การแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง

นายพันธรัตน์ ไชยวรวิทย์สกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1962-7

ON-LINE DIGIT SET CONVERSION FOR FLOATING-POINT REDUNDANT COMPLEX NUMBER SYSTEM

Mr. Pantarat Chaiwarawitsakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Computer Science

Department of Computer Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1962-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง
โดย	นายพันธรัตน์ ไชยวรวิทย์สกุล
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

……………………………………..….. คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

………………………………………… ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สาธิต วงศ์ประทีป)

……………………………………... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

……………………………………... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง)

………………………………………… กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

พันธรัตน์ ไชยวรวิทย์สกุล : การแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง. (ON-LINE DIGIT SET CONVERSION FOR FLOATING-POINT REDUNDANT COMPLEX NUMBER SYSTEM) อ. ที่ปรึกษา: อ.ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 35 หน้า. ISBN 974-53-1962-7.

ในปัจจุบันระบบเลขจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง นักคณิตศาสตร์เกาส์ (Gausse) ได้นำเสนอวิธีการแสดงจำนวนซ้ำซ้อน โดยการใช้จำนวนจริงสองจำนวนในการแสดงจำนวนซ้ำซ้อนเพียงจำนวนเดียว โดยที่จำนวนจริงทั้งสองจำนวนนั้นเป็นอิสระต่อกัน เมื่อนำระบบของเกาส์มากระทำกับตัวดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต(fundamental arithmetic operator) ก็คือการบวก ลบ คูณ หาร จะพบว่าใช้เวลาในการคำนวณสูงเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้คำนวณบนระบบจำนวนจริง คนุท(Knuth) จึงออกแบบระบบเลขฐานของจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมา ซึ่งได้รับการพิสูจน์ในเวลาต่อมาว่าใช้เวลาในการคำนวณลดลง อย่างไรก็ตามขนาดของจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทยังมีขนาดใหญ่ งานวิจัยชิ้นนี้จึงมุ่งเน้นเพื่อลดขนาดของจำนวนในระบบนี้ โดยใช้แนวคิดของเลขอิงดรรชนี (floating-point format) นอกจากนี้งานวิจัยชิ้นนี้มุ่งเน้น ที่จะพัฒนาอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง ที่มีค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่ากับสอง และเพื่อนำมาใช้กับระบบดังกล่าว ระบบจำนวนจำเป็นต้องเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อนเท่านั้น

ภาควิชา....... วิศวกรรมคอมพิวเตอร์.........ลายมือชื่อนิสิต..
สาขาวิชา.......วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา......................................
ปีการศึกษา ...2547................................

4670408621 : MAJOR COMPUTER SCIENCE

KEY WORD: KNUTH COMPLEX NUMBER SYSTEM / DIGIT SET CONVERSION / FLOATING-POINT NUMBER SYSTEM / REDUNDANT NUMBER SYSTEM

PANTARAT CHAIWARAWITSAKUL: (ON-LINE DIGIT SET CONVERSION FOR FLOATING-POINT REDUNDANT COMPLEX NUMBER SYSTEM). THESIS ADVISOR: ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 35 pp. ISBN: 974-53-1962-7

Nowadays a complex number system has been used widely. Gausse introduced a system to represent a complex number using two real numbers. The two real numbers are maintained independently. Time used for fundamental arithmetic operations in this system is longer compared with the real number system. In order to reduce calculation time, Knuth proposed a new complex number system. We found that the size of the number is large. This thesis proposes a novel system to reduce the size of numbers in this system, using the concept of floating-point format. In addition this thesis aims to develop an on-line fundamental arithmetic algorithm for the new system illustrated by an on-line digit set conversion with an on-line delay 2. This can be realized only if the number system is redundant.

Department…...... Computer Engineering…..Student's……………….……..………………

Field of study…....Computer Science………..Advisor's..

Academic year …2004………………………….

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างยิ่งจาก อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง และคำปรึกษาตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ให้ความเมตตา ช่วยเหลือ รวมทั้งโอกาส และสิ่งที่ดีแก่ผู้วิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สาธิต วงศ์ประทีป อาจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และผศ. ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่อาจสำเร็จได้หากไม่ได้รับความร่วมมือจากทุกท่าน และขอขอบคุณอาจารย์ในสาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่าน

ขอขอบคุณ เพื่อนๆ ทุกๆ คนที่ให้คำแนะนำ คำปรึกษา กำลังใจ เป็นอย่างดีจนวิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ออกมาได้ ถึงแม้บางครั้งจะเป็นการรบกวนจนงานไม่คืบหน้าก็ตาม

ท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในทุกๆ ด้าน ทั้งด้านกำลังทรัพย์ และมีความเข้าใจในตัวผู้วิจัยเป็นอย่างดี จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทที่ หน้า

สารบัญภาพ

รูปที่ หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

จากการศึกษาประวัติศาสตร์อันยาวนานของระบบจำนวนที่เกี่ยวข้องในชีวิตประจำวันของมนุษย์นั้น พบว่ามีระบบจำนวนมากมายหลายระบบซึ่งแต่ละระบบ ถูกออกแบบมาเพื่อความเหมาะสมในการทำงานแต่ละงาน มีทั้งระบบจำนวนที่ใช้ในเรื่องของวันและเวลา เช่นระบบเลขฐานหกสิบที่ค้นพบว่าถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดยชาวบาบิโลน เป็นต้น สำหรับระบบจำนวนเพื่อใช้ในการประมวลผลนั้น ระบบจำนวนแบบเลขฐาน (based number system or radix number system) เป็นที่นิยมใช้กันมาก สิ่งที่ควบคู่ไปกับระบบจำนวนเพื่อการประมวลผลก็คือ ตัวดำเนินงาน (operator) แบบต่างๆ ที่ต้องถูกออกแบบมาใช้ในการประมวลผลด้วย โดยตัวดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (fundamental arithmetic operator) ก็คือ การบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยการออกแบบจะคำนึงถึงความเหมาะสม ในที่นี้ความเหมาะสม อาจเป็น ความเร็วในการคำนวณ ความไม่ซับซ้อนของการทำงาน ความถูกต้องแม่นยำ เป็นต้น อนึ่งตัวดำเนินการต่างๆ ในระบบจำนวนแบบเลขฐานนั้น สามารถถูกพิจารณาเสมือนการแปลงชุดตัวเลข (digit set conversion) จากเซตหนึ่งไปสู่อีกเซตหนึ่งได้ภายใต้เลขฐานเดียวกัน ซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

สำหรับคอมพิวเตอร์นั้น ระบบเลขฐานสอง (binary number system) ได้ถูกเลือกมาใช้ ไม่ว่าจะเป็นจำนวนเต็ม จำนวนจริง หรือแม้กระทั่งจำนวนเชิงซ้อน ตัวดำเนินการพื้นฐานบนฐานสองได้ถูกออกแบบมาอย่างมีประสิทธิภาพ ปัจจุบันนี้จำนวนเชิงซ้อนได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในการแก้ปัญหาทางการคำนวณ การประมวลผลของปัญหาที่มีความซับซ้อนหลายปัญหาก็สามารถแสดงได้โดยใช้จำนวนเชิงซ้อน นักคณิตศาสตร์ เกาส์ (Gausse) ได้เสนอวิธีการจะใช้เลขฐานสองสองจำนวนมาสร้างความสัมพันธ์กันเพื่อเป็นตัวแทนจำนวนเชิงซ้อนได้ แต่การคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จะใช้เวลาสูงเมื่อเทียบกับการคำนวณบนจำนวนจริง ทั้งนี้เพราะระบบจำนวนถูกออกแบบมาสำหรับจำนวนจริงเป็นหลัก ดังนั้นจึงได้มีนักคณิตศาสตร์ชื่อคนุท (Knuth) ได้ออกแบบระบบเลขฐานของจำนวนเชิงซ้อน [1] ขึ้นมา โดยผลงานการวิจัยของนักวิจัยหลายท่านต่อมาได้แสดงให้เห็นว่า ระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทเป็นระบบจำนวนที่มีประสิทธิภาพในด้านความเร็วในการประมวลผล แต่ทั้งนี้ ขนาดของจำนวนในระบบดังกล่าวมี

ขนาดใหญ่ สิ้นเปลืองเนื้อที่ในการจัดเก็บ นอกจากนี้ยังมีระบบจำนวนเชิงซ้อนรูปแบบอื่นที่ได้ถูกนำเสนอมา เช่นระบบจำนวนเชิงซ้อนของ เพนนี (Penney) [2] ซึ่งใช้ฐานเป็น -1 + i และชุดตัวเลข {0,1} ระบบจำนวนเชิงซ้อนอีกระบบนำเสนอโดยซาเฟอร์ (Safer) [3]

ในงานวิจัยนี้ จะมุ่งเน้นแก้ปัญหาความสิ้นเปลืองของเนื้อที่ในการจัดเก็บจำนวน โดยนำแนวคิดของการจัดรูปแบบเลขอิงดรรชนี (floating-point format) [4] ของจำนวนจริงมาใช้ โดยอาศัยข้อได้เปรียบ ของระบบจำนวนของคนุทซึ่งส่วนจำนวนจริง และส่วนจินตภาพของจำนวนสามารถถูกบรรยายได้โดยใช้จำนวนชุดเดียวกัน เมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีแล้ว จำนวนเชิงซ้อนของคนุทส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) มีความเป็นอิสระจากกันมากกว่าระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนี นอกจากนี้ในงานวิจัยนี้ยังสนใจออกแบบตัวดำเนินการพื้นฐานที่จำเป็นในระบบดังกล่าวด้วย โดยพิจารณาตัวดำเนินการในรูปของการแปลงชุดตัวเลข และรูปแบบของการประมวลผลความเร็วสูงที่ถูกเลือกมาใช้ในงานวิจัยนี้ เป็นการประมวลผลเชื่อมตรง (on-line computation) ซึ่งถูกเสนอครั้งแรกโดยเออเซโกวัก (Ercegovac) และทราเวดิ (Trivedi) [5,6] ในการประมวลผลแบบนี้เป็นลักษณะของการประมวลผลแบบลำดับและการประมวลผลท่อตรง (pipeline processing) ร่วมกัน ดังนั้นระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ใช้ในงานวิจัยนี้จึงต้องเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system)[7] ด้วยเช่นกัน

1.2 วัตถุประสงค์

1. นำเสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

2. นำเสนออัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง

1.3 ขอบเขตการดำเนินงาน

1. เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุททั่วไปกับ ระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

2. ออกแบบอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรง ของระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ของฐานทั่วไปนั่นคือ ฐาน $\beta = i\sqrt{r}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก

1.4 การดำเนินการวิจัย

1.ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานต่างๆ เช่น ระบบจำนวนซ้ำซ้อน อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรง

2.ศึกษาระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท รวมถึงอัลกอริทึมในการดำเนินการต่างๆ

3.พัฒนาระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทในรูปแบบตัวเลขอิงดรรชนี

4.ออกแบบอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทในรูปแบบเลขอิงดรรชนีบนฐาน $i\sqrt{r}$

5.เสนอทฤษฎี เพื่อพิสูจน์ว่าอัลกอริทึมที่ออกแบบนั้นถูกต้อง

6.สรุปและจัดทำเอกสารวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้วิธีการในการจัดเก็บจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี พร้อมทั้งเสนออัลกอริทึมในการแปลงชุดตัวเลข ที่เปรียบเสมือนฟังก์ชันของตัวดำเนินการในระบบตัวเลขที่เสนอ

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นบทความทางวิชาการในหัวข้อเรื่อง "On-line digit set conversion for floating-point redundant complex number" โดย พันธรัตน์ ไชยวรวิทย์สกุล และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ "The 9th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE'9)" ณ. คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ถนน พระราม6 กรุงเทพมหานคร ในระหว่างวันที่ 23-25 มีนาคม 2548

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึง ระบบจำนวนเชิงซ้อน และระบบจำนวนซ้ำซ้อนที่จะนำมาใช้ในการออกแบบระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี นอกจากนี้ยังกล่าวถึงแนวคิดของการทำงานเชื่อมตรง และการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรงเพื่อนำมาใช้ในการออกแบบ การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของงานวิจัยนี้ด้วย

2.1 **เลขคณิตเชื่อมตรง** (on-line arithmetic)

การดำเนินการพื้นฐานทั่วไปนั้นจะรับค่าเข้าไปทั้งหมดก่อน แล้วค่อยดำเนินการและส่งผลออกมา ถ้าหากข้อมูลนำเข้า (input data) นั้นมีขนาดและความยาวมากก่อนดำเนินการจะต้องเสียเวลาในการรับข้อมูลเข้ามาทั้งหมดก่อน อีกทั้งเสียเนื้อที่ในการเก็บข้อมูลก่อนนำไปคำนวณอีก และในกรณีเลวร้าย (worse case) หากข้อมูลนำเข้ามีความยาวไม่รู้จบ (infinity) ระบบก็จะรับข้อมูลไม่รู้จบและไม่สามารถเริ่มคำนวณได้ ในปีค.ศ. 1977 เออเซโกวัก และทราเวดิ ได้นำเสนอการทำงานเชื่อมตรง [5,6] ลักษณะของระบบคือ ระบบจะรับข้อมูลนำเข้ามาทีละตัวมาดำเนินการคำนวณและส่งคำตอบออกไปทีละตัว ดังนั้นถึงแม้มีข้อมูลนำเข้าที่มีความยาวไม่รู้จบระบบนี้ก็สามารถคำนวณได้ ทิศทางการดำเนินการนั้นสามารถทำได้สองทิศทางคือ จากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมาก (least significant digit first : LSDF) เช่น การบวก การลบ การคูณ และการดำเนินการตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อย (most significant digit first : MSDF) เช่น การหาร

สิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงในการดำเนินการเชื่อมตรงนั่นคือ ค่าความหน่วง (delay: δ) ซึ่งเมื่อรับข้อมูลนำเข้าและดำเนินการแล้วนั้น ในบางกรณีข้อมูลนำเข้าที่รับเข้าไปแล้วนั้นยังไม่พร้อมที่จะดำเนินการต้องรับข้อมูลนำเข้าเพิ่ม ในส่วนนี้คือค่าความหน่วงซึ่งก็คือจำนวนข้อมูลนำเข้าที่รับเข้าแล้วยังไม่สามารถผลิตคำตอบได้นั่นเอง ถ้าค่าความหน่วงมีค่ามากหมายถึงต้องรับข้อมูลนำเข้าไปหลายตัวก่อนที่ผลิตคำตอบได้ ค่าความหน่วงที่ต่ำที่สุดคือ 0 ซึ่งก็คือ รับข้อมูลนำเข้าเพียงตัวแรกตัวเดียวก็สามารถผลิตคำตอบได้ทันที ค่าความหน่วงในแต่ครั้งนั้นจะมากหรือจะน้อยขึ้นกับว่าทิศทางการดำเนินการกับประเภทของการดำเนินการ

การบวก การลบ และการคูณ ในแบบคลาสสิกนั้น จะมีทิศทางในการคำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยกว่าไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากกว่า ซึ่งค่าความหน่วงสำหรับ การบวก การลบ และการคูณ จะมีค่าความหน่วงเป็นศูนย์ แต่การหารนั้นได้รับการพิสูจน์แล้วว่ามีทิศทางการคำนวณได้เพียงทางเดียวคือ คำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากกว่า ไปยังตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยกว่าเท่านั้น สำหรับการทำงานแบบท่อตรงนั้น ตัวดำเนินการทุกตัวจะต้องมีทิศทางในการคำนวณไปในทิศเดียวกัน ดังนั้นการบวก การลบ และการคูณนั้นจะต้องมีทิศทางการคำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากไปหาตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อย

2.2 **ระบบจำนวนซ้ำซ้อน** (redundant number system)

ระบบจำนวนสามารถเขียนอยู่ในรูปของ (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน β ที่สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $\beta > 1$ และเซตจำกัดของตัวเลข (finite digit set) ที่เป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ในระบบจำนวนตามวิธีคลาสสิค

ถ้า β เป็นจำนวนเต็มและมีเซตของตัวเลข D อยู่ในรูปของ $\{d \in Z \mid 0 \le d \le |\beta| - 1\}$ เรียกเซตของตัวเลขนี้ว่า เซตจำกัดของตัวเลขแบบคาโนนิคอล (canonical digit set) แทนด้วย C ซึ่ง $C = \{0,1,2,3,\ldots,|\beta|-1\}$ สำหรับระบบจำนวนที่ประกอบด้วยเลขฐาน β ให้ X เป็นรูปแบบแทนจำนวนที่มีฐาน β และมีชุดตัวเลขอยู่ใน D สามารถเขียน X ได้ดังนี้

$$X = \left(x_a x_{a-1} x_{a-2} x_{a-3} x_{a-4} \ldots . x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3} \ldots .\right)_\beta$$

โดยที่ $x_i \in D$ และ $i \le a$

ค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของ X ในฐาน β เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|X\|$ นิยามดังนี้

$$\|X\| = \sum_{i=a}^{-\infty} x_i \beta^i$$

ในระบบจำนวน (β, D) ถ้าสามารถแทนตัวเลขที่มีเลขฐาน β ที่มีความยาวจำกัดได้ทั้ง X_1 และ X_2 โดยที่ $\|X_1\| = \|X_2\|$ แล้ว เรียกระบบจำนวนนี้ว่าระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) [7] ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ β = 2 และ $D = \{\bar{1},0,1\}$ โดยที่ $\bar{1}$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทน -1 จะสามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนของ 5 ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบดังนี้คือ $(101)_2$ และ $(10\bar{1}\bar{1})_2$

2.3 ระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท (Knuth complex number system)

ระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท [1] เป็นระบบจำนวนแบบเลขฐานที่ถูกเสนอครั้งแรกในปี 1960 โดยคนุท ซึ่งเสนอให้ใช้จำนวนเชิงซ้อนเป็นเลขฐาน จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นฐานนั้นจะอยู่ในรูปของ $\beta = i\sqrt{r}$ โดยที่ $r \in Z, r \geq 2$ และมีชุดตัวเลข $D = \{d \in Z \mid 0 \leq d \leq r-1\}$ พร้อมทั้งได้พิสูจน์ว่า จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในระบบดังกล่าวได้ทุกจำนวน (complete system of complex number) และจำนวนเชิงซ้อนหนึ่งจำนวนสามารถเขียนได้จำกัดเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้นด้วย (unique representation) เช่น ในระบบจำนวนเลขฐาน $\beta = 2i$ (r มีค่าเท่ากับ 4) และชุดตัวเลขคือ $D = \{0,1,2,3\}$ พิจารณาจำนวนเชิงซ้อนในแบบของเกาส์ -5+17i สามารถเขียนได้ดังนี้

β^5	β^4	β^3	β^2	β^1	β^0	β^{-1}
$32i$	16	$-8i$	-4	$2i$	1	$-\frac{1}{2}i$
1	0	2	2	1	3	2

รูปที่ 2.1 แสดงค่า -5+17i สำหรับฐาน 2i และชุดตัวเลข {0,1,2,3}

นั่นคือ $-5+17i = (102213.2)_{2i}$

ค่าเชิงตัวเลขของจำนวนเชิงซ้อน $X = x_k x_{k-1} x_{k-2} \ldots x_{-m}$ ใดๆ จะแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ $\|X\|$ โดยสามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$\|X\| = \sum_{k \leq j \leq m} x_j \left(i\sqrt{r}\right)^j$$

สำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนนั้นมีการกล่าวถึงใน [8] ซึ่งลักษณะของระบบจำนวนจะใช้ชุดตัวเลขใหม่ดังนี้ $D = \{d \in Z \mid a \leq d \leq b\}$ โดยที่ a เป็นเลขจำนวนเต็มลบหรือศูนย์ และ b เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ แต่ทั้ง a และ b จะเป็นศูนย์พร้อมกันไม่ได้ในกรณีนี้ $b + a - 1 > r^2$ ทำให้สามารถแสดงจำนวนเดียวกันได้หลายรูปแบบเช่น แสดงรูปแบบแทนจำนวนของ -5+17i บนฐาน 2i และชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ได้เป็น $(10210\bar{1}.2)_{2i}$ ดังรูป 2.2

β^5	β^4	β^3	β^2	β^1	β^0	β^{-1}
$32i$	16	$-8i$	-4	$2i$	1	$-\frac{1}{2}i$
1	0	2	1	0	$\bar{1}$	2

รูปที่ 2.2 แสดงค่า -5+17i สำหรับฐาน 2i และชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

2.3.1 อัลกอริทึมการบวกของระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทฐาน $i\sqrt{2}$

อัลกอริทึมการบวกมีกล่าวไว้ในในระบบจำนวนเชิงซ้อน [1,9] ซึ่งในที่นี่จะแสดงให้ดูการบวกของระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทโดยจะแสดงในฐาน $\beta = i\sqrt{2}$ และมีชุดตัวเลข $D = \{\bar{1},0,1\}$

ให้ X และ Y เป็นจำนวนหนึ่งในฐาน $\beta = i\sqrt{2}$ และมีชุดตัวเลข $D = \{\bar{1},0,1\}$

$$X = (x_m x_{m-1} \ldots x_l)_{i\sqrt{2}}, x_j \in D$$
$$Y = (y_m y_{m-1} \ldots y_l)_{i\sqrt{2}}, y_j \in D$$

ให้ $S = (s_m s_{m-1} \ldots s_l)_{i\sqrt{2}}, s_j = x_j + y_j$ จะได้ $\|S\| = \|X\| + \|Y\|$ จุดมุ่งหมายเพื่อจะหาค่า Z ที่

$$Z = (z_{m+k} z_{m+k-1} \ldots z_l)_{i\sqrt{2}}, z_j \in D$$

จนกระทั่งได้ $\|Z\| = \|S\|$ ในการทดของระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทจะแตกต่างจากระบบอื่น สำหรับในที่นี้เราใช้ฐาน $\beta = i\sqrt{2}$ จะได้ ตำแหน่งใดมีค่าเท่ากับ 2 จะแสดงเป็น $(\bar{1}00)_{i\sqrt{2}}$ ดังนั้น การทดนั้น จะทด -1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 ทางด้านซ้าย

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้นำตัวอย่างอัลกอริทึมการบวกสำหรับฐาน $\beta = i\sqrt{2}$ ดังอัลกอริทึมต่อไปนี้

Algorithm: Knuth_Addition

input: X,Y;

output: Z;

begin

$c_l = 0;$

$c_{l+1} = 0;$

for $l \le j \le m$

$s_j := x_j + y_j;$

if $s_j = 2$ **then** $c_{j+2} := -1; r_j := 0;$ **endif;**

if $s_j = 1$

if $s_{j-2} \le -1$ **then** $c_{j+2} := -1; r_j := -1;$

else $c_{j+2} := 0; r_j := 1;$ **endif; endif;**

if $s_j = 0$ **then** $c_{j+2} := 0; r_j := 0;$ **endif;**

if $s_j = -1$

if $s_{j-2} \geq 1$ **then** $c_{j+2} := -1; r_j := 1;$

else $c_{j+2} := 0; r_j = -1;$ **endif; endif;**

if $s_j := -2$ **then** $c_{j+2} := 1; r_j := 0;$ **endif;**

$z_j := c_j + r_j;$

j = j+1;

endfor;

$z_{m+1} := c_{m+1};$

$z_{m+2} := c_{m+2};$

end;

2.3.2 อัลกอริทึมการคูณเชื่อมตรงของระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทฐาน $i\sqrt{r}$

พิจารณจำนวนบนฐาน $\beta = i\sqrt{r}, r \geq 2$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็ม ให้ $A = (.a_{-1}a_{-2}....)_\beta$ และ $B = (.b_{-1}b_{-2}....)_\beta$ เป็นตัวตั้งคูณและตัวคูณ ตามลำดับ และ สมาชิกของ A และ B มีชุดตัวเลขเป็นดังนี้ $a_j, b_j \in E = \left\{ e \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq e \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\}$ และให้ $X = (.x_{-1}x_{-2}x_{-3}....)_\beta$ เมื่อ $x_j \in E$ เช่นกัน เป็นผลคูณจากอัลกอริทึมการคูณ [10] อัลกอริทึมการคูณดังอัลกอริทึมต่อไปนี้

Algorithm Knuth_Multiplication

input: $A = (.a_{-1}a_{-2}...)_\beta, a_j \in C$

$B = (.b_{-1}b_{-2}...)_\beta, b_j \in C$

$a_{-1} = a_{-2} = ... = a_{-\delta} = 0, b_{-1} = b_{-2} = ... = b_{-\delta} = 0,$

output: $X = (.x_{-1}x_{-2}...)_\beta, x_j \in \varepsilon$

$\|X\| = \sum_{j \leq -1} x_j \beta^j = \|A\| \cdot \|B\|$

begin

$W_0 := 0; B_0 := 0; x_0 := 0; j := -1;$

while $j \leq -1$ **do**

$W_j := \beta(W_{j+1} - x_{j+1}) + A_j b_j + B_{j+1} a_j;$

$x_j := Sign(\mathrm{Re}(W_j)) \cdot \left\lfloor \leq \left|\mathrm{Re}(W_j)\right| + \frac{1}{2} \right\rfloor;$

$j := j + 1;$

enddo;

end;

ตัวอย่าง 2.1 *กำหนดให้* $A = (.1\bar{2}0\bar{1}20100)_{2i}$ *และ* $B = (.1\bar{1}0012100)_{2i}$ *ซึ่งแสดงอยู่บนฐาน* $2i$ *และมีชุดตัวเลข* $D = \{d \in Z \mid \bar{2} \le d \le 2\}$*, ผลคูณของ* A *และ* B *แสดงตารางที่ 2.1*

จาก [10] คำนวณค่าความหน่วงเชื่อมตรงได้เท่ากับ 3 ผลของการคูณของ A และ B ดังแสดงในตาราง 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงการคูณระหว่าง $(.1\bar{2}0\bar{1}20100)_{2i}$ และ $(.1\bar{1}0012100)_{2i}$

J	$A_j b_j + B_{j+1} a_j$	W_j	x_j	$2(W_j - x_j)$
-1	0.0001	0.0001	0	0.001
-2	0.01012	0.01112	0	0.112
-3	0.0	0.1112	0	1.112
-4	$0.000\bar{1}1$	$1.112\bar{1}1$	1	$1.12\bar{1}1$
-5	$0.0\bar{1}1\bar{1}00\bar{1}2$	$1.110000\bar{1}2$	1	$1.100000\bar{1}2$
-6	$0.00120\bar{1}\bar{2}$	$1.10120\bar{2}$	1	$1.0120\bar{2}$
-7	$0.0012\bar{1}\bar{1}\bar{1}121$	$1.\bar{1}1\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$	1	$\bar{1}.1\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$
-8	0.0	$\bar{1}.1\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$	$\bar{1}$	$1.\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$
-9	0.0	$1.\bar{1}2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$	1	$\bar{1}.2\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}21$

จากตางราง 2.1 จะได้ผลจาการคูณกันเท่ากับ $(0.1111\bar{1}1.....)_{2i}$

2.4 การแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรง

การแปลงชุดตัวเลขนั้นได้มีการกล่าวถึงใน [11] ซึ่งเป็นเสมือนฟังก์ชันการทำงานที่นิยามบนระบบจำนวนระบบหนึ่งไปสู่อีกระบบหนึ่งที่มีเลขฐานเดียวกัน

กำหนดให้ β เป็นเลขฐาน $|\beta| > 1$ และกำหนดให้ ชุดตัวเลข $D = \{d \in Z \mid a \le d \le b\}$ และชุดตัวเลข $E = \{e \in Z \mid s \le e \le t\}$ โดยที่ $a, s \le 0$ และ $b, t \ge 0$ การแปลงชุดตัวเลขคือการ

แปลงเลขจำนวนหนึ่ง X ที่แสดงอยู่ในระบบจำนวน (β, D) ให้เป็นเลข Y ที่อยู่ในระบบจำนวน (β, E) โดยที่ค่าเชิงตัวเลขของจำนวนทั้งสองเท่ากันโดยทำการแปลงทีละตัว เริ่มต้นจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากที่สุดไปยังตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด เช่นการแปลงชุดตัวเลขบนฐาน 2 จาก $D = \{d \in Z \mid -2 \le d \le 2\}$ ไปสู่ $E = \{e \in Z \mid -1 \le e \le 1\}$ เปรียบได้กับการสร้างฟังก์ชันการบวกเลขสองจำนวนบนระบบ $(\beta = 2, E)$ ถ้ากำหนดให้ X = 0011 และ Y = 0101 การบวกกันของ X และ Y สามารถแสดงได้ดังนี้

X	=	0	0	1	1	+	(β, E)
Y	=	0	1	0	1		(β, E)
--							
X+Y	=	0	1	1	2		(β, D)
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
ผลลัพธ์		1	0	0	0		(β, E)
==============================							

รูปที่ 2.3 แสดงตัวอย่างการแปลงชุดตัวเลข

จะเห็นว่า การบวกนี้ตรงกับการแปลงชุดตัวเลขจาก 0112 ในระบบ (β, D) ไปสู่ 1000 ในระบบ (β, E) ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากัน เป็นต้น

ปัญหาสำคัญของการทำเชื่อมตรงคือ ระบบจำนวนที่ใช้ต้องเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ซึ่งในที่นี้จะใช้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของ อวีเซียนิส (Avizienis) [12] อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนสำหรับจำนวนจริงใดๆ ได้ถูกพิสูจน์ว่าเป็นไปได้ใน [13]

2.5 **เลขอิงดรรชนีฐานสอง** (floating point for binary number)

การสร้างเลขอิงดรรชนี (floating point number) นั้นมีข้อดีในแง่ประหยัดเนื้อที่ในการเก็บข้อมูล ซึ่งได้มีการกำหนดมาตรฐานตามไว้ใน [4] โดยที่เลขอิงดรรชนีฐานสองมีได้สองแบบคือ แบบซิงเกิล (single format) และ แบบดับเบิ้ล (double format) ดังแสดงในรูปที่ 2.4 และ รูปที่ 2.5

1 บิต	8 บิต	23 บิต
s	e	f

รูปที่ 2.4 รูปแบบซิงเกิล (single format)

1 บิต	11 บิต	52 บิต
s	e	f

รูปที่ 2.5 รูปแบบดับเบิ้ล (double format)

โดยกำหนดให้

s เครื่องหมาย (sign) มีค่าเป็น 0 หมายถึงบวก และ 1 หมายถึงลบ

e ไบแอสเอ็กโพเนน (bias exponent) มีขนาด 8 บิตสำหรับซิงเกิล และ 11 บิตสำหรับดับเบิ้ล โดยจัดเก็บแบบ ทูคอมพลิเมนต์ (2's complement)

f แฟรคชัน (fraction) $f = (.b_{-1}b_{-2}b_{-3}.......b_{p-1})$

โดยที่ b_i มีค่าเป็น 0 หรือ 1

ค่าเชิงตัวเลขของจำนวนที่เก็บในรูปแบบเลขอิงดรรชนีสามารถคำนวณได้จาก

$$v = (-1)^s \, 2^e \, f$$

โดยที่ทั้งสองแบบนั้นจะมีการบรรยายและการคำนวณค่า v เหมือนกัน แต่ต่างกันที่ จำนวนบิตที่ใช้เก็บข้อมูลเท่านั้นเอง การเก็บค่าไว้ในรูปแบบเลขอิงดรรชนีนั้นจะมีประโยชน์ในการประหยัดเนื้อที่ในการเก็บเช่นค่า ต้องการเก็บค่า 101000000000 ในฐานสอง สามาถจัดเก็บในรูปแบบเลขอิงดรรชนีทั้งแบบซิงเกิลและแบบดับเบิ้ล ได้ดังแสดงในตาราง 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงการเก็บค่า 101000000000 ในรูปของตัวเลขอิงดรรชนี

s	e	f
0	00001100	10100000000000000000000
0	00000001100	1010000000000000000000000000000000000000000000000000

เมื่อนำค่าต่างๆ ในตางรางมาคำนวณหาค่าเชิงตัวเลขดังที่แสดงด้านล่าง

$$(-1)^0 2^{1100}(0.101) = 101000000000$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าที่คำนวณได้นั้นมีค่าเชิงตัวเลขเท่าเดิม

บทที่ 3

ระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

ในบทนี้จะกล่าวถึงระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ซึ่งพัฒนามาจากระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท โดยใช้ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอวีเซียนิส และพัฒนาจากหลักการของเลขอิงดรรชนี

3.1 บทนำ

จากการศึกษาระบบแทนจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุทพบว่า ขนาดของรูปแบบแทนจำนวน มีขนาดที่เปลี่ยนแปลงไปตามความแตกต่างของค่าเชิงตัวเลขของส่วนจำนวนจริง และส่วนจำนวนจินตภาพ เช่น ค่า -48+0.15625*i* เมื่อเขียนรูปแบบแทนจำนวนบนฐาน 2*i* และชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ จะได้ดังรูป 3.1

β^6	β^5	β^4	β^3	β^2	β^1	β^0	β^{-1}	β^{-2}	β^{-3}	β^{-4}	β^{-5}
-64	$32i$	16	$-8i$	-4	$2i$	0	$-\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}i$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}i$
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	$\bar{1}$

รูปที่ 3.1 แสดงค่า -48+0.15625*i* บนฐาน 2*i* ที่มีชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

จากรูปที่ 3.1 จะได้เมื่อเขียนรูปแทนจำนวนได้เป็น $(1010000.0010\bar{1})_{2i}$ พบว่าเมื่อเขียนรูปแบบแทนจำนวนบนฐาน 2*i* แล้วจะมีเลขศูนย์จำนวนมาก ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนำเสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ซึ่งคาดว่ารูปแบบแทนจำนวนในระบบใหม่นั้นจะไม่ต้องเขียนเลขศูนย์จำนวนมากเหมือนกับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท และพิสูจน์ว่าสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนในรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้ โดยจะพิสูจน์ว่าจำนวนเชิงซ้อนในระบบจำนวนของเกาส์ สามารถเขียนให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้

3.2 รูปแบบของระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

ระบบจำนวนใหม่ที่จะนำเสนอในหัวข้อนี้พัฒนาขึ้นมาโดยอาศัยหลักการของเลขอิงดรรชนีสำหรับเลขฐานสอง ซึ่งจะต้องพิจารณาและปรับปรุงให้เหมาะสมกับระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทโดยจะแยกพิจารณาเป็นส่วนๆ ดังนี้

3.2.1 ส่วนของเครื่องหมายบวกและลบ

พิจารณาระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทมีฐานเป็น $\beta = i\sqrt{r}$ โดยที่ $r \in Z, r \geq 2$ และชุดตัวเลข $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid 0 \leq d \leq r-1\}$ ซึ่งได้รับการพิสูจน์แล้วว่าสามารถแสดงจำนวนได้ทุกจำนวนแม้กระทั่งจำนวนส่วนจำนวนจริง หรือส่วนจำนวนจินตภาพ จะติดลบก็ตาม เช่น -4+2i สามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนบนระบบที่มีฐาน 2i และมีชุดตัวเลขเป็น {0,1,2,3} ได้ดังนี้

$$-4+2i = (110.00)_{2i}$$

นั่นคือสำหรับเลขอิงดรรชนีสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทนั้น ส่วนของเครื่องหมายบวกและลบนั้นไม่จำเป็นจะต้องมี

3.2.2 ส่วนแฟรคชัน

ระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทนั้นได้รวมส่วนของจำนวนจริง และส่วนของจำนวนจิตภาพเข้าไว้ด้วยกัน ดังนั้นส่วนแฟรคชันของระบบนี้มีเพียงส่วนเดียวซึ่งแสดงได้ทั้งส่วนของจำนวนจริงและส่วนของจำนวนจินตภาพ อย่างไรก็ตามงานวิจัยชิ้นนี้มีจุดประสงค์เพื่อเพิ่มความเร็วในการคำนวณจึงใช้การทำงานเชื่อมตรง ดังนั้นชุดตัวเลขในส่วนของแฟรคชันจึงต้องปรับเปลี่ยนให้สอดคล้องกับระบบนี้คือ

$$D = \left\{ d \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\} \tag{3.1}$$

ซึ่งเมื่อใช้ชุดตัวเลขนี้แล้วสามารถเขียนรูปแบบแทนค่าของจำนวนใดๆ ได้มากกว่า 1 แบบซึ่งก็คือระบบจำนวนซ้ำซ้อนนั่นเอง

3.2.3 ส่วนไบแอสเอกโพเนน

พิจารณารูปที่ 3.1 พบว่ารูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุทบนฐาน 2i นั้นมีเลขศูนย์เป็นจำนวนมากซึ่งเกิดจากที่ค่าเชิงตัวเลขของส่วนจำนวนจริงและส่วนของจำนวนจินตภาพห่างกัน ถ้าสามารถหาค่าคงที่ใดๆ นำเข้าไปหารเพื่อปรับให้ค่าเชิงตัวเลขของทั้ง 2

ส่วนมีค่าใกล้เคียงกัน เมื่อค่าเชิงตัวเลขของทั้ง 2 ส่วนมีค่าใกล้เคียงกันการเขียนรูปแบบแทนจำนวนก็น่าจะลดจำนวนเลขศูนย์ลงไปได้ ดังนั้นจึงต้องมี e ถึง 2 ตัว ให้เป็น e_R และ e_I สำหรับส่วนของจำนวนจริง และส่วนของจำนวนจินตภาพตามลำดับ เพื่อทำให้ค่าของทั้งสองส่วนใกล้เคียงกัน เราเรียก e_R และ e_I ว่าไบแอสเอกโพเนนของ ส่วนจำนวนจริง และส่วนของจำนวนจินตภาพตามลำดับ

หลักในการเลือกไบแอสเอกโพเนนสำหรับจำนวนจริง (e_R) นั้นจะต้องเลือกค่า β^{e_R} ที่เมื่อนำมาหารกับค่าเชิงตัวเลขในส่วนของจำนวนจริงแล้วมีค่าใกล้เคียงกับ $\left|\beta^{-2}\right|$ มากที่สุด ในทำนองเดียวกันในการเลือกค่าไบแอสเอกโพเนนสำหรับจำนวนจินตภาพ (e_I) จะต้องเลือกค่า β^{e_I} ซึ่งเมื่อนำมาหารกับค่าเชิงตัวเลขของส่วนจินตภาพแล้วมีค่าใกล้เคียงกับ $\left|\beta^{-1}\right|$ มากที่สุด

ตัวอย่าง 3.1 *เขียนรูปแบบแทนจำนวนบนระบบของจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ด้วยฐาน 2i และชุดตัวเลข* $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ *ของค่า -48+0.15625i*

เลือกไบแอสเอกโพเนนสำหรับจำนวนจริง (e_R) เป็น 8 นั่นคือหารด้วยค่าคงที่ β^8 เข้าไปในส่วนของจำนวนจริง และเลือกไบแอสเอกโพเนนสำหรับจำนวนจินตภาพ (e_I) เป็น -2 นั่นคือหารส่วนจำนวนจินตภาพด้วย β^{-2} หลังจากหาร β^8 และ β^{-2} ทั้งสองตัวเข้าไปแล้วจะได้ค่าเป็น –0.1875–0.625i ซึ่งจะทำให้ค่าทั้งส่วนจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพมีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด แสดงบนฐาน 2i ได้ดังรูปที่ 3.2

β^6	β^5	β^4	β^3	β^2	β^1	β^0	β^{-1}	β^{-2}	β^{-3}	β^{-4}	β^{-5}
-64	$32i$	16	$-8i$	-4	$2i$	0	$-\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}i$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}i$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	$\bar{1}$	1	0

รูปที่ 3.2 แสดงค่า -0.1875+0.625i บนฐาน 2i ที่มีชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

จากรูปที่ 3.2 จะได้ $-0.1875-0.625i=(0.11\bar{1}1)$

นิยามที่ 3.1 *ให้* X *เป็นรูปแบบแทนจำนวนบนระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี และฐาน* β X *จะประกอบด้วย 3 ส่วนดังแสดงในรูป 3.3*

n_R bits	n_I bits	p-1 bits
e_R	e_I	f

รูปที่ 3.3 แสดงส่วนต่าง ๆ ของเลขในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

e_R *คือไบแอสเอกโพเนนของส่วนจำนวนจริง*

e_I *คือไบแอสเอกโพเนนของส่วนจำนวนจินตภาพ*

f *คือส่วนของแฟรคชัน โดยที่* $f = (0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots)_\beta$ *โดยที่* $d_i \in D$

เมื่อ $\beta = i\sqrt{r}, r \in Z, r \geq 2$ *และ* $D = \left\{ d \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\}$

จะเขียน X *ซึ่งเป็นรูปแบบแทนจำนวนบนระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้ดังนี้*

$$X = \langle e_R, e_I, f \rangle$$

โดยที่ค่าเชิงตัวเลขสามารถคำนวณได้โดยสมการด้านล่าง

$$v = \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I} \qquad (3.2)$$

เมื่อ $\mathrm{Re}(f) = \sum_{k=-2}^{-\infty} d_k \beta^k$ *โดยที่* k *เป็นจำนวนเต็มคู่เสมอ*

และ $\mathrm{Im}(f) = \sum_{p=-1}^{-\infty} d_p \beta^p$ *โดยที่* p *เป็นจำนวนเต็มคี่เสมอ*

ดังนั้นสมการการคำนวณค่าเชิงตัวเลข สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$v = \left(\sum_{k=-2}^{-\infty} d_k \beta^k \right) \beta^{e_R} + \left(\sum_{p=-1}^{-\infty} d_p \beta^p \right) \beta^{e_I} \qquad (3.3)$$

เนื่องจากงานวิจัยนี้ มุ่งเน้นศึกษาถึงอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรงและแสดงให้เห็นวิธีการคำนวณ มิได้มีจุดประสงค์ในการออกแบบมาตรฐาน (standard) จึงมิได้กำหนดขนาดของส่วนต่างๆ ของรูปแบบแทนจำนวนอิงดรรชนี นั่นคือ ขนาดของ e_R, e_I, f มิได้กำหนดขนาดแน่นอน

3.3 อัลกอริทึมการแปลงเชื่อมตรงจากระบบจำนวนของเกาส์เป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่า จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้เสมอ ซึ่งโดยทั่วไปจำนวนเชิงซ้อนมักจะแสดงอยู่ในรูปของ $Z = x + yi$ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้นั้น จะเสนออัลกอริทึมการแปลงเชื่อมตรงจากระบบจำนวนของเกาส์เป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีดังในทฤษฎีบทที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถเขียนในรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้*

พิสูจน์ ทั้งนี้เป็นที่ทราบกันดีว่า จำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของจำนวนในระบบจำนวนของเกาส์ได้เสมอ ดังนั้นจะพิสูจน์เพียงกรณีที่ว่า จำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดในรูปแบบของเกาส์สามารถเขียนให้เป็นจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้ โดยการเสนออัลกอริทึมการแปลงเชื่อมตรงจากจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ในระบบจำนวนของเกาส์ให้เป็นจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

กำหนดให้ Z เป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนของเกาส์โดย

$Z = x+yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ

$\mathrm{Re}(Z) = x$

$\mathrm{Im}(Z) = yi$

Algorithm: Gausse_to_Floating

Input: $Z = x + yi$ where x and y are real numbers

Output: $W = \langle e_R, e_I, f \rangle$

$f = (.d_{-1}d_{-2}d_{-3}.....)$ represented in (β, D)

where $\beta = i\sqrt{r}$; r is an integer, $r \geq 2$, and

$$D = \left\{ d \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\}.$$

begin

if ($x = 0$) **then** $e_R = 0$

else e_R = minimum even integer such that $|x| < \left| \frac{\beta^{e_R}}{2} \right|$

end if;

if ($y = 0$) **then** $e_I = 0$

else e_I = minimum even integer such that $|\, yi \,| < \left| \frac{\beta^{e_I + 1}}{2} \right|$

end if;

$j = -1$;

while $(\mathrm{Re}(Z) \neq 0)$ **or** $(\mathrm{Im}(Z) \neq 0)$ **do**

if j **is odd then**

$$d_j = \left\lfloor \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Im}(\beta^{e_I + j})} + \frac{1}{2} \right\rfloor;$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \mathrm{Im}(Z) - d_j \,\mathrm{Im}(\beta^{e_I + j});$$

else

$$d_j = \left\lfloor \frac{\mathrm{Re}(Z)}{\mathrm{Re}(\beta^{e_R + j})} + \frac{1}{2} \right\rfloor;$$

$$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(Z) - d_j \,\mathrm{Re}(\beta^{e_R + j});$$

end if;

$j = j - 1$;

end do;

end;

การพิสูจน์อัลกอริทึม จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ การพิสูจน์ว่า ผลลัพธ์ของอัลกอริทึมอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี และ ผลลัพธ์ถูกต้อง

ส่วนที่หนึ่ง ผลลัพธ์ของอัลกอริทึมอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี จะพิสูจน์ว่าสำหรับทุกค่าของ j จะได้ d_j เป็นสมาชิกใน D เสมอ

จากนิยามของ e_R จะได้ว่า

$$|\, x \,| < \left| \frac{\beta^{e_R}}{2} \right|$$

$$-\frac{\beta^{e_R}}{2} < x < \frac{\beta^{e_R}}{2}$$

$$-\frac{\beta^{e_R}}{2\beta^{e_R - 2}} < \frac{x}{\beta^{e_R - 2}} < \frac{\beta^{e_R}}{2\beta^{e_R - 2}}$$

$$-\frac{\beta^2}{2} < \frac{x}{\beta^{e_R-2}} < \frac{\beta^2}{2}$$

$$-\frac{r}{2} < \frac{x}{\beta^{e_R-2}} < \frac{r}{2}$$

ในกรณีที่ j = -2 และ $d_{-2} = \left\lfloor \frac{x}{\beta^{e_R-2}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ จะได้ว่า $-\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil < d_{-2} < \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$

เนื่องจาก d_j เป็นจำนวนเต็มที่ใกล้ $\frac{x}{\beta^{e_R-2}}$ ที่สุดดังนั้น

$$\left| d_{-2} - \frac{x}{\beta^{e_R-2}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

นั่นคือ
$$\left| \mathrm{Re}(Z) - d_{-2}\beta^{e_R-2} \right| \leq \left| \frac{\beta^{e_R-2}}{2} \right|$$

จะได้ว่าในรอบที่ j เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ j < -2 จะได้ว่า $\left|\mathrm{Re}(Z)\right| \leq \left| \frac{\beta^{e_R+j+2}}{2} \right|$ และจากอัลกอริทึม

$d_j = \left\lfloor \frac{\mathrm{Re}(Z)}{\mathrm{Re}(\beta^{e_R+j})} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ทำให้สามารถสรุปได้ว่า

$$|d_j| \leq \left\lfloor \left| \frac{\frac{\beta^{e_R+j+2}}{2}}{\mathrm{Re}(\beta^{e_R+j})} \right| + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|\beta^2|}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ j เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว d_j จะเป็นสมาชิกใน D เสมอ

ในทำนองเดียวกันจากนิยามของ e_I จะได้ว่า

$$|yi| < \left| \frac{\beta^{e_I+1}}{2} \right|$$

ดังนั้น
$$-\frac{\beta^2}{2} < \frac{yi}{\mathrm{Im}(\beta^{e_I-1})} < \frac{\beta^2}{2}$$

ในกรณีที่ j = -1 จะได้ว่า $-\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil < d_{-1} < \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$

เนื่องจาก d_j เป็นจำนวนเต็มที่ใกล้ $\frac{yi}{\beta^{e_I-1}}$ ที่สุดดังนั้น

$$\left| d_{-1} - \frac{yi}{\mathrm{Im}(\beta^{e_I-1})} \right| \leq \frac{1}{2}$$

นั่นคือ $$\left|\mathrm{Im}(Z) - d_{-1}\,\mathrm{Im}\left(\beta^{e_I - 1}\right)\right| \le \left|\mathrm{Im}\left(\frac{\beta^{e_I-1}}{2}\right)\right|$$

จะได้ว่าในรอบที่ j เป็นจำนวนคี่ที่ j < -1 จะได้ว่า $\left|\mathrm{Im}(Z)\right| \le \left|\frac{\mathrm{Im}\left(\beta^{e_I+j+2}\right)}{2}\right|$ และจากอัลกอริทึม $d_j = \left\lfloor \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Im}\left(\beta^{e_I+j}\right)} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ทำให้สามารถสรุปได้ว่า

$$|\,d_j\,| \le \left\lfloor \left| \frac{\mathrm{Im}\left(\frac{\beta^{e_I+j+2}}{2}\right)}{\mathrm{Im}\left(\beta^{e_I+j}\right)} \right| + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left|\beta^2\right|}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \le \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ j เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว d_j จะเป็นสมาชิกใน D เสมอ

ส่วนที่สอง ผลลัพธ์ถูกต้อง ในส่วนนี้จะแสดงให้เห็นว่า

$$x + yi = \left(\mathrm{Re}(f)\beta^{e_R}\right) + \left(\mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}\right)$$

โดยที่ $f = \sum_{j=-1}^{-\infty} d_j \beta^j$ ซึ่งเป็นส่วนแฟรคชันของคำตอบจากอัลกอริทึม

พิสูจน์โดยเขียน f ใหม่ให้อยู่ในรูปของ

$$f = \sum_{k=-2}^{end} d_k \beta^k + \sum_{p=-1}^{end} d_p \beta^p$$

โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มคู่ และ p เป็นจำนวนเต็มคี่เสมอ

จากอัลกอริทึม $\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(Z) - d_j\,\mathrm{Re}\left(\beta^{e_R+j}\right)$ และ $\mathrm{Re}(Z) = x$ ถ้ากำหนดให้ ค่าของ $\mathrm{Re}(Z)$ ในรอบที่ j แทนด้วย x_j จะได้ว่า

$$x_{j-2} = x_j - d_j \beta^{e_R+j}$$

ในกรณีที่ j = -2 จะได้ว่า

$$x_{-4} = x_{-2} - d_{-2}\beta^{e_R-2}$$

ดังนั้นเมื่อรวมกรณีที่ j เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งหมดจะได้ว่า

$$x_{end} = \left(\left(\ldots\left(\left(\left(x - d_{-2}\beta^{e_R-2}\right) - d_{-4}\beta^{e_R-4}\right) - d_{-6}\beta^{e_R-6}\right)\ldots\right) - d_{end}\beta^{e_R-end}\right)$$

อัลกอริทึมจะทำงานจนกระทั่งค่าของ $\mathrm{Re}(Z) = 0$ หรือ $x_{end} = 0$ นั่นคือ

$$x = d_{-2}\beta^{e_R-2} + d_{-4}\beta^{e_R-4} + d_{-6}\beta^{e_R-6} + \ldots d_{end}\beta^{e_R-end}$$

จะได้ว่า

$$x = \left(\sum_{k=-2}^{end} d_k \beta^k \right) \beta^{e_R} = \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$yi = \left(\sum_{p=-1}^{end} d_p \beta^p \right) \beta^{e_I} = \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}$$

นั่นคือ จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถเขียนในรูปแบบแทนจำนวน ในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้เสมอ ■

ตัวอย่าง 3.2 *ให้ แปลงค่า -48 + 0.15625i ที่มีการแสดงจำนวนของเกาส์ให้อยู่ในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี บนฐาน 2i และมีชุดตัวเลขเป็น* $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

จากอัลกอริทึมจะสามารถคำนวณได้ e_R = 8 และ e_I = -2 หลังจากนั้นหาค่าแฟรคชันดังแสดงในตาราง 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงการแปลงเชื่อมตรงจากระบบจำนวนของเกาส์เป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

Step	Z	β^{e_R+j}	β^{e_I+j}	d_j
-1	-48 + 0.15625i	-	0.125i	1
-2	-48 + 0.03125i	-64	-	1
-3	16 + 0.03125i	-	-0.03125i	$\bar{1}$
-4	16	16	-	1

จากตารางที่ 3.1 เราจะได้คำตอบดังนี้ e_R = 8, e_I = -2 และส่วนของแฟรคชันคือ $f = 0.11\bar{1}1$ ดังนั้นจะได้ค่า $W = \langle 8,-2,(0.11\bar{1}1) \rangle$

3.4 อัลกอริทึมการแปลงเชื่อมตรงจากระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเป็นระบบจำนวนของเกาส์

ในหัวนี้จะนำเสนออัลกอริทึมการแปลงจำนวนใดๆ จากการแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนของเกาส์ ซึ่งอัลกอริทึมในหัวข้อนี้เป็นอัลกอริทึมผกผันกับอัลกอริทึมในหัวข้อ 3.3 นั่นเอง

ทฤษฎีบทที่ 3.2 *จำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีทุกจำนวนสามารถทำการแปลงเชื่อมตรงไปเป็นจำนวนในระบบจำนวนของเกาส์ได้เสมอ*

พิสูจน์ กำหนดให้ W เป็นจำนวนในรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี โดยกำหนดให้ $W = \langle e_R, e_I, f \rangle$ ดังนั้นค่าเชิงตัวเลขของ W คือ $v = \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}$

การแปลงเชื่อมตรงสามารถพิสูจน์ได้โดยการเสนออัลกอริทึมในการแปลงดังต่อไปนี้

Algorithm: Floating_to_Gausse

Input: $W = \langle e_R, e_I, f \rangle$

$f = (.d_{-1}d_{-2}d_{-3}.....)$ represented in (β, D)

Output: $Z = x + yi$

begin

j = -1;

while not_end_of_data **do**

if j **is odd then**

$$Z = Z + d_j\beta^{e_I + j}$$

else

$$Z = Z + d_j\beta^{e_R + j};$$

end if;

$j = j - 1$;

end do;

end;

การพิสูจน์อัลกอริทึม จะพิสูจน์ว่า $Z = \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}$

จากอัลกอริทึมจะได้ว่า

$$Z \quad = d_{-1}\beta^{e_I - 1} + d_{-2}\beta^{e_R - 2} + d_{-3}\beta^{e_I - 3} + d_{-4}\beta^{e_R - 4} + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{p=-1}^{-\infty} d_p \beta^{e_I+p} + \sum_{k=-2}^{-\infty} d_k \beta^{e_R+k} \\
&= \left(\sum_{p=-1}^{-\infty} d_p \beta^{p} \right) \beta^{e_I} + \left(\sum_{k=-2}^{-\infty} d_k \beta^{k} \right) \beta^{e_R} \\
&= \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมจะมีค่าเท่ากับค่าเชิงตัวเลขของ จำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีจริง ■

ตัวอย่าง 3.3 *แปลงค่า* W *ที่เป็นรูปแบบแทนจำนวนบนระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนให้อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนของเกาส์ โดยที่* $W = \left\langle 8,-2,\left(0.11\bar{1}1\right)\right\rangle$ *วิธีแปลง* W *จะเป็นดังตาราง 3.2*

ตารางที่ 3.2 แสดงการแปลงเชื่อมตรงจากระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเป็นระบบจำนวนของเกาส์

Step	Input	β^{e_R+j}	β^{e_I+j}	Z
-1	1	-	0.125i	0.125i
-2	1	-64	-	-64+0.125i
-3	$\bar{1}$	-	-0.03125i	-64+0.15625i
-4	1	16	-	-48+0.15625i

จากตาราง 3.2 จะได้คำตอบ Z = -48+0.15625i ซึ่งจะเห็นว่าเท่ากับค่าจากตัวอย่าง 3.2

3.5 อัลกอริทึมการแปลงจากจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุทเป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

ในหัวข้อนี้จะพิสูจน์ว่าจำนวนใดๆ ซึ่งมีรูปแบบการแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีได้

ทฤษฎีบทที่ 3.3 *การแปลงจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท ฐาน* $\beta = i\sqrt{r}$ *เมื่อ* r *เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่* $r \geq 2$ *และชุดตัวเลข* $D = \left\{ d \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\}$ *ไปเป็นจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีฐาน* $\beta = i\sqrt{r}$ *ทำได้เสมอ*

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 3.1 และจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุททุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของจำนวนในระบบจำนวนของเกาส์ได้ จึงสรุปได้ว่า ทฤษฎีบทที่นี้เป็นจริง แต่ในที่นี้การพิสูจน์จะเสนออัลกอริทึม ในการแปลงจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท ไปเป็นจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ด้วยดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $X = x_h x_{h-1} x_{h-2} .... x_1 x_0 x_{-1} ......$ เป็นจำนวนในระบบจำนวนของคนุท ฐาน $\beta = i\sqrt{r}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ $r \geq 2$ และชุดตัวเลข $D = \left\{ d \in Z \mid -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d \leq \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right\}$ โดยที่ค่าเชิงตัวเลขของ X คือ $\| X \| = \sum_{j=h}^{-\infty} x_j \beta^j$ และกำหนดให้ W เป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้ำซ้อนอิงดรรชนีมีฐานเป็น $\beta = i\sqrt{r}$ และมีชุดตัวเลข D โดยกำหนดให้ $W = \langle e_R, e_I, f \rangle$

Algorithm Knuth_to_Floating

Input: $X = x_h x_{h-1} x_{h-2} .... x_1 x_0 x_{-1} ......$

Output: $W = \langle e_R, e_I, f \rangle$

begin

$j = h$;

$i1 = i2 = 0$;

m = -1; n = -2;

while j < h+1 **do**

if j **is odd then**

if $x_j \neq 0$ **and** $i1 = 0$ **do**

$e_I = j + 1$;

$i1 = 1$;

end if;

if $i1 = 1$ **do**

$d_m = x_j$;

$m = m - 2$;

end if;

else

if $x_j \neq 0$ **and** $i2 = 0$ **do**

$e_R = j + 2$;

$i2 = 1$;

end if;

if $i2 = 1$ **do**

$d_n = x_j$;

$n = n - 2$;

end if;

end if;

$j = j - 1$;

end do;

end;

พิสูจน์อัลกอริทึมโดยจะแสดงให้เห็นว่า $\| X \| = \mathrm{Re}(f)\beta^{e_R} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_I}$

กำหนดให้ $s = \max\{j \mid j = odd \wedge x_j \neq 0\}$ และ

$t = \max\{j \mid j = even \wedge x_j \neq 0\}$

จาก $\| X \| = \sum_{j=h}^{-\infty} x_j \beta^j$ จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$\|X\| = \sum_{p=s}^{-\infty} x_p \beta^p + \sum_{k=t}^{-\infty} x_k \beta^k$$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มคู่

จาก $\sum_{j=s}^{-\infty} x_j \beta^j$ ในอัลกอริทึม เมื่อพิจารณา j ที่เป็นจำนวนเต็มคี่เท่านั้น จะทำการกำหนดค่าของ d_m โดยให้ $m = j - s - 1$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$d_m = d_{j-s-1} = x_j$$

และ $$\sum_{j=s}^{-\infty} x_j \beta^j = \sum_{j=s}^{-\infty} \left(x_j \beta^{j-s-1}\right) \times \beta^{s+1}$$

$$= \sum_{j=s}^{-\infty} \left(d_m \beta^{j-s-1}\right) \times \beta^{s+1}$$ จาก $d_m = x_j$

$$= \sum_{m=-1}^{-\infty} \left(d_m \beta^{m}\right) \times \beta^{s+1}$$ จาก $m = j - s - 1$

ทำนองเดียวกัน จาก $\sum_{j=t}^{-\infty} x_j \beta^j$ ในอัลกอริทึม เมื่อพิจารณา j ที่เป็นจำนวนเต็มคู่เท่านั้น จะทำการกำหนดค่าของ d_n โดยให้ $n = j - t - 2$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$d_n = d_{j-t-2} = x_j$$

และ $$\sum_{j=t}^{-\infty} x_j \beta^j = \sum_{j=t}^{-\infty} \left(x_j \beta^{j-t-2}\right) \times \beta^{t+2}$$

$$= \sum_{j=t}^{-\infty}\left(d_n\beta^{j-t-2}\right)\times\beta^{t+2} \text{ จาก } d_n = x_j$$

$$= \sum_{n=-2}^{-\infty}\left(d_n\beta^{n}\right)\times\beta^{t+2} \quad \text{จาก } n = p-t-2$$

และค่าของ $e_I = s + 1$และ $e_R = t + 2$ ทำให้ได้ว่า

$$\|X\| = \sum_{m=-1}^{-\infty}\left(d_m\beta^{m}\right)\times\beta^{s+1} + \sum_{n=-2}^{-\infty}\left(d_n\beta^{n}\right)\times\beta^{t+2}$$

$$= \sum_{m=-1}^{-\infty}\left(d_m\beta^{m}\right)\times\beta^{e_I} + \sum_{n=-2}^{-\infty}\left(d_n\beta^{n}\right)\times\beta^{e_R}$$

$$= \mathrm{Re}(f)\beta^{e_I} + \mathrm{Im}(f)\beta^{e_R}$$

■

ตัวอย่าง 3.4 *กำหนดให้ฐานเป็น 2i และมีชุดตัวเลข* $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ *พิจารณา* $X = \left(20\bar{1}011.0\bar{1}02\right)_{2i}$ *ในระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท ให้แปลงรูปแบบแทนจำนวนจาก* X *เป็น* W *ซึ่งเป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี บนฐานและชุดตัวเลขเดียวกัน สามารถทำได้ดังตาราง 3.3*

ตารางที่ 3.3 แสดงการแปลงจากจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท เป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี

step	x_j	$(i1,i2)$	m	d_m	n	d_n	(e_R,e_I)
5	2	(1, 0)	-1	2	-	-	(-,6)
4	0	(1, 0)	-	-	-2	-	(-,6)
3	$\bar{1}$	(1, 0)	-3	$\bar{1}$	-	-	(-,6)
2	0	(1, 0)	-	-	-2	-	(-,6)
1	1	(1, 0)	-5	1	-	-	(-,6)
0	1	(1, 1)	-	-	-2	1	(2,6)
-1	0	(1, 1)	-7	0	-	-	(2,6)
-2	$\bar{1}$	(1, 1)	-	-	-4	$\bar{1}$	(2,6)
-3	0	(1, 1)	-9	0	-	-	(2,6)
-4	2	(1, 1)	-	-	-6	2	(2,6)

จากตาราง 3.3 จะได้ W ประกอบด้วย $e_R = 2$, $e_I = 6$ และ $f = .21\bar{1}\bar{1}12$ นั่นก็คือ $W = \left\langle 2,6,\left(0.21\bar{1}\bar{1}12\right)\right\rangle$

บทที่ 4

อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรง

บทนี้มุ่งนำเสนออัลกอริทึมที่ใช้เป็นตัวดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต โดยจะนำอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลข มาปรับปรุงให้เหมาะสมกับระบบใหม่ที่ได้นำเสนอไปในบทที่แล้ว รายละเอียดมีดังต่อไปนี้

4.1 ค่าความหน่วงเชื่อมตรง

การดำเนินการต่างๆ ที่ใช้ระบบการเชื่อมตรงนั้น จะต้องคำนึงถึงค่าความหน่วง งานวิจัยชิ้นนี้มุ่งที่จะออกแบบอัลกอริทึมเพื่อลดเวลาในการคำนวณ ดังนั้นการทำงานเชื่อมตรงจึงถูกนำมาใช้ในอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเช่นกัน ความหน่วงจึงต้องนำมาพิจารณาด้วยเช่นกัน อย่างไรก็ตามเนื่องจากระบบที่พิจารณาในงานวิจัยชิ้นนี้นั้นทำอยู่ในรูปแบบเลขอิงดรรชนี นั่นคือตำแหน่งของของตัวเลขในแต่ละดิจิตนั้นกำหนดด้วยเลขอิงดรรชนี ความหน่วงสำหรับการทำงานเชื่อมตรง จึงเป็นค่าความหน่วงที่น้อยที่สุดสำหรับการทำงานเชื่อมตรงนั่นก็คือ 1 สำหรับระบบทั่วๆ ไป สำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุทนั้น จำนวนใดๆ ประกอบด้วยจำนวนจาก 2 ส่วน คือส่วนของจำนวนจริง ส่วนของจำนวนจินตภาพ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และในการคำนวณนั้นจะคำนวณสลับกันไปมาระหว่างทั้ง 2 ส่วนไปเรื่อยๆ ดังนั้นสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท จะมีค่าความหน่วงที่น้อยที่สุดเป็น 2 เสมอ

4.2 อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีเชื่อมตรง

ทฤษฎีบทที่ 4.1 *ให้จำนวนใดๆ แสดงด้วยฐาน* $\beta = i\sqrt{r}$ *เมื่อ* $r \in Z, r \geq 2$ *กับชุดตัวเลข* $D = \{d \in Z \mid -an \leq d \leq an\}$ *และชุดตัวเลข* $E = \{e \in Z \mid -a \leq e \leq a\}$ *โดยที่* $a = \lceil r/2 \rceil$ *และ* n *เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหนึ่ง และกำหนดให้* α *เป็นจำนวนตำแหน่งในการทดไปทางตำแหน่งที่มีนัยสำคัญสูงกว่า และ* α *เป็นจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่าศูนย์ ให้* X *เป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีฐาน* β *อยู่ในรูป* $X = \langle e_{R,x}, e_{I,x}, f_x \rangle$ *เมื่อ* $f_x = (0.x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots)_\beta$ *โดยที่* $x_j \in D$ *ให้* $Y = \langle e_{R,y}, e_{I,y}, f_y \rangle$ *เมื่อ* $f_y = (0.y_{-1}y_{-2}y_{-3}\ldots)_\beta$ *โดย*

ที่ $y_j \in E$ *จะทำการแปลงจาก* X *ไปเป็น* Y *นั่นคือเปลี่ยนชุดตัวเลข* D *ไปเป็นชุดตัวเลข* E *จะทำได้ก็ต่อเมื่อเงื่อนไข (4.1) เป็นจริง โดยที่* α *เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด*

$$nr \le \left|\beta^{\alpha}\right| \tag{4.1}$$

พิสูจน์ เริ่มต้นการพิสูจน์ด้วยการนำเสนออัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขดังรูปที่ 4.1 และแสดงให้เห็นว่าผลที่ได้นั้นถูกต้องเมื่อ α เป็นไปตามข้อเงื่อนไข (4.1)

Algorithm: On-line digit set conversion

Input: $X = \langle e_{R,x}, e_{I,x}, f_x \rangle$ where

$f_x = (0.x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots)_{\beta}$ represented in (β, D)

Output: $Y = \langle e_{R,y}, e_{I,y}, f_y \rangle$ where

$f_y = (0.y_{-1}y_{-2}y_{-3}\ldots)_{\beta}$ represented in (β, E)

begin

$W_0 = W_1 = y_0 = y_1 = 0;$

$e_{I,y} = e_{I,x} + \alpha; e_{R,y} = e_{R,x} + \alpha;$

$j = -1;$

while $j \le 1$ **do**

$$W_j = (W_{j+2} - y_{j+2})\beta^2 + \frac{x_j}{\left|\beta^{\alpha}\right|}$$

$$y_j = \left\lfloor W_j + \frac{1}{2} \right\rfloor;$$

$j = j - 1;$

end do;

end;

จากกฎการเลือกค่า y_j จากอัลกอริทึมด้านบนจะได้อสมการ (4.2)

$$-\frac{1}{2} \le W_{j+2} - y_{j+2} \le \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

คูณอสมการที่ (4.2) ด้วย β^2 จะได้อสมการที่ (4.3)

$$-\frac{\beta^2}{2} \le \left(W_{j+2} - y_{j+2}\right)\beta^2 \le \frac{\beta^2}{2} \tag{4.3}$$

จากนิยามของ y_i จะได้ว่า

$$-\frac{\beta^2}{2} \le y_j \le \frac{\beta^2}{2} \tag{4.4}$$

นำอสมการที่ (4.2) + (4.4) จะได้อสมการ (4.5)

$$-\frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} \le W_j \le \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

นำอสมการ (4.5) – (4.3) จะได้

$$\left(-\frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \le W_j - \left(W_{j+2} + y_{j+2}\right)\beta^2 \le \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\beta^2}{2}\right) \tag{4.6}$$

จากอัลกอริทึมด้านบน

$$\frac{x_j}{\left|\beta^\alpha\right|} = W_j - \left(W_{j+2} + y_{j+2}\right)\beta^2 \tag{4.7}$$

แทนค่า สมการ (4.7) ลงในอสมการ (4.6) จะได้เป็น

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x_j}{\left|\beta^\alpha\right|} \le \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

เมื่อ x_j เป็นสมาชิกของชุดตัวเลข D และ $a = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ และอสมการ (4.8) จะได้

$$nr \le \left|\beta^\alpha\right| \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 4.1 *ให้ X เป็นรูปแบบแทนจำนวน ในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีบนฐาน $\beta = 2i$ และแสดงด้วยชุดตัวเลข $D = \left\{\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3, 4\right\}$ โดยที่ $X = \left\langle 6,4,\left(0.\bar{2}310\bar{2}4\right)\right\rangle$ ทำแปลงรูปแบบแทนจำนวนจาก X ไปเป็น Y ซึ่ง Y เป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีบนฐาน $\beta = 2i$ และแสดงด้วยชุดตัวเลข $E = \left\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\right\}$*

จากเงื่อนไข (4.1) จะได้ $\alpha = 4$ ต่อจากนั้น จากนั้นใช้อัลกอริทึมคำนวณหาส่วนของแฟรคชันจะได้ผลดังแสดงในดังตาราง 4.1

ตารางที่ 4.1 แสดงผลของการแปลงชุดตัวเลขของตัวอย่าง 4.1

Step(j)	x_j	$W_j = \left(W_{j+2} - y_{j+2}\right)\beta^2 + x_j \big/ \left\lvert\beta^\alpha\right\rvert$	y_j	$W_j - y_j$
-1	$\bar{2}$	-0.125	0	-0.125
-2	3	0.1875	0	0.1875
-3	1	0.5625	1	-0.4375
-4	0	-0.75	$\bar{1}$	0.25
-5	$\bar{2}$	1.625	2	-0.375
-6	4	-0.75	$\bar{1}$	0.25
-7	0	1.5	2	-0.5
-8	2	-0.875	$\bar{1}$	0.125
-9	0	2	2	0
-10	0	-0.5	0	-0.5
-11	0	0	0	0
-12	0	2	2	0

จากตาราง 4.1 จะได้คำตอบ $f_y = \left(0.1\bar{1}2\bar{1}2\bar{1}2002\right)_{2i}$, e_R = 10 และ e_I = 8 ดังนั้นจะได้ $Y = \left\langle 10,8,\left(0.1\bar{1}2\bar{1}2\bar{1}2002\right)\right\rangle$ เมื่อคำนวณค่าเชิงตัวเลขของ X และ Y จากสมการ (3.2) จะพบว่าทั้ง X และ Y นั้นมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากัน

4.3 วิเคราะห์การเลื่อนค่าไบแอสเอกโพเนน

ในการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต เช่นการบวก และการคูณ หากดำเนินการแล้วค่าเกินในตำแหน่งนั้นๆ จะเกิดการทดไปยังตำแหน่งทางด้านซ้าย ในงานวิจัยชิ้นนี้เสนออัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขจาก $D = \{d \in Z \mid -an \le d \le an\}$ เป็นชุดตัวเลข $E = \{e \in Z \mid -a \le e \le a\}$ เมื่อ $a, n \ge 1$ หลังจากทำการแปลงชุดตัวเลขจาก D ไป E จะเกิดการทด และทดไปกี่ตำแหน่งนั้นจะต้องคำนวณหาค่าออกมาซึ่งนั่นคือค่า α เป็นตัวบอกว่าทดไปทางซ้ายกี่ตำแหน่ง พิจารณาโดยหาขอบเขตบนของชุดตัวเลข D ซึ่งก็คือ $2an$ สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ $a = r/2$ ดังนั้นจะได้ $2an = rn$ หลังจากนั้นนำมาคำนวณหาตำแหน่งโดยหาค่า $\left\lvert\beta^\alpha\right\rvert$ ที่น้อยที่สุดที่มากกว่าค่า rn จะ

เป็นตามเงื่อนไข 4.1 และไม่สามารถใช้ค่า α ที่น้อยกว่าค่าที่คำนวณได้เพราะจะทำให้เกิดการล้น (overflow)

ในงานวิจัยชิ้นนี้ทำบนระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี ซึ่งระบบนี้นั้นเมื่อมีการทดจะทดไปยัง 2 ตำแหน่งถัดไป ดังนั้นค่า α จึงเป็นจำนวนเต็มคู่เสมอ หากทำการแปลงจากชุดตัวเลขที่ใหญ่กว่านั้นหมายความว่าค่า n ที่เพิ่มขึ้นนั้นจะทำให้ค่า α มีค่ามากตามไปด้วยซึ่งก็แปลว่ามีการทดไปทางซ้ายหลายตำแหน่ง ถ้าใช้ค่า n ที่น้อยที่สุดนั่นคือ $n = 1$ จะคำนวณค่า α ได้เท่ากับ 0 ถึงแม้ว่าจะทำการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลขที่เล็กกว่า ไปยังชุดตัวเลขที่ใหญ่กว่าก็จะได้ $\alpha = 0$ ซึ่งค่า α จะไม่ติดลบแน่นอน นั่นหมายความว่า α ที่นำมาใช้นั้นจะต้องเป็นจำนวนเต็มคู่และมีค่าตั้งแต่ศูนย์เป็นต้นไป

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

ลักษณะของรูปแบบการแทนจำนวนของระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท คือรวมส่วนจำนวนจินตภาพและส่วนจำนวนจริง ให้อยู่ในเลขจำนวนเดียวเท่านั้น งานวิจัยชิ้นนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อนำเสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนี โดยที่พัฒนามาจากระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนของคนุท และอาศัยหลักการของเลขอิงดรรชนีฐานสอง รูปแบบการแทนจำนวนของระบบจำนวนเชิงซ้อนซ้ำซ้อนอิงดรรชนีนั้นจะแยกออกเป็น 3 ส่วนคือ ส่วนของไบแอสเอกโพเนน 2 ส่วน และส่วนของแฟรคชัน 1 ส่วน อนึ่งงานวิจัยชิ้นนี้เพียงแค่นำเสนอระบบใหม่เท่านั้นจึงยังไม่มีการกำหนดขนาดที่แน่นอนให้กับส่วนต่างๆ ทั้ง 3 ส่วน ในกรณีที่จำนวนมีค่าเชิงตัวเลขระหว่างส่วนจำนวนจริงและส่วนจำนวนจินตภาพมีค่าต่างกันมาก พบว่าในบางกรณีระบบใหม่ที่นำเสนอนั้นสามารถเก็บจำนวนโดยใช้เนื้อที่น้อยกว่า การเก็บอยู่ในรูปแบบเดิมเพราะว่า ในระบบใหม่มีการแยกเก็บไว้ในส่วนของไบแอสเอกโพเนน ซึ่งต่างจากระบบเก่าตรงที่ระบบเก่าจะเก็บเป็นตัวเลขอย่างเดียว ทั้งนี้งานวิจัยชิ้นนี้ยังได้พัฒนาอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขเชื่อมตรง มาเพื่อใช้กับระบบที่ได้นำเสนอไป โดยอัลกอริทึมที่นำเสนอนี้เปรียบเสมือนการดำเนินการพื้นฐานเลขคณิตนั่นเอง และเพื่อเพิ่มความเร็วในการคำนวณจึงนำการทำงานเชื่อมตรง มาใช้ในอัลกอริทึมที่ออกแบบด้วย

อย่างไรก็ตามระบบใหม่ที่คิดขึ้นนั้นยังมีข้อเสียอยู่ คือ ลักษณะของระบบเลขอิงดรรชนีนั้นแต่ละส่วนจะมีการกำหนดขนาดไว้แน่นอน ดังนั้นในการทำงานจริงหากข้อมูลนำเข้าที่ใส่เข้ามานั้นมีขนาดใหญ่ว่าที่กำหนดไว้ส่วนที่เกินออกมาระบบจะตัดทิ้ง ซึ่งจะเกิดความผิดพลาดจากการตัดส่วนที่ตัดทิ้งไปนั่นเอง ในอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขก็เช่นกันเมื่อมีการดำเนินการใดๆ ก็จะสามารถคำนวณจำนวนตำแหน่งที่จำเป็นต้องเลื่อนไปทางซ้าย จำนวนตำแหน่งที่เลื่อนเพิ่มนั้นจะส่งผลกระทบต่อตำแหน่งด้านขวาสุด เพราะระบบนี้มีการกำหนดขนาดไว้แน่นอน หากมีการเพิ่มตำแหน่งเข้าไปที่ด้านซ้ายนั่นหมายความว่า จะต้องมีตัวเลขทางด้านขวาถูกตัดทิ้งไปเป็นจำนวนเท่ากับจำนวนที่เพิ่มเข้ามา ซึ่งนั่นก็คือความผิดพลาดที่หลีกเลี่ยงไม่ได้เช่นกัน

รายการอ้างอิง

[1] D.E. Knuth. “An imaginary number system.” CACM, Vol. 3, (1960), 245-247.

[2] W. Penney. “A ‘binary’ system for complex numbers.” JACM, Vol. 12, (1967): 257-348.

[3] T. Safer. “Polygonal radix representations of complex numbers.” Theoretical Computer Science, (1999): 159-171.

[4] “IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic.” IEEE Standards Board, (1990): 1-4.

[5] M.D. Ercegovac. “An on-line arithmetic: An overview.” Real time Signal Processing VII SPIE, (1984): 86-93.

[6] K.S. Trivedi and M.D. Ercegovac. “On-line algorithm for division and multiplication.” IEEE Transactions on Computers, Vol.26, (1977): 681-687.

[7] B. Parhami. “Computer Arithmetic Algorithms and hardware designs.” Oxford, New York: Oxford University Press, 2000

[8] O. Yuji, A. Takafumi and H. Tatsuo. “Redundant Complex Number Systems.”, 25th International Symposium on Multiple Valued Logic, (1995): 14-19.

[9] C. Frougny, “On-line finite automata for addition in some numeration systems.” Theoretical Informatics and Applications, Vol. 33, (1999): 79-101.

[10] C. Frougny and A. Surarerks. “On-line multiplication in real and complex base.” Proceedings of the 16th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, (2003): 212-219.

[11] P. Kornerup. “Digit-Set Conversion: Generalizations and Applications.” IEEE Transactions on Computers, (1994): 622-629.

[12] A. Avizienis. “Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic.” IRE Transactions on Electronic Computers, Vol.10, (1961): 389-400.

[13] A. Surarerks. “Digit set conversion by on-line finite automata.” Bull. Belg. Math. Soc., Vol.8, (2001): 337-358.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพันธรัตน์ ไชยวรวิทย์สกุล เกิดเมื่อวันที่ 29 กรกฎาคม พ.ศ. 2524 สำเร็จการศึกษาระดับประถม และมัธยมต้นจากโรงเรียนวรรณวิทย์ สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมปลายจากโรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตในคณะวิทยาศาสตร์ สาขาฟิสิกส์ ในปีการศึกษา 2545 โดยได้รับทุนศรีตรังทองจากมหาวิทยาลัยมหิดล ในระหว่างการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิต