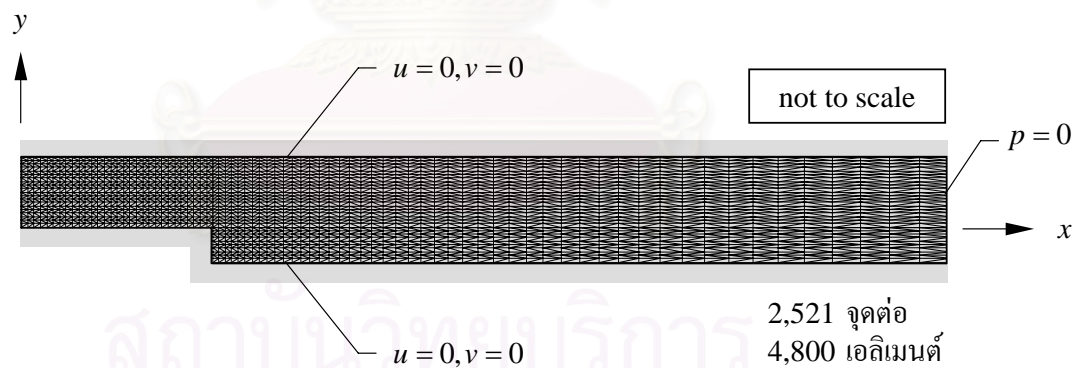
ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดเป็นปัญหาอีกหนึ่งปัญหาที่สามารถนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของระเบียบวิธีซีบีเอสและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ได้ โดยปัญหาดังกล่าวเป็นการวิเคราะห์การไหลที่มีลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ทางเข้าระหว่างช่องคู่ขนานเป็นแบบพาราโบลา เมื่อการไหลนี้ผ่านจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้นทันทีทันใดจะก่อให้เกิดการไหลหมุนวนที่หลังบริเวณนั้น ดังแสดงในรูปที่ 6.20 โดยลักษณะของการไหลและระยะการเกาะสัมผัส (reattachment length) ของปัญหาจะขึ้นกับค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์ [28] คือ

$$\text{Re} = \frac{\rho U_{\max} (H - h)}{\mu} \quad (6.14)$$



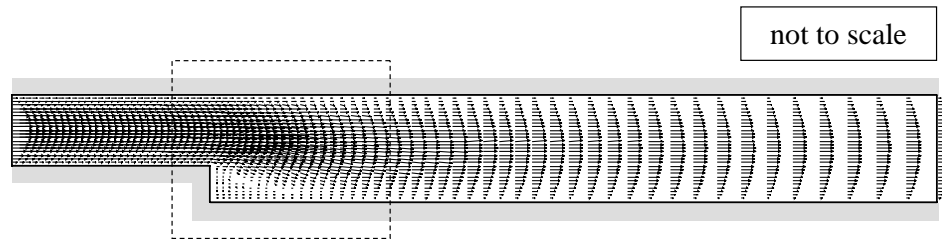
รูปที่ 6.20 ลักษณะของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนาน
ที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

การทดสอบปัญหาดังกล่าวจะทดสอบที่ค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์เท่ากับ 50 และ 150 โดยใช้แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเดียวกันซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 4,800 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 2,521 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.21 โดยกำหนดความเร็วที่ทางเข้าเป็นแบบเต็มรูปแบบและให้ $u = v = 0$ ที่ทุก ๆ จุดต่อที่อยู่บนผนัง นอกจากนั้นยังกำหนดความดันให้ $p = 0$ ตลอดขอบทางออกด้านขวามือ

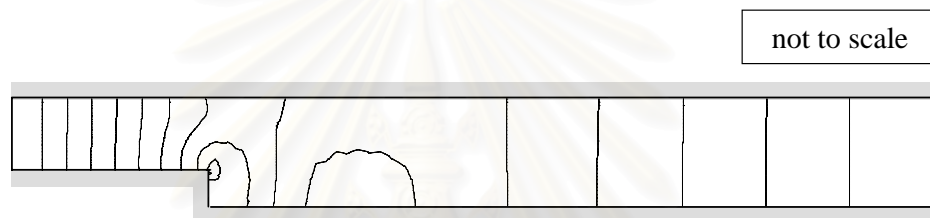


รูปที่ 6.21 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนาน
ที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

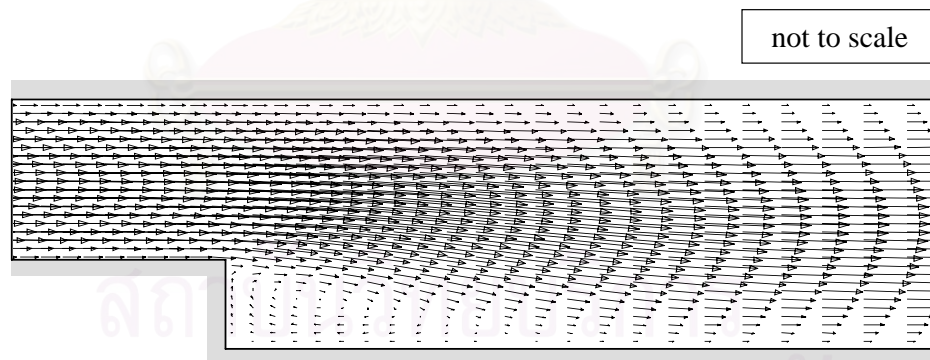
ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.22-6.27 โดยรูปที่ 6.22-6.24 แสดงการกระจายตัวของความเร็วและความดัน รวมถึงรายละเอียดของการไหลหมุนวนที่ค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์เท่ากับ 50 และรูปที่ 6.25-6.27 แสดงการกระจายตัวของความเร็วและความดัน รวมถึงรายละเอียดของการไหลหมุนวนที่ค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์เท่ากับ 150 ตามลำดับ



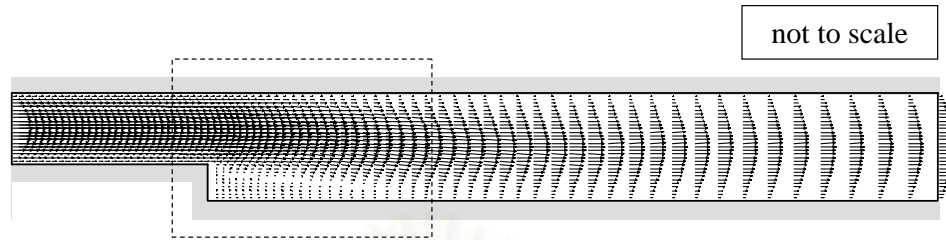
รูปที่ 6.22 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=50$



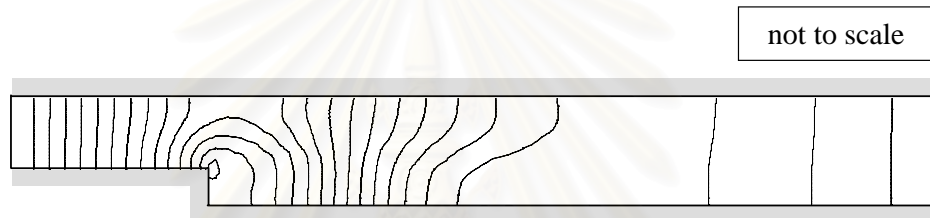
รูปที่ 6.23 การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=50$



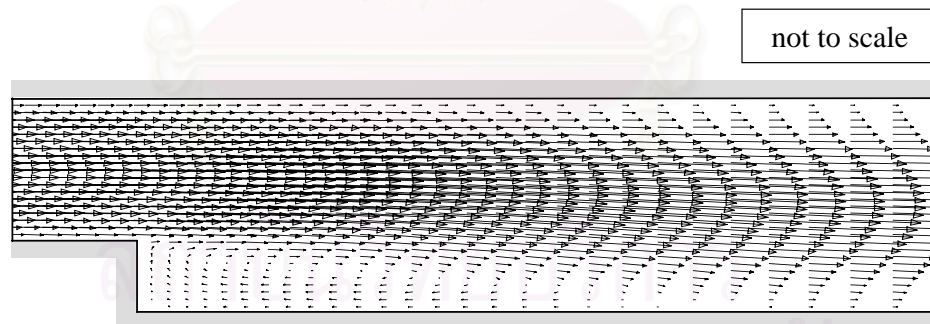
รูปที่ 6.24 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.22 ที่แสดงการไหลหมุนวนของปัญหาที่ค่า $Re=50$



รูปที่ 6.25 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=150$



รูปที่ 6.26 การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดที่ค่า $Re=150$



รูปที่ 6.27 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 6.25 ที่แสดงการไหลหมุนวนของปัญหาที่ค่า $Re=150$

ระยะเวลาและสัมพัทธ์ที่คำนวณได้พบว่าหากการไหลมีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์สูงขึ้นจะส่งผลให้ระยะเวลาและสัมพัทธ์ของการไหลหมุนวนมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย การเปรียบเทียบระยะเวลาและสัมพัทธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS กับค่าที่วัดได้จากการทดลองของ GAMM-workshop [29] แสดงได้ดังตารางที่ 6.1 โดยที่ระยะเวลาและสัมพัทธ์ x_r สามารถคำนวณได้จากสมการ (6.15) ดังนี้

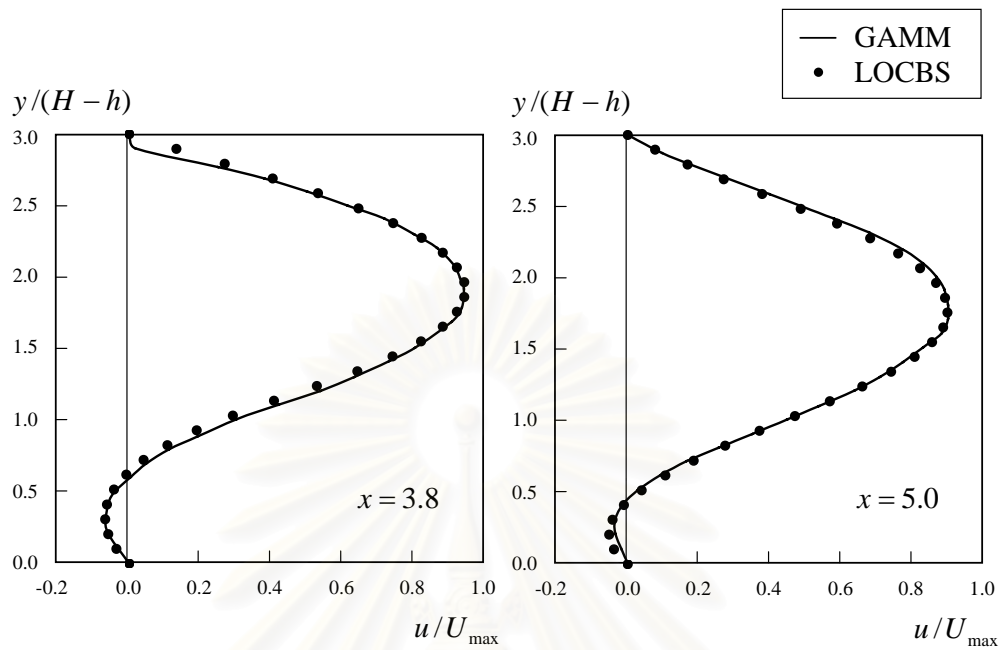
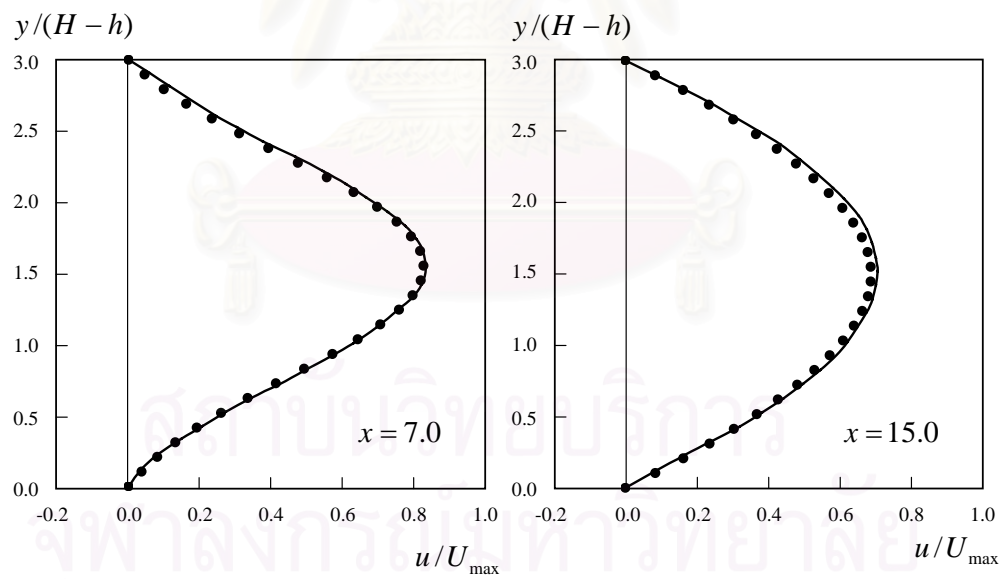
$$x_r = \frac{s}{H - h} \quad (6.15)$$

ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบระยะเวลาและสัมพัทธ์ของการไหลหมุนวนระหว่างผลจากการทดลองกับผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยโปรแกรม LOCBS

Reattachment length	Re=50	Re=150
GAMM-workshop	3.00	6.00
LOCBS	2.80	6.20
Error(%)	6.67	3.33

ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรม LOCBS เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ GAMM-workshop โดยเปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $u(y)$ ที่ตำแหน่ง $x = 3.8, 5.0, 7.0$ และ 15.0 สำหรับปัญหาที่มีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เท่ากับ 150 พบว่าผลการคำนวณที่ได้และผลจากการทดลองมีความสอดคล้องกันดังแสดงในรูปที่ 6.28

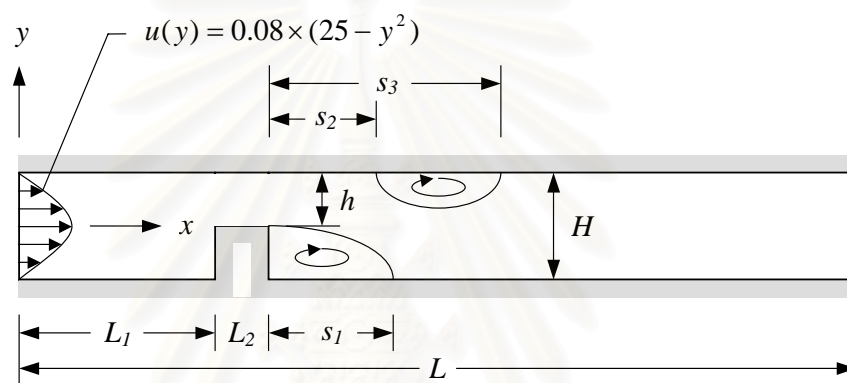
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 3.8$ (ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 5.0$ (ค) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 7.0$ (ง) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 15.0$

รูปที่ 6.28 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอส
กับผลการทดลองที่ตำแหน่งต่าง ๆ สำหรับปัญหาที่มีค่า $Re = 150$

6.5 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ (flow over two-dimensional obstacle) [28]

ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติเป็นปัญหาการไหลในช่องแคบที่สามารถเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์จากการทดลอง ลักษณะของปัญหาประกอบด้วยของไหลที่ทางเข้าตลอดขอบด้านซ้ายมีลักษณะการไหลแบบเต็มรูปแบบ โดยมีสิ่งกีดขวางรูปสี่เหลี่ยมขวางการไหลไว้ซึ่งจะก่อให้เกิดการไหลหมุนวนบริเวณด้านหลังของสิ่งกีดขวางนี้ และหากเป็นการไหลที่มีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์สูงพอจะเกิดการไหลหมุนวนบริเวณผนังด้านบนของปัญหาด้วย ดังแสดงในรูปที่ 6.29



รูปที่ 6.29 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ

รูปแบบของปัญหาแบ่งออกเป็นสองลักษณะคือการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม (flow over the block) และปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยม (flow over the fence) โดยขนาดของปัญหาทั้งสองลักษณะได้แสดงไว้ในตารางที่ 6.2 โดยกำหนดให้ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์สามารถคำนวณได้ ดังนี้

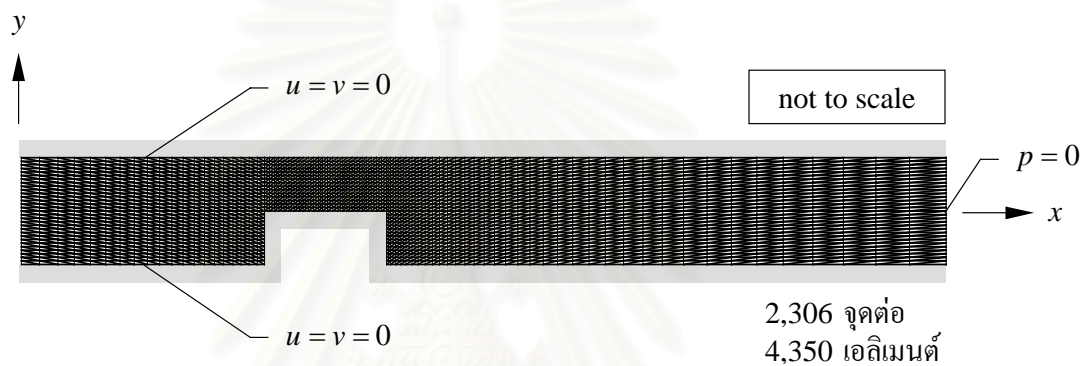
$$Re = \frac{\rho U_{\max} (H - h)}{\mu} \quad (6.16)$$

ตารางที่ 6.2 รูปร่างและค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ

ลักษณะของปัญหา	H	h	L	L_1	L_2	Re
block	10	5	180	40	20	144.0
fence	10	5	230	40	1	217.5

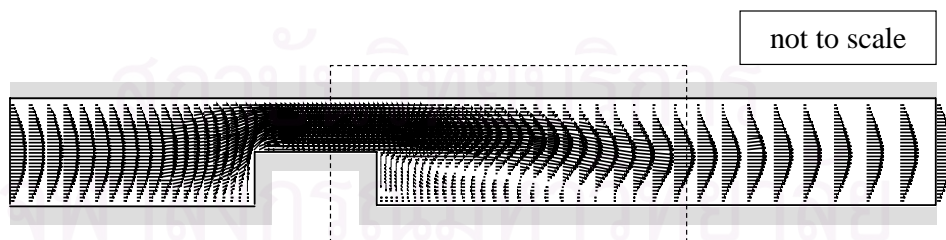
6.5.1 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปกล่องสี่เหลี่ยม (flow over block)

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำมาใช้กับปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 4,350 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 2,306 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 6.30 โดยกำหนดให้ความเร็วตลอดขอบด้านซ้ายมือมีการกระจายแบบพาราโบลา และให้ $u = v = 0$ สำหรับทุก ๆ จุดต่อที่อยู่บนผนัง นอกจากนี้ตลอดขอบทางด้านขวามือยังกำหนดให้ $p = 0$

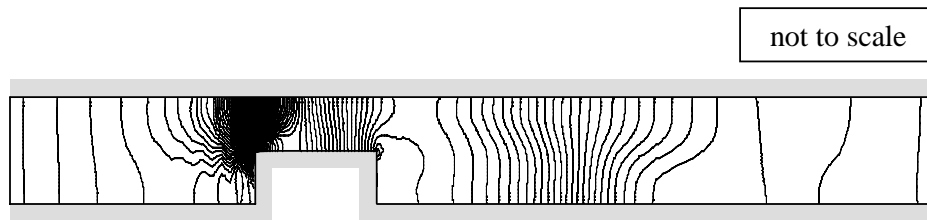


รูปที่ 6.30 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม

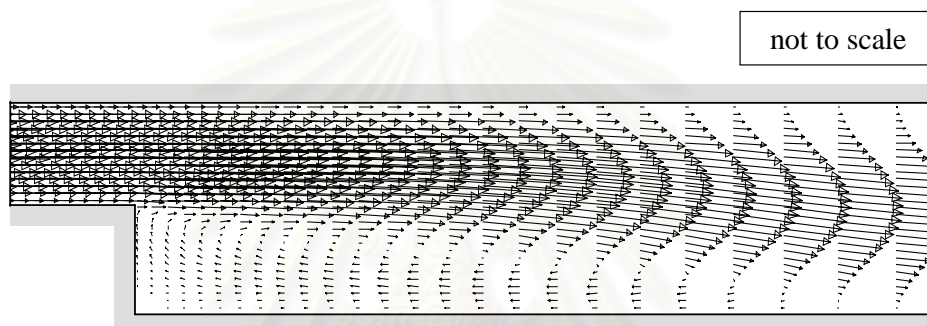
ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144 โดยที่กำหนดให้ความหนาแน่นเท่ากับ 1 และค่าความหนืดเท่ากับ 0.0694 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.31-6.33



รูปที่ 6.31 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144



รูปที่ 6.32 การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม
ที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144



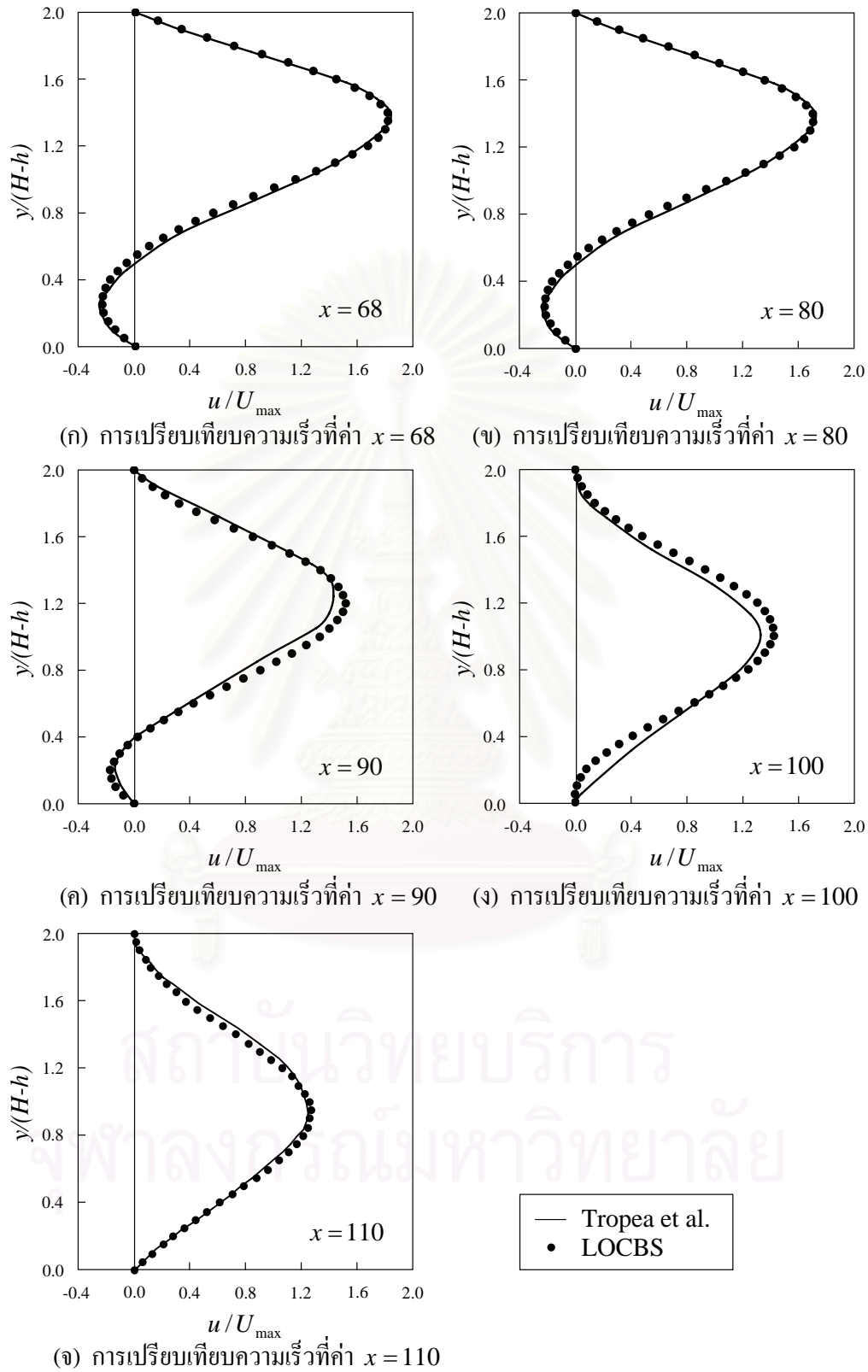
รูปที่ 6.33 การกระจายตัวของความเร็วภายในรอบประของรูปที่ 6.31 ที่แสดงรายละเอียด
ของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 144

ระยะการแตะสัมผัส x_r ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม
สามารถคำนวณได้จากสมการ (6.17) ดังนี้

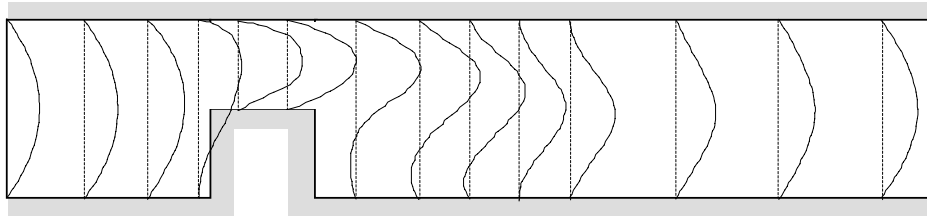
$$x_r = \frac{s_1}{H - h} \quad (6.17)$$

จากการเปรียบเทียบระยะดังกล่าวพบว่าระยะการแตะสัมผัสที่วัดได้จากผลการทดลองของ
Tropea et al. [30] มีค่าเท่ากับ 7.10 และระยะการแตะสัมผัสที่คำนวณได้จากวิธีซีบีเอสคือ 8.09
ซึ่งคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเท่ากับ 13.94%

การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากโปรแกรม LOCBS กับผล
จากการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ได้แก่ตำแหน่ง $x = 68, 80, 90, 100$ และ 110 แสดงได้ดัง
รูปที่ 6.34(ก-จ) โดยได้ผลที่มีความสอดคล้องกัน และสำหรับรูปที่ 6.35 แสดงลักษณะการกระจาย
ตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ



รูปที่ 6.34 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วที่คำนวณได้กับผลการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ



รูปที่ 6.35 การกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ

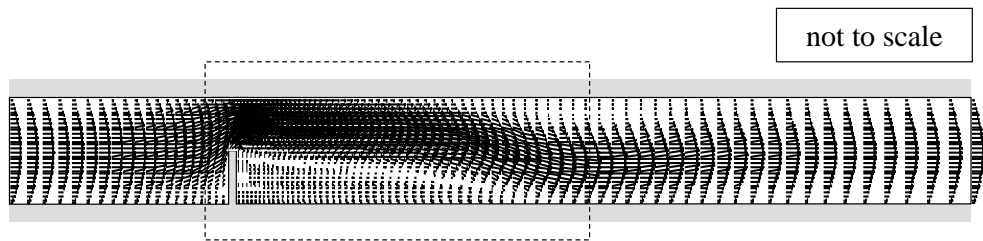
6.5.2 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติรูปแท่งสี่เหลี่ยม (flow over fence)

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำมาใช้กับปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อจำนวน 6,060 เอลิเมนต์ และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 3,178 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 6.36 โดยกำหนดให้ความเร็วตลอดขอบด้านซ้ายมือมีการกระจายแบบพาราโบลา และให้ $u = v = 0$ สำหรับทุก ๆ จุดต่อที่อยู่บนผนัง นอกจากนี้ตลอดขอบทางด้านขวามือยังกำหนดให้ $p = 0$

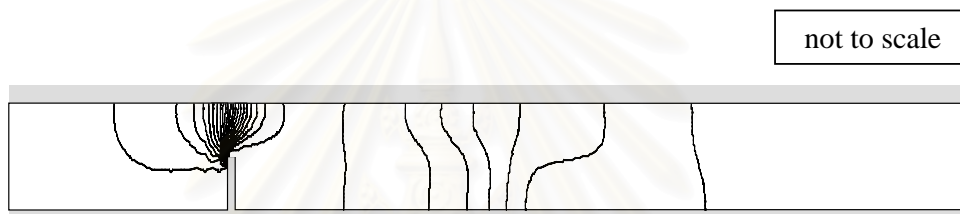


รูปที่ 6.36 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยม

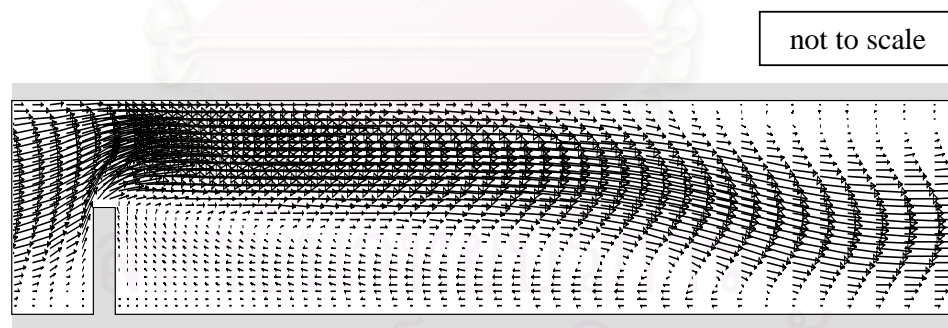
ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5 โดยที่กำหนดให้ความหนาแน่นเท่ากับ 1 และค่าความหนืดเท่ากับ 0.046 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.37-6.39



รูปที่ 6.37 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5



รูปที่ 6.38 การกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5



รูปที่ 6.39 การกระจายตัวของความเร็วภายในขอบประของรูปที่ 6.37 ที่แสดงรายละเอียดของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 217.5

การไหลหมุนวนที่เกิดขึ้นในปัญหานี้เกิดขึ้นบริเวณหลังสิ่งกีดขวางและบริเวณผนังด้านบนของปัญหา สำหรับการไหลหมุนวนหลังสิ่งกีดขวางสามารถตรวจสอบได้จากระยะการแตะสัมผัส x_{r1} และการไหลหมุนวนที่บริเวณผนังด้านบนสามารถตรวจสอบได้จากระยะการเกิดการแยกตัวของการไหล (separation length) x_{r2} และ x_{r3} ดังนี้

$$x_{r1} = \frac{s_1}{H-h} \quad (6.18)$$

$$x_{r2} = \frac{s_2}{H-h} \quad (6.19)$$

$$x_{r3} = \frac{s_3}{H-h} \quad (6.20)$$

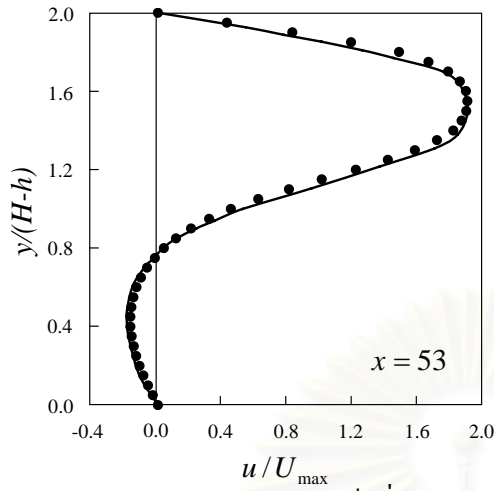
การเปรียบเทียบระยะเวลาและสัมพัทธ์และระยะเวลาเกิดการแยกตัวของการไหลที่วัดได้จากผลการทดลองของ Carvalho et al. [31] กับค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม LOCBS แสดงได้ดังตารางที่ 6.3

ตารางที่ 6.3 การเปรียบเทียบระยะเวลาและสัมพัทธ์ของการไหลหมุนวนและระยะเวลาเกิดการแยกตัวของการไหลระหว่างผลการทดลองกับผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรม LOCBS

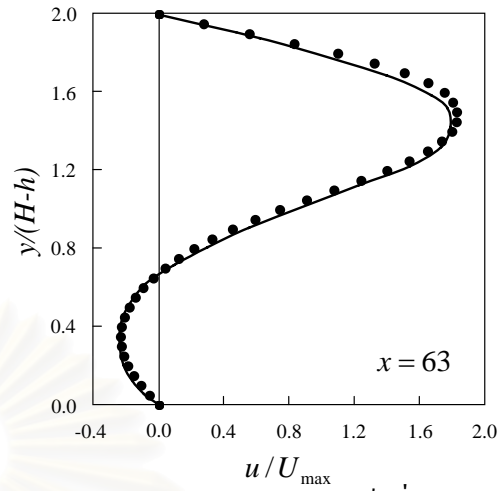
	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}
Carvalho et al.	10.50	10.00	15.40
LOCBS	10.97	9.64	16.07
Error(%)	4.48	3.55	4.17

การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากโปรแกรม LOCBS กับผลการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ ได้แก่ตำแหน่ง $x = 53, 63, 81, 101$ และ 131 แสดงได้ดังรูปที่ 6.40(ก-จ) โดยได้ผลที่มีความสอดคล้องกัน และสำหรับรูปที่ 6.41 แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ

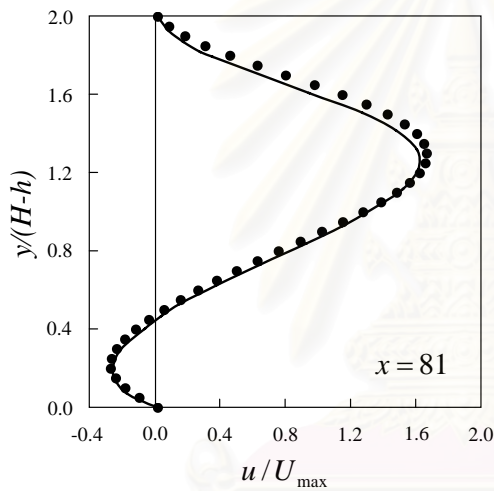
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



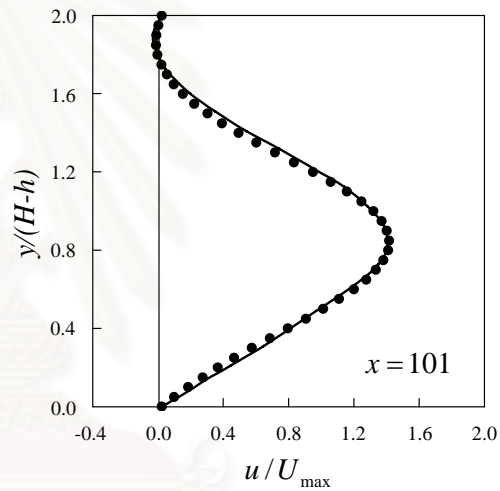
(ก) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 53$



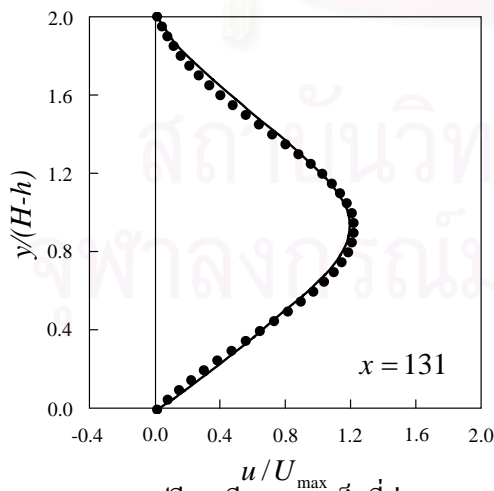
(ข) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 63$



(ค) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 81$



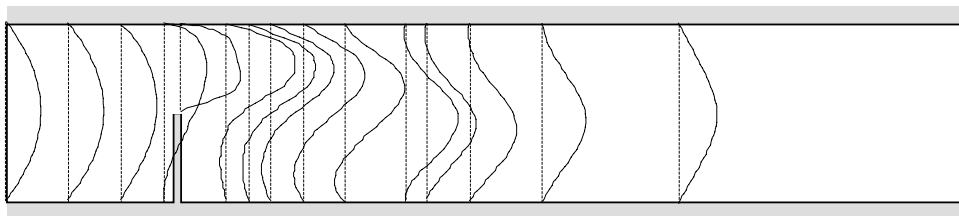
(ง) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 101$



(จ) การเปรียบเทียบความเร็วที่ค่า $x = 131$



รูปที่ 6.40 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วที่คำนวณได้กับผลการทดลองที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ



รูปที่ 6.41 การกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ของการไหลผ่านสิ่งกีดขวาง
รูปแท่งสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่ง x ต่าง ๆ



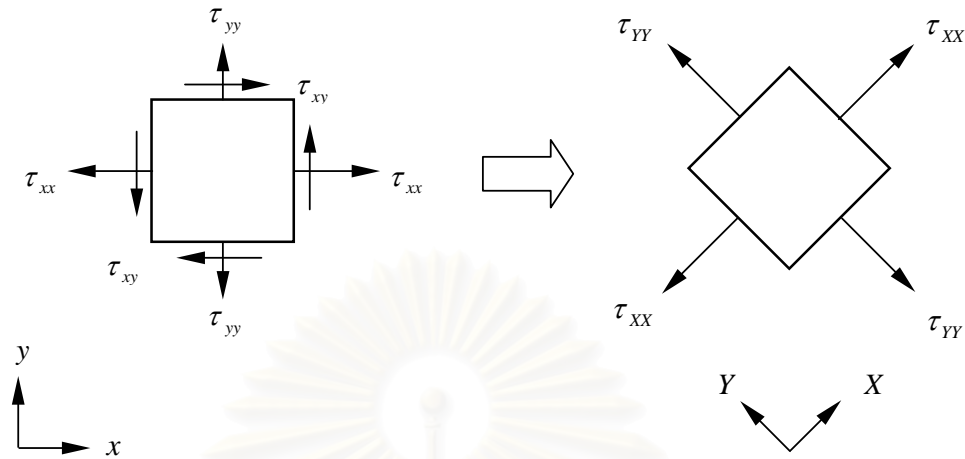
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นหากต้องการความถูกต้องของผลลัพธ์สูงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมากในการจำลองรูปร่างของปัญหา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง แต่เนื่องจากปัญหาการไหลโดยทั่วไปมีความซับซ้อนจึงไม่อาจทราบลักษณะการกระจายตัวของคำตอบล่วงหน้าก่อนทำการวิเคราะห์เพื่อที่จะกำหนดให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่ต้องการได้ และหากเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมนของปัญหาจะต้องใช้เวลาในการคำนวณมากและสิ้นเปลืองหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์โดยไม่จำเป็น เป็นผลให้ทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ได้ลำบากเนื่องจากขีดจำกัดของเครื่องคอมพิวเตอร์ อย่างไรก็ตามหากนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [32] มาประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะช่วยให้สามารถเลือกขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมได้ ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและขั้นตอนการประยุกต์ใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น

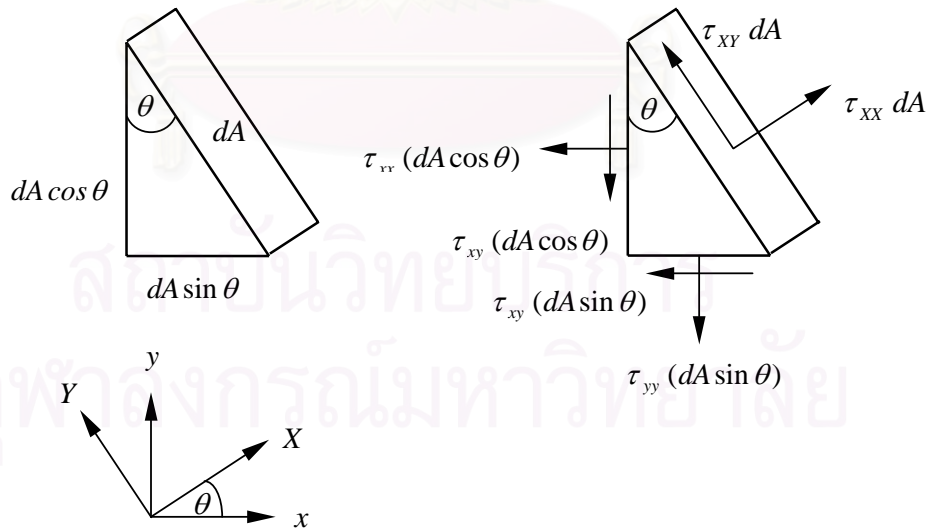
7.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการเบื้องต้นของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติคือการนำผลลัพธ์และข้อมูลตั้งต้นที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์สูง และให้มีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ต่ำ โดยอาศัยหลักการของการหาความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stresses) [33] เพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ที่ว่าสำหรับความเค้นในสองมิติใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยความเค้นตั้งฉาก τ_{xx}, τ_{yy} และความเค้นเฉือน τ_{xy} จะมีแนวแกนหลักซึ่งสามารถลดรูปความเค้นให้เหลือเพียงความเค้นตั้งฉากในแนวแกนหลักทั้งสอง τ_{xx}, τ_{yy} ได้ ดังรูปที่ 7.1 หลักการดังกล่าวมีรายละเอียดดังนี้



รูปที่ 7.1 หลักการของการหาความเค้นในแนวแกนหลัก

พิจารณาทรงสามเหลี่ยมที่มีผิวด้านประกอบมุมฉากซึ่งตั้งฉากกับแกน x และ y และมีด้านตรงข้ามมุมฉากที่ตั้งฉากกับแกนหลัก X ที่ทำมุม θ อกกับแกน x ดังแสดงในรูปที่ 7.2 พบว่าหากกำหนดให้พื้นที่ผิวของด้านที่ตั้งฉากกับแกนหลัก X มีขนาดพื้นที่เท่ากับ dA ดังนั้นพื้นที่ผิวของด้านประกอบมุมฉากซึ่งตั้งฉากกับแกน x และ y จะมีค่าเท่ากับ $dA \cos \theta$ และ $dA \sin \theta$ ตามลำดับ



รูปที่ 7.2 พื้นที่ผิวและแรงที่กระทำบนด้านต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในสองมิติ

เมื่อรวมแรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมในแนวแกนหลัก X และ Y และให้มีค่าเท่ากับ ศูนย์จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\sum F_x = 0;$$

$$\begin{aligned} & \tau_{xx} dA - \tau_{xx} (dA \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (dA \cos \theta) \sin \theta \\ & - \tau_{yy} (dA \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (dA \sin \theta) \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$\begin{aligned} & \tau_{xy} dA + \tau_{xx} (dA \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (dA \cos \theta) \cos \theta \\ & - \tau_{yy} (dA \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (dA \sin \theta) \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

ย้ายข้างสมการ (7.1) และ (7.2) แล้วหารตลอดด้วย dA จะได้

$$\tau_{xx} - (\tau_{xx} \cos^2 \theta + \tau_{yy} \sin^2 \theta) = \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta \quad (7.3)$$

$$\text{และ} \quad \tau_{xy} = -(\tau_{xx} - \tau_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (7.4)$$

อาศัยความสัมพันธ์ทางตรีโกณมิติที่ว่า

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (7.5ก)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (7.5ข)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (7.5ค)$$

$$\text{และ} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (7.5ง)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (7.5ก-ง) ลงในสมการ (7.3) และ (7.4) จะได้

$$\tau_{xx} - \left(\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right) = \left(\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7.6)$$

$$\tau_{XY} = -\frac{(\tau_{xx} - \tau_{yy})}{2} + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (7.7)$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ (7.6) และ (7.7) แล้วนำมารวมกันจากนั้นจึงจัดรูปใหม่ จะได้

$$\left(\tau_{xx} - \left(\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right) \right)^2 + (\tau_{xy})^2 = \left(\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2 \quad (7.8)$$

สมการ (7.8) แสดงถึงสมการวงกลมบนแกนหลัก X และ Y ที่มีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง $\left(\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right)$ และมีรัศมีเท่ากับ $\sqrt{\left(\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$ ดังนั้นค่าของ $(\tau_{XX})_{\max, \min}$ ซึ่งเรียกว่าค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stresses) จะมีค่าเท่ากับ

$$\text{principal stresses} = \left(\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (7.9)$$

หลักการดังกล่าวถูกนำมาใช้กับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยแทนค่าความเค้นด้วยค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของตัวไม่ทราบค่าที่เลือกใช้เป็นตัวบ่งชี้อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ สำหรับวิธานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ค่าความเร็วของการไหล ได้แก่ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ ในที่นี้จะยกตัวอย่างการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของค่าความเร็วในแนวแกนหลักดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

โดยที่
$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (7.11)$$

และ
$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (7.12)$$

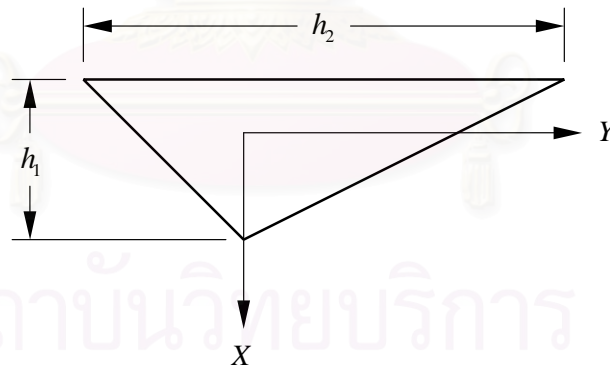
กระบวนการดังกล่าวจะทำการคำนวณสำหรับทุกๆจุดต่อในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีอยู่ จากนั้นจึงนำค่า $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$ ของทุกๆจุดต่อมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่มีค่ามากที่สุดของปัญหาซึ่งแทนด้วย λ_{\max} โดยที่

$$\lambda_{\max} = \max \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] \quad (7.13)$$

ค่า λ_{\max} ที่คำนวณได้จะถูกใช้ในการคำนวณเพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$h_1^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right| = h_2^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right| = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (7.14)$$

โดยที่ h_1 คือความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ h_2 คือความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y ดังแสดงในรูปที่ 7.3 ดังนั้นหากกำหนดขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กที่สุด h_{\min} และขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด h_{\max} ให้แล้ว ค่าความยาว h_1 และ h_2 ที่เหมาะสมของเอลิเมนต์อื่น ๆ สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่จึงสามารถคำนวณได้



รูปที่ 7.3 การวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ Y

จากสมการ (7.14) พบว่าค่า h_{\min} มีความสำคัญอย่างยิ่งในการปรับขนาดเอลิเมนต์ กล่าวคือหากกำหนดค่า h_{\min} ที่น้อยเกินไปจะทำให้มีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีจำนวนมากเกินไป ในทางกลับกันถ้าหากกำหนดค่า h_{\min} ที่มากเกินไปจะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนน้อยเกินไปซึ่งอาจส่งผลกระทบต่อความแม่นยำในการคำนวณของผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกค่า h_{\min} ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ในทางปฏิบัติยังไม่มียุติวิธีที่สามารถบอกได้ว่าค่า h_{\min} ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่าใดทั้งนี้ก็

ขึ้นกับลักษณะของปัญหาและประสบการณ์ของผู้ทำการวิเคราะห์ สำหรับค่า h_{\max} ซึ่งหมายถึงขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดอาจจะเพิ่มขึ้นได้ถึงประมาณ 2 เท่าสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกๆ หลังจากนั้นค่า h_{\max} อาจจะปรับให้เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยหรืออาจจะให้คงที่ได้ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาและรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นหลัก

ค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของความเร็วของการไหลที่จุดต่อต่าง ๆ ในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีอยู่แล้วสามารถคำนวณได้โดยใช้ขั้นตอนดังต่อไปนี้ ยกตัวอย่างหากต้องการคำนวณหา $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อซึ่งลักษณะการกระจายของความเร็วนเอลิเมนต์คือ

$$V_{(e)} = [N] \{V\} \quad (7.15)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{V\} \quad (7.16)$$

ซึ่งมีค่าคงที่และรู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์นั้น ในขณะที่เดียวกันหากมองโดเมนของการไหลในภาพรวมแล้วสมมติว่าค่าความชันของความเร็วนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบซึ่งขึ้นอยู่กับความชันของความเร็วที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} = [N] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (7.17)$$

จากนั้นนำสมการ (7.17) ลบออกจากสมการ (7.16) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะได้

$$\int_A \{N\} \left(\frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (7.18)$$

แทนค่าสมการ (7.17) ลงในสมการ (7.18) จะได้

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} \quad (7.19)$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} \quad (7.20)$$

โดยที่ $[M]$ คือเมตริกซ์แบบเต็มดังแสดงในสมการ (4.29) สำหรับสมการ (7.20) เป็นสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณสำหรับทุก ๆ เอลิเมนต์แล้วรวมขึ้นเป็นระบบสมการรวมใหญ่เพื่อหาค่าความชันของความเร็วที่จุดต่อ อนึ่งระบบสมการรวมใหญ่สามารถแก้ได้ง่ายหากแปลงเมตริกซ์แบบเต็มให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์มวลแบบรวมก่อนที่จุดต่อดังสมการ (4.30)

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถดำเนินไปในแนวทางเดียวกันกล่าวคือ หลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้วสามารถคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองได้จาก

$$\frac{\partial^2 V_{(e)}}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (7.21)$$

สมมติอนุพันธ์อันดับสองของความเร็วบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าอนุพันธ์อันดับสองของความเร็วที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial^2 V_{(e)}}{\partial x^2} = [N] \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} \quad (7.22)$$

จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสองของความเร็วที่จุดต่อจึงคำนวณได้จาก

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 V_{(e)}}{\partial x^2} \quad (7.23)$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 V_{(e)}}{\partial x^2} \quad (7.24)$$

สำหรับขั้นตอนในการหาค่า $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน

7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวสำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะมีโปรแกรมสำคัญที่เกี่ยวข้องจำนวน 2 โปรแกรมคือโปรแกรม FEMESH และโปรแกรม LOCBS และโปรแกรมสำหรับแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปข้อมูลนำเข้าที่สามารถใช้ได้กับโปรแกรมดังกล่าวอีก 2 โปรแกรม ได้แก่ โปรแกรม FEMCBS และโปรแกรม CBSFEM โดยโปรแกรมที่ได้กล่าวมาแล้วมีรายละเอียดดังนี้

1. โปรแกรม FEMESH

โปรแกรม FEMESH เป็นโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ต่าง ๆ สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะใช้โปรแกรม FEMESH ในการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และแสดงผลลัพธ์ในรูปของกราฟิก รวมถึงคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในขั้นตอนของการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

2. โปรแกรม FEMCBS

โปรแกรม FEMCBS เป็นโปรแกรมสำหรับแปลงข้อมูลเบื้องต้นของปัญหาที่ได้จากโปรแกรม FEMESH เพื่อให้อยู่ในรูปของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม LOCBS โดยมีรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ข.

3. โปรแกรม LOCBS

โปรแกรม LOCBS เป็นโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของความเร็วและความดันที่จุดต่อดั่งที่ได้กล่าวรายละเอียดมาแล้วในบทที่ 5

4. โปรแกรม CBSFEM

โปรแกรม CBSFEM เป็นโปรแกรมสำหรับแปลงผลลัพธ์ในรูปของความเร็วของการไหลและความดันที่ได้จากโปรแกรม LOCBS. เพื่อให้อยู่ในรูปของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม FEMESH โดยมีรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ค.

7.3 ขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 7.4 โดยมีรายละเอียดของแต่ละขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ใช้โปรแกรม FEMESH สร้างโดเมนของปัญหา กำหนดคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล และสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อขนาดสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนของปัญหา จากนั้นจึงกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและค่าเริ่มต้นของปัญหา

ขั้นตอนที่ 2 ใช้โปรแกรม FEMCBS อ่านข้อมูลเบื้องต้นของปัญหาที่ได้จากโปรแกรม FEMESH แล้วจึงทำการแปลงให้อยู่ในรูปของไฟล์นำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม LOCBS

ขั้นตอนที่ 3 ใช้โปรแกรม LOCBS วิเคราะห์ปัญหาการไหลดังที่ได้อธิบายมาแล้วในบทที่ 5

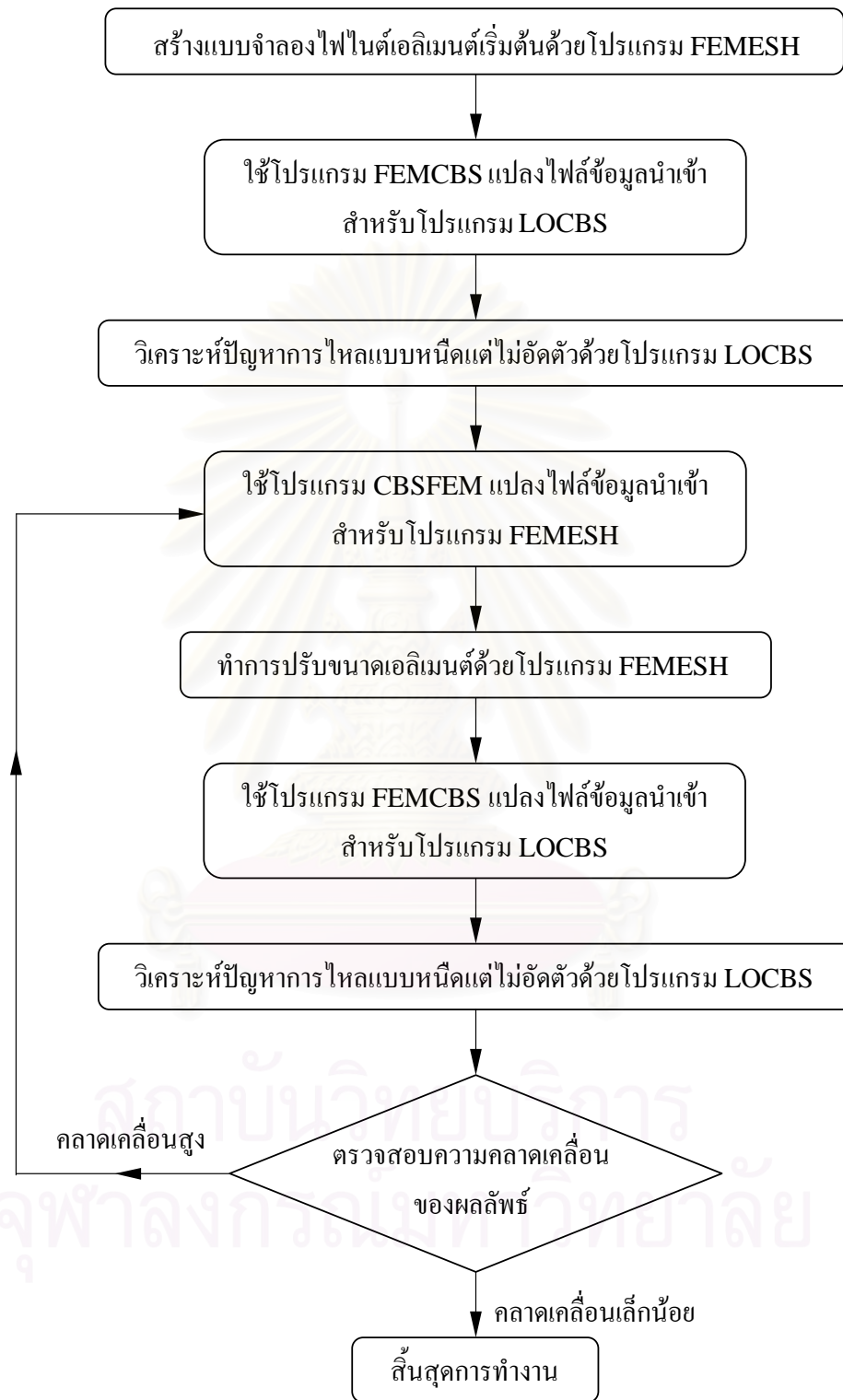
ขั้นตอนที่ 4 ใช้โปรแกรม CBSFEM นำผลลัพธ์ที่ได้ในรูปของความเร็วและความดันจากขั้นตอนที่ 3 แปลงเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม FEMESH

ขั้นตอนที่ 5 ใช้โปรแกรม FEMESH เพื่อแสดงผลลัพธ์ในรูปของกราฟิกและทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ในขั้นตอนนี้ผู้ใช้โปรแกรมจะต้องกำหนดค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่มากที่สุด h_{\max} ค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุด h_{\min} และกำหนดตัวแปรที่ใช้สำหรับปรับขนาดเอลิเมนต์ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะเลือกใช้ค่าความเร็วของการไหลเป็นตัวแปรสำหรับกำหนดการปรับขนาดเอลิเมนต์ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 7.1 หลังจากที่ได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่แล้วจึงจะทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาบนแบบจำลองที่ได้

ขั้นตอนที่ 6 ใช้โปรแกรม FEMCBS อ่านข้อมูลเบื้องต้นของปัญหาที่ได้จากโปรแกรม FEMESH มาทำการแปลงให้อยู่ในรูปของไฟล์นำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม LOCBS

ขั้นตอนที่ 7 ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลอีกครั้งด้วยโปรแกรม LOCBS จากรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้

ขั้นตอนที่ 8 นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 7 มาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ในครั้งก่อนจากขั้นตอนที่ 3 หากผลต่างที่ได้มีค่าสูงแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ที่ทำการปรับในขั้นตอนที่ 5 ยังมีขนาดไม่เหมาะสมจะต้องนำผลลัพธ์ในครั้งหลังนี้กลับไปทำซ้ำใหม่ในขั้นตอนที่ 4 กระบวนการทำซ้ำเช่นนี้จะทำเรื่อยไปจนกว่าผลต่างนั้นจะมีค่าน้อยมากหรือมีค่าเป็นศูนย์



รูปที่ 7.4 ขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

7.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม FEMESH

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม FEMESH เพื่อปรับขนาด
เอลิเมนต์ประกอบด้วยไฟล์ 2 ไฟล์ ได้แก่

ส่วนที่ 1. ส่วนคำสั่ง (command section) ประกอบด้วยข้อมูลต่าง ๆ ที่จำเป็นในการตรวจสอบ
ความสอดคล้องกันระหว่างไฟล์ข้อมูลนำเข้ากับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น ดังตัวอย่างส่วน
คำสั่งของไฟล์ 'cylinder0.out' ในรูปที่ 7.5

```
OUT_FILE_VERSION=1.0
TITLE=FINITE ELEMENT MODEL FOR ANALYSIS FLOW PAST CYLINDER
SUBTITLE=MODEL WITH 1998 TRIANGULAR ELEMENTS AND 1045 NODES
DATE=14-JAN-2548 11:48:13
SOL=17
PROBLEMID=33042807
SOLVERSTART=14-JAN-05 11:48:14
SOLVEREND=14-JAN-05 11:48:14
REMESH_HMIN=0.155435
REMESH_HMAX=0.572233
END=CMD
```

รูปที่ 7.5 ส่วนคำสั่งของไฟล์ 'cylinder0.out'

ส่วนที่ 2. ส่วนผลลัพธ์ (solution section) ประกอบด้วยค่าระบุนความหมายของผลลัพธ์ที่จุดต่อและ
จำนวนจุดต่อซึ่งอยู่ภายในวงเล็บ [] บรรทัดต่อ ๆ ไปประกอบด้วยค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในแต่ละ
จุดต่อได้แก่ หมายเลขจุดต่อ ค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสอง ค่าความดัน และขนาดเอลิเมนต์ ดัง
ตัวอย่างส่วนผลลัพธ์ของไฟล์ 'cylinder0.out' ในรูปที่ 7.6

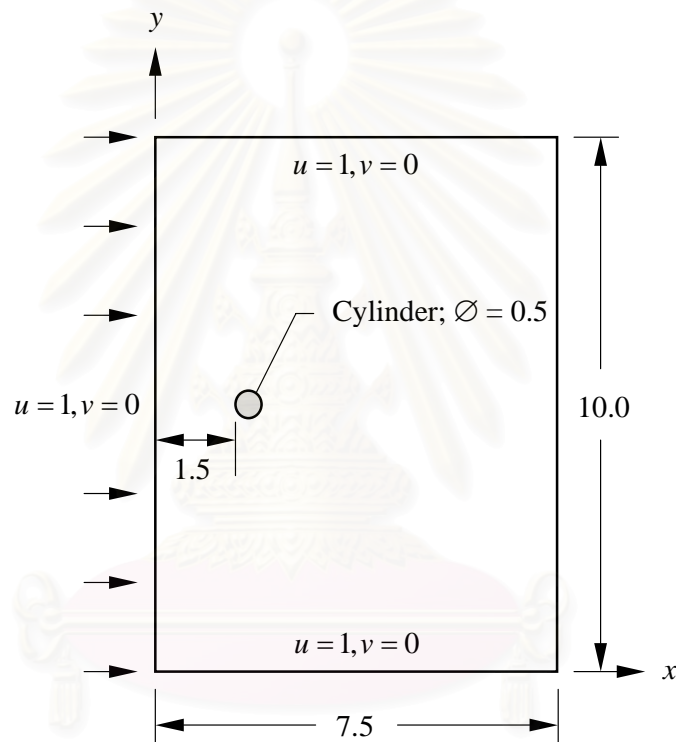
```
NODAL VALUES SOLUTIONS [ 1045]:
```

NODE	U	V	P	H
1	0.100000E+01	0.000000E+00	-0.162034E-02	0.000000E+00
2	0.100000E+01	0.000000E+00	-0.253106E-02	0.000000E+00
3	0.100000E+01	0.000000E+00	-0.354827E-02	0.000000E+00
4	0.100000E+01	0.000000E+00	-0.414964E-02	0.000000E+00
.
.
1042	0.109515E+01	-0.138712E+00	0.610360E-01	0.000000E+00
1043	0.106158E+01	0.257394E-02	-0.623561E-02	0.000000E+00
1044	0.124535E+01	-0.253903E+00	-0.651132E-01	0.000000E+00
1045	0.104906E+01	-0.144534E+00	0.134406E+00	0.000000E+00

รูปที่ 7.6 ส่วนผลลัพธ์ของไฟล์ 'cylinder0.out'

7.5 ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ

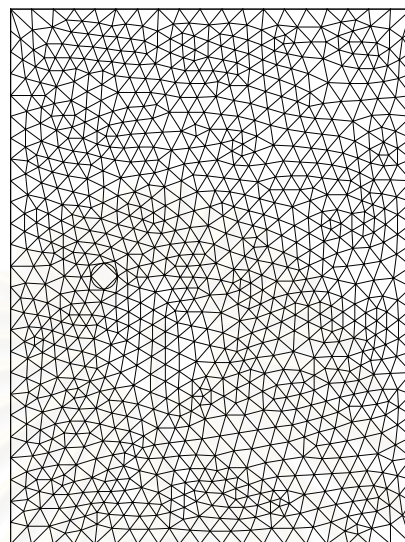
ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก โดยลักษณะของปัญหามีการไหลแบบสม่ำเสมอเข้ามาทางด้านซ้ายมือ ด้านบนและด้านล่างของโดเมน วัตถุรูปทรงกระบอกยาวขวางการไหลไว้ก่อให้เกิดการไหลหมุนวนบริเวณด้านหลังทรงกระบอกนั้น ดังแสดงในรูปที่ 7.7



รูปที่ 7.7 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก

การวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม LOCBS ร่วมกับโปรแกรม FEMESH มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างแบบจำลองเริ่มต้นสำหรับปัญหาตัวอย่างด้วยโปรแกรม FEMESH โดยรูปแบบจำลองประกอบด้วยเอลิเมนต์ดังรูปที่ 7.8 สำหรับขั้นตอนนี้จะได้ไฟล์แสดงกราฟิกของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์มีชื่อว่า 'cylinder0.cuf' และไฟล์ข้อมูลที่บอกข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ได้แก่ไฟล์ชื่อ 'cylinder0.dat' และไฟล์ 'cylinder0.out'



1,045 จุดต่อ
1,998 เอลิเมนต์

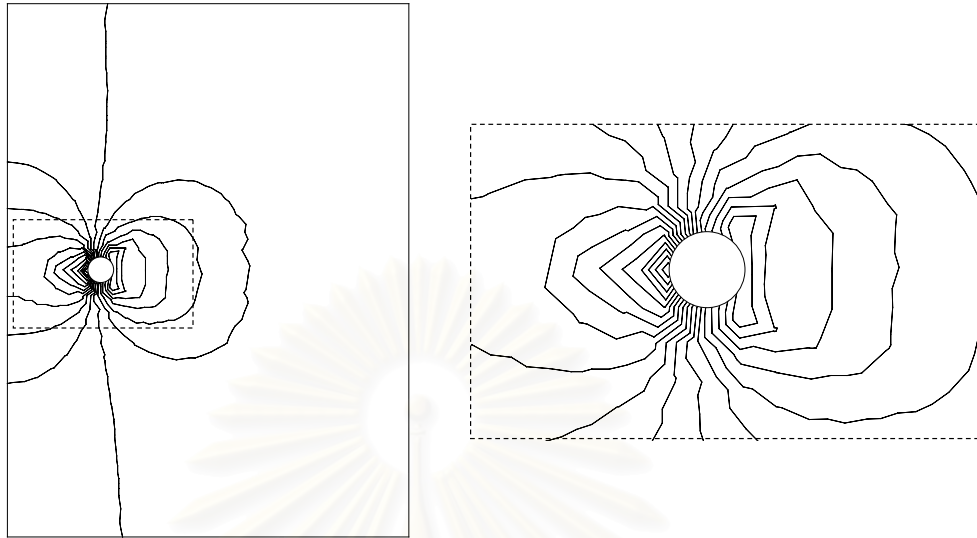
รูปที่ 7.8 รูปแบบจำลองเริ่มต้นของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก

ขั้นตอนที่ 2 ใช้โปรแกรม FEMCBS อ่านข้อมูลเบื้องต้นจากไฟล์ชื่อ ‘cylinder0.dat’ ที่ได้จากโปรแกรม FEMESH แล้วแปลงให้อยู่ในรูปแบบไฟล์ข้อมูลนำเข้าชื่อ ‘cylinder0.in’ สำหรับใช้ในโปรแกรม LOCBS โดยมีรายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้าดังแสดงในบทที่ 5

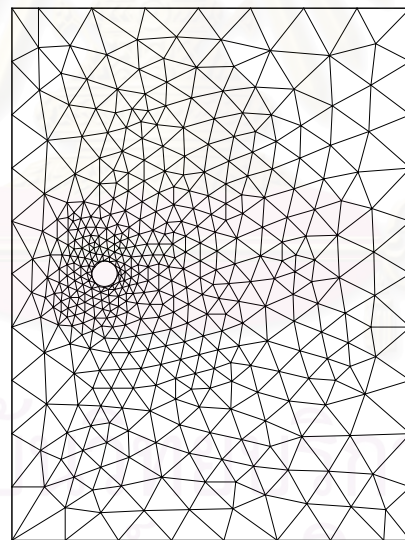
ขั้นตอนที่ 3 ใช้โปรแกรม LOCBS วิเคราะห์ปัญหาการไหลดังที่ได้อธิบายมาแล้วในบทที่ 5 หลังจากทำการวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้เสร็จสิ้นแล้วจะได้ไฟล์ส่งออกที่จะต้องนำมาใช้เป็นข้อมูลในการปรับขนาดเอลิเมนต์ชื่อ ‘cylinder0.op’

ขั้นตอนที่ 4 ใช้โปรแกรม CBSFEM นำผลลัพธ์ที่ได้ในรูปแบบของความเร็และความดันจากไฟล์ ‘cylinder0.op’ แปลงเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม FEMESH

ขั้นตอนที่ 5 ใช้โปรแกรม FEMESH เพื่อแสดงผลลัพธ์และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 หลังจากทำการปรับขนาดแล้วจะได้ไฟล์ในลักษณะเดียวกับขั้นตอนที่ 1 ประกอบด้วยไฟล์ ‘cylinder1.cuf’ ไฟล์ข้อมูล ‘cylinder1.dat’ และไฟล์ ‘cylinder1.out’ ผลการกระจายตัวของความดันสำหรับแบบจำลองเริ่มต้นของปัญหาและรูปแบบจำลองหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 แสดงในรูปที่ 7.9 และรูปที่ 7.10 ตามลำดับ



รูปที่ 7.9 การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบประ
สำหรับแบบจำลองเริ่มต้นของปัญหาการไหลภายในท่อ



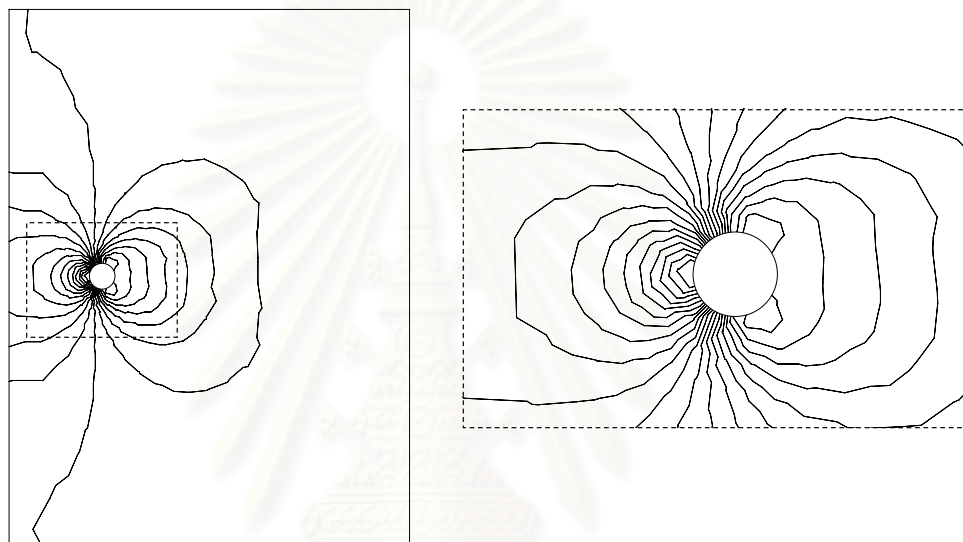
443 จุดต่อ
838 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.10 รูปแบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก
หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

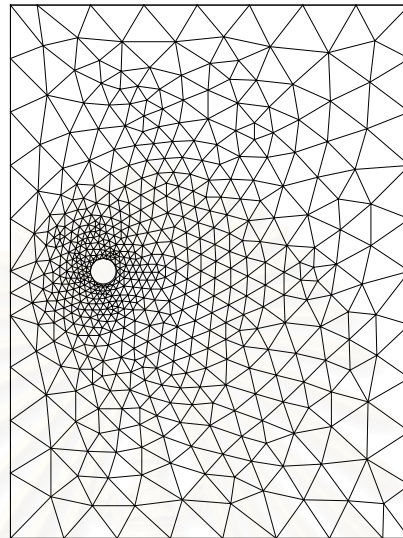
ขั้นตอนที่ 6 ใช้โปรแกรม FEMCBS ทำการแปลงไฟล์ 'cylinder1.dat' ให้อยู่ในรูปของไฟล์นำ
เข้าสำหรับใช้ในโปรแกรม LOCBS

ขั้นตอนที่ 7 ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลอีกครั้งด้วยโปรแกรม LOCBS

ขั้นตอนที่ 8 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลลัพธ์ในครั้งก่อน ผลการกระจายตัวของความดันแสดงในรูปที่ 11 ในตัวอย่างนี้จะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้งหนึ่ง หลังจากทำการปรับขนาดแล้วจะได้ไฟล์ 'cylinder2.cuf' ไฟล์ข้อมูล 'cylinder2.dat' และไฟล์ 'cylinder2.out' รูปแบบจำลองหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปที่ 7.12 และ รูปที่ 7.13 ตามลำดับ

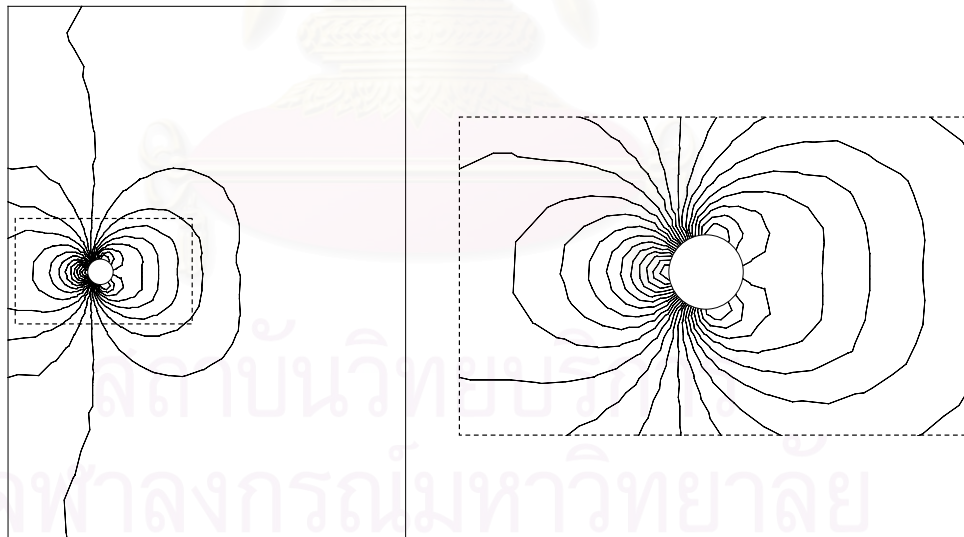


รูปที่ 7.11 การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบประสำหรับแบบจำลองของปัญหาการไหลภายในท่อหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1



588 จุดต่อ
1,121 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.12 รูปแบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก
หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



รูปที่ 7.13 การกระจายตัวของความดันและรายละเอียดภายในกรอบประสำหรับแบบจำลอง
ของปัญหาการไหลภายในท่อหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2

การเปรียบเทียบผลการกระจายตัวของความดันบริเวณด้านหน้าวัตถุทรงกระบอก
ระหว่างแบบจำลองดั้งเดิมกับแบบจำลองหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 พบว่าผลลัพธ์ที่

ได้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น โดยที่ใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลดลงและช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณได้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

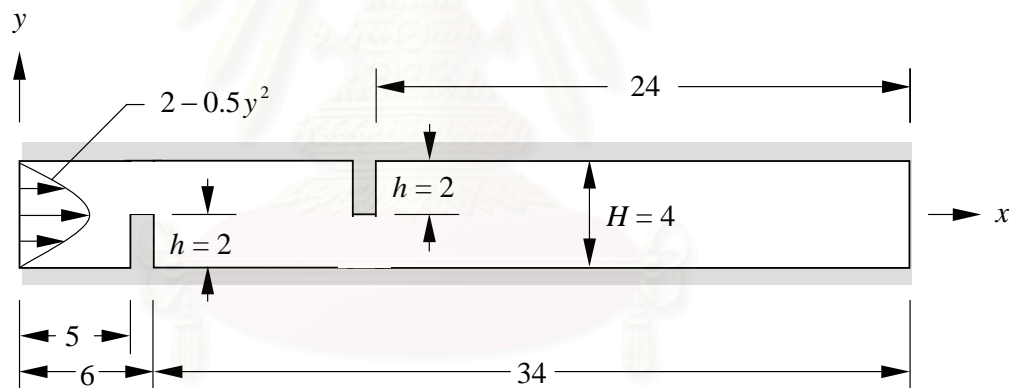
บทที่ 8

การวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในหัวข้อนี้จะแสดงประสิทธิภาพของการประยุกต์ระเบียบวิธีการปรับเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

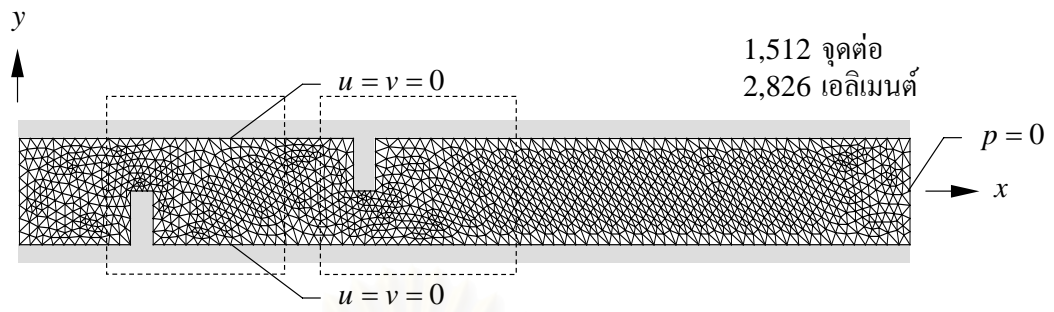
8.1 ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง

ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งเป็นปัญหาการไหลภายในช่องแคบที่พบได้ทั่วไปในทางวิศวกรรม เช่น การไหลในระบบท่อผ่านครีบต่าง ๆ เป็นต้น ลักษณะของปัญหาดังกล่าวจะมีการไหลเข้ามาทางขอบด้านซ้ายของปัญหาด้วยความเร็วแบบเต็มรูปแบบโดยมีความเร็วสูงสุด $u = 2$ และมีรายละเอียดขนาดของปัญหาดังแสดงในรูปที่ 8.1 โดยของไหลจะไหลผ่านสิ่งกีดขวางทางด้านล่างและด้านบนที่มีขนาดกว้าง 1 หน่วยแล้วจึงไหลออกที่ขอบทางด้านขวามือ

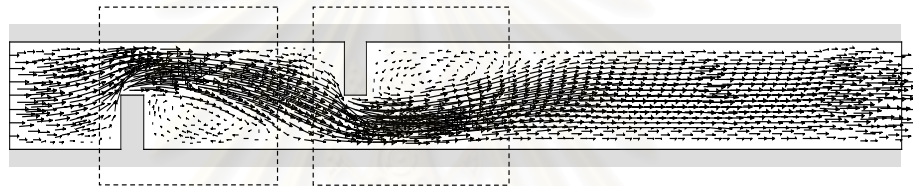


รูปที่ 8.1 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง

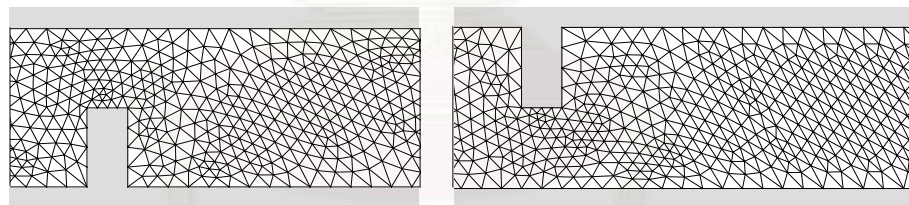
ปัญหาดังกล่าวถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS โดยสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อขนาดสม่ำเสมอจำนวน 2,826 เอลิเมนต์ มีจุดต่อจำนวน 1,512 จุดต่อ และกำหนดขอบเขตของปัญหาดังแสดงในรูปที่ 8.2 การคำนวณภายใต้ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 50 โดยมีค่าความหนาแน่นเท่ากับ 1 และค่าความหนืดเท่ากับ 0.08 ผลลัพธ์แสดงลักษณะการกระจายความเร็วพร้อมทั้งรายละเอียดของเอลิเมนต์และการไหลหมุนวนบริเวณหลังสิ่งกีดขวางทั้งสองได้แสดงในรูปที่ 8.3-8.5 ตามลำดับ



รูปที่ 8.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง

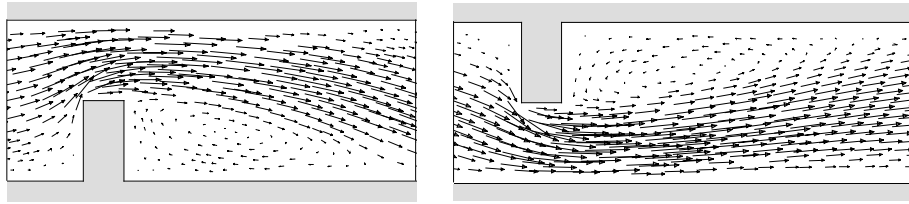


รูปที่ 8.3 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่ง



(ก) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางล่าง (ข) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางบน

รูปที่ 8.4 รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.2

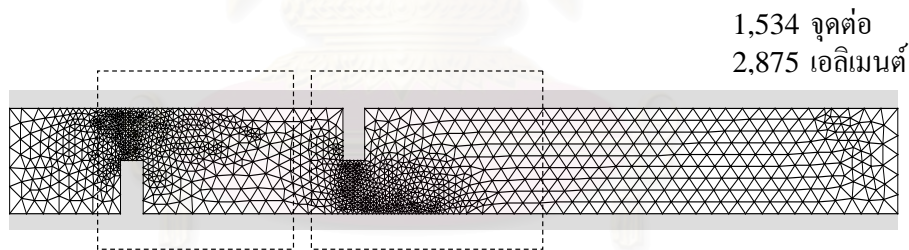


(ก) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางล่าง

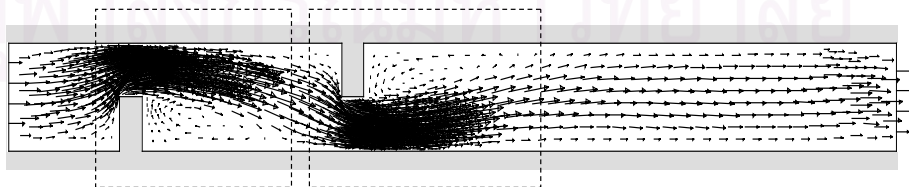
(ข) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางบน

รูปที่ 8.5 รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.3

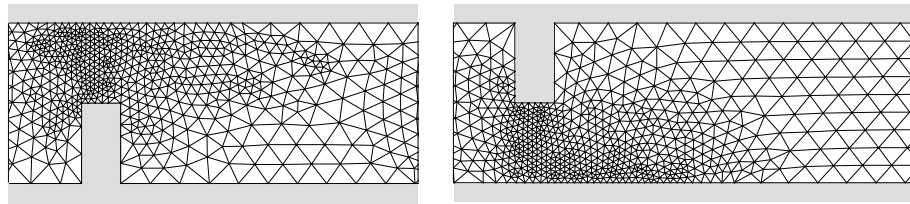
ค่าความเร็วที่คำนวณได้จะถูกนำไปใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ซึ่งได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาด 2,875 เอลิเมนต์ 1,534 จุดต่อ โดยรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปที่ 8.6-8.9 จากนั้นจึงนำผลลัพธ์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้งหนึ่ง ทำให้ได้รูปแบบจำลองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 5,242 เอลิเมนต์และมีจุดต่อจำนวน 2,731 จุดต่อ โดยมีรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปที่ 8.10-8.13 ตามลำดับ



รูปที่ 8.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

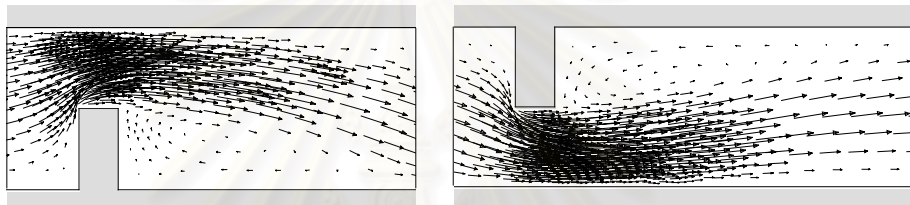


รูปที่ 8.7 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1



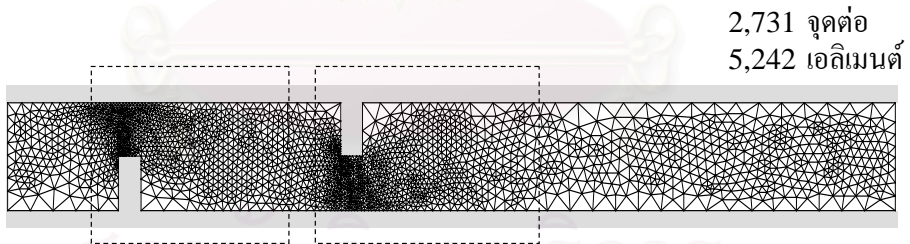
(ก) เอลิเมนต์บริเวณสี่กีดขวางล่าง (ข) เอลิเมนต์บริเวณสี่กีดขวางบน

รูปที่ 8.8 รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสี่กีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่ง ภายในกรอบประของรูปที่ 8.6 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

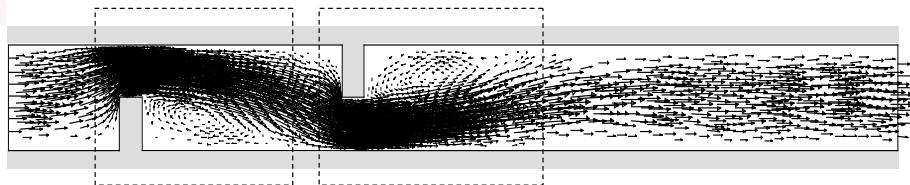


(ก) ความเร็วบริเวณสี่กีดขวางล่าง (ข) ความเร็วบริเวณสี่กีดขวางบน

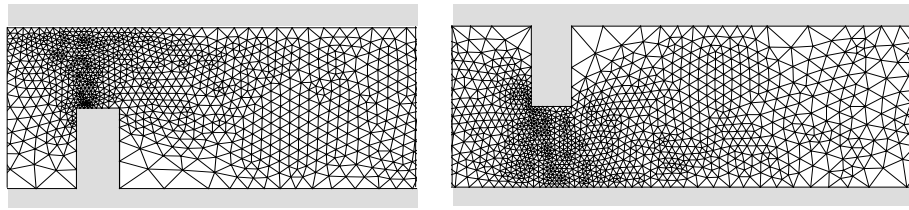
รูปที่ 8.9 รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสี่กีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแท่ง ภายในกรอบประของรูปที่ 8.7 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1



รูปที่ 8.10 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านสี่กีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



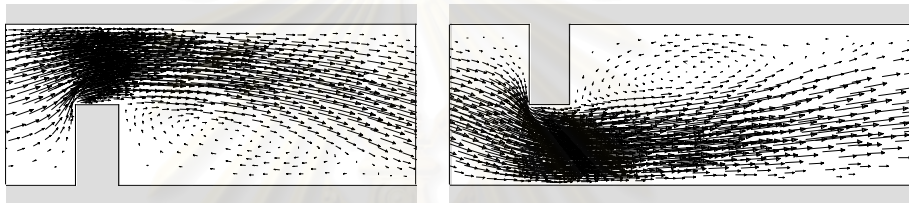
รูปที่ 8.11 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลผ่านสี่กีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมสองแท่งหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



(ก) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางล่าง

(ข) เอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางบน

รูปที่ 8.12 รายละเอียดแสดงเอลิเมนต์บริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสองแห่ง ภายในกรอบประของรูปที่ 8.10 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



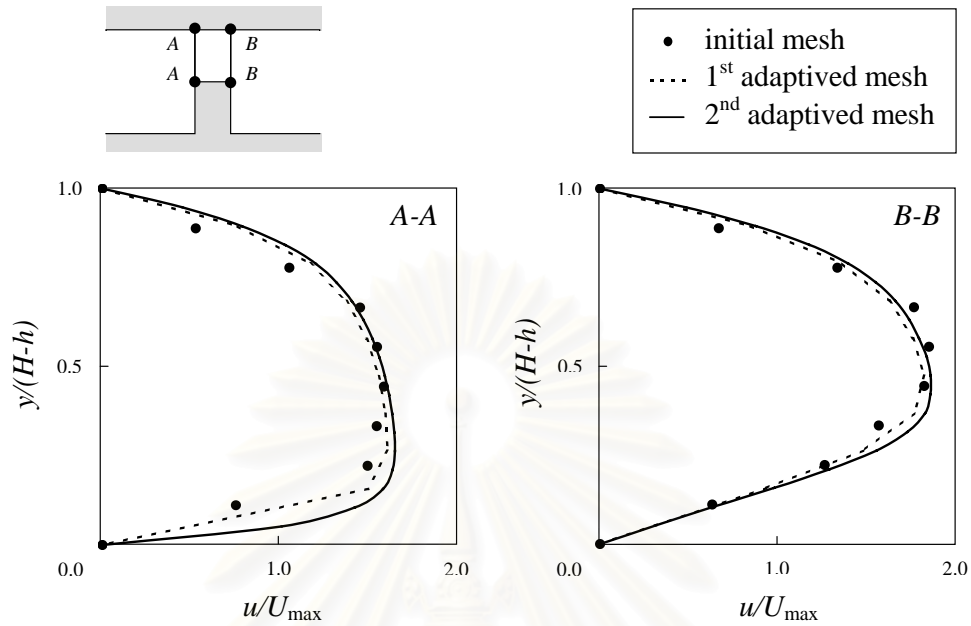
(ก) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางล่าง

(ข) ความเร็วบริเวณสิ่งกีดขวางบน

รูปที่ 8.13 รายละเอียดแสดงลักษณะการไหลหมุนวนบริเวณสิ่งกีดขวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสอง แห่งภายในกรอบประของรูปที่ 8.11 หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2

หากทำการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่งด้านหน้า และหลังของแท่งสี่เหลี่ยมทั้งสอง โดยเปรียบเทียบระหว่างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณี ที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอกับกรณีทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งสองครั้ง จะสามารถแสดง ได้ดังรูปที่ 8.14 และ 8.15 การเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าการกระจายตัวของความเร็วหลังทำการ ปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งสองครั้งได้ค่าที่สอดคล้องกัน และมีความชัดเจนขึ้นเป็นอย่างมากเมื่อเทียบกับกรณีที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ

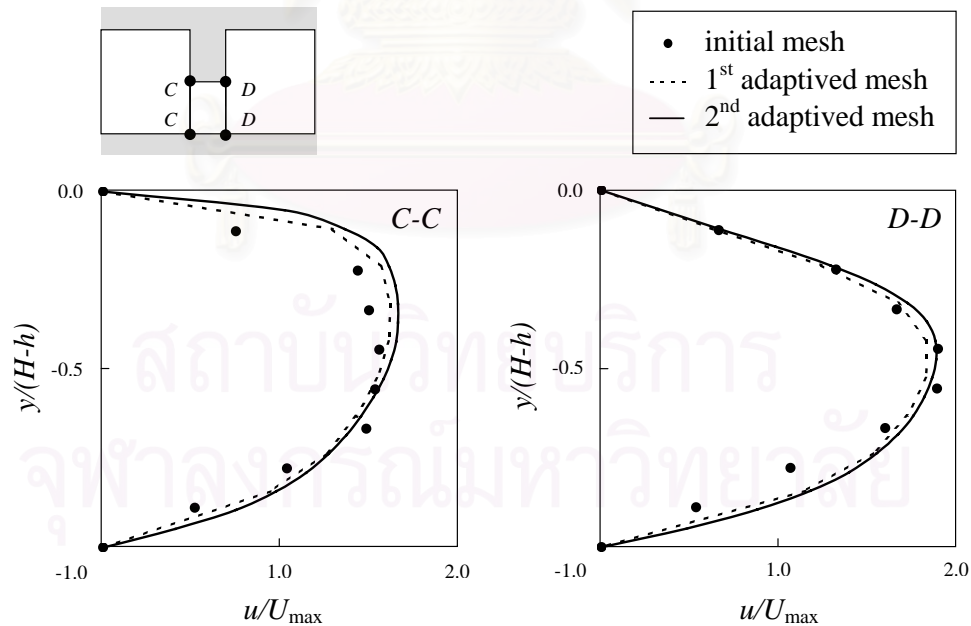
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) ความเร็วด้านหน้าแท่งสี่เหลี่ยมล่าง

(ข) ความเร็วด้านหลังแท่งสี่เหลี่ยมล่าง

รูปที่ 8.14 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วบริเวณด้านหน้าและหลังแท่งสี่เหลี่ยมล่าง



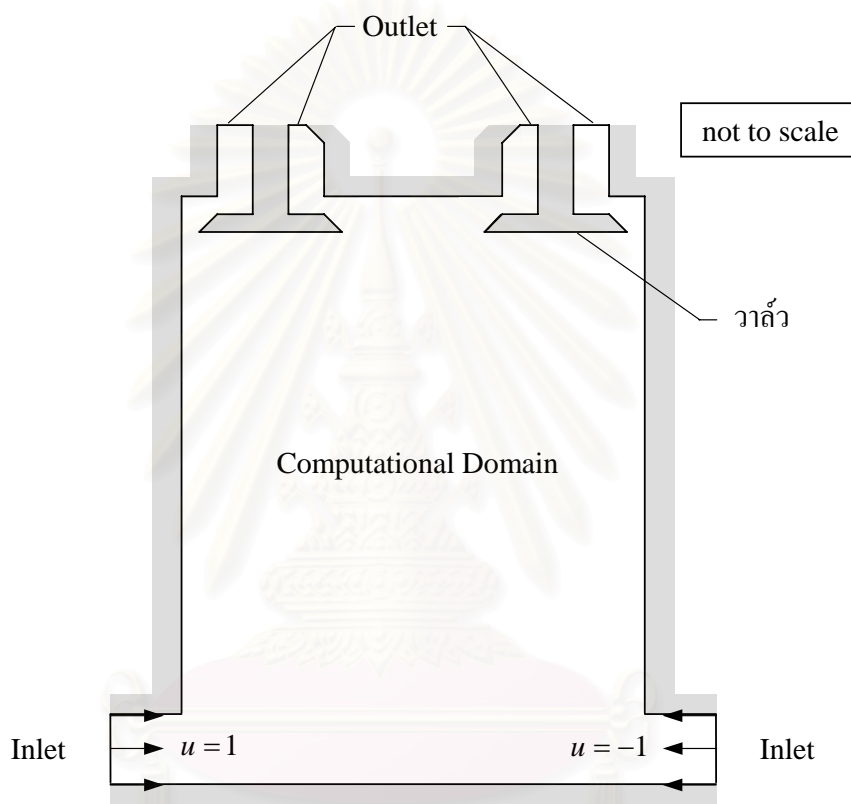
(ก) ความเร็วด้านหน้าแท่งสี่เหลี่ยมบน

(ข) ความเร็วด้านหลังแท่งสี่เหลี่ยมบน

รูปที่ 8.15 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วบริเวณด้านหน้าและหลังแท่งสี่เหลี่ยมบน

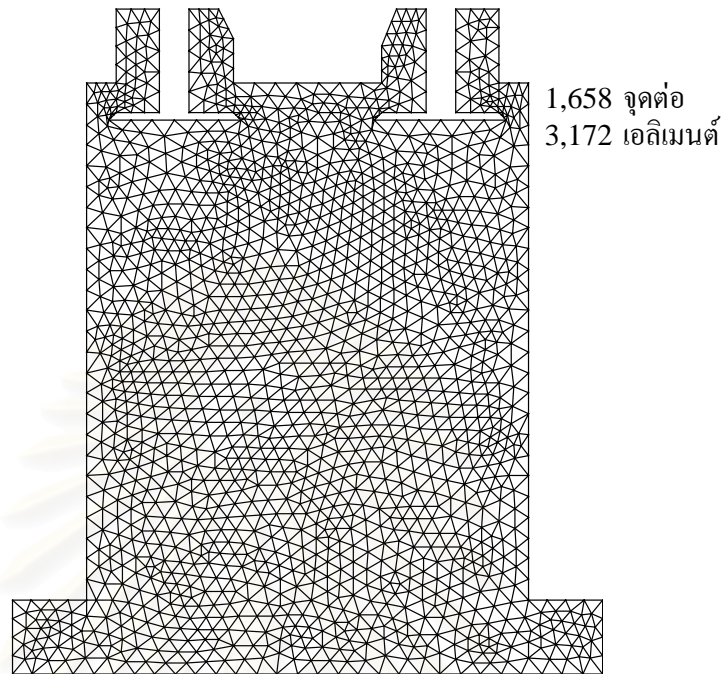
8.2 ปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว

ปัญหาการไหลออกผ่านวาล์วเป็นอีกหนึ่งปัญหาที่มีความซับซ้อน โดยของไหลจะไหลเข้าห้อง (chamber) จากช่องทางขอบซ้ายล่างและขอบขวาล่างด้วยความเร็ว $u = 1$ และ $u = -1$ ตามลำดับ และไหลออกผ่านวาล์วที่อยู่ด้านบนทั้งสองตัว ดังแสดงในรูปที่ 8.16

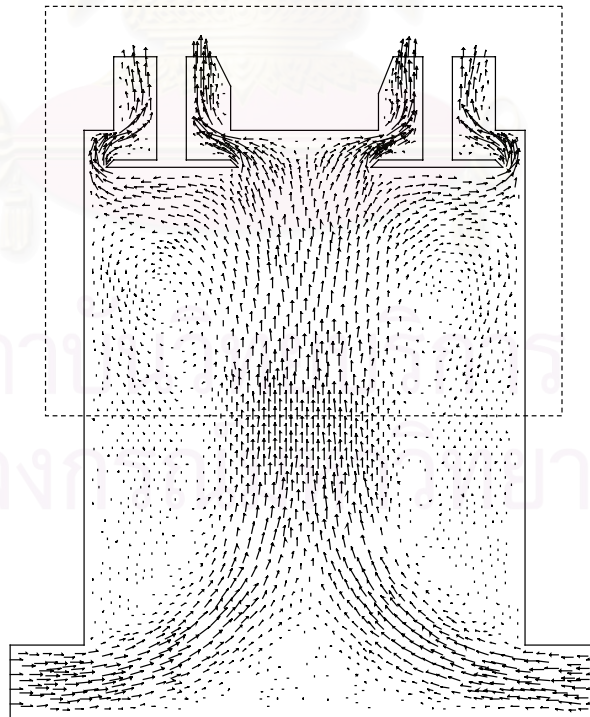


รูปที่ 8.16 ลักษณะของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว

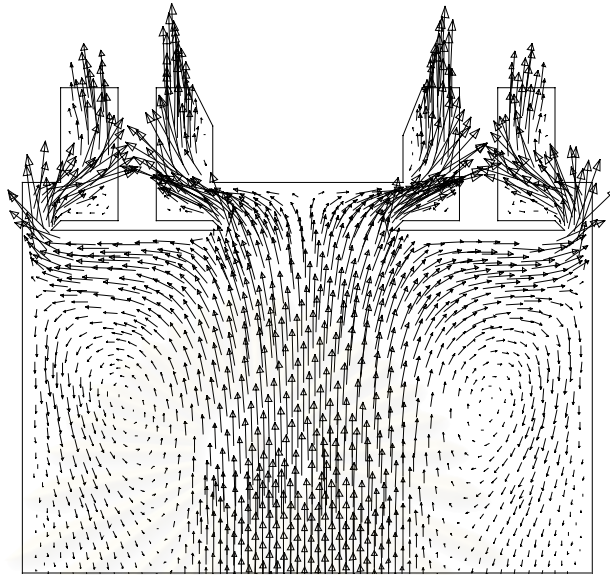
การวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านวาล์วด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS เริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อที่มีขนาดสม่ำเสมอจำนวน 3,172 เอลิเมนต์ และมีจุดต่อ 1,658 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 8.17 ทำการคำนวณที่ค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 100 โดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นเท่ากับ 1 และค่าความหนืดของการไหลเท่ากับ 0.01 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงการกระจายตัวของความเร็วในรูปที่ 8.18 พร้อมทั้งรายละเอียดของการไหลหมุนวนที่เกิดขึ้นบริเวณวาล์วทั้งสองในรูปที่ 8.19 ตามลำดับ



รูปที่ 8.17 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว



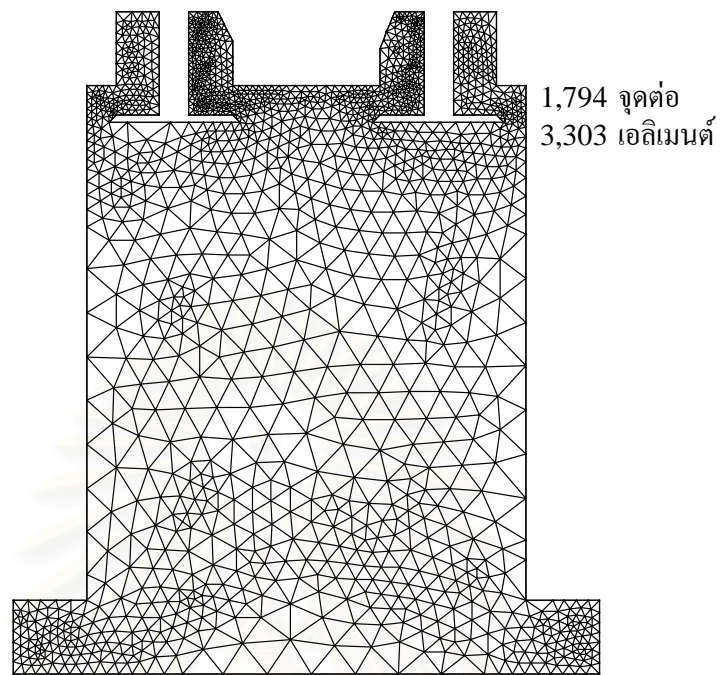
รูปที่ 8.18 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว



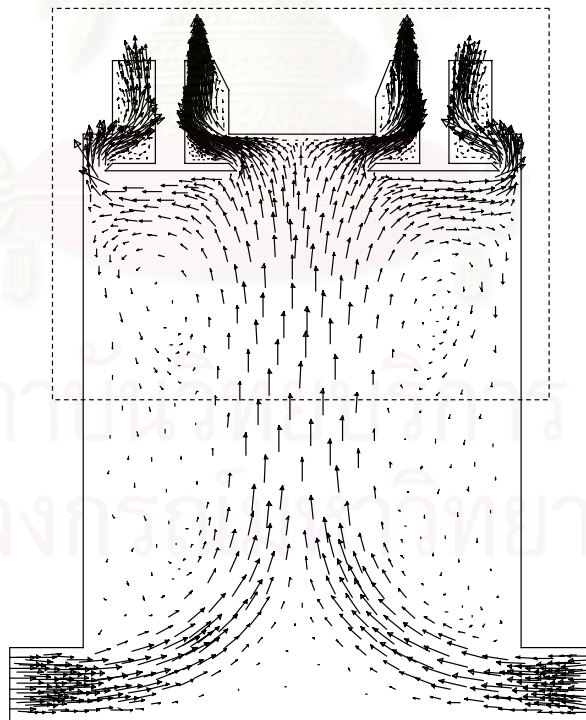
รูปที่ 8.19 รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.18

ค่าความเร็วที่คำนวณได้จะถูกนำไปใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ซึ่งได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาด 3,303 เอลิเมนต์ 1,794 จุดต่อ โดยแสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่ได้ในรูปที่ 8.20-8.22 พบว่าสามารถแสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็วได้ดีขึ้น จากนั้นจึงนำผลลัพธ์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้งหนึ่ง ทำให้ได้รูปแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์จำนวน 8,646 เอลิเมนต์และมีจุดต่อจำนวน 4,561 จุดต่อ โดยแสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่ได้ในรูปที่ 8.23-8.26 ตามลำดับ

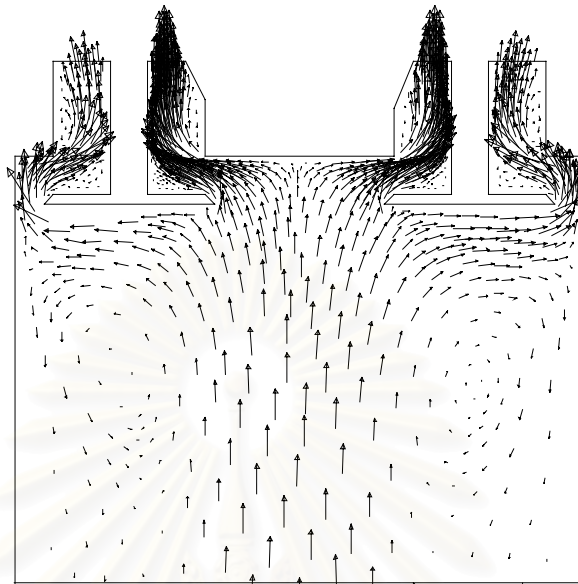
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



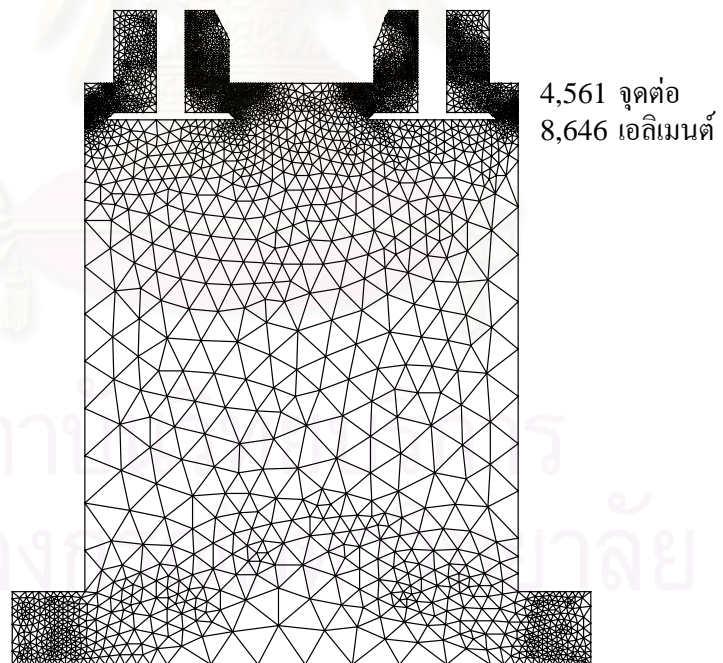
รูปที่ 8.20 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว
หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1



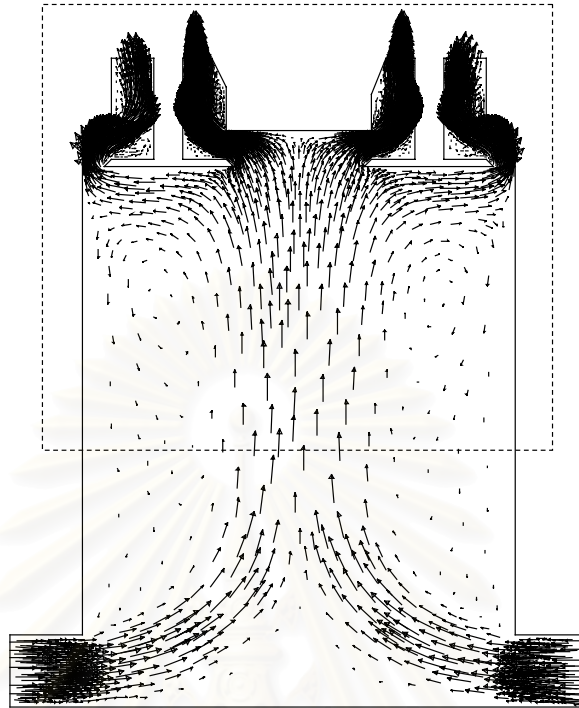
รูปที่ 8.21 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว
หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1



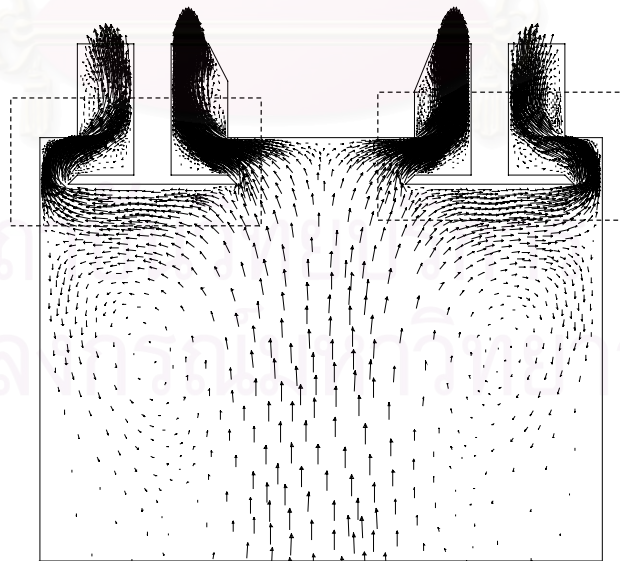
รูปที่ 8.22 รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.21



รูปที่ 8.23 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2

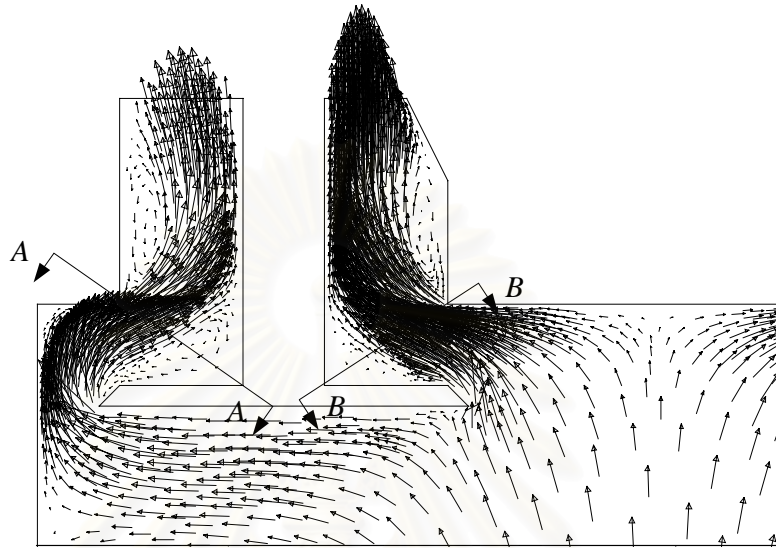


รูปที่ 8.24 ลักษณะการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลออกผ่านวาล์ว
หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2

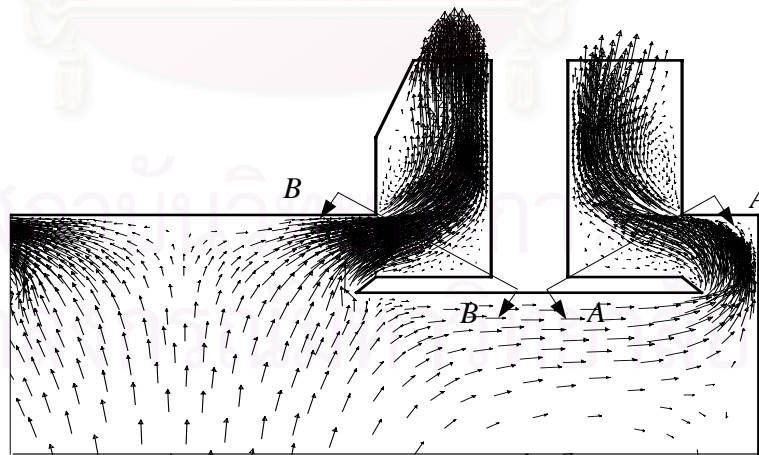


รูปที่ 8.25 รายละเอียดของการไหลหมุนวนภายในกรอบประของรูปที่ 8.24

รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 8.25 บริเวณด้านหลังของบ่าวาล์วทางด้านซ้ายมือและขวามือแสดงได้ดังรูปที่ 8.26 และ 8.27 ตามลำดับ

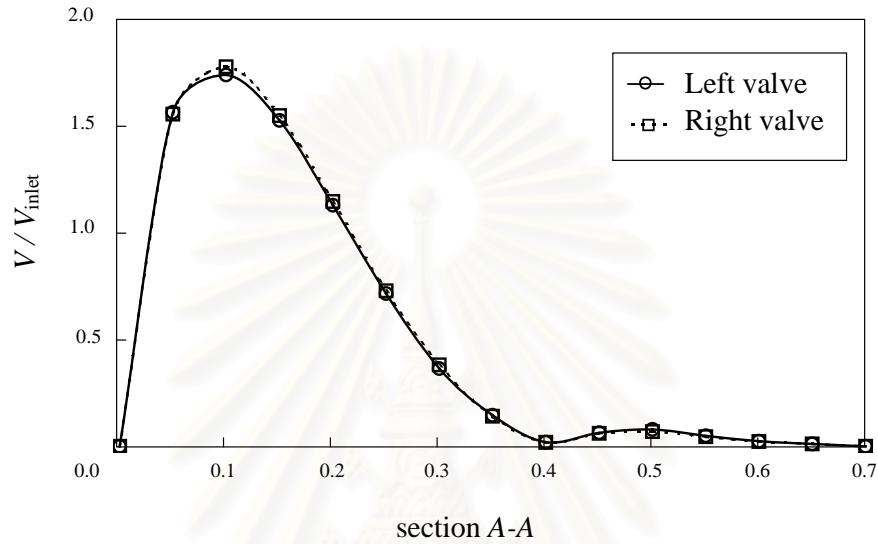


รูปที่ 8.26 รายละเอียดการกระจายความเร็วบริเวณบ่าวาล์วด้านซ้ายมือภายในกรอบประของรูปที่ 8.25

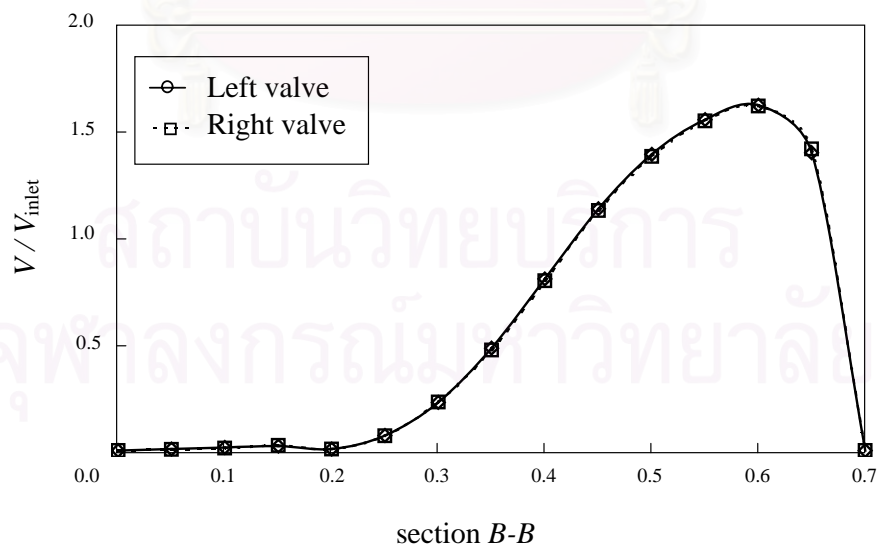


รูปที่ 8.27 รายละเอียดการกระจายความเร็วบริเวณบ่าวาล์วด้านขวามือภายในกรอบประของรูปที่ 8.25

หากทำการเปรียบเทียบลักษณะของการกระจายตัวระหว่างหน้าตัดทั้งสองข้าง บริเวณบ่าวาล์วด้านซ้ายมือในรูปที่ 8.26 กับหน้าตัดทั้งสองข้างบริเวณบ่าวาล์วด้านขวามือในรูปที่ 8.27 เพื่อทดสอบความสมมาตรของผลลัพธ์โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากทำการปรับขนาดครั้งที่ 2 พบว่าได้ค่าที่ใกล้เคียงกันมากดังแสดงในรูปที่ 8.28 และรูปที่ 8.29 ตามลำดับ

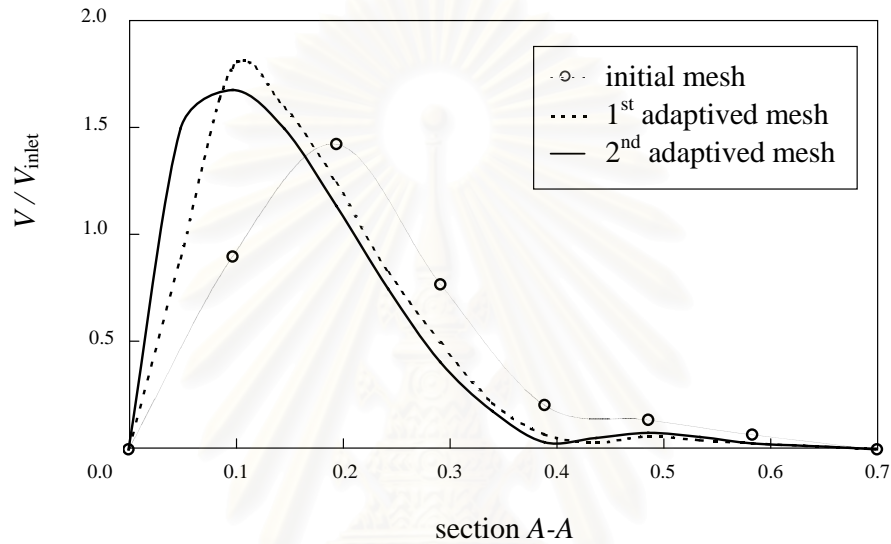


รูปที่ 8.28 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วด้านซ้ายและขวามือ ในแนว A-A สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากทำการปรับขนาดครั้งที่ 2

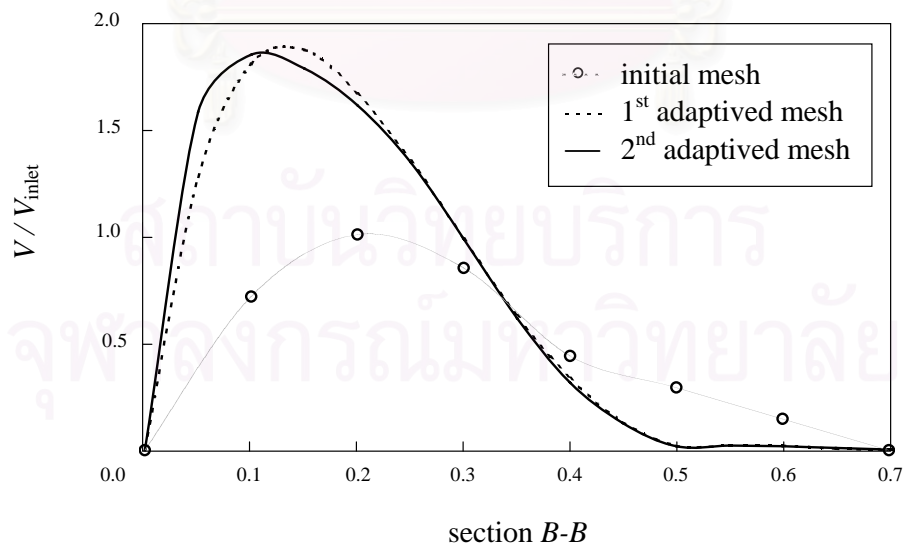


รูปที่ 8.29 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วขณะไหลผ่านวาล์วด้านซ้ายและขวามือ ในแนว B-B สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากทำการปรับขนาดครั้งที่ 2

เมื่อเปรียบเทียบลักษณะของการกระจายตัวที่หน้าตัดทั้งสองข้างบริเวณบ่าวาล์วด้านซ้ายมือในรูปที่ 8.26 โดยเปรียบเทียบระหว่างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณีที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอกับกรณีที่ทำกรปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งสองครั้ง ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 8.30 และ 8.31 จากการเปรียบเทียบพบว่าการกระจายตัวของความเร็วหลังทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งสองครั้งได้ค่าที่สอดคล้องกันและมีความชัดเจนขึ้นเป็นอย่างมาก



รูปที่ 8.30 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วไหลผ่านวาล์วซ้ายมือในแนว A-A



รูปที่ 8.31 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วไหลผ่านวาล์วซ้ายมือในแนว B-B

บทที่ 9

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

9.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติภายใต้สถานะอยู่ตัวด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่เรียกว่าระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-Based Split algorithm; CBS) หรือวิธีซีบีเอส วิธีการดังกล่าวสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ระยะเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ลงได้มาก และมีความสะดวกต่อการประยุกต์ใช้กับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยการหาผลลัพท์โดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องมีความรู้ในเรื่องของสมการอนุพันธ์ที่อธิบายถึงการไหลนั้น ซึ่งในบทที่ 2 ได้แสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหลในสองมิติ สมการดังกล่าวเรียกว่าระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ซึ่งประกอบด้วยสมการอนุพันธ์มวล 1 สมการ และสมการอนุพันธ์โมเมนตัมในแนวแกนทั้งสองอีก 2 สมการ ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่ได้มีความซับซ้อนก่อให้เกิดความยากลำบากหากนำไปวิเคราะห์ด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์โดยตรง ดังนั้นในบทที่ 3 จึงนำเสนอระเบียบวิธีซีบีเอสเพื่อช่วยจัดการกับพจน์เนื่องจากการพาในสมการอนุพันธ์โมเมนตัม และใช้ความอัดตัวได้เทียม (artificial compressibility) เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความหนาแน่นในสมการอนุพันธ์มวล นอกจากนี้ยังใช้การคำนวณแบบแยกกัน (segregated method) เพื่อแบ่งการคำนวณออกเป็น 3 ขั้นตอน เป็นผลให้สามารถเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากันได้ และไม่ต้องแก้ระบบสมการใหญ่พร้อม ๆ กัน

ขั้นตอนทั้งหมดที่ต้องใช้ในการคำนวณที่ได้จากวิธีซีบีเอสในบทที่ 3 จะถูกนำมาใช้เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตลอดจนถึงเอลิเมนต์เมตริกซ์ในบทที่ 4 และในบทที่ 5 ได้แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับเอลิเมนต์เมตริกซ์นั้น ขั้นตอนการทำงานรวมทั้งตัวอย่างไฟล์ข้อมูลที่ต้องใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ถูกเขียนขึ้นเป็นภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โปรแกรมดังกล่าวมีชื่อว่า (Low-speed flow Characteristic-Based Split program; LOCBS)

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องในบทที่ 6 โดยนำเสนอตัวอย่างการนำโปรแกรม LOCBS ไปใช้ทดสอบกับปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ซึ่งเป็น

ปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นยำหรือปัญหาที่มีผู้ทำการวิเคราะห์หาคำตอบไว้แล้วจำนวน 5 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยม ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด และปัญหาการไหลภายในช่องแคบผ่านสิ่งกีดขวางสองมิติ จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของปัญหาที่ได้กล่าวมาแล้วกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีซีบีเอส พบว่ามีความสอดคล้องกัน

เนื่องจากปัญหาการไหลโดยทั่วไปมีความซับซ้อน หากต้องการผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมากในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์บริเวณนั้นสูง แต่หากทำการคำนวณปัญหานั้น ๆ ด้วยการใช้อิเล็กเมนต์ขนาดเล็กทั่วทั้งขอบเขตของปัญหาจะทำให้สิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณและใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์มากเกินไปจนเกินความจำเป็น จึงนำเสนอเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีซีบีเอสในบทที่ 7 โดยอธิบายถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติและรายละเอียดขั้นตอนการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เกี่ยวข้อง พร้อมทั้งแสดงการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในบทที่ 8 พบว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องโดยไม่ต้องใช้อิเล็กเมนต์จำนวนมากเกินไปซึ่งแสดงถึงประสิทธิภาพในการนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อน

9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์นี้คือการศึกษาคำความเข้าใจทฤษฎีของระเบียบวิธีซีบีเอส ขั้นตอนการประมาณค่าพจน์ต่างในสมการอนุกรมโมเมนต์ ตลอดจนการประยุกต์ใช้ความอัตโนมัติได้เทียบและวิธีการคำนวณแบบแยกกันกับสมการดังกล่าวเนื่องจากขั้นตอนเหล่านี้มีความซับซ้อนและเป็นส่วนสำคัญหลักในการนำไปประยุกต์เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันต่อไป

ปัญหาอีกประการหนึ่งที่พบคือการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประยุกต์ขึ้นไปใช้วิเคราะห์ปัญหาขนาดใหญ่หรือปัญหาที่มีค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์สูง ปัญหาเหล่านี้จำเป็นต้องใช้อิเล็กเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากหากต้องการผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องสูง และเนื่องจากข้อจำกัดของการใช้ช่วงเวลาของวิธีซีบีเอสซึ่งเป็นระเบียบวิธีแบบชัดเจน ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากและใช้หน่วยความจำในการเก็บข้อมูลบนเครื่องคอมพิวเตอร์สูง จึงต้องประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับวิธีซีบีเอสเพื่อให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

9.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

สำหรับงานวิจัยในอนาคตนั้นสามารถนำพื้นฐานความรู้ที่ได้จากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไปประยุกต์กับงานวิจัยอื่น ๆ เช่น การใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลชนิดแต่ไม่อัดตัวในสามมิติ ปัญหาการไหลภายใต้สภาวะชั่วขณะได้ (transient problem) รวมถึงการเพิ่มเติมสมการอนุพันธ์พลังงานเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมอได้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

1. Ikegawa, M. A new finite element technique for the analysis of steady viscous flow problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 14 (1979): 103-113.
2. Chorin, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. Journal of Computational Physics. 2 (1967): 12-26. Cited in Malan, A. G., Lewis, R. L. and Nithiarasu, P. An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and implementation. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 54 (2002): 695-714.
3. Chorin, A. J. Numerical solution of Navier-Stokes equations. Mathematics of Computation. 23 (1968): 341-354. Cited in Hirsch, C. Numerical computational of internal and external flows: Computational methods for inviscid and viscous flows (vol.2). New York: John Wiley & Sons, 1988.
4. Yamada, Y., Ito, K., Yokouchi, Y., Tamano, T., and Ohtsubo, T. Finite element analysis of steady fluid and metal flow. In R. H. Gallagher; J. T. Oden; C. Taylor; and O. C. Zienkiewicz (eds.), Finite elements in fluids: Viscous flow and hydrodynamics (vol.1), pp. 73-94. New York: John Wiley & Sons, 1974.
5. Kawahara, M. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid. In R. H. Gallagher; O. C. Zienkiewicz; J. T. Oden; M. M. Cecchi; and C. Taylor (eds.), Finite elements in fluids (vol.3), pp. 23-54. New York: John Wiley & Sons, 1974.
6. Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K., and Ohsaka, H. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 10 (1976): 437-456.
7. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
8. Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R., and Zienkiewicz, O. C. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 10 (1976): 1389-1396.
9. Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Zienkiewicz, O. C., and Mitchell, A.R. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 11 (1977): 131-143.

10. Brooks, A. N., and Hughes, T. J. R. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 32 (1982): 199-259.
11. นิพนธ์ วรรณโสภากย์. เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่งโดยใช้อิเลเมนต์สามเหลี่ยมอันดับเท่ากัน. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.
12. Donea, J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 20 (1984): 101-119.
13. Lohner, R., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 4 (1984): 1043-1063.
14. ปราโมทย์ เคะอะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
15. Zienkiewicz, O. C., and Codina, R. A General algorithm for compressible and incompressible flow-part I: The split, characteristic-based scheme. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 20 (1995): 869-885.
16. Zienkiewicz, O. C., Morgan, K., Satya Sai, B. V. K., Codina, R., and Vasquez, M. A General algorithm for compressible and incompressible flow-part II: Tests on the explicit form. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 20 (1995): 887-913.
17. Zienkiewicz, O. C., Nithiarasu, P., Codina, R., Vazquez, M., and Ortiz, P. The characteristic-based-split procedure: An efficient and accurate algorithm for fluid problems. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 31 (1999): 359-392.
18. Codina, R., Vazquez, M., and Zienkiewicz, O. C. A General algorithm for compressible and incompressible flows-part III: The semi-implicit form. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 27 (1998): 13-32.
19. Nithiarasu, P., and Zienkiewicz, O. C. On stabilization of the CBS algorithm: Internal and external time steps. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 48 (2000): 875-880.
20. Nithiarasu, P. On boundary of the characteristic based split (CBS) algorithm for fluid dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 54 (2002): 523-536.

21. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.
22. Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R. L. The finite element method: Fluid dynamics. (vol.3). 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.
23. Hildebrand, F. B. Advanced calculus for applications. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
24. Davies, A. J. The finite element method: A first approach. oxford applied mathematics and computing series. Clarendon Press: Oxford, 1980. อ้างถึงใน ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
25. Fox, R. W., McDonald A. T. Introduction to fluid mechanics. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.,1998.
26. Munson, B. R., Young, D. F., and Okiishi, T. H. Fundamentals of fluid mechanics. 3rd ed. Toronto: John Wiley & Sons,1998.
27. Ramaswamy, B., and Jue, T. C. A segregated finite element formulation of Navier- Stokes equations under laminar conditions. Finite Element in Analysis and Design. 9 (1991): 257-270.
28. Melaaen, M. C. Analysis of curvilinear non-orthogonal coordinates for numerical calculation of fluid flow in complex geometries. Doctoral dissertation, Division of Thermodynamics, University of Trondheim, Norway, 1990.
29. Morgan, K., Periaux, J., and Thomasset, F. Analysis of laminar flow over a backward facing step. A GAMM-Workshop, Friedr. Vieweg&Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1984. Cited on Melaaen, M. C. Analysis of curvilinear non-orthogonal coordinates for numerical calculation of fluid flow in complex geometries. Doctoral dissertation, Division of Thermodynamics, University of Trondheim, Norway, 1990.
30. Tropea, C. D., and Gackstatter, R. The flow over two-dimensional surfacemounted obstacles at low Reynolds Numbers. Journal of Fluids Engineering. 107 (1985). Cited on Melaaen, M. C. Analysis of curvilinear non-orthogonal coordinates for numerical calculation of fluid flow in complex geometries. Doctoral dissertation, Division of Thermodynamics, University of Trondheim, Norway, 1990.

31. Carvalho, J. L. C., Durst, F., and Peretra, J. C. F. Predictions and measurements of laminar flow over two-dimensional obstacles. Applied Mathematical Modelling. 11 (1987). Cited on Melaen, M. C. Analysis of curvilinear non-orthogonal coordinates for numerical calculation of fluid flow in complex geometries. Doctoral dissertation, Division of Thermodynamics, University of Trondheim, Norway, 1990.
32. Phongthanapanich, S., and Dechaumphai, P. Mixed entropy flux method for Roe's flux-difference splitting scheme with automatic mesh adaptation. Transactions of The CSME. 28, 3-4 (2004): 531-550.
33. Beer, F. P., and Johnston, E. R. Jr., Mechanics of materials. 2nd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1992.



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรม LOCBS

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LOCBS ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 5 ประกอบด้วย
โปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) อีก 25 โปรแกรมย่อย ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

```

PROGRAM LOCBS
C =====
C ==PURPOSE : To solve laminar, 2D incompressible Navier-Stokes==
C ==          equations based on the Characteristic-Based-Split==
C ==          (CBS) algorithm use linear triangular finite ==
C ==          elements ==
C =====

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxele ,mxbou
PARAMETER (mxpoi=5000 ,mxele=5000 ,mxbou=1000)

INTEGER nboun ,nelem ,npoin ,ntime ,nwall ,nstep
INTEGER nbcp ,ib ,ibb ,iopt ,inpt ,istep
INTEGER ip ,iwrite ,i ,ie ,itime ,intime
INTEGER ia ,l ,namlen

INTEGER(2) sthour ,stminute ,stsecond ,sthund
INTEGER(2) enhour ,enminute ,ensecond ,enhund

INTEGER intma(3,mxele) ,isido(4,mxbou) ,ielsi(2,mxele)
INTEGER iwpoim(mxbou) , ipfix(mxpoi) ,ipdx(mxpoi)

REAL*8 coord(2,mxpoi) ,geome(7,mxele) ,unkna(2,mxpoi)
REAL*8 unkn0(2,mxpoi) ,unkn1(2,mxpoi) ,rsido(3,mxbou)
REAL*8 rhs2(2,mxpoi) ,gstif(3*mxele) ,dmmat(mxpoi)
REAL*8 pdiag(mxpoi) ,pres(mxpoi) ,pres1(mxpoi)
REAL*8 ha(3)

REAL*8 csafm ,timt ,re ,rho ,mu ,toler
REAL*8 kkk ,delu ,delv ,delp ,cder ,ani
REAL*8 err ,delte ,deltp ,deltc ,roff ,value
REAL*8 zero

DATA zero/0.0/

CHARACTER filnam*12

40 WRITE(*,*) 'please type your input file name : '
READ (*,*) filnam
l = namlen(filnam)
IF (l.EQ.0) GOTO 40

```

```

OPEN (unit=10 ,file = filnam(1:1)//'.in' ,err=40)
OPEN (unit=11 ,file = filnam(1:1)//'.re' ,err=40)
OPEN (unit=12 ,file = filnam(1:1)//'.op' ,err=40)
OPEN (unit=13 ,file = filnam(1:1)//'.er' ,err=40)

CALL gettim (sthour ,stminute ,stsecond ,sthund)

C =====
C ==Purpose :To read all global data ==
C =====

0 CALL input (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,iopt ,
1           inpt ,intma ,coord ,unkn0 ,isido ,ntime ,istep ,
2           csafm ,rho ,mu ,pres ,toler ,iwrite)

IF (iopt.EQ.1) THEN
    CALL restar (mxpoi ,npoin ,unkn0 ,pres ,inpt ,timt ,istep)
    OPEN (unit=11 ,file = filnam(1:1)//'.re' ,err=40)
ELSE
    timt = 0.0
ENDIF

re = rho / mu
ani = 1.0 / re

CALL identm (2 ,npoin ,unkna ,unkn0)

C =====
C ==Purpose :To calculate number of pressure boundary, code =3==
C =====

nbcpr = 0
DO 101 ib = 1,nboun
    IF (isido(4,ib).EQ.3) THEN
        DO 102 ibb = 1,2
            ip = isido(ibb,ib)
            IF (ipdx(ip).EQ.0) THEN
                nbcpr = nbcpr + 1
                ipdx(ip) = 1
                ipfix(ip) = 1
            ENDIF
        ENDIF
102 CONTINUE
    ENDIF
101 CONTINUE

WRITE (*,10) npoin ,nelem ,nboun ,nbcpr ,ntime
WRITE (*,11)
WRITE (*,*)
WRITE (*,12)
WRITE (13,13)
WRITE (13,14)
10 0 FORMAT(' The finite element model consists of:', /,
1      ' number of nodes =', i10, /,
2      ' number of elements =', i10, /,
3      ' number of boundary nodes =', i10, /,
4      ' number of pressure boundary nodes =', i10, /,
5      ' with number of iterations required =', i10, /,)
11 FORMAT('performing iterations for convergence')
12 FORMAT(4x , 'iter' ,13x , 'del U' ,11x , 'del V' ,11x , 'del P')
13 FORMAT(' data of error convergence estimation')

```

```

14  FORMAT(3x , 'itime' , 14x , 'delu' , 12x , 'delv' , 12x , 'delp')

C  =====
C  ==Purpose :To mark elements with 1 or 2 boundary sides  ==
C  =====

      DO 103 ia = 1,2
        DO 104 ie = 1,nelem
          ielsi(ia,ie) = 0
104  CONTINUE
103  CONTINUE
      DO 105 i = 1,nboun
        ie = isido(3,i)
        IF (ielsi(1,ie).EQ.0) ielsi(1,ie) = i
        IF (ielsi(1,ie).NE.i) ielsi(2,ie) = i
105  CONTINUE

C  =====
C  ==Purpose :To obtain the derivatives of shape functions,  ==
C  ==          lumped mass matrix and wall boundary          ==
C  =====

      CALL getgeo (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,coord ,intma ,geome)
0 CALL getmat (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,dmmat,
1          zero)
0 CALL getnor (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,coord ,isido ,rsido,
1          zero)
      CALL getnrw (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,isido ,nwall ,iwpoin)

C  =====
C  ==Purpose :To obtain fixed time step for all nodes      ==
C  =====

0 CALL dtfix (mxele ,nelem ,geome ,csafm ,re ,delp ,delte,
1          deltc)

C  =====
C  ==Purpose :To construct the global stiffness matrix for  ==
C  ==          pressure                                     ==
C  =====

0 CALL pstiff (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,pdiag,
1          gstif ,zero)

C  =====
C  ==Purpose :To perform the time step iterations          ==
C  =====

      nstep = istep + 1
      istep = ntime + istep
      DO 106 itime = nstep,istep
        intime = itime - nstep + 1

        CALL identm (2 ,npoin ,unkn1 ,unkn0)

C  =====
C  ==Purpose :To calculate the intermediate(**) velocities in x==
C  ==          and y directions and impose the boundary      ==
C  ==          conditions                                     ==

```



```

C =====
0 CALL step1 (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,intma,
1             geome ,dmmat ,unkn0 ,rsido ,isido ,ielsi ,rhs2,
2             deltp ,delte ,pres ,ani ,zero)

0 CALL bound (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,nwall ,isido ,unkn0,
1             unkna ,iwpoint)

C =====
C ==Purpose :To calculate the pressure ==
C =====

0 CALL step2 (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,unkn0,
1             unkn1 ,pres ,pres1 ,deltp ,pdiag ,gstif ,ipfix,
2             zero)

C =====
C ==Purpose :To calculate the correction terms for velocity ==
C == and impose the boundary conditions ==
C =====

0 CALL step3 (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,unkn0 ,rhs2,
1             dmmat ,deltp ,pres ,pres1 ,geome ,zero)

0 CALL bound (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,nwall ,isido ,unkn0,
1             unkna ,iwpoint)

C =====
C ==Purpose :To estimate convergence of all results ==
C =====

DO 107 ia = 1,3
    ha(ia) = 0.0
107 CONTINUE
DO 108 ip = 1,npoin
    delu = unkn0(1,ip) - unkn1(1,ip)
    delv = unkn0(2,ip) - unkn1(2,ip)
    delp = pres1(ip) - pres(ip)

    cder = ABS(delu)
    IF (cder.GT.ha(1)) ha(1) = cder

    cder = ABS(delv)
    IF (cder.GT.ha(2)) ha(2) = cder

    cder = ABS(delp)
    IF (cder.GT.ha(3)) ha(3) = cder
108 CONTINUE
DO 109 ip = 1,npoin
    pres(ip) = pres1(ip)
    pres1(ip) = 0.0

109 CONTINUE

kkk = MOD(itime ,iwrite)
IF ((kkk.EQ.0).OR.(itime.EQ.istep).OR.(itime.EQ.nstep)) THEN
    WRITE(*,15) itime ,(ha(ia) ,ia = 1,3)
    WRITE(13,15) itime ,(ha(ia) ,ia = 1,3)

```

```

ENDIF

timt = timt + deltp

err = MAX(ha(1) ,ha(2) ,ha(3))
IF (err.LE.toler) THEN
  WRITE(*,15)  itime ,(ha(ia) ,ia = 1,3)
  WRITE(13,15) itime ,(ha(ia) ,ia = 1,3)
  GOTO 200
ENDIF
IF ((itime.EQ.istep).AND.(err.GT.toler)) THEN
  WRITE(*,16)
  WRITE(13,16)
  GOTO 200
ENDIF
106 CONTINUE

15  FORMAT(i8 ,2x ,3e16.8)
16  FORMAT(' solution does not converged in this range')

C  =====
C  ==Purpose :To round-off solution values for neat output  ==
C  =====

200 roff = 1.0E-06
DO 110 ia = 1,2
  DO 111 ip = 1,npoin
    value = ABS(unkn0(ia,ip))
    IF (value.LT.roff) unkn0(ia,ip) = 0.0
111  CONTINUE
110 CONTINUE
DO 112 ip = 1,npoin
  value = ABS(pres(ip))
  IF (value.LT.roff) pres(ip) = 0.0
112 CONTINUE

C  =====
C  ==Purpose :To send results for output file  ==
C  =====

0 CALL output (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,unkn0,
1           nstep ,timt ,intime ,csafm ,toler ,rho ,mu,
2           pres ,iopt ,inpt ,itime ,deltp ,deltc)

CALL gettim (enhour ,enminute ,ensecond ,enhund)

WRITE (11,18) sthour ,stminute ,stsecond ,sthund
WRITE (12,18) sthour ,stminute ,stsecond ,sthund
WRITE (13,18) sthour ,stminute ,stsecond ,sthund

WRITE (11,19) enhour ,enminute ,ensecond ,enhund
WRITE (12,19) enhour ,enminute ,ensecond ,enhund
WRITE (13,19) enhour ,enminute ,ensecond ,enhund
18  FORMAT(' start time : ' ,3x ,i2 ,':' ,i2.2 ,':' ,i2.2 ,':' ,i2.2)
19  FORMAT(' end time : ' ,3x ,i2 ,':' ,i2.2 ,':' ,i2.2 ,':' ,i2.2)

CLOSE (11)
CLOSE (12)
CLOSE (13)

```

```

STOP
END
*****
INTEGER FUNCTION namlen(filnam)

CHARACTER filnam*12

C =====
C ==Purpose:To count the number of characters in filnam ==
C =====

namlen = 0
DO 10 i = 12,1,-1
  IF (filnam(i:i).EQ.' ') GOTO 10
  namlen = i
  GOTO 20
10 CONTINUE

20 RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE input (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun,
1 iopt ,inpt ,intma ,coord ,unkn0 ,isido,
2 ntime ,istep ,csafm ,rho ,mu ,pres,
3 toler ,iwrite)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,iopt
INTEGER inpt ,ntime ,iwrite ,istep ,i ,j ,ie
INTEGER ip

INTEGER isido(4,mxbou) ,intma(3,mxele)

REAL*8 unkn0(2,mxpoi) ,coord(2,mxpoi) ,pres(mxpoi)

REAL*8 csafm ,rho ,mu ,toler

CHARACTER text*40

C =====
C ==Purpose:To check whether the array-sizes given are ==
C == sufficient and get necessary data ==
C =====

READ (10,1) text
READ (10,*) nelem ,npoin ,nboun ,iopt

IF (npoin.GT.mxpoi) THEN
  WRITE(*,2) npoin
  STOP
ENDIF

IF (nelem.GT.mxele) THEN
  WRITE(*,3) nelem
  STOP
ENDIF

IF (nboun.GT.mxbou) THEN
  WRITE(*,4) nboun
  STOP

```

```

ENDIF

READ (10,1) text
READ (10,*) ntime ,istep ,iwrite

READ (10,1) text
READ (10,*) csafm ,rho ,mu ,toler

READ (10,1) text
DO 100 i = 1,nelem
  READ (10,*) ie ,(intma(j,ie) ,j = 1,3)
  IF (ie.NE.i) THEN
    WRITE(*,5) i
    STOP
  ENDIF
100 CONTINUE

READ (10,1) text
DO 200 i = 1,npoin
  READ (10,*) ip ,(coord(j,ip) ,j = 1,2)
  IF (ip.NE.i) THEN
    WRITE(*,6) i
    STOP
  ENDIF
200 CONTINUE

READ (10,1) text
DO 300 i = 1,npoin
  READ (10,*) ip ,(unkn0(j,ip) ,j = 1,2) ,pres(ip)
300 CONTINUE

READ (10,1) text
DO 400 i = 1,nboun
  READ (10,*) (isido(j,i),j = 1,4)
400 CONTINUE

IF (iopt.EQ.0) inpt = 1

CLOSE (10)

1  FORMAT(a)
2  FORMAT(' mxpoi needs to be increased to : ' ,i5)
3  FORMAT(' mxele needs to be increased to : ' ,i5)
4  FORMAT(' mxbou needs to be increased to : ' ,i5)
5  FORMAT(' elem no.' ,i5 , ' in data file is missing')
6  FORMAT(' node no.' ,i5 , ' in data file is missing')

RETURN
END
*****
SUBROUTINE restar (mxpoi ,npoin ,unkn0 ,pres ,inpt ,timt ,istep)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,npoin ,istep ,inpt ,ip ,i ,j

REAL*8 unkn0(2,mxpoi) ,pres(mxpoi)

REAL*8 timt

```

```

C =====
C ==Purpose :To get data in case of restarted program ==
C =====

      READ(11,*)
      READ(11,*) inpt ,istep ,timt
      inpt = inpt + 1
      READ(11,*)
      DO 100 ip = 1,npoin
        READ(11,*) i , (unkn0(j,ip) ,j = 1,2) ,pres(ip)
100    CONTINUE

      CLOSE(11)

      RETURN
      END
*****
0 SUBROUTINE getgeo (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,coord ,intma,
1      geome)

      IMPLICIT NONE

      INTEGER mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ie ,ip ,in

      INTEGER intma(3,mxele)

      REAL*8 geome(7,mxele) ,coord(2,mxpoi)
      REAL*8 x(3) ,y(3) ,pnxi(2) ,pnet(2)

      REAL*8 x21 ,x31 ,y21 ,y31 ,rj ,rj1 ,xix
      REAL*8 xiy ,etx ,ety ,rnxi ,rnet

      DATA pnxi/-1.0 ,1.0/
      DATA pnet/-1.0 ,0.0/

C =====
C ==Purpose :To get geometry of each linear element ==
C == interpolation ==
C =====

      DO 100 ie = 1,nelem
        DO 200 ip = 1,3
          in = intma(ip,ie)
          x(ip) = coord(1,in)
          y(ip) = coord(2,in)
200    CONTINUE
          x21 = x(2) - x(1)
          x31 = x(3) - x(1)
          y21 = y(2) - y(1)
          y31 = y(3) - y(1)
          rj = x21*y31 - x31*y21
          rj1 = 1.0 / rj
          xix = y31 * rj1
          xiy = -x31 * rj1
          etx = -y21 * rj1
          ety = x21 * rj1
          DO 300 in = 1,2
            rnxi = pnxi(in)
            rnet = pnet(in)
            geome(in,ie) = xix*rnxi + etx*rnet
          
```

```

        geome(in+3,ie) = xiy*rnxi + ety*rnet
300  CONTINUE
        geome(3,ie) = -(geome(1,ie) + geome(2,ie))
        geome(6,ie) = -(geome(4,ie) + geome(5,ie))
        geome(7,ie) =  rj
100  CONTINUE

        RETURN
        END
*****
0 SUBROUTINE getmat (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome,
1                   dmmat ,zero)

        IMPLICIT  NONE

        INTEGER   mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ie ,inode ,i ,in

        INTEGER   intma(3,mxele)

        REAL*8    geome(7,mxele) ,dmmat(mxpoi)

        REAL*8    rj      ,rj6      ,zero

C  =====
C  ==Purpose :To get inverse lumped mass matrix      ==
C  =====

        CALL rfillv (dmmat ,npoin ,zero)

        DO 100 ie = 1,nelem
            rj = geome(7,ie)
            rj6 = rj / 6.0
            DO 200 inode = 1,3
                in      = intma(inode,ie)
                dmmat(in) = dmmat(in) + rj6
200    CONTINUE
100  CONTINUE
        DO 300 i = 1,npoin
            dmmat(i) = 1.0 / dmmat(i)
300  CONTINUE

        RETURN
        END
*****
0 SUBROUTINE getnor (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,coord ,isido,
1                   rsido ,zero)

        IMPLICIT  NONE

        INTEGER   mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,ib ,ipoi0 ,ipoi1

        INTEGER   isido(4,mxbou)

        REAL*8    rsido(3,mxbou) ,coord(2,mxpoi)

        REAL*8    dx      ,dy      ,rl      ,zero

C  =====
C  ==Purpose :To get direction cosines on boundary sides ==
C  ==          get length of boundary sides              ==

```

```

C =====
CALL rfillm (rsido ,3 ,nboun ,zero)

DO 100 ib = 1,nboun
  ipoi0      = isido(1,ib)
  ipoi1      = isido(2,ib)
  dx         = coord(1,ipoi1) - coord(1,ipoi0)
  dy         = coord(2,ipoi1) - coord(2,ipoi0)
  rl         = SQRT(dx*dx + dy*dy)
  rsido(1,ib) = dy / rl
  rsido(2,ib) = -dx / rl
  rsido(3,ib) = rl
100 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE getnrw (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,isido ,nwall,
1                  iwpoim)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,nwall ,in ,i ,nn ,jj

INTEGER isido(4,mxbou) ,iwpoim(mxbou) ,ihelp(mxpoi)

C =====
C ==Purpose :To get unit normal vector and obtain number of ==
C == wall boundary, code=2 ==
C =====

DO 100 i = 1,npoin
  ihelp(i) = 0
100 CONTINUE
DO 200 i = 1,nboun
  iwpoim(i) = 0
200 CONTINUE

nwall = 0
DO 300 in = 1,2
  DO 400 i = 1,nboun
    IF (isido(4,i).EQ.2) THEN
      nn = isido(in,i)
      jj = ihelp(nn)
      IF (jj.EQ.0) THEN
        nwall = nwall + 1
        iwpoim(nwall) = nn
        ihelp(nn) = nwall
      ENDIF
    ENDIF
  ENDIF
400 CONTINUE
300 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE dtfix (mxele ,nelem ,geome ,csafm ,re ,deltp ,delte,
1                  deltc)

```



```

IMPLICIT  NONE

INTEGER  mxele ,nelem ,ie

REAL*8   geome(7,mxele)

REAL*8   csafm ,re      ,alen1 ,alen2 ,alen3 ,alen ,delte ,deltp
REAL*8   deltc ,anx    ,any

C  =====
C  ==Purpose :To obtain fixed global external and internal time==
C  ==          step due to viscous limit only                    ==
C  =====

alen = 1000.
DO 100 ie = 1,nelem
  anx  = geome(1,ie)
  any  = geome(4,ie)
  alen1 = 1.0 / SQRT((anx*anx + any*any))

  anx  = geome(2,ie)
  any  = geome(5,ie)
  alen2 = 1.0 / SQRT((anx*anx + any*any))

  anx  = geome(3,ie)
  any  = geome(6,ie)
  alen3 = 1.0 / SQRT((anx*anx + any*any))

  alen = MIN(alen1 ,alen2 ,alen3 ,alen)
100 CONTINUE
  deltc = 0.5 * alen * alen * re
  deltp = csafm * deltc
  delte = 2.0 * deltp
  IF (delte.GT.deltc) delte = deltc

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE pstiff (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome,
1                   pdiag ,gstif ,zero)

IMPLICIT  NONE

INTEGER  mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,isky ,ie ,ip1 ,ip2 ,ip3
INTEGER  i

INTEGER  intma(3,mxele)
REAL*8   geome(7,mxele) ,gstif(3*mxele) pdiag(mxpoi)

REAL*8   area ,gdi ,gdj ,gdk ,b1 ,b2 ,b3 ,c1 ,c2
REAL*8   c3 ,zero

C  =====
C  ==Purpose :To obtain global stiffness matrix for pressure ==
C  =====

CALL rfillv (pdiag ,npoin ,zero)

```

```

isky = 0
DO 100 ie = 1,nelem
  ip1      = intma(1,ie)
  ip2      = intma(2,ie)
  ip3      = intma(3,ie)
  area     = geome(7,ie) / 2.0
  b1       = geome(1,ie)
  b2       = geome(2,ie)
  b3       = geome(3,ie)
  c1       = geome(4,ie)
  c2       = geome(5,ie)
  c3       = geome(6,ie)
  pdiag(ip1) = pdiag(ip1) + area*(b1*b1 + c1*c1)
  pdiag(ip2) = pdiag(ip2) + area*(b2*b2 + c2*c2)
  pdiag(ip3) = pdiag(ip3) + area*(b3*b3 + c3*c3)
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = area*(b1*b2 + c1*c2)
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = area*(b1*b3 + c1*c3)
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = area*(b2*b3 + c2*c3)
100 CONTINUE
isky = 0
DO 200 i = 1,npoin
  pdiag(i) = SQRT(pdiag(i))
200 CONTINUE
DO 300 ie = 1,nelem
  gdi      = 1.0 / pdiag(intma(1,ie))
  gdj      = 1.0 / pdiag(intma(2,ie))
  gdk      = 1.0 / pdiag(intma(3,ie))
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = gstif(isky) * gdi * gdj
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = gstif(isky) * gdi * gdk
  isky     = isky + 1
  gstif(isky) = gstif(isky) * gdj * gdk
300 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE step1 (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun,
1                  intma ,geome ,dmmat ,unkn0 ,rsido ,isido,
2                  ielsi ,rhs2 ,deltp ,delte ,pres ,ani,
3                  zero)

  IMPLICIT NONE

  INTEGER mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,ip

  INTEGER intma(3,mxele) ,isido(4,mxbou) ,ielsi(2,mxele)

  REAL*8 rhs0(2,mxpoi) ,rhs2(2,mxpoi) ,geome(7,mxele)
  REAL*8 unkn0(2,mxpoi) ,rsido(3,mxbou) ,dmmat(mxpoi)
  REAL*8 pres(mxpoi)

  REAL*8 dt ,ani ,delte ,deltp ,zero

```

```

CALL rfillm (rhs2 ,2 ,npoin ,zero)
CALL rfillm (rhs0 ,2 ,npoin ,zero)

C =====
C ==Purpose :To calculate the convective component ==
C =====

0 CALL advect (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,intma ,
1             isido ,rsido ,geome ,unkn0 ,pres ,delte ,rhs2 ,
2             ielsi)

C =====
C ==Purpose :To calculate the diffusive component ==
C =====

0 CALL difuse (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,intma ,
1             isido ,rsido ,geome ,unkn0 ,rhs0 ,ani ,zero)

C =====
C ==Purpose :To add advection and diffusion, multiply by ==
C ==          inversed mass and update the solution ==
C =====

DO 100 ip = 1,npoin
  dt      = dmmat(ip)
  rhs2(1,ip) = (rhs2(1,ip) + rhs0(1,ip)) * dt
  rhs2(2,ip) = (rhs2(2,ip) + rhs0(2,ip)) * dt
100 CONTINUE
DO 200 ip = 1,npoin
  unkn0(1,ip) = unkn0(1,ip) + deltp * rhs2(1,ip)
  unkn0(2,ip) = unkn0(2,ip) + deltp * rhs2(2,ip)
200 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE advect (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,
1                  intma ,isido ,rsido ,geome ,unkn0 ,pres ,
2                  delte ,rhs2 ,ielsi)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun
INTEGER ie ,ip1 ,ip2 ,ip3 ,isi ,is ,ip
INTEGER inode ,idl ,id2 ,in1 ,in2

INTEGER intma(3,mxele) ,isido(4,mxbou) ,ielsi(2,mxele)
REAL*8 rsido(3,mxbou) ,unkn0(2,mxpoi) ,geome(7,mxele)
REAL*8 pres(mxpoi) ,rhs2(2,mxpoi)

REAL*8 area ,ar12 ,ar3 ,b1 ,b2 ,b3 ,c1
REAL*8 c2 ,c3 ,u1 ,u2 ,u3 ,v1 ,v2
REAL*8 v3 ,dudx ,dudy ,dvdx ,dvdy ,dpdx ,dpdy
REAL*8 usum ,vsum ,umean ,vmean ,adu11 ,adu21 ,adu31
REAL*8 adv11 ,adv21 ,adv31 ,adu12 ,adu22 ,adu32 ,adv12
REAL*8 adv22 ,adv32 ,anx ,any ,un1 ,un2 ,vn1
REAL*8 vn2 ,anor ,anoru1 ,anoru2 ,anorv1 ,anorv2 ,aleng
REAL*8 adup12 ,adup22 ,adup32 ,advp12 ,advp22 ,advp32 ,delte

```

```

C =====
C ==Purpose :To calculate the convective component for      ==
C ==          intermediate velocities and stabilized pressure ==
C ==          term                                           ==
C =====

DO 100 ie = 1,nelem
  area = geome(7,ie) * 0.5
  ar12 = area / 12.0
  ar3  = area / 3.0
  ip1  = intma(1,ie)
  ip2  = intma(2,ie)
  ip3  = intma(3,ie)
  b1   = geome(1,ie)
  b2   = geome(2,ie)
  b3   = geome(3,ie)
  c1   = geome(4,ie)
  c2   = geome(5,ie)
  c3   = geome(6,ie)
  u1   = unkn0(1,ip1)
  u2   = unkn0(1,ip2)
  u3   = unkn0(1,ip3)
  v1   = unkn0(2,ip1)
  v2   = unkn0(2,ip2)
  v3   = unkn0(2,ip3)
  dudx = b1*u1 + b2*u2 + b3*u3
  dudy = c1*u1 + c2*u2 + c3*u3
  dvdx = b1*v1 + b2*v2 + b3*v3
  dvdy = c1*v1 + c2*v2 + c3*v3
  dpdx = pres(ip1)*b1 + pres(ip2)*b2 + pres(ip3)*b3
  dpdy = pres(ip1)*c1 + pres(ip2)*c2 + pres(ip3)*c3
  usum = u1 + u2 + u3
  vsum = v1 + v2 + v3
  umean = usum / 3.0
  vmean = vsum / 3.0

  adu11 = ar12 * (dudx*(usum+u1) + dudy*(vsum+v1))
  adu21 = ar12 * (dudx*(usum+u2) + dudy*(vsum+v2))
  adu31 = ar12 * (dudx*(usum+u3) + dudy*(vsum+v3))
  adv11 = ar12 * (dvdx*(usum+u1) + dvdy*(vsum+v1))
  adv21 = ar12 * (dvdx*(usum+u2) + dvdy*(vsum+v2))
  adv31 = ar12 * (dvdx*(usum+u3) + dvdy*(vsum+v3))

0  adu12 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b1 + vmean*c1) *
1    (dudx*usum + dudy*vsum)
0  adu22 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b2 + vmean*c2) *
1    (dudx*usum + dudy*vsum)
0  adu32 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b3 + vmean*c3) *
1    (dudx*usum + dudy*vsum)
0  adv12 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b1 + vmean*c1) *
1    (dvdx*usum + dvdy*vsum)
0  adv22 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b2 + vmean*c2) *
1    (dvdx*usum + dvdy*vsum)
0  adv32 = delte * 0.5 * ar3 * (umean*b3 + vmean*c3) *
1    (dvdx*usum + dvdy*vsum)

  adup12 = 0.25 * delte * area * (umean*b1 + vmean*c1) * dpdx
  adup22 = 0.25 * delte * area * (umean*b2 + vmean*c2) * dpdx
  adup32 = 0.25 * delte * area * (umean*b3 + vmean*c3) * dpdx
  advp12 = 0.25 * delte * area * (umean*b1 + vmean*c1) * dpdy

```

```

advp22 = 0.25 * delte * area * (umean*b2 + vmean*c2) * dpdy
advp32 = 0.25 * delte * area * (umean*b3 + vmean*c3) * dpdy

rhs2(1,ip1) = rhs2(1,ip1) - adu11 - adu12 - adup12
rhs2(1,ip2) = rhs2(1,ip2) - adu21 - adu22 - adup22
rhs2(1,ip3) = rhs2(1,ip3) - adu31 - adu32 - adup32
rhs2(2,ip1) = rhs2(2,ip1) - adv11 - adv12 - advp12
rhs2(2,ip2) = rhs2(2,ip2) - adv21 - adv22 - advp22
rhs2(2,ip3) = rhs2(2,ip3) - adv31 - adv32 - advp32

DO 200 isi = 1,2
  is = ielsi(isi,ie)
  IF (is.NE.0) THEN
    aleng = rsido(3,is) / 6.0
    anx   = rsido(1,is) * aleng
    any   = rsido(2,is) * aleng
    ip    = isido(1,is)
    DO 300 inode = 1,3
      IF (ip.EQ.intma(inode,ie)) THEN
        id1 = inode
        GOTO 50
      ENDIF
300    CONTINUE
      PRINT*, ' error in side contribution '
      STOP
50    id2 = id1 + 1
      IF (id2.GT.3) id2 = id2 - 3
      in1  = intma(id1,ie)
      in2  = intma(id2,ie)
      un1  = unkn0(1,in1)
      un2  = unkn0(1,in2)
      vn1  = unkn0(2,in1)
      vn2  = unkn0(2,in2)
      anor = delte * 0.5 * (umean*anx + vmean*any)
0      anorul = anor * (dudx*(2.0*un1+un2)
1              + dudy*(2.0*vn1+vn2)+ 1.5*dpx)
0      anoru2 = anor * (dudx*(2.0*un2+un1)
1              + dudy*(2.0*vn2+vn1)+ 1.5*dpx)
0      anorv1 = anor * (dvdx*(2.0*un1+un2)
1              + dvdy*(2.0*vn1+vn2)+ 1.5*dpdy)
0      anorv2 = anor * (dvdx*(2.0*un2+un1)
1              + dvdy*(2.0*vn2+vn1)+ 1.5*dpdy)

      rhs2(1,in1) = rhs2(1,in1) + anorul
      rhs2(1,in2) = rhs2(1,in2) + anoru2
      rhs2(2,in1) = rhs2(2,in1) + anorv1
      rhs2(2,in2) = rhs2(2,in2) + anorv2
    ENDIF
200  CONTINUE
100  CONTINUE

  RETURN
  END
*****
0 SUBROUTINE difuse (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun,
1                  intma ,isido ,rsido ,geome ,unkn0 ,rhs0,
2                  ani ,zero)

  IMPLICIT NONE

```

```

INTEGER      mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,ie ,ia ,lok
INTEGER      in      ,lok1  ,ja    ,is     ,ip

INTEGER      intma(3,mxele)  ,isido(4,mxbou)

REAL*8       rsido(3,mxbou)  ,geome(7,mxele)  ,unkn0(2,mxpoi)
REAL*8       rhs0(2,mxpoi)   ,sigxx(mxele)   ,sigyy(mxele)
REAL*8       sigxy(mxele)   ,rhlp(2,3)

REAL*8       ani    ,velo1 ,velo2 ,aleng ,anx    ,any    ,zero

C  =====
C  ==Purpose :To calculate contribute from diffusion terms for ==
C  ==          intermediate velocities                          ==
C  =====

CALL rfillv (sigxx ,nelem ,zero)
CALL rfillv (sigxy ,nelem ,zero)
CALL rfillv (sigyy ,nelem ,zero)

DO 100 ia = 1,nelem
  DO 200 lok = 1,3
    in      = intma(lok,ia)
    lok1    = lok + 3
    velo1   = unkn0(1,in)
    velo2   = unkn0(2,in)
    sigxx(ia) = sigxx(ia) + ani*(geome(lok,ia) * 2.0*velo1)
    sigyy(ia) = sigyy(ia) + ani*(geome(lok1,ia) * 2.0*velo2)
    sigxy(ia) = sigxy(ia) + ani*(geome(lok,ia) *velo2
1                                     + geome(lok1,ia)*velo1)
0
1
200  CONTINUE
    DO 300 lok = 1,3
      lok1    = lok + 3
0      rhlp(1,lok) = -geome(7,ia)*(sigxx(ia)*geome(lok,ia)
1                                     + sigxy(ia)*geome(lok1,ia))*0.5
0      rhlp(2,lok) = -geome(7,ia)*(sigxy(ia)*geome(lok,ia)
1                                     + sigyy(ia)*geome(lok1,ia))*0.5
300  CONTINUE
    DO 400 lok = 1,3
      in = intma(lok,ia)
      DO 500 ja = 1,2
        rhs0(ja,in) = rhs0(ja,in) + rhlp(ja,lok)
500  CONTINUE
400  CONTINUE
100  CONTINUE

DO 600 is = 1,nboun
  aleng = rsido(3,is) * 0.5
  anx   = rsido(1,is) * aleng
  any   = rsido(2,is) * aleng
  ie    = isido(3,is)
  DO 700 in = 1,2
    ip      = isido(in,is)
    rhs0(1,ip) = rhs0(1,ip) + anx*siggxx(ie) + any*siggxy(ie)
    rhs0(2,ip) = rhs0(2,ip) + anx*siggxy(ie) + any*siggyy(ie)
700  CONTINUE
600  CONTINUE

RETURN
END

```

```

*****
0 SUBROUTINE step2 (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome,
1                   unkn0 ,unkn1 ,pres ,pres1 ,deltp ,pdiag,
2                   gstif ,ipfix ,zero)

    IMPLICIT      NONE

    INTEGER       mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem

    INTEGER       intma(3,mxele) ,ipfix(mxpoi)

    REAL*8       geome(7,mxele) ,unkn0(2,mxpoi) ,unkn1(2,mxpoi)
    REAL*8       gstif(3*mxele) ,glm(mxpoi) ,pdiag(mxpoi)
    REAL*8       pres1(mxpoi) ,pres(mxpoi)

    REAL*8       deltp ,zero

C   =====
C   ==Purpose :To calculate p(n+1) of pressure system equation ==
C   ==          from Laplace equation                               ==
C   =====

0 CALL pload (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,pres,
1            glm ,deltp ,unkn0 ,unkn1 ,zero)

0 CALL solver (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ipfix ,glm ,pres,
1            pres1 ,pdiag ,gstif ,intma)

    RETURN
    END
*****
0 SUBROUTINE pload (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome,
1                  pres ,glm ,deltp ,unkn0 ,unkn1 ,zero)

    IMPLICIT      NONE

    INTEGER       mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,i ,ielem ,ip

    INTEGER       intma(3,mxele)

    REAL*8       geome(7,mxele) ,glm(mxpoi) ,unkn1(2,mxpoi)
    REAL*8       unkn0(2,mxpoi) ,pres(mxpoi) ,elrhs(3)
    REAL*8       rhsp(3) ,p(3)

    REAL*8       deltp ,zero

C   =====
C   ==Purpose :To obtain the velocity and pressure term on the ==
C   ==          right hand side(RHS) for Laplace equation       ==
C   =====

    CALL rfillv (glm ,npoin ,zero)

    DO 100 ielem = 1,nelem

0     CALL getrhs (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ielem ,intma ,geome,
1                unkn0 ,unkn1 ,elrhs)

0     CALL prhp (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,pres,
1                rhsp ,ielem)

```



```

        DO 200 i = 1,3
            ip = intma(i,ielem)
            p(i) = elrhs(i)/deltp + rhsp(i)*0.25
            glm(ip) = glm(ip) + p(i)
200    CONTINUE
100    CONTINUE

        RETURN
        END
*****
0 SUBROUTINE getrhs (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ielem ,intma,
1                geome ,unkn0 ,unkn1 ,elrhs)

        IMPLICIT    NONE

        INTEGER    mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ielem ,inode ,iu ,jnode
        INTEGER    ip ,knode

        INTEGER    intma(3,mxele)

        REAL*8    geome(7,mxele) ,unkn0(2,mxpoi) ,unkn1(2,mxpoi)
        REAL*8    elukn(2,3) ,elukn1(2,3) ,elrhs(3)

        REAL*8    dudx ,dvdy ,velo1 ,velo2

C    =====
C    ==Purpose :To obtain RHS velocity                               ==
C    =====

        DO 100 inode = 1,3
            ip = intma(inode,ielem)
            DO 200 iu = 1,2
                elukn(iu,inode) = 0.5 * (unkn0(iu,ip)-unkn1(iu,ip))
                elukn1(iu,inode) = unkn1(iu,ip)
200    CONTINUE
100    CONTINUE
            velo1 = 0.0
            velo2 = 0.0
            dudx = 0.0
            dvdy = 0.0
            DO 300 jnode = 1,3
                knode = jnode + 3
                dudx = dudx + geome(jnode,ielem)*elukn1(1,jnode)
                dvdy = dvdy + geome(knode,ielem)*elukn1(2,jnode)
                velo1 = velo1 + elukn(1,jnode)
                velo2 = velo2 + elukn(2,jnode)
300    CONTINUE
            DO 400 inode = 1,3
                elrhs(inode) = 0.0
                jnode = inode + 3
                0 elrhs(inode) = elrhs(inode) - dudx - dvdy
                1 + geome(inode,ielem)*velo1
                2 + geome(jnode,ielem)*velo2
                elrhs(inode) = elrhs(inode) * geome(7,ielem) / 6.0
400    CONTINUE

            RETURN
            END
*****
0 SUBROUTINE prhp (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,geome ,pres,
```

```

1          rhsp ,ielem)

IMPLICIT  NONE

INTEGER   mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ielem ,lok ,im ,lok1

INTEGER   intma(3,mxele)

REAL*8    geome(7,mxele) ,pres(mxpoi) ,rhsp(3) ,p(3) ,b(2)

REAL*8    ar

C  =====
C  ==Purpose :To obtain RHS pressure                               ==
C  =====

      ar = geome(7,ielem) / 2.0
      DO 100 lok = 1,3
          im      = intma(lok,ielem)
          p(lok)  = pres(im)
          rhsp(lok) = 0.0
100 CONTINUE
      b(1) = 0.0
      b(2) = 0.0
      DO 200 lok = 1,3
          lok1 = lok + 3
          b(1) = b(1) + geome(lok,ielem)*p(lok)
          b(2) = b(2) + geome(lok1,ielem)*p(lok)
200 CONTINUE
      DO 300 lok = 1,3
          lok1      = lok + 3
          rhsp(lok) = rhsp(lok) - ar*(geome(lok,ielem)*b(1)
1          + geome(lok1,ielem)*b(2))
300 CONTINUE

      RETURN
      END
*****
0 SUBROUTINE solver (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ipfix ,glm ,pres,
1                   pres1 ,pdiag ,gstif ,intma)

IMPLICIT  NONE

INTEGER   mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,i

INTEGER   ipfix(mxpoi) ,intma(3,mxele)

REAL*8    glm(mxpoi) ,pres(mxpoi) ,pres1(mxpoi)
REAL*8    pdiag(mxpoi) ,gstif(3*mxele) ,press(mxpoi)

C  =====
C  ==Purpose :To solve matrix by conjugate method                               ==
C  =====

      DO 100 i = 1,npoin
          press(i) = pres(i)
          IF (ipfix(i).EQ.1) press(i) = 0.0
100 CONTINUE
      DO 200 i = 1,npoin
          pres1(i) = glm(i) / pdiag(i)

```

```

        press(i) = press(i) * pdiag(i)
200 CONTINUE

        0 CALL conjug (mxele ,mxpoi ,nelem ,npoin ,intma ,gstif ,pdiag,
          1             ipfix ,pres1 ,press)

        DO 300 i = 1,npoin
          pres1(i) = press(i) / pdiag(i)
300 CONTINUE

        RETURN
        END
*****
0 SUBROUTINE conjug (mxele ,mxpoi ,nelem ,npoin ,lnods ,astif,
1                   gdiag ,ipfix ,b      ,x)

        IMPLICIT      NONE

        INTEGER       mxele ,mxpoi ,nelem ,npoin ,iter ,miter ,i      ,ij

        INTEGER       lnods(3,mxele) ,ipfix(mxpoi)

        REAL*8        astif(3,mxele) ,gdiag(mxpoi) ,b(mxpoi) ,x(mxpoi)
        REAL*8        p(mxpoi)      ,apold(mxpoi)

        REAL*8        toler ,alph1 ,bi      ,apoldi ,beta1 ,alph2 ,alpha
        REAL*8        beta2 ,rnewi ,znewi ,beta  ,bmax  ,bmmx

        iter = 0
        miter = npoin * 2
        toler = 1.0E-06

        DO 100 i = 1,npoin
          IF (ipfix(i).EQ.1).b(i) = 0.0
100 CONTINUE

        0 CALL mult3n (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,lnods , astif ,x,
          1             apold)

        DO 200 i = 1,npoin
          IF (ipfix(i).EQ.1).apold(i) = 0.0
200 CONTINUE

        alph1 = 0.0
        DO 300 i = 1,npoin
          bi      = b(i) - apold(i)
          b(i)    = bi
          apoldi  = bi / gdiag(i)
          apold(i) = apoldi
          p(i)    = apoldi
          alph1   = alph1 + bi*apoldi
300 CONTINUE
        beta1 = alph1

        DO 400 ij = 1,100000
          iter = iter + 1
          IF (iter.GT.miter) THEN
            PRINT *, 'Too many iterations - reduce time step'
            STOP

```

```

        ENDIF

0    CALL mult3n (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,lnods ,astif ,p,
1          apold)

        DO 500 i = 1,npoin
            IF (ipfix(i).EQ.1).apold(i) = 0.0
500    CONTINUE

        alph1 = betal
        alph2 = 0.0
        DO 600 i = 1,npoin
            alph2 = alph2 + p(i)*apold(i)
600    CONTINUE
        alpha = alph1 / alph2
        beta2 = alph1
        betal = 0.0
        DO 700 i = 1,npoin
            x(i)      = x(i) + alpha*p(i)
            rnewi     = b(i) - alpha*apold(i)
            znewi     = rnewi / gdiag(i)
            b(i)      = rnewi
            apold(i)  = znewi
            betal     = betal + rnewi*znewi
700    CONTINUE

        beta = betal / beta2
        DO 800 i = 1,npoin
            p(i) = apold(i) + beta*p(i)
800    CONTINUE

        bmax = 0.0
        DO 900 i = 1,npoin
            bmmx = ABS(b(i))
            bmax = MAX(bmax,bmmx)
900    CONTINUE
        IF (bmax.LE.toler) THEN
            RETURN
        ENDIF
400    CONTINUE

        RETURN
        END
*****
0 SUBROUTINE mult3n (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,lnods ,astif ,x,
1          r)

        IMPLICIT NONE

        INTEGER      mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ie ,ni ,nj ,nk

        INTEGER      lnods(3,mxele)

        REAL*8       x(mxpoi) ,r(mxpoi) ,astif(3,mxele)

        REAL*8       xi ,xj ,xk ,sij ,sik ,sjk

        DO 100 ni = 1,npoin
            r(ni) = x(ni)
100    CONTINUE

```

```

DO 200 ie = 1,nelem
  ni = lnods(1,ie)
  nj = lnods(2,ie)
  nk = lnods(3,ie)
  xi = x(ni)
  xj = x(nj)
  xk = x(nk)
  sij = astif(1,ie)
  sik = astif(2,ie)
  sjk = astif(3,ie)
  r(ni) = r(ni) + sij*xj + sik*xk
  r(nj) = r(nj) + sij*xi + sjk*xk
  r(nk) = r(nk) + sik*xi + sjk*xj
200 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE step3 (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,unkn0,
1                  rhs2 ,dmmat ,deltp ,pres ,pres1 ,geome,
2                  zero)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ip ,iu

INTEGER intma(3,mxele)

REAL*8 geome(7,mxele) ,rhs2(2,mxpoi) ,unkn0(2,mxpoi)
REAL*8 dmmat(mxpoi) ,pres1(mxpoi) ,pres(mxpoi)

REAL*8 deltp ,dt ,zero

C =====
C ==Purpose :To perform velocity correction step ==
C =====

CALL rfillm (rhs2 ,2 ,npoin ,zero)

0 CALL correct (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,pres ,pres1,
1             geome ,rhs2)

DO 100 ip = 1,npoin
  DO 200 iu = 1,2
    dt = dmmat(ip)
    rhs2(iu,ip) = rhs2(iu,ip) * dt * deltp
    unkn0(iu,ip) = unkn0(iu,ip) + rhs2(iu,ip)
200 CONTINUE
100 CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE correct (mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,intma ,pres,
1                   pres1 ,geome ,rhs2)

IMPLICIT NONE

INTEGER mxpoi ,mxele ,npoin ,nelem ,ielem ,inode ,jnode ,ip

```

```

INTEGER      intma(3,mxele)

REAL*8      geome(7,mxele) ,rhs2(2,mxpoi) ,pres(mxpoi)
REAL*8      pres1(mxpoi)   ,elprs(3)

REAL*8      area ,ar3   ,dpx ,dpy

C  =====
C  ==Purpose :To evaluate the RHS of velocity correction step ==
C  =====

DO 100 ielem = 1,nelem
  area = geome(7,ielem) * 0.5
  ar3  = area / 3.0
  dpx  = 0.0
  dpy  = 0.0
  DO 200 inode = 1,3
    jnode = inode + 3
    ip    = intma(inode,ielem)
    elprs(inode) = 0.5 * (pres(ip) + pres1(ip))
    dpx  = dpx + geome(inode,ielem)*elprs(inode)
    dpy  = dpy + geome(jnode,ielem)*elprs(inode)
200  CONTINUE
  DO 300 inode = 1,3
    ip    = intma(inode,ielem)
    rhs2(1,ip) = rhs2(1,ip) - ar3*dpx
    rhs2(2,ip) = rhs2(2,ip) - ar3*dpy
300  CONTINUE
100  CONTINUE

RETURN
END
*****
0 SUBROUTINE bound (mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,nwall ,isido,
1                  unkn0 ,unkna ,iwpoim)

IMPLICIT  NONE

INTEGER   mxpoi ,mxbou ,npoin ,nboun ,nwall ,is ,in ,ip ,iw

INTEGER   isido(4,mxbou) ,iwpoim(mxbou)

REAL*8   unkna(2,mxpoi) ,unkn0(2,mxpoi)

C  =====
C  ==Purpose :To apply inflow boundary conditions, code = 1 ==
C  =====

DO 100 is = 1,nboun
  DO 200 in = 1,2
    ip = isido(in,is)
    IF (isido(4,is).EQ.1) THEN
      unkn0(1,ip) = unkna(1,ip)
      unkn0(2,ip) = unkna(2,ip)
    ENDIF
200  CONTINUE
100  CONTINUE

C  =====
C  ==Purpose :To apply the wall boundary conditions, code = 2 ==

```

```

C =====
DO 300 iw = 1,nwall
    ip      = iwpoint(iw)
    unkn0(1,ip) = 0.0
    unkn0(2,ip) = 0.0
300 CONTINUE

RETURN
END
*****
SUBROUTINE rfillv (a ,na ,c)

IMPLICIT NONE

INTEGER na ,i

REAL*8 a(na)

REAL*8 c

C =====
C ==Purpose :To initialize a vector of real variable with zero==
C =====

DO 100 i = 1,na
    a(i) = c
100 CONTINUE

RETURN
END
*****
SUBROUTINE rfillm (a ,na ,ma ,cm)

IMPLICIT NONE

INTEGER na ,ma ,i ,j

REAL*8 a(na,ma)

REAL*8 cm

C =====
C ==Purpose :To initialize a matrix of size (na * ma) with cm ==
C =====

DO 100 i = 1,na
    DO 200 j = 1,ma
        a(i,j) = cm
200 CONTINUE
100 CONTINUE

RETURN
END
*****
SUBROUTINE identm (m ,n ,a ,b)

IMPLICIT NONE

```



```

      INTEGER      m ,n ,i ,j

      REAL*8      a(m,n) ,b(m,n)

C      =====
C      ==Purpose :To equal two matrices of same size      ==
C      =====

      DO 100 j = 1,n
        DO 200 i = 1,m
          a(i,j) = b(i,j)
200      CONTINUE
100     CONTINUE

      RETURN
      END

*****
0 SUBROUTINE output (mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun,
1                   unkn0 ,nstep ,timt ,intime ,csafm ,toler,
2                   rho ,mu ,pres ,iopt ,inpt ,itime,
3                   deltp ,deltc)

      IMPLICIT      NONE

      INTEGER      mxpoi ,mxele ,mxbou ,npoin ,nelem ,nboun ,nstep
      INTEGER      iopt ,inpt ,intime ,itime ,ip

      REAL*8      unkn0(2,mxpoi) ,pres(mxpoi)

      REAL*8      timt ,csafm ,rho ,mu ,toler ,deltp ,deltc

C      =====
C      ==Purpose :To write output after prescribed number of      ==
C      ==      iterations      ==
C      =====

      WRITE (12,*) ' nelem      npoin      nboun      iopt'
      WRITE (12,1) nelem ,npoin ,nboun ,iopt
0      WRITE (12,*) ' nstep      itime      intime      inpt      timt',
1      '      toler'
      WRITE (12,2) nstep ,itime ,intime ,inpt ,timt ,toler
0      WRITE (12,*) ' csafm      rho      mu      deltc',
1      '      deltp'
      WRITE (12,3) csafm ,rho ,mu ,deltc ,deltp
0      WRITE (12,*) ' node      velocity-u      velocity-v      ',
1      'pressure-p'
      DO 100 ip = 1,npoin
        WRITE(12,4) ip ,unkn0(1,ip) ,unkn0(2,ip) ,pres(ip)
100     CONTINUE

      WRITE (11,*) ' inpt      itime      timt'
      WRITE (11,5) inpt ,itime ,timt
0      WRITE (11,*) ' node      velocity-u      velocity-v      ',
1      'pressure-p'
      DO 200 ip = 1,npoin
        WRITE(11,4) ip , unkn0(1,ip) ,unkn0(2,ip) ,pres(ip)
200     CONTINUE

1      FORMAT(1x ,i6 ,3x ,i6 ,4x ,i6 ,1x ,i6)
2      FORMAT(1x ,i6 ,1x ,i8 ,2x ,i8 ,1x ,i6 ,2x ,e11.5 ,2x ,e11.5)

```

```
3  FORMAT(f7.4 ,2x ,f7.5 ,2x ,f8.5 ,9x ,e11.5 ,2x ,e11.5)
4  FORMAT(1x ,i6 ,1x ,e15.6 ,2(2x ,e15.6))
5  FORMAT(1x ,i6 ,2x ,i7 ,2x ,e12.5)

RETURN
END
*****
C===== end of program =====
```



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

รายละเอียดของโปรแกรม FEMCBS

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ FEMCBS มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```

PROGRAM      femcbs
C
C =====
C ==Purpose :To transfer element nodal connections, nodal      ==
C ==          coordinates, initial conditions and boundary      ==
C ==          sides from exported femesh model to input file of ==
C ==          CBS program                                         ==
C =====
C

IMPLICIT     NONE

INTEGER      mxele  ,mxpoi  ,mxbou  ,ntime  ,istep  ,iwrite

REAL*8      csafm  ,toler  ,rho    ,mu

PARAMETER (mxele=50000      ,mxpoi=50000      ,mxbou=5000)
PARAMETER (ntime=900000    ,istep=0          ,iwrite=1000)
PARAMETER (csafm=0.1      ,rho=1.0          ,mu=0.001)
PARAMETER (toler=1.E-10)

CHARACTER    filnam*20

INTEGER      nelelem ,npoin  ,nboun  ,integ  ,iopt   ,I      ,j
INTEGER      ii      ,ie     ,ip     ,ib     ,l      ,namlen

INTEGER      intma(3,mxele) ,isido(4,mxbou) ,idx(mxpoi)

REAL*8      x      ,y      ,uinit  ,vinit

REAL*8      coord(2,mxpoi) ,u(mxpoi)      ,v(mxpoi)
REAL*8      p(mxpoi)

C
C =====
C ==Purpose :To read required input from femesh model file      ==
C ==          (.dat)                                             ==
C =====
C

40 WRITE(*,*) 'please enter your input file name : '
   READ (*,*) filnam
   l = namlen(filnam)
   IF (l.EQ.0) GOTO 40

   OPEN (unit = 10 ,file = filnam(1:l)//'.dat' ,err=40)

   WRITE(*,*) 'please enter number of element ,node and boundary'
   READ (10,*) nelelem ,npoin ,nboun
   IF (npoin.GT.mxpoi) THEN
       WRITE(*,1) npoin
       STOP
   ENDIF

```

```

IF (nelem.GT.mxele) THEN
  WRITE(*,2) nelem
  STOP
ENDIF
IF (nboun.GT.mxbou) THEN
  WRITE(*,3) nboun
  STOP
ENDIF
DO 100 i = 1,41
  READ(10,*)
100 CONTINUE
DO 101 i = 1,npoin
  READ(10,*) ip ,(coord(j,ip) ,j = 1,2)
  IF (ip.NE.i) THEN
    WRITE(*,4) i
    STOP
  ENDIF
101 CONTINUE
  READ(10,*)
DO 102 i = 1,nelem
  READ(10,*) ie ,(intma(j,ie) ,j=1,3)
  IF (ie.NE.i) THEN
    WRITE(*,5) i
    STOP
  ENDIF
102 CONTINUE
  READ(10,*)
DO 103 i = 1,npoin
  READ(10,*)
103 CONTINUE
  READ(10,*)
DO 104 i = 1,nboun
  READ(10,*) (isido(j,i) ,j=1,4)
104 CONTINUE

CLOSE(10)

1 FORMAT(' mxpoi needs to be increased to:' ,i5)
2 FORMAT(' mxele needs to be increased to:' ,i5)
3 FORMAT(' mxbou needs to be increased to:' ,i5)
4 FORMAT(' node no.' ,i5 , ' in data file is missing')
5 FORMAT(' elem no.' ,i5 , ' in data file is missing')

C =====
C ==Purpose:To set the initial value of velocity and pressure==
C =====

WRITE(*,*) 'please enter your start option : '
READ (*,*) iopt

IF (iopt.EQ.1) THEN

  OPEN (unit = 11 ,file = filnam(1:1)//'.out' ,err=40)

  DO 105 i = 1,32
    READ (11,*)
105 CONTINUE
  DO 106 ip = 1,npoin
    READ (11,*) i ,u(ip) ,v(ip)
    READ (11,*) p(ip)

```

```

106      CONTINUE

        CLOSE(11)
ELSE
  DO 107 ip = 1,npoin
    u(ip) = 0.0
    v(ip) = 0.0
    p(ip) = 0.0
    idx(ip) = 0
107      CONTINUE
        DO 108 ib = 1,nboun
          IF (isido(4,ib).EQ.1) THEN
            DO 109 ii = 1,2
              ip = isido(ii,ib)
              x = coord(1,ip)
              y = coord(2,ip)
              IF (idx(ip).EQ.0) THEN
                u(ip) = uinit(x,y)
                v(ip) = vinit(x,y)
                idx(ip) = 1
              ENDIF
            ENDIF
109          CONTINUE
        ENDIF
108      CONTINUE
    ENDIF
    DO 110 ib = 1,nboun
      IF (isido(4,ib).EQ.2) isido(4,ib) = 3
      IF (isido(4,ib).EQ.5) isido(4,ib) = 2
110    CONTINUE

C      =====
C      ==Purpose :To transfer data to input file of CBS program ==
C      ==          (.in) ==
C      =====

      OPEN (unit = 12 ,file = filnam(1:1)//'.in' ,err=40)

      WRITE(12,*) ' nelem  npoin  nboun  iopt'
      WRITE(12,10) nelem ,npoin ,nboun ,iopt
      WRITE(12,*) ' ntime  istep  iwrite'
      WRITE(12,11) ntime ,istep ,iwrite
      WRITE(12,*) ' csafm          rho          mu      toler'
      WRITE(12,12) csafm ,rho ,mu ,toler
      WRITE(12,13) ' element nodal connection[' , nelem, ' ]:'
      DO 1000 ie = 1,nelem
        WRITE(12,15) ie ,(intma(j,ie) ,j = 1,3)
1000    CONTINUE
      WRITE(12,13) ' nodal coordinates[' , npoin, ' ]:'
      DO 1001 ip = 1,npoin
        WRITE(12,14) ip ,(coord(j,ip) ,j = 1,2)
1001    CONTINUE
      WRITE(12,*) ' initial condition (u, v, p)'
      DO 1002 ip = 1,npoin
        WRITE(12,14) ip ,u(ip) ,v(ip) ,p(ip)
1002    CONTINUE
      WRITE(12,13) ' boundary sides[' , nboun, ' ]:'
      DO 1003 ib = 1,nboun
        WRITE(12,15) (isido(j,ib) ,j = 1,4)
1003    CONTINUE

```

```

10 FORMAT(1X ,I6 ,2(2X, I6) ,3X, I4)
11 FORMAT(1X ,I6 ,3X ,I5 ,3X ,I6)
12 FORMAT(2X ,F5.3 ,4X ,E12.6 ,3X ,E12.6 ,3X ,E7.1)
13 FORMAT(A ,I6 ,A)
14 FORMAT(2X ,I5 ,3X ,E14.6 ,2(2X, E14.6))
15 FORMAT(2X ,I5 ,3(1X, I5))

      CLOSE(12)

      END
*****
      FUNCTION namlen(filnam)

      CHARACTER   filnam*20

      namlen = 0
      DO 100 i = 20,1,-1
        IF (filnam(i:i).EQ.' ') GOTO 100
        namlen = i
        GOTO 200
100 CONTINUE

200 RETURN
      END
*****
      FUNCTION uunit(x, y)

      REAL*8   x, y, uunit

      uunit = 1.

      RETURN
      END
*****
      FUNCTION vunit(x, y)

      REAL*8   x, y, vunit

      vunit = 0.

      RETURN
      END
*****
C=====end of program=====C

```

ภาคผนวก ค

รายละเอียดของโปรแกรม CBSFEM

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ CBSFEM มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```

PROGRAM      cbsfem
C
C =====
C ==Purpose :To prepare result data from CBS program for      ==
C ==          adaptive meshing in femesh model file           ==
C =====

IMPLICIT     NONE

INTEGER      mxpoi

PARAMETER (mxpoi=50000)

CHARACTER    text*40,name1*20 ,name2*20

INTEGER      npoin      ,integ      ,I      ,ip      ,l      ,k
INTEGER      namlen

REAL*8       zero      ,delv      ,delp      ,err

REAL*8       p0(mxpoi)      ,u0(mxpoi)      ,v0(mxpoi)
REAL*8       vel0(mxpoi)    ,p1(mxpoi)      ,u1(mxpoi)
REAL*8       vl(mxpoi)     ,vell(mxpoi)

C
C =====
C ==Purpose :To read required input from cbs output (.op) and ==
C ==          details of femesh model (.out)                  ==
C =====

40 WRITE(*,*) 'please enter your input file name : '
   READ (*,*) name1
50 WRITE(*,*) 'please enter your output file name : '
   READ (*,*) name2
   l = namlen(name1)
   IF (l.EQ.0) GOTO 40
   k = namlen(name2)
   IF (k.EQ.0) GOTO 50

   OPEN (unit = 10 ,file = name1(1:l)//'.op' ,err=40)
   OPEN (unit = 11 ,file = name1(1:l)//'.out' ,err=40)
   OPEN (unit = 12 ,file = name2(1:k)//'.out' ,err=50)

   READ (10,*)
   READ (10,*) integ ,npoin ,integ ,integ
   IF (npoin.GT.mxpoi) THEN
       WRITE(*,1) npoin
       STOP
   ENDIF
   DO 100 i = 1,5
       READ (10,*)

```



```

100 CONTINUE
    DO 200 i = 1,npoin
        READ (10,*) ip ,ul(ip) ,v1(ip) ,p1(ip)
        IF (ip.NE.i) THEN
            WRITE(*,2) i
            STOP
        ENDIF
200 CONTINUE

    DO 300 i = 1,30
        READ (11,3) text
        WRITE(12,3) text
300 CONTINUE
    READ (11,*)
    READ (11,*)
    DO 400 ip = 1,npoin
        READ (11,*) i ,u0(ip) ,v0(ip)
        READ (11,*) p0(ip)
        IF (i.NE.ip) THEN
            WRITE(*,2) ip
            STOP
        ENDIF
400 CONTINUE

1 FORMAT(' mxpoi needs to be increased to:' ,i5)
2 FORMAT(' node no.' ,i5 , ' in data file is missing')
3 FORMAT(5a40)

CLOSE(11)

C =====
C ==Purpose :To check different output between last time ==
C ==          interpolate node (name1.out) result and this time==
C ==          adaptive result (name2.out) ==
C =====

delv = 0.0
delp = 0.0
DO 500 ip = 1,npoin
    vel0(ip) = SQRT(u0(ip)*u0(ip) + v0(ip)*v0(ip))
    vel1(ip) = SQRT(ul(ip)*ul(ip) + v1(ip)*v1(ip))
500 CONTINUE
DO 600 ip = 1,npoin
    delv = delv + ((vel1(ip) - vel0(ip)) * (vel1(ip) - vel0(ip)))
    delp = delp + ((p1(ip) - p0(ip)) * (p1(ip) - p0(ip)))
600 CONTINUE
delv = SQRT(delv)
delp = SQRT(delp)
err = MAX (delv ,delp)
err = err / npoin

IF (delv.GE.delp) THEN
    WRITE (*,4) err
    READ (10,*)
    READ (10,*)
    WRITE(10,4) err
ENDIF
IF (delp.GT.delv) THEN
    WRITE (*,5) err
    READ (10,*)

```

```

        READ (10,*)
        WRITE(10,5) err
    ENDIF

    CLOSE(10)

4  FORMAT ('maximum error is velocity = ' ,e15.6)
5  FORMAT ('maximum error is pressure = ' ,e15.6)

C  =====
C  ==Purpose :To prepare data to femesh model for adaptive ==
C  ==          (.out) ==
C  =====

    zero = 0.0

    WRITE(12,*)
    WRITE(12,6)
    DO 700 ip = 1,npoin
        WRITE(12,7) ip ,ul(ip) ,vl(ip) ,pl(ip) ,zero
700  CONTINUE

    6 0FORMAT('  NODE          U          ',
1      ' V          P          H')
    7  FORMAT(1x ,i6 ,1x ,e15.6 ,3(2X, e15.6))

    CLOSE(12)

    END
*****
    FUNCTION namlen(filnam)

    CHARACTER filnam*20

    namlen = 0
    DO 100 i = 20,1,-1
        IF (filnam(i:i).EQ.' ') GOTO 100
        namlen = i
        GOTO 200
100  CONTINUE

200  RETURN
    END
*****
C=====end of program=====C

```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวพัชรี ชีระเอก เกิดเมื่อวันที่ 4 เดือนกันยายน พุทธศักราช 2518 จังหวัด นครราชสีมา สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตจากภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2541 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2544



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย