จลนศาสตร์และการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

นายศิริศักดิ์ สิริเกษมสุข

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

KINEMATICS AND CONTROLS OF A 3D COBOT

Mr. Sirisak Sirikasemsuk

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Doctor of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic year 2008

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	จลนศาสตร์และการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
โดย	นายศิริศักดิ์ สิริเกษมสุข
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทร์เจริญ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภวุฒิ จันทรานุวัฒน์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร. พรชัย นิเวศน์รังสรรค์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศิริศักดิ์ สิริเกษมสุข : จลนศาสตร์และการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ. (KINEMATICS AND CONTROLS OF A 3D COBOT) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์, 118หน้า.

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติคือหุ่นยนต์ระบบแบบพาสซีฟ ที่ถูกออกแบบมาสำหรับทำงานร่วมกับมนุษย์โดยตรงได้อย่างปลอดภัย หุ่นยนต์โคบอทนี้ใช้ซีวีทีประเภทล้อสามชุดสำหรับควบคุมแกนหมุนทั้งสาม โรล, พิตช์ และยอว์ (roll, pitch and yaw) ของทรงกลม และใช้กลไกแขนกลและระบบส่งกำลังแปลงการหมุนเคลื่อนที่ของทรงกลมเป็นพื้นที่ใช้งานแบบคาร์ทีเซียนเชิงเส้น X, Y และ Z งานวิจัยนี้อธิบายถึงการออกแบบและสร้างต้นแบบหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติอย่างละเอียด และได้หาสมการจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทนี้โดยแบ่งลำดับความสัมพันธ์เชิงกายภาพออกเป็นห้าปริภูมิ ประกอบด้วย ปริภูมิตำแหน่งปลาย ปริภูมิข้อต่อ ปริภูมิการเคลื่อนที่ทรงกลม ปริภูมิการจับคู่ และ ปริภูมิการปรับอัตราทด โดยวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ทางจลนศาสตร์ของแต่ละปริภูมิ และได้จำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โดยใช้สมการจลนศาสตร์เหล่านี้เพื่อพิสูจน์ความถูกต้อง ระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทมีความซับซ้อนโดยประกอบไปด้วยการควบคุมแบบป้อนล่วงหน้า และการควบคุมแบบป้อนกลับ ผลการทดลองของการเคลื่อนที่เมื่อทำงานร่วมกับมนุษย์ในเส้นทางที่กำหนดไว้พบว่า ระบบควบคุมสามารถลดความผิดพลาดแขนกลสามารถเคลื่อนที่ได้เรียบลื่น และต่อเนื่อง สามารถตามเส้นทางได้อย่างน่าพอใจ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ศิริศักดิ์ สิริเกษมสุข
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2551

477 18397 21 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS : ROBOTICS / COBOT / KINEMATICS / CONTROLS

SIRISAK SIRIKASEMSUK : KINEMATICS AND CONTROLS OF A 3D COBOT.
ADVISOR : ASST. PROF. WITAYA WANNASUPHOPRASIT, Ph.D., 118 pp.

The 3D-Cobotic Manipulator is a passive robot designed for direct collaboration with a human operator. This Cobot utilizes three wheel CVTs to control the rotational axis of a sphere. The sphere's motion is then transmitted to linear motions in Cartesian space via a serial manipulator. Design and construction of the Cobot prototype is described in detail. The kinematics of the 3D-Cobotic Manipulator is divided into five spaces: configuration space, joint space, spherical space, coupling space, and steering space. The transformations of these spaces are provided, and simulation motion was performed to verify the overall kinematics of the Cobot. Control structure of the Cobot consists of feedforward and feedback controls. We performed two path experiments using this controller. The operator moved the end-effector back and forth along reference paths smoothly. The experimental results show the controller can reduce error, and achieve satisfactory track reference paths.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department : Mechanical Engineering	Student's Signature ....
Field of Study : Mechanical Engineering	Advisor's Signature ....
Academic Year : 2008	

กิตติกรรมประกาศ

การทำวิจัยและวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง ของ ผศ.ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ในที่นี้ผู้วิจัยจึงใคร่ขอขอบคุณ ซึ่งท่านได้สละเวลาอันมีค่าของท่านเพื่อให้คำแนะนำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่างๆ ในการวิจัยครั้งนี้ พร้อมทั้งจัดหาทุนและอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์มาให้โดยตลอด และงานวิจัยนี้คงจะไม่มีทางประสบผลสำเร็จได้ หากขาดความช่วยเหลืออย่างเต็มที่จากบิดา มารดา ในทุกๆด้าน

นอกจากนั้นต้องขอขอบคุณสถาบันเทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ (MTEC) ที่ได้ให้โอกาสเข้าร่วมโครงการวิจัย ที่นำมาซึ่งประสบการณ์และทุนการศึกษาแก่ผู้เขียน และขอขอบคุณสำหรับทุกๆท่านที่อยู่แวดล้อมผู้เขียนไม่ว่าจะเป็นคณาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิที่เคยถ่ายทอดความรู้และให้คำแนะนำ รวมไปถึงเพื่อนนักศึกษา รุ่นพี่ รุ่นน้อง ทั้งในระดับปริญญาเอก และปริญญาโท ที่ได้ร่วมกันให้ข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะต่างๆ พร้อมทั้งยังได้ให้กำลังใจที่ดีแก่กัน เสมอมา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.. ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.. จ

กิตติกรรมประกาศ.. ฉ

สารบัญ.. ช

บทที่ 1 บทนำ.. 1

1.1 ความสำคัญและที่มา.. 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.. 2

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.. 2

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย.. 2

บทที่ 2 หุ่นยนต์โคบอทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง... 3

2.1 อุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องที่ใช้ในหุ่นยนต์โคบอท................. 5

2.1.1 ซีวีทีประเภทล้อ... 5

2.1.2 ซีวีทีประเภททรงกลม... 6

2.2 การเชื่อมต่อซีวีที.. 8

2.3 หุ่นยนต์โคบอทแบบต่างๆ... 10

2.3.1 หุ่นยนต์โคบอทแบบล้อเดียว (Unicycle Cobot)...................................... 10

2.3.2 หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ (Scooter Cobot).. 10

2.3.3 หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน (3R Cobot).. 12

2.3.4 หุ่นยนต์โคบอทแบบราง (Rail Cobot).. 13

2.3.5 หุ่นยนต์โคบอทก้านควบคุม (Joystick Cobot)... 14

2.3.6 หุ่นยนต์โคบอทปรับรูป.. 15

2.3.7 หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยม (Pantograph Cobot)............................ 16

2.3.9 หุ่นยนต์โคบอท 6 องศาอิสระ (6 DOF Cobot)... 17

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หน้า

บทที่ 3 ต้นแบบหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.. 18
3.1 แนวความคิด.. 18
3.2 ชุดอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องเชิงเส้นกับทรงกลม................ 19
3.3 ชุดแขนกล ชุดจับยึด และระบบส่งกำลัง... 21
3.4 ต้นแบบและโครงสร้าง.. 25
บทที่ 4 จลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.. 27
4.1 การนิยามปริภูมิสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.......................... 27
4.2 สรุปแบบจำลองทางจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
(3D Cobot Model) 49
บทที่ 5 ระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ....................................... 51
5.1 ระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอททั่วไป.. 51
5.2 การจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป........ 53
5.3 ระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.................................. 58
5.4 การจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสาม
มิติ.. 59
บทที่ 6 การทดลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลตามเส้นทางเดินของหุ่นยนต์โคบอทแขนกล
สามมิติ.. 62
6.1 วัตถุประสงค์ของการทดลอง.. 62
6.2 ขั้นตอนการทดลอง.. 63
6.3 การทดลองที่ 1.. 63
6.4 การทดลองที่ 2.. 66
6.5 วิเคราะห์ผลการทดลอง.. 69
6.6 สรุปผลการทดลอง.. 70
บทที่ 7 สรุปผลงานวิจัย.. 71
7.1 สรุปงานวิจัย... 71
7.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต... 72

หน้า

เอกสารอ้างอิง.. 74

ภาคผนวก.. 78

ภาคผนวก ก. จลนศาสตร์แบบไปข้างหน้า และแบบย้อนกลับ........................ 79

ภาคผนวก ข. เมตริกซ์จาโคเบียน และเมตริกซ์เฮสสเซี่ยนของปริภูมิข้อต่อ.......... 89

ภาคผนวก ค. สมการการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.......... 101

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.. 118

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

4.1 สรุปสัญลักษณ์และตัวแปรทั้ง 5 ปริภูมิ.. 50

ก.1 ตัวแปรของข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ..................................... 80

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1.1	ความแตกต่างระหว่างหุ่นยนต์ทั่วไปและหุ่นยนต์โคบอท................................	1
2.1	การใช้ไม้บรรทัดสร้างไกด์การเคลื่อนที่..	3
2.2	การประกอบรถยนต์โดยใช้หุ่นยนต์โคบอท..	4
2.3	ส่วนประกอบ และหลักการทำงานของซีวีทีประเภทล้อ..................................	6
2.4	หลักการทำงานของซีวีทีประเภททรงกลม...	6
2.5	ล้อทั้งสองชุดของซีวีทีประเภททรงกลม..	7
2.6	ความสัมพันธ์ของอัตราทดกับมุมปรับอัตราทด (α).....................................	8
2.7	วิธีการเชื่อมต่อซีวีทีแบบอนุกรม..	9
2.8	วิธีการเชื่อมต่อซีวีทีแบบขนาน..	9
2.9	หุ่นยนต์โคบอทแบบล้อเดียว...	10
2.10	หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์..	11
2.11	การประกอบประตูรถยนต์ด้วยสกูตเตอร์..	11
2.12	หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน..	12
2.13	ซีวีทีทรงกลมที่ออกแบบไว้สำหรับหุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน......................	12
2.14	การต่อเครือข่ายของอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องแบบขนาน.........	13
2.15	หุ่นยนต์โคบอทแบบราง..	14
2.16	หุ่นยนต์โคบอทก้านควบคุม...	14
2.17	หุ่นยนต์โคบอทปรับรูป..	15
2.18	การปรับรูปของหุ่นยนต์โคบอท..	16
2.19	หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยม...	16
2.20	หุ่นยนต์โคบอท 6 องศาอิสระ...	17
3.1	แนวความคิดหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ...	18
3.2	แกนหมุนและระนาบแกนหมุนของทรงกลมที่เกิดจากล้อ..............................	19
3.3	ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด ถูกจัดวางทำมุมกัน 90 องศา............................	20
3.4	การจัดวางฐาน และทรงกลม..	20
3.5	ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด ถูกจัดวางทำมุมกัน 90 องศา............................	21
3.6	กลไกแขนกลสามข้อต่อ..	22

ภาพที่ หน้า

3.7 กลไกหลายข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็ส........ 22
3.8 ชุดแขนกล ชุดจับยึด และระบบส่งกำลังที่ต่อเข้ากับฐานของหุ่นยนต์........ 23
3.9 ระบบส่งกำลังแบบเคเบิลและพูเล่........ 23
3.10 แบบจำลองของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติอย่างสมบูรณ์........ 24
3.11 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนแบบโรล........ 24
3.12 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนแบบพิตช์........ 25
3.13 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนแบบยอว์........ 25
3.14 (ก) ระบบส่งกำลังแบบเคเบิล และพูเล่, (ข) ข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็ส........ 26
3.15 ต้นแบบหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ........ 26
4.1 การเคลื่อนที่ของปริภูมิตำแหน่งปลาย........ 28
4.2 การเคลื่อนที่ของปริภูมิข้อต่อ........ 30
4.3 กรอบการเคลื่อนที่ของปริภูมิข้อต่อ........ 31
4.4 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_1$ บนกรอบฐาน........ 34
4.5 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_2$ บนกรอบฐาน........ 34
4.6 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_3$ บนกรอบฐาน........ 35
4.7 เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของทรงกลม ($\vec{\omega}_B$)........ 36
4.8 ปริภูมิการจับคู่ของซีวีทีประเภทล้อ........ 39
4.9 กรอบอ้างอิงการเคลื่อนที่ฐาน........ 40
4.10 กรอบอ้างอิงของแต่ชุดซีวีที........ 40
4.11 ความสัมพันธ์แบบการหมุนแบบน้อยมาก (Infinitesimal Rotations)........ 44
4.12 แผนภาพการเคลื่อนที่ (Kinematics Diagram) ของทรงกลมและล้อ........ 45
4.13 ความสัมพันธ์ของตัวแปรในปริภูมิของมุมปรับอัตราทด........ 48
4.14 แผนผังแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ (3D Cobot Model)........ 49
5.1 ความผิดพลาดที่ขึ้นกับปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอท........ 51
5.2 ระบบควบคุมแบบทั่วไปหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ........ 53
5.3 จำลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลด้วยระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป... 54
5.4 มุมปรับอัตราทดของซีวีทีทั้งสาม 54

ภาพที่ หน้า

5.5 สมการตรวจสอบแกนหมุนของการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป.......... 57

5.6 แผนผังแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยเวกเตอร์ทิศทางของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.......... 58

5.7 แผนผังการควบคุมด้วยเวกเตอร์ทิศทางของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ...... 59

5.8 จำลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลด้วยระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทาง.......... 59

5.9 มุมปรับอัตราทดของซีวีทีทั้งสาม.......... 60

5.10 สมการตรวจสอบแกนหมุนของการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทาง.......... 60

6.1 ผู้ทดลองกำลังเคลื่อนปลายแขนกลขณะทดลอง.......... 62

6.2 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 1.......... 64

6.3 ความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 1.......... 64

6.4 มุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสามในการทดลองที่ 1.......... 65

6.5 กราฟตรวจสอบแกนหมุนของการทดลองที่ 1 โดยใช้ตำแหน่งของมุมล้อที่อ่านค่าได้จริงจากอุปกรณ์ตรวจวัดมุมของทั้งสามล้อ.......... 66

6.6 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 2.......... 67

6.7 ความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 2.......... 67

6.8 มุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสามในการทดลองที่ 2.......... 68

6.9 กราฟตรวจสอบแกนหมุนของการทดลองที่ 2 โดยใช้ตำแหน่งของมุมล้อที่อ่านค่าได้จริงจากอุปกรณ์ตรวจวัดมุมของทั้งสามล้อ.......... 69

ก.1 การกำหนดกรอบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ.......... 79

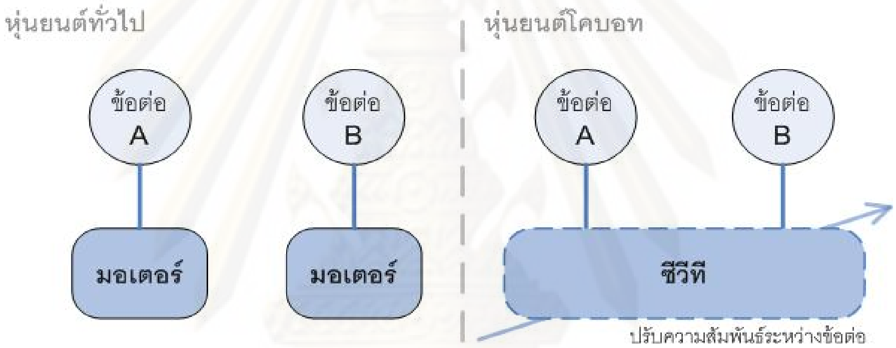
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มา

หุ่นยนต์โคบอท (Cobot) คือหุ่นยนต์ที่ถูกพัฒนาเพื่อทำงานร่วมกับมนุษย์อย่างปลอดภัย ด้วยหลักการแบบพาสซีฟ (Passive) ซึ่งอาศัยการปรับอัตราทด (Transmission ratio) ระหว่างข้อต่อโดยใช้ซีวีที (CVT: Continuous Variable Transmission) โคบอทจึงสามารถกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนกลได้ ความแตกต่างระหว่างหุ่นยนต์โคบอท และหุ่นยนต์ทั่วไปแสดงดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ความแตกต่างระหว่างหุ่นยนต์ทั่วไปและหุ่นยนต์โคบอท

ในปัจจุบันงานวิจัยหุ่นยนต์โคบอทแบ่งตามลักษณะของซีวีทีได้ 2 ประเภท ประเภทแรกเป็นหุ่นยนต์โคบอทที่ใช้ชุดควบคุมความสัมพันธ์ของแต่ละข้อต่อด้วยซีวีทีประเภทล้อ ซึ่งสามารถปรับอัตราทดความเร็วเชิงเส้น ตัวอย่างของโคบอทชนิดนี้เช่น หุ่นยนต์ Unicycle Cobot [1], หุ่นยนต์ Scooter Cobot [2], Extreme Joystick [3] เป็นต้น หุ่นยนต์โคบอทประเภทที่สองจะใช้ชุดควบคุมความสัมพันธ์ของแต่ละข้อต่อด้วยซีวีทีประเภททรงกลม ซึ่งสามารถปรับอัตราทดความเร็วเชิงมุม เช่น หุ่นยนต์ 3R Cobot [4], หุ่นยนต์ Gantry Cobot at Ford [5] เป็นต้น

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาจลนศาสตร์และระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ซึ่งใช้ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุดมาประยุกต์ใช้ร่วมกับทรงกลม ซีวีทีจะควบคุมความสัมพันธ์ของแกนหมุนทั้งสาม โรล, พิตช์ และยอว์ (roll, pitch and yaw) ของทรงกลม ส่วนบนของทรงกลมถูกติดตั้งด้วยแขนกล 3 ข้อต่อ มีพื้นที่ทำงานแบบเชิงเส้น 3 มิติบนพิกัดคาร์ทีเซียน X, Y และ Z หลักการทำงาน

และจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะมีลักษณะเฉพาะและซับซ้อน ไม่สามารถใช้วิธีการและทฤษฎีทางหุ่นยนต์ทั่วไปหาได้โดยตรง งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาจลนศาสตร์และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ และพัฒนาระบบควบคุมขึ้นมาเพื่อให้หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติสามารถทำงานได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) ศึกษาจลนศาสตร์และรูปแบบต่างๆของหุ่นยนต์โคบอท
2) พัฒนาจลนศาสตร์สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
3) เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
4) เพื่อพัฒนาระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ศึกษารูปแบบต่างๆของหุ่นยนต์โคบอท รวมทั้งจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอท
2) พัฒนาจลนศาสตร์ของโคบอทแขนกลสามมิติ และทดสอบโดยการจำลองในคอมพิวเตอร์และทดสอบกับหุ่นยนต์จริง
3) ออกแบบระบบควบคุมให้หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติและทดสอบโดยการจำลองในคอมพิวเตอร์
4) ทดสอบระบบควบคุมกับหุ่นยนต์จริง
5) ทดสอบพฤติกรรมของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติตามเส้นทางการเคลื่อนที่ต่างๆ ที่กำหนด

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

1) จลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
2) ระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
3) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ
4) ใช้เป็นต้นแบบในการวิจัยเทคโนโลยีทางด้านการปฏิสัมพันธ์ระหว่างมนุษย์และหุ่นยนต์

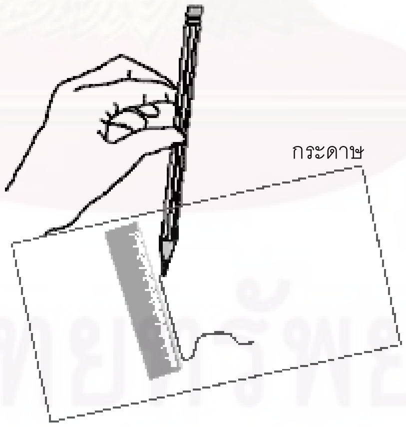
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

หุ่นยนต์โคบอทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มนุษย์มีความสามารถหลากหลาย มีมือที่ใช้กับอุปกรณ์ต่างๆได้อย่างคล่องตัวและมีประสิทธิภาพ มีประสาทสัมผัสที่ดี สามารถแยกแยะความแตกต่าง แก้ปัญหาเฉพาะหน้าและตัดสินใจได้ดี ด้วยเหตุนี้จึงมีมนุษย์ในการประกอบชิ้นงานของผลิตภัณฑ์ต่างๆ แม้ว่าเทคโนโลยีด้านหุ่นยนต์จะสามารถทำงานด้านต่างๆได้ดีกว่ามนุษย์ก็ตาม งานบางลักษณะที่มีความซับซ้อนในการประกอบมนุษย์สามารถทำได้เร็วและดีกว่า อย่างไรก็ตามมนุษย์มีความสามารถจำกัดหลายหลายประการเช่น ไม่สามารถยกหรือเคลื่อนย้ายวัตถุที่มีขนาดหรือน้ำหนักมากๆได้ ดี และถ้าทำจะเกิดความล้า ยังผลให้ประสิทธิภาพถดถอยและอาจเกิดการบาดเจ็บได้

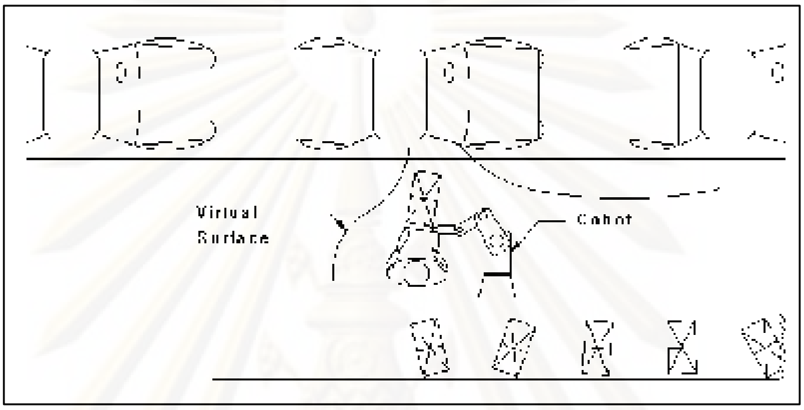
ลักษณะงานหลายหลายประเภทต้องการข้อดีของมนุษย์และหุ่นยนต์รวมกัน ปัจจุบันมีการพัฒนางานวิจัยด้านการทำงานร่วมกันระหว่างมนุษย์และหุ่นยนต์ ประเด็นสำคัญที่นักวิจัย และวิศวกรผู้ออกแบบหุ่นยนต์ต้องคำนึงถึงเป็นอันดับแรกก็คือความปลอดภัย จึงมีนักวิจัยจำนวนมากพยายามพัฒนาหุ่นยนต์ที่มีความปลอดภัยต่อมนุษย์เสมอ



รูปที่ 2.1 การใช้ไม้บรรทัดสร้างไกด์การเคลื่อนที่

หุ่นยนต์โคบอท (Cobot: Collaborative Robot) คือหุ่นยนต์ระบบเป็นพาสซีฟอย่างสมบูรณ์ หุ่นยนต์โคบอทจะไม่สร้างแรง และเคลื่อนที่ตัวมันเองได้ หุ่นยนต์โคบอททำงานเสมือนกับตัวช่วยนำ

ทาง (Virtual guidance) ให้ผู้ใช้ไปยังเส้นทางที่กำหนด เปรียบเสมือนการใช้ดินสอขีดเส้นตรงโดยอาศัยไม้บรรทัดดังรูปที่ 2.1 ไม้บรรทัดช่วยให้การขีดเส้นตรงมีคุณภาพที่ดี ในทำนองเดียวกันหุ่นยนต์โคบอทก็สามารถโปรแกรมสร้างไกด์หลายมิติให้มนุษย์ในลักษณะเส้นทาง หรือพื้นผิวแบบต่างๆ ตัวอย่างการใช้งานเช่น นำไปใช้ในงานประกอบรถยนต์ [5] หุ่นยนต์โคบอทจะช่วยให้การประกอบมีความแม่นยำขึ้น ใช้เวลาทำงานน้อยลง และของเสียลดจำนวนลง



รูปที่ 2.2 การประกอบรถยนต์โดยใช้หุ่นยนต์โคบอท

อุปกรณ์ทางด้านแฮปติกส์ (Haptic Interface) โดยทั่วไปไว้ใช้สร้างสภาวะจำลองต่างๆ แต่ในบางกรณีอุปกรณ์ทางด้านแฮปติกส์อาจจะทำให้เกิดปัญหาขึ้น เช่น ในกรณีการสร้างกำแพงเสมือนให้มีความแข็งมากๆ (high stiffness) มอเตอร์จะต้องมีขนาดใหญ่ และต้องใช้อัตราขยายในการควบคุมสูง เพื่อที่จะสร้างแรงต้านได้เพียงพอ มีผลให้เกิดความไม่เสถียรขึ้นได้ง่าย ดังนั้นจึงต้องใช้ความระมัดระวังเมื่อนำมาใช้งานร่วมกับมนุษย์

ความแตกต่างระหว่างหุ่นยนต์โคบอทกับอุปกรณ์แฮปติกส์ทั่วไปก็คือหุ่นยนต์โคบอทไม่ได้ใช้แรงตรง (Direct force) จากตัวขับดัน (Actuator) เพื่อต้านการเคลื่อนที่ของมนุษย์เหมือนกับอุปกรณ์แฮปติกส์ทั่วไป แต่หุ่นยนต์โคบอทจะใช้อุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่อง หรือซีวีที (CVT: Continuous Variable Transmission) ในการควบคุมความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อ จึงเห็นได้ว่าการเคลื่อนปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทจะต้องอาศัยแรงกระทำจากมนุษย์ โดยที่หุ่นยนต์โคบอทจะบังคับทิศทางการเคลื่อนที่

2.1 อุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องที่ใช้ในหุ่นยนต์โคบอท

อุปกรณ์ส่งถ่ายกำลัง (Transmission) คืออุปกรณ์ที่ทำหน้าที่ส่งถ่ายกำลังระหว่างข้อต่อ อัตราส่วนของอัตราเร็วระหว่างด้านขาเข้า (Input) และด้านขาออก (Output) เรียกว่า อัตราทด (Transmission Ratio) อุปกรณ์ส่งถ่ายกำลังได้มีการพัฒนามานานกว่าร้อยปี โดยส่วนใหญ่ถูกออกแบบมาให้มีอัตราทดคงที่เช่น เกียร์ทดในเครื่องจักร อย่างไรก็ตามมีงานหลายประเภทที่ต้องการใช้อัตราทดที่ปรับได้เช่น การเปลี่ยนความเร็วโดยเปลี่ยนเกียร์ของรถยนต์ ซึ่งอัตราทดที่ปรับจะเป็นแบบขั้นบันไดไม่ต่อเนื่อง โดยมากมักจำกัดอยู่ที่ 4-6 อัตราทด (การเปลี่ยนเกียร์ในรถยนต์ทั้งแบบอัตโนมัติและแบบธรรมดาก็จะเปลี่ยนแบบขั้นบันไดเช่นกัน เช่นการเปลี่ยนจากเกียร์ 1 ไปเป็นเกียร์ 2 เป็นต้น)

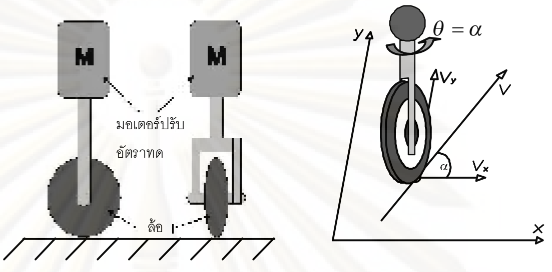
อุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่อง หรือที่เรียกว่า ซีวีที (Continuous Variable Transmission) เป็นอุปกรณ์ที่สามารถปรับเปลี่ยนอัตราทดได้อย่างต่อเนื่อง ซีวีทีส่วนมากมีข้อจำกัดอยู่ที่อัตราทดที่ได้จากการปรับเปลี่ยนจะมีช่วงจำกัด และไม่สามารถให้อัตราทดที่เป็นลบได้ ในการพัฒนาหุ่นยนต์โคบอทซึ่งต้องใช้ซีวีทีที่มีคุณสมบัติพิเศษ สามารถปรับอัตราทดในช่วง $-\infty$ ถึง ∞ อย่างต่อเนื่อง ปัจจุบันในการพัฒนาหุ่นยนต์โคบอทได้มีการนำซีวีทีมาใช้เพียง 2 ประเภท คือ ซีวีทีประเภทล้อ และซีวีทีประเภททรงกลม

2.1.1 ซีวีทีประเภทล้อ

ซีวีทีประเภทล้อ คืออุปกรณ์ที่ใช้ปรับอัตราทดของ *“ความเร็วเชิงเส้น”* ได้อย่างต่อเนื่อง เป็นซีวีทีที่ใช้ล้อ (Wheel) เป็นกลไกหลักในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อเชิงเส้นดังแสดงในรูปที่ 2.3.ก ล้อเป็นอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องเชิงเส้นที่มนุษย์มองข้ามมาช้านาน รูปที่ 2.3.ข แสดงหลักการทำงานโดยกำหนดให้ล้อกำลังเคลื่อนที่อยู่บนพื้นระนาบ X-Y ด้วยความเร็ว V ในทิศทางการเคลื่อนที่ α ซึ่งเทียบกับแกน X จะได้ส่วนประกอบความเร็ว V_x บนแกน X และความเร็ว V_y บนแกน Y ความสัมพันธ์ของอัตราทดของความเร็วเชิงเส้นทั้งสองกำหนดได้ดังนี้

$$\text{อัตราทด} = \tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} \tag{2.1}$$

อัตราทดสมการที่ (2.1) สามารถมีค่าเป็นลบได้ และจะมีค่าอัตราทดอยู่ในช่วง $-\infty$ ถึง ∞ สามารถปรับค่าอัตราทดด้วยการหมุนเพื่อเปลี่ยนมุมเลี้ยว α ของล้อ

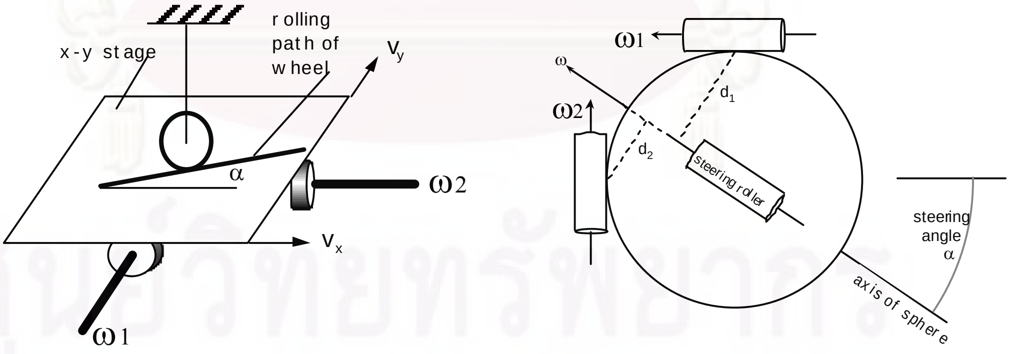


ก. ข.

รูปที่ 2.3 ส่วนประกอบ และหลักการทำงานของซีวีทีประเภทล้อ

ล้อนั้นเป็นกลไกที่ง่ายต่อการใช้งานในปี 1995 Wannasuphoprasit [1] ได้นำเอาล้อไปใช้ในการออกแบบสร้างอุปกรณ์แฮปติกส์ที่ทำให้เป็นระบบแพสซิฟอย่างสมบูรณ์ได้เป็นครั้งแรกและต่อมาได้ถูกพัฒนาขึ้นเป็นองค์ประกอบสำคัญของหุ่นยนต์โคบอท

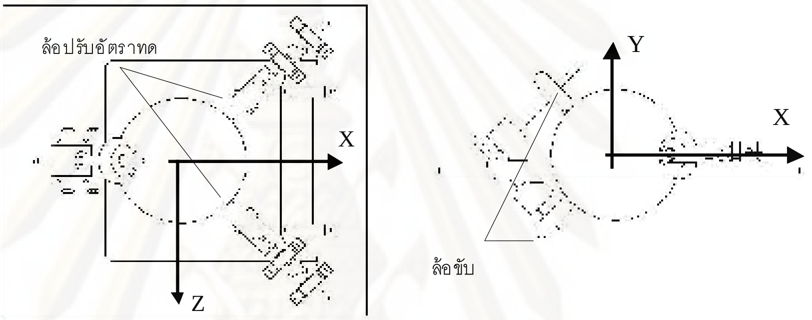
2.1.2 **ซีวีทีประเภททรงกลม**



ก. ข.

รูปที่ 2.4 หลักการทำงานของซีวีทีประเภททรงกลม [4]

ซีวีทีประเภททรงกลมถูกพัฒนาขึ้นโดย Moore [4] เมื่อปี 1997 เกิดจากการนำอุปกรณ์ปรับอัตราทดแบบต่อเนื่องแบบล้อมาประยุกต์เข้ากับลูกทรงกลมดังรูปที่ 2.4 ซีวีทีประเภทนี้ประกอบไปด้วยทรงกลมจำนวนหนึ่งลูก ล้อชุดปรับอัตราทด (Steering Rollers) ที่ใช้เพื่อเปลี่ยนอัตราทด และล้อชุดขับ (Driving Roller) ที่ต่อกับเพลาขาเข้าและเพลาขาออกจากภายนอก โดยทรงกลมไม่สามารถเคลื่อนที่ได้แต่จะสามารถหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของตนเองได้เท่านั้น ล้อทั้งสองชุดจะสัมผัสกับผิวของทรงกลม และเมื่อลากเส้นจากแกนเลี้ยวของล้อจะผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมเสมอ ล้อทั้ง 4 ถูกจัดวางในลักษณะสมดุลคล้ายทรงเหลี่ยม 4 หน้า (Tetrahedral) ทำให้ทรงกลมวางอยู่กับที่ ดังแสดงในรูปที่ 2.5

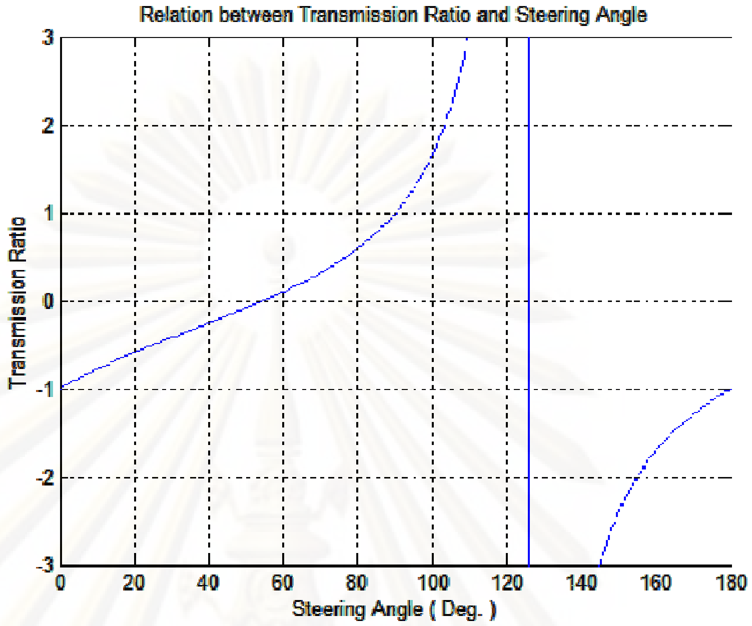


รูปที่ 2.5 ล้อทั้งสองชุดของซีวีทีประเภททรงกลม

แกนหมุนของทรงกลมจะถูกกำหนดตำแหน่งด้วยมุมเลี้ยวของล้อปรับอัตราทด จากหลักการที่แกนหมุนของทรงกลมจะขนานไปกับแกนหมุนของล้อปรับอัตราทดเสมอ ดังนั้นถ้าล้อปรับอัตราทดถูกหมุน ตำแหน่งแกนหมุนของทรงกลมก็จะเปลี่ยนไป มีผลทำให้ระยะ d_1 และ d_2 (ระยะระหว่างแกนหมุนของทรงกลมกับจุดสัมผัสของล้อขับอินพุตและล้อขับเอาท์พุตตามรูป 2.4 ข.) เปลี่ยนไป ซึ่งทำให้อัตราส่วนของความเร็วเชิงมุมที่ล้อขับอินพุตและเอาท์พุตเปลี่ยนแปลงไปเช่นกันด้วยอัตรา $\omega_2/\omega_1 = d_2/d_1$ เราเรียกอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดของความเร็วเชิงมุมรูปแบบนี้ว่าซีวีทีทรงกลม (Spherical CVT) สามารถแสดงความสัมพันธ์ของอัตราทดที่เป็นฟังก์ชันของมุมการปรับอัตราทดได้ดังนี้

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha} \tag{2.2}$$

ในสมการ (2.2) จะแสดงให้เห็นว่าอัตราทดมีค่าอยู่ในช่วง $-\infty$ ถึง ∞ แสดงในรูปที่ 2.6



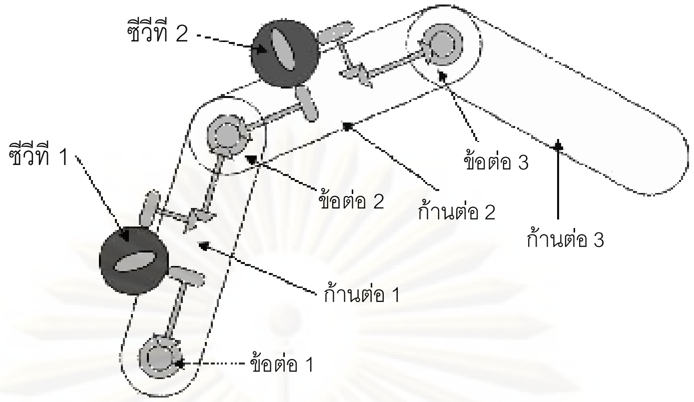
รูปที่ 2.6 ความสัมพันธ์ของอัตราทดกับมุมปรับอัตราทด (α)

2.2 การเชื่อมต่อซีวีที

ในหุ่นยนต์โคบอทที่มีหลายมิติการเคลื่อนที่ จำนวนของซีวีทีต้องมีมากขึ้น เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อต่างๆ ในการเชื่อมต่อซีวีทีจำนวนมากกว่าหนึ่งชุดเข้ากับข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอท โดยหลักการพื้นฐานแล้วสามารถทำได้ 2 วิธี ดังนี้

การเชื่อมต่อซีวีทีแบบอนุกรม

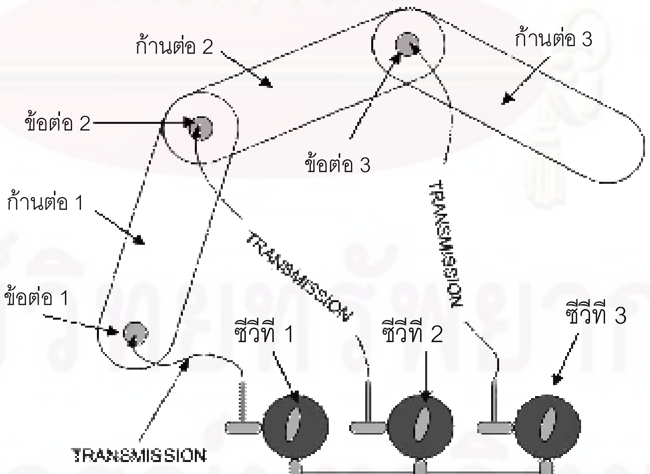
วิธีการเชื่อมต่อซีวีทีแบบอนุกรม แสดงดังรูปที่ 2.7 แต่ละซีวีทีจะสามารถควบคุมความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างข้อต่อด้วยด้วยอัตราทดโดยตรง ข้อดีของวิธีการเชื่อมต่อแบบอนุกรมคือใช้ซีวีทีจำนวนน้อยกว่าจำนวนของข้อต่อ



รูปที่ 2.7 วิธีการเชื่อมต่อซีวีทีแบบอนุกรม

การเชื่อมต่อซีวีทีแบบขนาน

การเชื่อมต่อซีวีทีแบบขนานใช้ซีวีทีหนึ่งชุดต่อเชื่อมต่อหนึ่งข้อต่อ ซึ่งทุกซีวีทีจะกำหนดอัตราทดระหว่างข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอทกับข้อต่อรวม (Common Joint) ดังรูปที่ 2.8 ข้อได้เปรียบคือช่วยป้องกันไม่ให้อัตราทดที่ซีวีทีสร้างขึ้นมีค่ามากเกินไป เช่น ในกรณีของหุ่นยนต์โคบอทที่มีหลายข้อต่อและถูกออกแบบให้ซีวีทีถูกต่อกันแบบอนุกรม ถ้าข้อต่อใดข้อต่อหนึ่งมีความเร็วเชิงมุมมีค่าน้อยมากจนเกือบเป็นศูนย์จะทำให้ซีวีทีในข้อต่อนั้นต้องสร้างอัตราทดที่มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ซึ่งในความเป็นจริงซีวีทีแบบทรงกลมจะไม่สามารถสร้างอัตราทดได้สูงถึงขนาดนั้น ถึงแม้ว่าทางทฤษฎีจะสามารถทำได้ก็ตาม



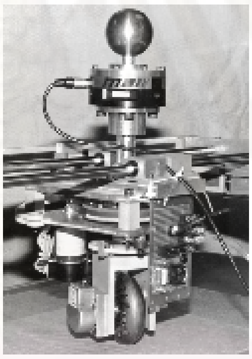
รูปที่ 2.8 วิธีการเชื่อมต่อซีวีทีแบบขนาน

สำหรับการต่อซีวีทีแบบขนานยังสามารถเพิ่มกำลังจากตัวขับ (Actuator) เข้าไปในระบบของหุ่นยนต์โคบอทเพื่อชดเชยแรงเสียดทาน หรือช่วยการเคลื่อนที่ ได้

2.3 หุ่นยนต์โคบอทแบบต่างๆ

2.3.1 หุ่นยนต์โคบอทแบบล้อเดียว (Unicycle Cobot)

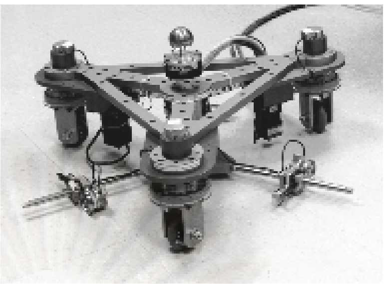
หุ่นยนต์โคบอทแบบล้อเดียวเป็นหุ่นยนต์โคบอทตัวแรกในโลกที่ถูกสร้างขึ้น มีพื้นที่ใช้งาน (Work space) อยู่บนพื้นระนาบแบบคาร์ทีเซี่ยนเชิงเส้น X และ Y เนื่องจากลักษณะของหุ่นยนต์มีเพียงล้อเดียวดังรูปที่ 2.9 จึงจำเป็นที่จะต้องมีรางเพื่อให้พยุงตัวอยู่ได้ หุ่นยนต์โคบอทตัวนี้มีหลักการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ปัจจุบันมีการนำไปพัฒนาต่อยอดเป็นหุ่นยนต์โคบอทอีกหลายรูปแบบ



รูปที่ 2.9 หุ่นยนต์โคบอทแบบล้อเดียว[1]

2.3.2 หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ (Scooter Cobot)

สกูตเตอร์เป็นหุ่นยนต์โคบอทที่สร้างขึ้นโดย Wannasuphoprasit และคณะ [2] ถูกออกแบบให้นำไปประยุกต์ใช้ในงานจริง มีล้อจำนวน 3 ล้อ สามารถตั้งอยู่ได้ด้วยตัวมันเองดังรูปที่ 2.10 มีพื้นที่ใช้งานใน 3 มิติ X, Y และ θ หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ประกอบไปด้วยมอเตอร์ตัวเล็ก 3 ตัว มีหน้าที่ควบคุมมุมเลี้ยวของล้อทั้งสาม ตัวรับรู้แรง 1 ตัวอยู่ตรงจุดกึ่งกลางของสกูตเตอร์มีหน้าที่วัดแรงที่เกิดจากผู้ใช้



รูปที่ 2.10 หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ [2]

โหมดการทำงานของสกูตเตอร์จะมีสองโหมดการทำงานทั้ง การทำงานแบบอิสระ (Virtual Caster) และการทำงานแบบกำแพงเสมือน (Virtual Wall)

การทำงานแบบอิสระ ผู้ใช้จะเคลื่อนหุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ได้อย่างอิสระในพื้นที่ใช้งาน X, Y และ θ มอเตอร์ทั้งสามตัวจะควบคุมมุมเลี้ยวของล้อให้สัมพันธ์กับแรง และทิศทางการเคลื่อนที่ของผู้ใช้

การทำงานแบบกำแพงเสมือนจะเกิดขึ้นเมื่อผู้ใช้เคลื่อนหุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ไปชนกับกำแพงเสมือนที่ได้โปรแกรมไว้ หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ก็จะเคลื่อนที่ไถลไปตามกำแพงด้วยการปรับทิศทางของล้อทั้งสามไปตามทิศทางของกำแพงเสมือน

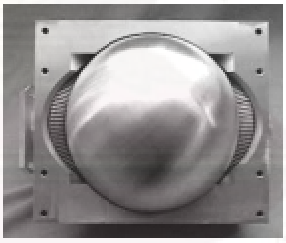
หลักการของหุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ถูกนำไปพัฒนาใช้งานในโรงงานประกอบรถยนต์ของ ‘General Motor’ โดยนำไปประกอบประตูเข้ากับตัวถังของรถยนต์ ซึ่งจะทำให้เกิดความสะดวกสบายในการทำงานเป็นอย่างมาก

รูปที่ 2.11 การประกอบประตูรถยนต์ด้วยสกูตเตอร์ [5]

2.3.3 หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน (3R Cobot)

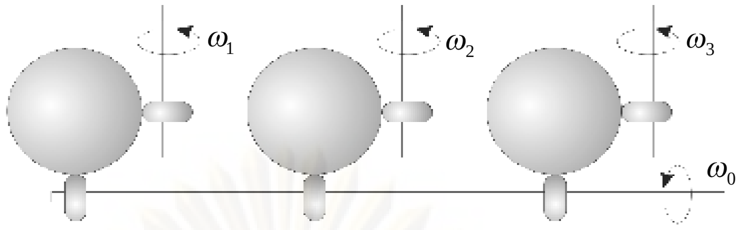
รูปที่ 2.12 หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน [4]

หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน (3R Cobot) ถูกออกแบบโดย Moore และคณะ [4] ลักษณะเป็นแขนกลแบบขนาน (parallelogram arm) มีพื้นที่ใช้งานแบบเชิงเส้น 3 มิติ X, Y และ Z และมีก้านต่อจำนวน 5 ก้าน ต่อกันในลักษณะขนาน ที่ปลายด้านตรงข้ามกับปลายแขนกลมีการถ่วงดุลเพื่อชดเชยแรงโน้มถ่วง (Counter-balanced) หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุนใช้ซีวีทีประเภททรงกลมดังรูป 2.13



รูปที่ 2.13 ซีวีทีทรงกลมที่ออกแบบไว้สำหรับหุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน [4]

คุณลักษณะพิเศษอีกอย่างหนึ่งของหุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน คือลักษณะการต่อเครือข่ายของซีวีทีเป็นแบบขนาน ดังรูป 2.14 ซึ่งสามารถใส่กำลังงานจากภายนอกผ่านทางแกนหมุนรวม (ω_0) ทำให้มีลักษณะแบบแอ็คทีฟ (Active) สามารถชดเชยแรงเสียดทานในระบบได้



รูปที่ 2.14 การต่อเครือข่ายของอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องแบบขนาน

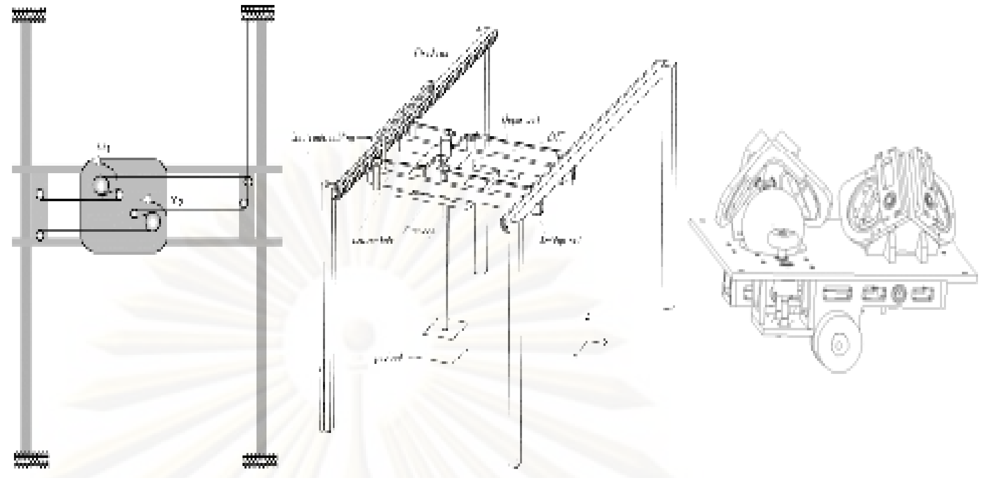
2.3.4 **หุ่นยนต์โคบอทแบบราง** (Rail Cobot)

หุ่นยนต์โคบอทตัวนี้เป็นอีกตัวหนึ่งที่ได้นำไปใช้ในอุตสาหกรรม แสดงในรูป 2.15 ได้ติดตั้งอยู่ที่ Ford Motor Company's Advanced Manufacturing Technology Division มีพื้นที่ใช้งานในระนาบและมี 2 มิติ คล้ายกับหุ่นยนต์โคบอทล้อเดียว

หุ่นยนต์โคบอทแบบรางใช้ซีวีทีประเภททรงกลม 2 ตัวมาต่อกันแบบขนานกัน และมีการเพิ่มกำลังเข้าไปในระบบอีกด้วย จึงทำให้สามารถผ่อนแรงแก่ผู้ใช้เมื่อเคลื่อนที่สิ่งของน้ำหนักมาก

กำลังงานภายนอกที่ใส่เพิ่มเพียงเพื่อที่จะเอาชนะแรงเสียดทานตามธรรมชาติที่เกิดในสายพานและระบบรางเท่านั้น ดังนั้นกำลังงานของมอเตอร์จึงใช้เพียงแค่ 200 วัตต์ ก็สามารถที่จะยกของมวลน้ำหนัก 150 กก. เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งจนมีความเร็ว 2 m/s โดยไม่จำเป็นที่มนุษย์ต้องออกแรงมาก การเปลี่ยนทิศทางมวลแบบ 90 องศา รัศมี 30 ซม. ด้วยความเร็ว 2 m/s ทำได้ง่ายด้วยวิธีการสร้างกำแพงเสมือนของหุ่นยนต์โคบอท เมื่อเรานำไปเปรียบเทียบกับวิธีการหุ่นยนต์เดิมที่ใช้กำลังงานจากมอเตอร์ทั้งหมดเพื่อให้มวลเคลื่อนที่ ซึ่งจะต้องใช้มอเตอร์ที่มีกำลังงานประมาณ 4,000 วัตต์ จะเห็นได้ว่าหุ่นยนต์โคบอทปลอดภัยกว่าเป็นอย่างมาก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

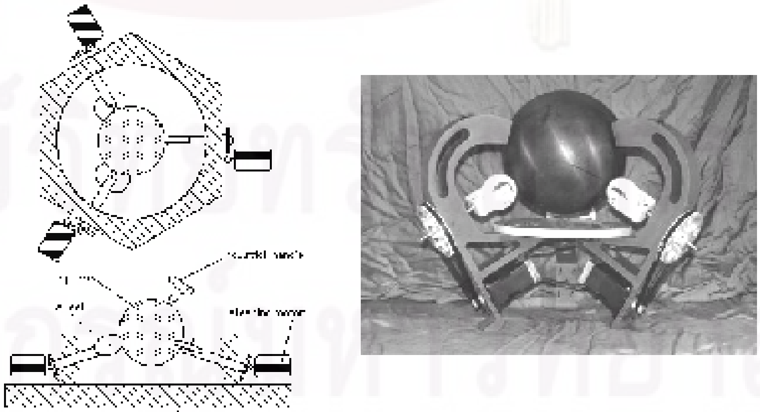


ก. ลักษณะโครงสร้างของโคบอทแบบราง　ข. ภาพด้านบนของโคบอทแบบราง　ค. ชุดซีวีทีที่ใช้ในโคบอทแบบราง

รูปที่ 2.15 หุ่นยนต์โคบอทแบบราง [5]

2.3.5 **หุ่นยนต์โคบอทก้านควบคุม** (Joystick Cobot)

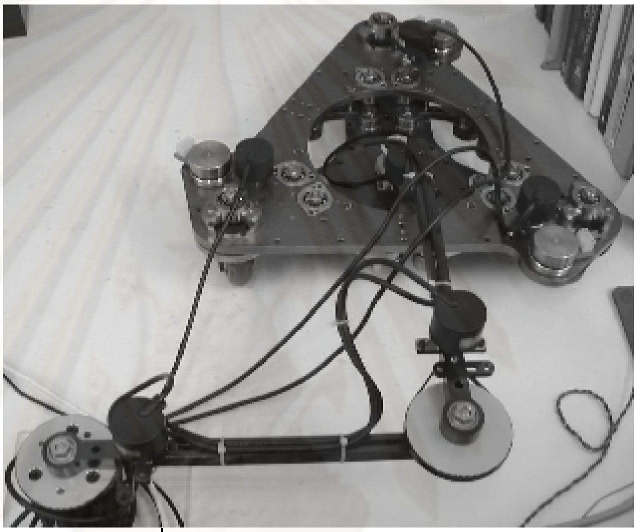
หุ่นยนต์โคบอทก้านควบคุมเป็นลักษณะการประยุกต์อีกรูปแบบหนึ่ง โดยใช้ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด ซึ่งถูกตรึงติดกับฐาน เพื่อควบคุมการหมุนของทรงกลม โรล, พิตซ์ และ ยอว์ (Roll, Pitch, Yaw) ล้อทั้งสามจะถูกจัดวางให้แกนมุมเลี้ยวตั้งฉากกับผิวของทรงกลมเสมอ และเมื่อจัดวางดังรูป 2.16 ทรงกลมจะสามารถวางอยู่ด้านบนของล้อ โดยไม่เคลื่อนได้ ดังนั้นด้วยการควบคุมมุมเลี้ยวของล้อก็สามารถบังคับการหมุนของทรงกลม



รูปที่ 2.16 หุ่นยนต์โคบอทก้านควบคุม [3]

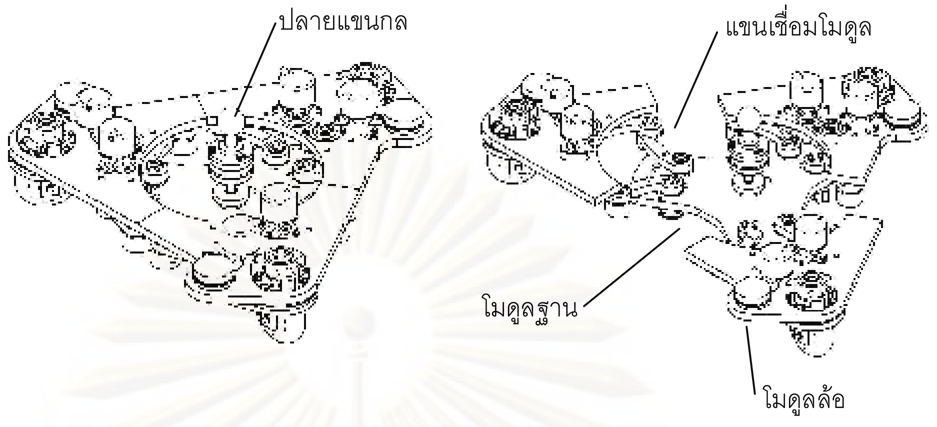
2.3.6 หุ่นยนต์โคบอทปรับรูป

หุ่นยนต์โคบอทปรับรูปเป็นหุ่นยนต์โคบอทตัวแรกและตัวเดียวที่สามารถปรับเปลี่ยนรูปร่างตัวเองได้ ลักษณะคล้ายกับหุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ ดังรูปที่ 2.17 ถูกพัฒนาโดยนายศุภพน จันทร์พัฒน์ และคณะ [7] ห้องปฏิบัติการสหวิทยาการมนุษย์และหุ่นยนต์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.17 หุ่นยนต์โคบอทปรับรูป [7]

หุ่นยนต์โคบอทปรับรูปมีหลักการทำงานโดยอาศัยการปรับความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อด้วยซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด มีพื้นที่ใช้งาน 3 มิติ X, Y และ θ จะมีโหมดการทำงานเพิ่มจากปกติของหุ่นยนต์โคบอทก็คือ โหมดการปรับรูปร่างหุ่นยนต์โคบอท การขยายร่างแสดงดังรูปที่ 2.18

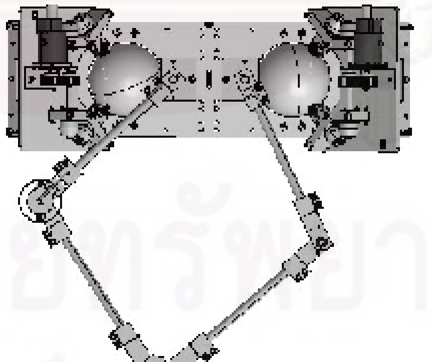


ก. ลักษณะปกติ ข. ขณะกำลังขยายโมดูลออก

รูปที่ 2.18 การปรับรูปของหุ่นยนต์โคบอท [7]

2.3.7 **หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยม** (Pantograph Cobot)

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยมใช้ซีวีทีประเภททรงกลมมาประยุกต์เข้ากับแขนกลห้าก้านต่อที่มีพื้นที่ใช้งานบนระนาบ 2 มิติ การสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่ออาศัยการเชื่อมต่อซีวีทีจำนวน 2 ชุดขนานกัน ทำให้สามารถเพิ่มกำลังงานจากภายนอกเข้าไปในระบบได้ หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยมแสดงได้ดังรูปที่ 2.19 ถูกพัฒนาโดยห้องปฏิบัติการสหวิทยาการมนุษย์และหุ่นยนต์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย [8]

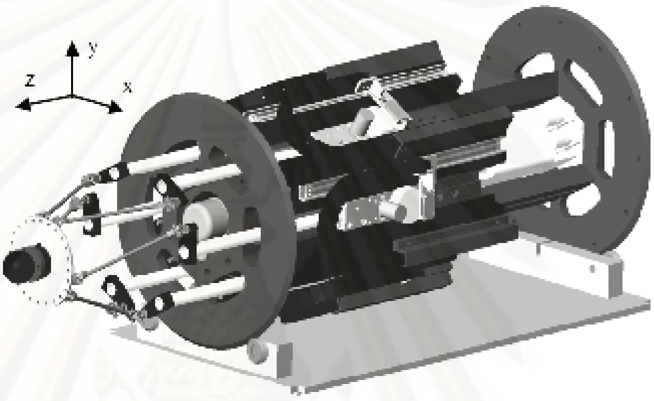


รูปที่ 2.19 หุ่นยนต์โคบอทแขนกลห้าเหลี่ยม [8]

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3.8 หุ่นยนต์โคบอท 6 องศาอิสระ (6 DOF Cobot)

หุ่นยนต์โคบอท 6 องศาอิสระถูกพัฒนาขึ้นโดย Eric L. Faulring [9] เป็นหุ่นยนต์โคบอทที่มีมิติของพื้นที่การทำงานมากที่สุดถึง 6 มิติ อาศัยกลไกแบบขนาน 6 ก้านต่อ แต่ละก้านจะถูกต่อเข้ากับซีวีทีประเภทล้อชุดหนึ่ง และล้อถูกออกแบบให้วางอยู่บนพื้นผิวของทรงกระบอก



รูปที่ 2.20 หุ่นยนต์โคบอท 6 องศาอิสระ [9]

ล้อของหุ่นยนต์โคบอทนี้ทำจากโลหะ สามารถใส่แรงกดตั้งฉากได้สูงมาก แรงเสียดทานด้านข้างของล้อกับพื้นทรงกระบอกจึงมากตามไปด้วย หุ่นยนต์โคบอทนี้เมื่อนำมาใช้งานจึงเกิดการไถลน้อยมาก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

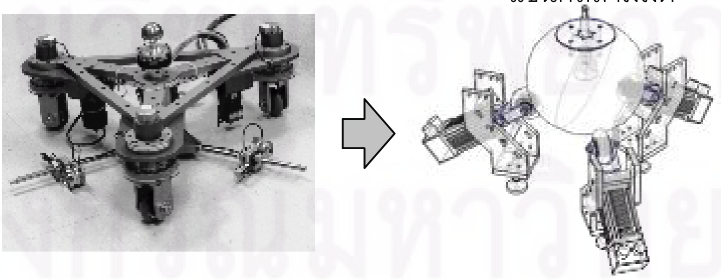
บทที่ 3

ต้นแบบหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ (3D Cobot) มีลักษณะของกลไกแบบแขนกล 3 ข้อต่อ มีพื้นที่ใช้งานเชิงเส้น 3 มิติ บนพิกัดคาร์ทีเซียน X, Y และ Z หลักการทำงานจะอาศัยซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด นำมาต่อขนานกัน เพื่อบังคับการหมุนของทรงกลม และใช้แขนกลแปลงการเคลื่อนที่เชิงมุมของทรงกลมเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้น

3.1 แนวความคิด

พิจารณารูปที่ 3.1 ด้านซ้าย หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ ซึ่งมีล้อสามชุดถูกยึดติดกันด้วยโครงสร้างแบบสามเหลี่ยม สามารถควบคุมทิศทางการเคลื่อนที่โดยอาศัยการปรับมุมเลี้ยวของล้อทั้งสาม เมื่อพิจารณาหุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์ซึ่งวางอยู่บนพื้นโลก หากจินตนาการว่าโลกมีขนาดเล็กลงจนมีขนาดประมาณเท่าลูกโบว์ลิ่ง ในส่วนของล้อทั้งสามกำหนดให้มีขนาดเท่าเดิม และจัดวางแกนของมุมเลี้ยวให้ตั้งฉากกับพื้นผิวของลูกทรงกลมเช่นเดิม ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ล้อทั้งสามถูกตรึงให้อยู่กับที่ดังรูปที่ 3.1 ด้านขวา การหมุนของทรงกลมสามารถควบคุมได้โดยอาศัยการปรับมุมเลี้ยวของล้อทั้งสาม ด้วยหลักการประยุกต์หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์เช่นนี้ จึงเป็นที่มาของแนวความคิดเบื้องต้นของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ



รูปที่ 3.1 แนวความคิดหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

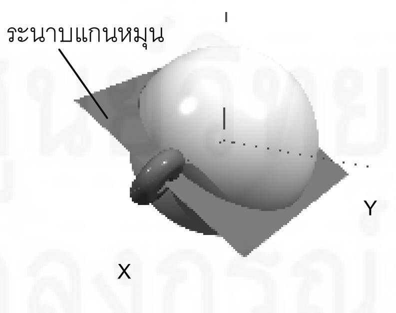
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

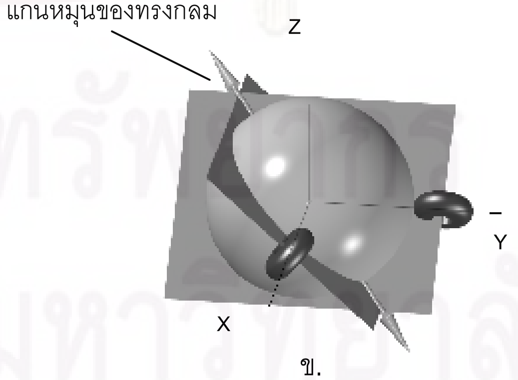
หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติถูกออกแบบให้มีความเหมาะสมกับการใช้งานร่วมกันกับมนุษย์ กล่าวคือโครงสร้างและกลไกของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะต้องมีความเฉื่อย (Mass Inertia) น้อยในชุดแขนกล ระบบส่งกำลัง และชุดจับยึดแขนกล เพื่อให้มนุษย์มีความสบายในการใช้งานและรับภาระเนื่องจากน้ำหนักของอุปกรณ์น้อยที่สุด การออกแบบยังต้องคำนึงถึงความปลอดภัยของมนุษย์ในการใช้งานอุปกรณ์ และต้องมีโครงสร้างรวมถึงกลไกต่างๆที่ใช้งบประมาณไม่สูงมากนัก

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติมีส่วนประกอบ และกลไกต่างๆที่สำคัญดังนี้ ชุดแขนกลและการส่งกำลัง ชุดจับยึดแขนกล และชุดอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องเชิงเส้นกับทรงกลมดังจะกล่าวต่อไป

3.2 ชุดอุปกรณ์ปรับเปลี่ยนอัตราทดแบบต่อเนื่องเชิงเส้นกับทรงกลม

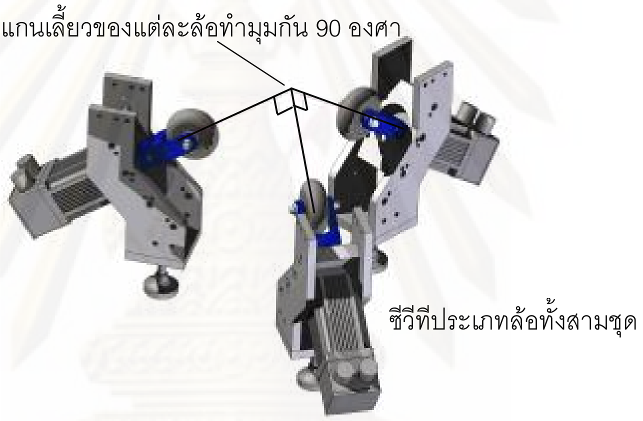
เมื่อพิจารณาซีวีทีประเภทล้อชุดหนึ่งนำมาสัมผัสทรงกลม โดยให้แกนเลี้ยววางทับกับแกน X ในลักษณะดังรูปที่ 3.2 ก. สมมุติให้ทรงกลมถูกตรึงจุดศูนย์กลางให้สามารถหมุนรอบแกนหมุนใดๆ แต่ไม่สามารถเคลื่อนตำแหน่งจุดศูนย์กลางได้ ด้วยลักษณะเช่นนี้พื้นผิวของทรงกลมจะถูกแรงเสียดทานด้านข้างของล้อบังคับการเคลื่อนที่ไว้ ทำให้แกนหมุนของทรงกลมเกิดขึ้นได้เฉพาะบนระนาบที่วางตัวอยู่บนแกนหมุนของล้อ และจุดศูนย์กลางของทรงกลมดังรูปที่ 3.2 ก. เท่านั้น ระนาบนี้ถูกตั้งชื่อว่าระนาบแกนหมุน (Axis of rotation plane) อย่างไรก็ตามล้อเพียงหนึ่งลูกก็ยังไม่สามารถบังคับแกนหมุนที่แน่นอนให้เกิดขึ้นได้





รูปที่ 3.2 แกนหมุนและระนาบแกนหมุนของทรงกลมที่เกิดจากล้อ

การบังคับให้ทรงกลมมีแกนหมุนที่แน่นอนจึงต้องมีล้ออย่างน้อยสองลูก เพื่อเพิ่มระนาบแกนหมุนให้เกิดการตัดกันจนเป็นแกนหมุนดังรูปที่ 3.2 ข. อย่างไรก็ตามถ้าหากใช้จำนวนของล้อเพียงแค่สองชุด จะมีบางตำแหน่งของมุมเลี้ยวที่ระนาบทั้งคู่วางตัวซ้อนทับกันอย่างสมบูรณ์ ซึ่งทำให้เกิดผลเหมือนมีล้อเพียงแค่ชุดเดียว ดังนั้นเพื่อแก้ปัญหานี้และทำให้ง่ายต่อการจัดวางทรงกลมให้มีความเสถียร จะพบว่าจำนวนล้อที่เหมาะสมคือสามชุด เมื่อควบคุมตำแหน่งของมุมเลี้ยวแต่ละล้อให้ถูกต้องระนาบแกนหมุนทั้งสามจะตัดกันเป็นเส้นตรงเสมอ ด้วยเหตุนี้จึงออกแบบให้หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติใช้ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด วางในลักษณะแกนเลี้ยวแต่ละล้อทำมุมกัน 90 องศาต่อกันดังแสดงในรูปที่ 3.3

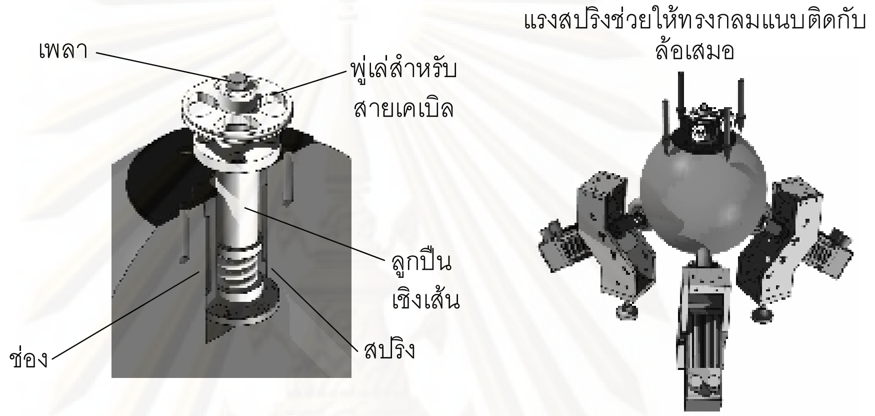


รูปที่ 3.3 ซีวีทีประเภทล้อจำนวน 3 ชุด ถูกจัดวางทำมุมกัน 90 องศา

ตำแหน่งการจัดวางของซีวีทีประเภทล้อทั้ง 3 ชุดจะยึดติดกับฐานของหุ่นยนต์ ซึ่งมีรูปร่างคล้ายสามเหลี่ยมปิรามิด ด้านบนของล้อจะวางไว้ด้วยทรงกลมดังรูปที่ 3.4

รูปที่ 3.4 การจัดวางฐาน และทรงกลม

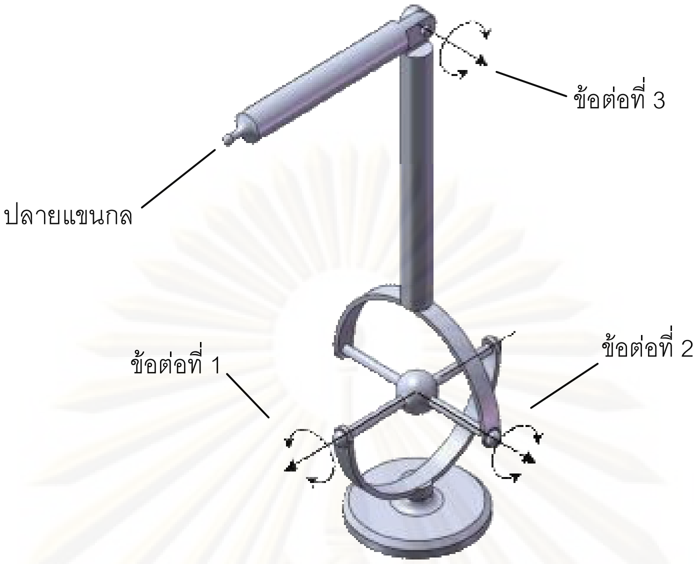
ทรงกลมจะถูกสร้างจากลูกโบว์ลิ่ง ที่ด้านบนของทรงกลมจะเจาะช่องโดยที่มีเพลาซึ่งติดตั้งไว้กับทรงกลมยื่นขึ้นมา ด้านในของช่องใส่สปริงเพื่อเพิ่มแรงกดให้ทรงกลมแนบติดกับล้อตลอดเวลา ปลายด้านบนของเพลายึดติดด้วยพู่เล่ พู่เล่นี้เป็นชนิดสำหรับสายเคเบิลเพื่อส่งกำลังไปที่ข้อต่อของแขนกลซึ่งจะกล่าวต่อไป



รูปที่ 3.5 การออกแบบช่องภายในทรงกลม

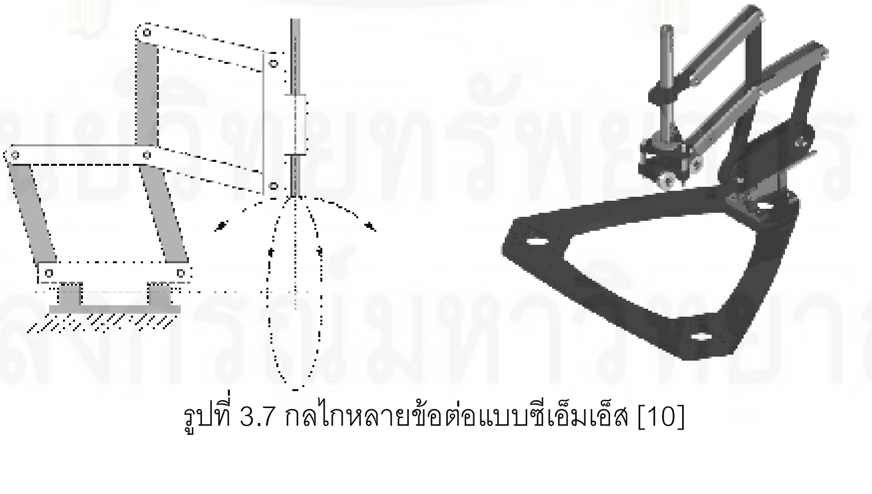
3.3 ชุดแขนกล ชุดจับยึด และระบบส่งกำลัง

แขนกลของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติดังรูปที่ 3.6 มีจำนวนสามข้อต่อตามจำนวนมิติการเคลื่อนที่ของทรงกลม สองข้อต่อแรกเป็นข้อต่อแบบยูนิเวอแซล ซึ่งเคลื่อนที่ไปพร้อมกับการหมุนแบบโรล (Roll) และพิตซ์ (Pitch) ของทรงกลม จึงไม่จำเป็นต้องอาศัยการส่งกำลังเพิ่มเติม ข้อต่อที่สามของแขนกลมีลักษณะเป็นแบบข้อศอก (Elbow Joint) โดยมีแกนหมุนซึ่งขนานกับข้อต่อที่สองตลอดเวลา แต่เนื่องจากตำแหน่งแกนหมุนของข้อต่อที่ 3 อยู่ห่างจากทรงกลม จึงต้องเพิ่มระบบส่งกำลังจากการหมุนแบบยอว์ (Yaw) ของทรงกลมสู่ข้อต่อที่สาม สำหรับก้านต่อที่อยู่ระหว่างข้อต่อที่ 1 และข้อต่อที่ 2 มีขนาดความยาวเป็นศูนย์ และเพื่อความสะดวกเราจึงกำหนดให้ก้านต่อที่อยู่ระหว่างข้อต่อที่ 2 และข้อต่อที่ 3 คือก้านต่อที่ 1 และก้านต่อที่อยู่ระหว่างข้อต่อที่ 3 และปลายแขนกลคือก้านต่อที่ 2



รูปที่ 3.6 กลไกแขนกลสามข้อต่อ

กลไกแขนกลติดตั้งเข้ากับลูกปืนเชิงเส้นบริเวณเพลาซึ่งถูกตรึงติดกับทรงกลมดังรูปที่ 3.5 เมื่อพิจารณาทรงกลมและแขนกลในตอนนี้จะพบว่าชุดกลไกทั้งสองถูกวางเอาบนล้อโดยไม่มีแรงกด ซึ่งอาจจะสามารถหลุดออกมาได้ จึงต้องออกแบบชุดจับยึดเพื่อยึดให้ทรงกลมไม่สามารถเคลื่อนหลุดออกมาจากล้อและฐานของหุ่นยนต์ และต้องไม่ขัดขวางการหมุนของทรงกลมในลักษณะต่างๆ หลังจากที่ได้ศึกษาพบว่ากลไกแบบหลายข้อต่อที่สามารถเคลื่อนที่แบบทรงกลม หรือที่เรียกว่า ข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็ส (Concentric Multilink Spherical: CMS) ดังรูปที่ 3.7 ถูกพัฒนาโดย Gregory J.Hamlin และ A. C. Sanderson [10] มีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้งาน



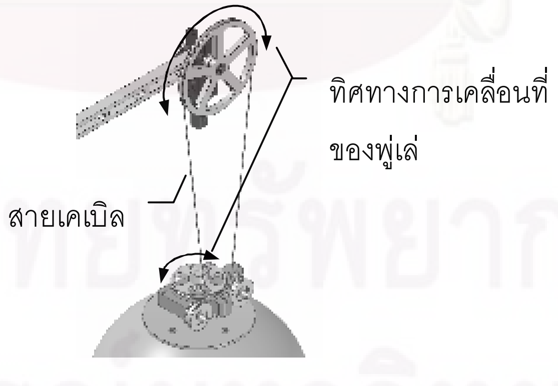
รูปที่ 3.7 กลไกหลายข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็ส [10]

ปลายด้านหนึ่งของข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็สจะถูกตรึงไว้กับฐาน อีกด้านถูกติดตั้งเข้ากับก้านต่อแรกของแขนกล ซึ่งชุดกลไกนี้ยังช่วยให้ปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทมีความแข็งแรงขึ้นอีกด้วย

เมื่อประกอบชุดแขนกล ชุดจับยึด และระบบส่งกำลังเข้ากับฐานของหุ่นยนต์จะมีลักษณะดังรูปที่ 3.8

รูปที่ 3.8 ชุดแขนกล ชุดจับยึด และระบบส่งกำลังที่ต่อเข้ากับฐานของหุ่นยนต์

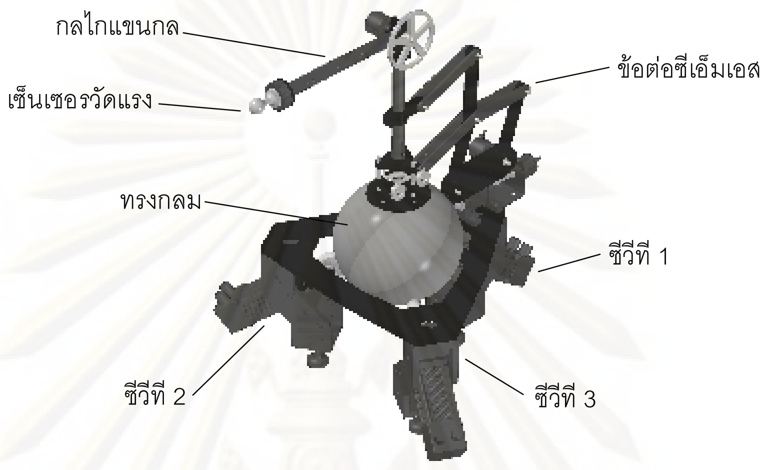
การส่งกำลังจากการหมุนแบบยอว์ (Yaw) ของทรงกลมสู่ข้อต่อที่สามถูกออกแบบให้กลไกระบบส่งกำลังเป็นแบบเคเบิลและพู่เล่ สำหรับพู่เล่ตัวแรกจะติดตั้งอยู่บริเวณด้านบนของทรงกลม และพู่เล่อีกตัวหนึ่งจะติดตั้งอยู่กับข้อต่อที่สาม โดยมีพู่เล่อีกคู่หนึ่งทำหน้าที่เปลี่ยนทิศทางสายเคเบิลดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 ระบบส่งกำลังแบบเคเบิลและพู่เล่

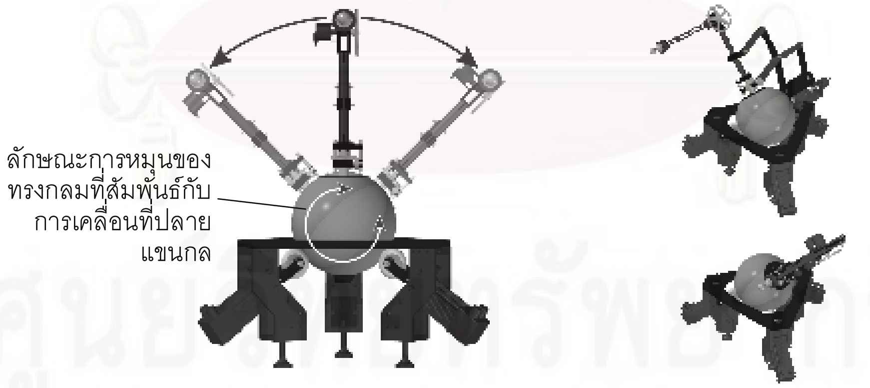
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบจำลองของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติอย่างสมบูรณ์แสดงดังรูปที่ 3.10 มีลักษณะแบบ 3 ข้อต่อ ความยาวของก้านต่อแรก และก้านต่อที่สองมีขนาด 400.0 มม. และ 250.0 มม. ตามลำดับ ปลายแขนสามารถเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นคาร์ทีเซี่ยน 3 มิติ (X, Y, Z)

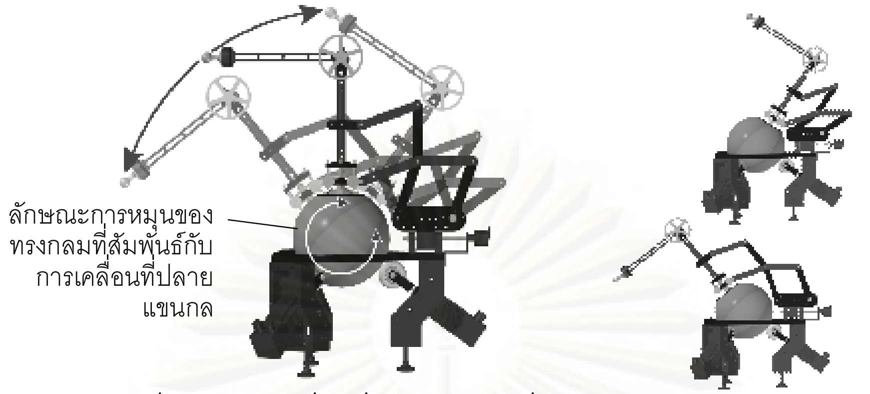


รูปที่ 3.10 แบบจำลองของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติอย่างสมบูรณ์

รูปที่ 3.11 ถึงรูปที่ 3.13 แสดงการเคลื่อนที่ของปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนของทรงกลมรอบแกนต่างๆ ซึ่งยังแสดงให้เห็นการทำงานของชุดจับยึดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับแขนกลอีกด้วย



รูปที่ 3.11 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนแบบโรล



รูปที่ 3.12 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลที่สอดคล้องกับการหมุนแบบพิตช์

รูปที่ 3.13 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลทีสอดคล้องกับการหมุนแบบยอว์

3.4 **ต้นแบบและโครงสร้าง**

รายละเอียดของการออกแบบทั้งหมดข้างต้น เมื่อถูกจัดสร้างและนำมาประกอบเข้าด้วยกันก็จะได้หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติต้นแบบดังรูปที่ 3.15 ซึ่งปลายแขนของหุ่นยนต์โคบอทมีพื้นที่ใช้งานเชิงเส้นบนพิกัด X, Y และ Z

โครงสร้างส่วนใหญ่จะถูกสร้างจากวัสดุอลูมิเนียมสามารถนำไฟฟ้าได้ จึงนำชิ้นส่วนที่ทำจากอลูมิเนียมทั้งหมดชุบผิวอะโนไดส์เพื่อให้อลูมิเนียมไม่สามารถนำไฟฟ้าได้ และยังทำให้ผิวมีความแข็งขึ้นอีกด้วย การออกแบบและจัดสร้างโครงสร้างและกลไกต่างๆของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติยังคำนึงถึงงบประมาณไม่ให้สูงมากนัก โดยพยายามใช้ชิ้นส่วนมาตรฐานในท้องตลาดให้มากที่สุด และชิ้นส่วนที่ต้องขึ้นรูปจะพยายามให้มีรูปทรงง่ายๆนำมาประกอบกัน

(ก) (ข)

รูปที่ 3.14 (ก) ระบบส่งกำลังแบบเคเบิล และพูเล่, (ข) ข้อต่อแบบซีเอ็มเอ็ส

รูปที่ 3.15 ต้นแบบหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

จลนศาสตร์สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติเป็นหุ่นยนต์ที่มีลักษณะของโครงสร้างและกลไกที่มีเอกลักษณ์เชิงกายภาพ ดังนั้นจึงต้องมีการพัฒนาจลนศาสตร์เฉพาะสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ส่วนแรกจะอธิบายความสัมพันธ์ของกลไกและระบบส่งกำลัง และนิยามถึงปริภูมิ (Space) ต่างๆของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ จากนั้นจะวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิที่อยู่ติดกันจนกระทั่งได้แบบจำลองทางจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

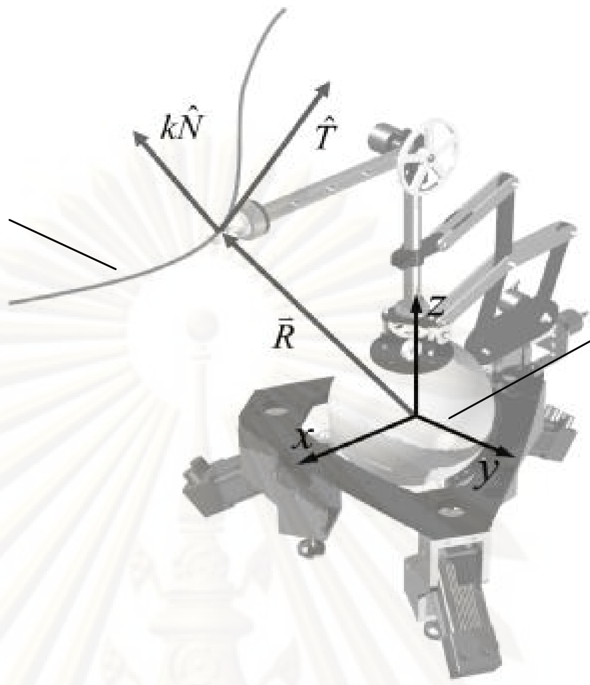
4.1 การนิยามปริภูมิสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติมีระบบส่งกำลังตั้งแต่การเคลื่อนที่ของปลายแขนกลไปจนถึงการปรับอัตราทดของซีวีทีหลายระบบ จึงทำให้หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติมีหลายปริภูมิ (Space) การแปลงรูป (Mapping) จากปริภูมิหนึ่งไปสู่อีกปริภูมิสามารถหาได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความสัมพันธ์และนิยามของแต่ละปริภูมิแสดงได้ดังต่อไปนี้

ปริภูมิตำแหน่งปลาย (Configuration Space: C_T)

ปริภูมิตำแหน่งปลายจะแสดงการเคลื่อนที่ของปลายแขนกล มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้น 3 องศาอิสระดังรูปที่ 4.1 ปริภูมิตำแหน่งปลายเป็นปริภูมิที่สำคัญของหุ่นยนต์โคบอท เนื่องจากเป็นปริภูมิที่ทำงานร่วมกับมนุษย์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.1 การเคลื่อนที่ของปริภูมิตำแหน่งปลาย

ปริภูมิตำแหน่งปลายใช้กรอบอ้างอิงฐานดังรูปที่ 4.1 มีลักษณะเป็นกรอบคาร์ทีเซียน X-Y-Z จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม แกน X ชี้ไปที่ด้านหน้าของหุ่นยนต์ แกน Z ชี้ขึ้นด้านบน และแกน Y จะชี้เป็นไปตามกฎมือขวา ดังนั้นจึงสามารถนิยามเวกเตอร์ตำแหน่งปลายแขนกลได้ดังนี้

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

เมื่อ $\vec{R}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งปลายแขนกล

x, y, z คือส่วนประกอบตำแหน่งปลายแขนกลในแกน X, Y และ Z ตามลำดับ

หลักการทำงานของหุ่นยนต์โคบอทจะอาศัยการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อแบบนอนโฮโลโนมิคด้วยซีวีที เพื่อบังคับทิศทางปลายแขนกล การวิเคราะห์การทำงานของหุ่นยนต์โคบอทจึงนิยมแทนการเคลื่อนที่ในแต่ละปริภูมิด้วยรูปแบบของเวกเตอร์สัมผัส (Tangent Vector: $\hat{T}$) และเวกเตอร์เคอเวเจอร์ (Curvature Vector: $k\hat{N}$)

เวกเตอร์สัมผัส $\hat{T}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ความเร็วเสมอ เวกเตอร์สัมผัสทั่วไปถูกนิยามตามสมการดังนี้

$$\hat{T} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \tag{4.2}$$

เมื่อ $\vec{R}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่ง

s คือระยะการเคลื่อนที่

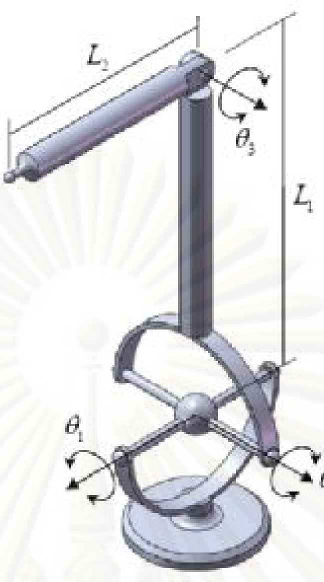
$\vec{V}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว

เวกเตอร์เคอเวเจอร์ $k\hat{N}$ มีสององค์ประกอบคือ ค่าเคอร์เวเจอร์ (k) หรือค่าความโค้งของการเคลื่อนที่ มีค่าเท่ากับส่วนกลับของรัศมีการเคลื่อนที่ และเวกเตอร์ตั้งฉาก ($\hat{N}$) มีทิศทางชี้ไปสู่จุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ และยังมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยเสมอ เวกเตอร์เคอเวเจอร์โดยทั่วไปถูกนิยามตามสมการดังนี้

$$k\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{ds} \tag{4.3}$$

ปริภูมิข้อต่อ (Joint Space: C_J)

ปริภูมิข้อต่อแสดงการเคลื่อนที่แต่ละข้อต่อของกลไกแขนกลดังรูปที่ 4.2 การเคลื่อนที่ในปริภูมิข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติสามารถวัดค่าได้จากเอ็นโคดเดอร์ (Encoder) ซึ่งถูกติดตั้งในข้อต่อแขนกลทั้งสาม



รูปที่ 4.2 นิยามตัวแปรของปริภูมิข้อต่อ

ทุกข้อต่อของแขนกลเป็นข้อต่อแบบหมุน ดังนั้นตำแหน่งในปริภูมิข้อต่อจะเป็นตัวแปรพิกัดเชิงมุม θ_1 , θ_2 และ θ_3 แต่เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ในปริภูมิข้อต่อจึงได้นิยามเวกเตอร์ตำแหน่งของข้อต่อขึ้น โดยนำมุมแต่ละข้อต่อมาคูณด้วยค่าความยาวคงที่เพื่อทำให้มีหน่วยเหมือนกับตัวแปรในปริภูมิอื่น และไม่ให้คุณลักษณะของตัวแปรเปลี่ยนจึงกำหนดให้มีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วย ดังนั้นจะได้

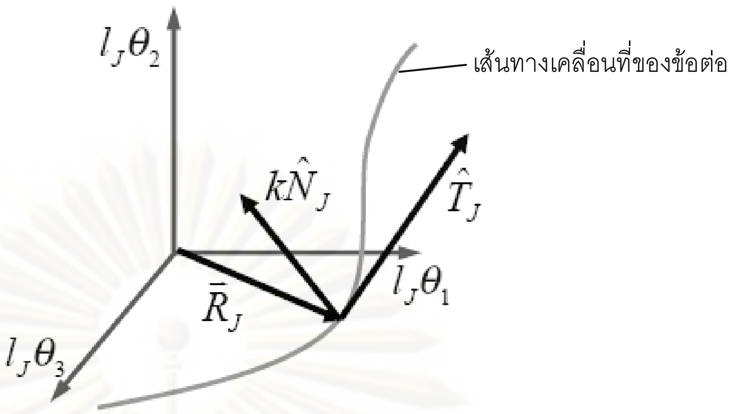
$$\vec{R}_J = [l_J\theta_1 \quad l_J\theta_2 \quad l_J\theta_3]^T \tag{4.4}$$

เมื่อ $\vec{R}_J$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของข้อต่อ

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ คือตำแหน่งของข้อต่อ 1, ข้อต่อ 2 และข้อต่อ 3 ตามลำดับ

l_J คือค่าคงที่หนึ่งหน่วยความยาว

จากเวกเตอร์ตำแหน่งของข้อต่อทำให้สามารถนิยามกรอบการเคลื่อนที่ (The Joint Frame) โดยที่แต่ละแกนการเคลื่อนที่ประกอบไปด้วย $l_J\theta_1$, $l_J\theta_2$ และ $l_J\theta_3$ ซึ่งตั้งฉากกัน สามารถแสดงกรอบการเคลื่อนที่ของปริภูมิข้อต่อได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 4.3 กรอบการเคลื่อนที่ของปริภูมิข้อต่อ

ตำแหน่งมุมของข้อต่อมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งปลายแขนกล ในรูปแบบฟังก์ชั่นของเวกเตอร์ข้อต่อ ($\vec{R} = L\left(\vec{R}_J\right)$) ดังนี้

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\cos\left(\theta_2+\theta_3\right) - L_1\sin\theta_2 \\ L_2\sin\theta_1\sin\left(\theta_2+\theta_3\right) + L_1\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ L_2\cos\theta_1\sin\left(\theta_2+\theta_3\right) + L_1\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

เมื่อ L_1, L_2 คือขนาดความยาวของก้านต่อที่ 1 และก้านต่อที่ 2 ตามลำดับ

และเวกเตอร์ตำแหน่งของข้อต่อสามารถแสดงในรูปแบบฟังก์ชั่นของเวกเตอร์ตำแหน่งปลายแขนกล ($\vec{R}_J = L_J\left(\vec{R}\right)$) ดังนี้

$$\vec{R}_J = \begin{bmatrix} l_J\theta_1 \\ l_J\theta_2 \\ l_J\theta_3 \end{bmatrix} = l_J \begin{bmatrix} A\tan 2\left(y,z\right) \\ 2\cdot A\tan 2\left(-x \pm \sqrt{a^2+x^2-b^2}, a+b\right) \\ 2\cdot A\tan 2\left(L_2 \pm \sqrt{L_2^{\,2}-c^2}, c\right) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

เมื่อ $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \dfrac{1}{2L_1}\left(x^2+y^2+z^2+L_1^{\,2}-L_2^{\,2}\right)$,

$c = \dfrac{1}{2L_1}\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\,2}-L_2^{\,2}\right)$

เวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิตำแหน่งปลาย ($\hat{T}$) สามารถแปลงให้เป็นเวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิข้อต่อ ($\hat{T}_J$) ดังนี้

$$\hat{T}_J = \frac{\mathbf{J}_J \hat{T}}{\left|\mathbf{J}_J \hat{T}\right|} \tag{4.7}$$

เมื่อ $\mathbf{J}_J$ คือจาโคเบียนหาได้จาก

$$\mathbf{J}_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์เคอเวเจอร์ในปริภูมิตำแหน่งปลาย ($k\hat{N}$) สามารถแปลงให้เป็นเวกเตอร์เคอเวเจอร์ในปริภูมิข้อต่อ ($k_J \hat{N}_J$) ดังนี้

$$k_J \hat{N}_J = \frac{\left[\mathbf{I} - \hat{T}_J \hat{T}_J^{\,T}\right]}{\left|\mathbf{J}_J \hat{T}\right|^2} \left[\hat{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{J1} \\ \mathbf{H}_{J2} \\ \mathbf{H}_{J3} \end{bmatrix} \hat{T} + \mathbf{J}_J k\hat{N} \right] \tag{4.8}$$

เมื่อ $\mathbf{H}_{J1}$, $\mathbf{H}_{J2}$, $\mathbf{H}_{J3}$ คือเฮสสเซี่ยน (Hessians) สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{H}_{J1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

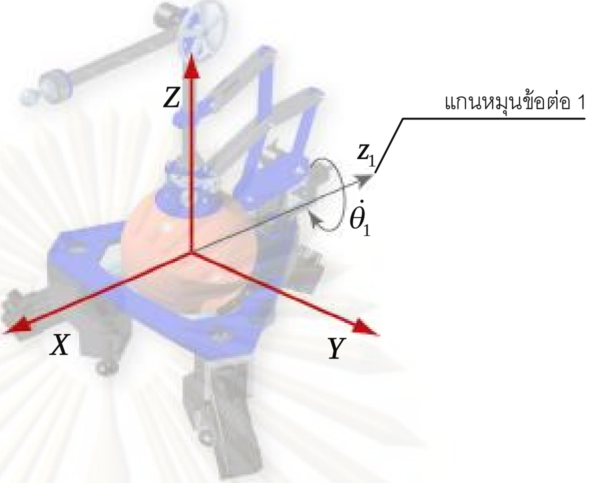
$$\mathbf{H}_{J2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{J3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

ปริภูมิการเคลื่อนที่ทรงกลม (Spherical Space: C_{Sp})

การเคลื่อนที่ของทรงกลมมีลักษณะหมุนได้อย่างอิสระ ปริภูมิการเคลื่อนที่ของทรงกลมจึงมี 3 มิติ ใช้กรอบฐานอ้างอิง

ความสัมพันธ์ของปริภูมิข้อต่อกับปริภูมิการเคลื่อนที่ทรงกลม จะได้จากการหาส่วนประกอบย่อยเวกเตอร์ความเร็วแต่ละข้อต่อของแขนกลซึ่งอ้างอิงกับกรอบฐาน ดังนั้นในอันดับแรกพิจารณาการหมุนข้อต่อแรก (θ_1) ของแขนกล จะมีการส่งกำลังสู่การหมุนของทรงกลมรอบ $-X$ ตามกฎมือขวาดังรูปที่ 4.4



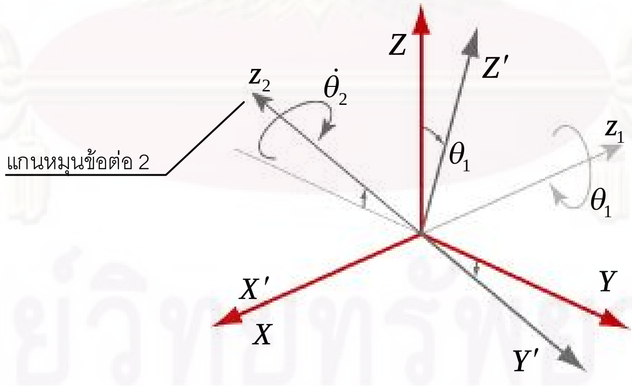
รูปที่ 4.4 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_1$ บนกรอบฐาน

จากรูปที่ 4.4 จะได้

$$\omega_{Bx} = -\dot{\theta}_1 \tag{4.9}$$

เมื่อ ω_{Bx} คือความเร็วเชิงมุมในทิศทางตามแกน X ของทรงกลมเทียบกับกรอบฐาน

พิจารณาการหมุนข้อต่อที่สอง (θ_2) จะมีลักษณะดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_2$ บนกรอบฐาน

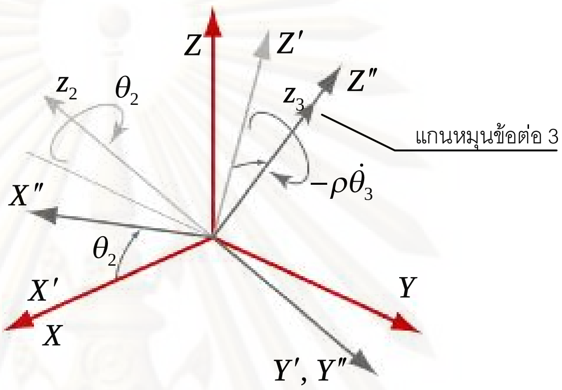
จากรูปที่ 4.5 จะได้

$$\omega_{By} = (-\cos\theta_1)\dot{\theta}_2 \tag{4.10}$$

$$\omega_{Bz} = (\sin\theta_1)\dot{\theta}_2 \tag{4.11}$$

เมื่อ ω_{By} คือความเร็วเชิงมุมในทิศทางตามแกน Y ของทรงกลมเทียบกับกรอบฐาน

ω_{Bz} คือความเร็วเชิงมุมในทิศทางตามแกน Z ของทรงกลมเทียบกับกรอบฐาน



รูปที่ 4.6 ลักษณะของการเคลื่อนที่ $\dot{\theta}_3$ บนกรอบฐาน

พิจารณาการส่งกำลังข้อต่อที่สาม (θ_3) ของปริภูมิข้อต่อ ซึ่งส่งผ่านระบบส่งกำลังแบบเคเบิลสู่ทรงกลมรอบแกน x_2'' ดังรูปที่ 4.6 โดยมีอัตราทดเท่ากับ $-\rho$ ดังนั้นจะได้สมการดังนี้

$$\omega_{Bx} = (-\sin\theta_2)(-\rho\dot{\theta}_3) \tag{4.12}$$

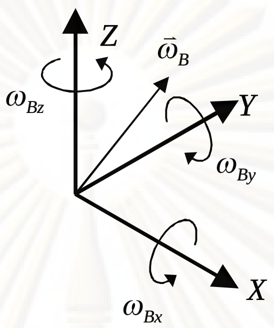
$$\omega_{By} = (\cos\theta_2)(\sin\theta_1)(-\rho\dot{\theta}_3) \tag{4.13}$$

$$\omega_{Bz} = (\cos\theta_2)(\cos\theta_1)(-\rho\dot{\theta}_3) \tag{4.14}$$

จากสมการ (4.9) ถึงสมการ (4.14) เราจะได้เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของทรงกลม ($\vec{\omega}_B$) ดังนี้

$$\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 + \rho(\sin\theta_2)\dot{\theta}_3 \\ (-\cos\theta_1)\dot{\theta}_2 - \rho(\cos\theta_2)(\sin\theta_1)\dot{\theta}_3 \\ (\sin\theta_1)\dot{\theta}_2 - \rho(\cos\theta_2)(\cos\theta_1)\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของทรงกลม ($\vec{\omega}_B$) สามารถแสดงลักษณะและส่วนประกอบบนกรอบฐานได้ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของทรงกลม ($\vec{\omega}_B$)

ในทำนองเดียวกับปริภูมิของข้อต่อจะได้ เวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์เคอเวเจอร์ได้โดยอาศัยสมการดังนี้

$$\hat{T}_B = \frac{d\vec{R}_B}{dS_S}, \ \ k_B\hat{N}_B = \frac{d\hat{T}_B}{dS_S} \tag{4.16}$$

เมื่อ $\hat{T}_B$ คือ เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยบนปริภูมิการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม ซึ่งอ้างอิงอยู่บนกรอบฐาน

S_S คือ ระยะทางการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม

$k_B\hat{N}_B$ คือ เวกเตอร์เคอเวเจอร์

ทำให้จะได้

$$\hat{T}_B = \frac{\mathbf{J}_B\hat{T}_J}{\left|\mathbf{J}_B\hat{T}_J\right|} \tag{4.17}$$

เมื่อ $\mathbf{J}_B = \frac{\partial L_B}{\partial \vec{R}_J}$ ซึ่งก็คือจาโคเบียนของทรงกลมจะได้

$$\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta_{Bx}}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\theta_{Bx}}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\theta_{Bx}}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial\theta_{By}}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\theta_{By}}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\theta_{By}}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial\theta_{Bz}}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\theta_{Bz}}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\theta_{Bz}}{\partial\theta_3} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

และเนื่องจากสมการ (4.15) สามารถนำมาจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \rho\sin\theta_2 \\ 0 & -\cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_1 & -\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ดังนั้นจะได้จาโคเบียนที่ใช้แปลงเวกเตอร์สัมผัสจากข้อต่อแขนกลไปสู่ทรงกลมดังนี้

$$\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \rho\sin\theta_2 \\ 0 & -\cos\theta_1 & -\rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_1 & -\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

เวกเตอร์เคอเวเจอร์จะสามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$k_B\hat{N}_B = \frac{\partial\hat{T}_B}{\partial S_S} = \frac{\left[\mathbf{I} - \hat{T}_B\hat{T}_B^{\,T}\right]}{\left|\mathbf{J}_B\hat{T}_J\right|}\left[\hat{T}_J^{\,T}\frac{\partial\mathbf{J}_B}{\partial\vec{R}_J}\hat{T}_J + \mathbf{J}_B k_J\hat{N}_J\right] \tag{4.21}$$

เมื่อ $\frac{\partial\mathbf{J}_B}{\partial\vec{R}_J} = \mathbf{H}_B$ คือ เฮลสเซี่ยนบนปริภูมิทรงกลม และเช่นเดียวกับบนปริภูมิข้อต่อทำให้เฮลสเซี่ยนของปริภูมินี้มี 3 ชุดดังนี้

$$\mathbf{H}_{Bx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_1\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_2^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_2\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_3\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_3\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bx}}{\partial\theta_3^{\ 2}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{H}_{By} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_1\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_2^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_2\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_3\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_3\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{By}}{\partial\theta_3^{\ 2}} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\mathbf{H}_{Bz} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_1\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_2^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_2\partial\theta_3} \\ \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_3\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_3\partial\theta_2} & \dfrac{\partial^2\theta_{Bz}}{\partial\theta_3^{\ 2}} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

ส่วนประกอบต่างๆบนเมตริกซ์สามารถแสดงได้ดังนี้

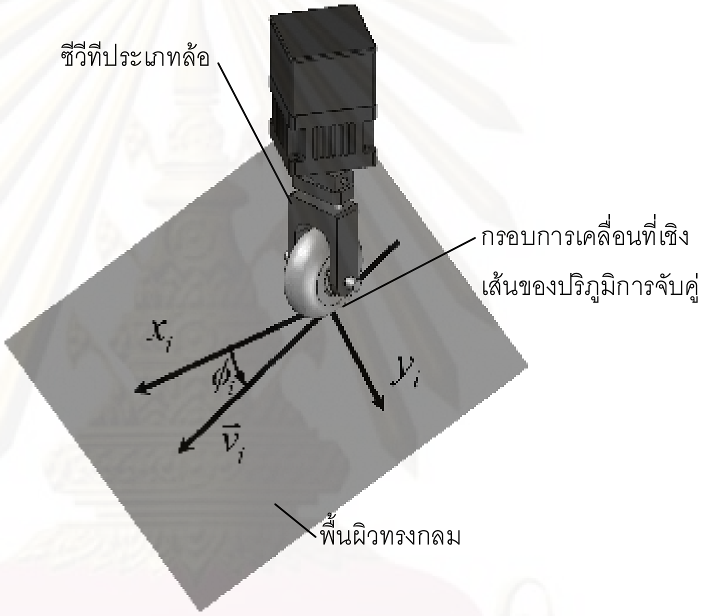
$$\mathbf{H}_{Bx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\cos\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{H}_{By} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 & \rho\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{H}_{Bz}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \cos\theta_1 & 0 & 0\\ \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 & \rho\cos\theta_1\sin\theta_2 & 0\end{bmatrix} \tag{4.27}$$

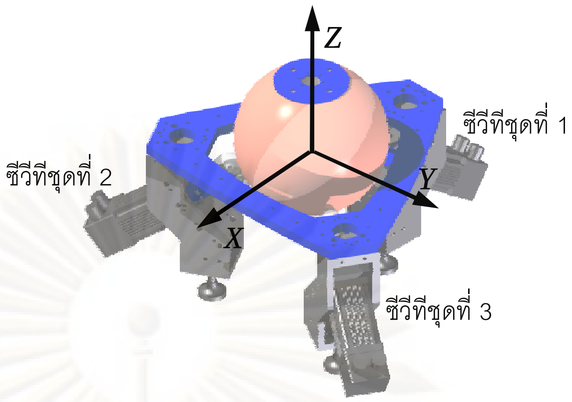
ปริภูมิการจับคู่ (Coupling Space: Σ_i)

ปริภูมิการจับคู่ คือการเคลื่อนที่ของพื้นผิวทรงกลมสัมพัทธ์กับล้อ ความเร็วพื้นผิวทั้งสองทิศทางจะถูกปรับอัตราทดด้วยซีวีที ดังนั้นในปริภูมินี้จึงมีเพียง 2 มิติดังรูปที่ 4.8



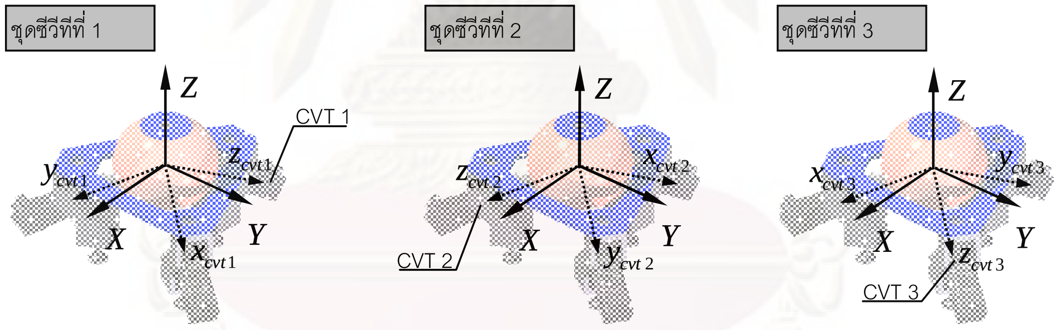
รูปที่ 4.8 ปริภูมิการจับคู่ของซีวีทีประเภทล้อ

จากลักษณะการจัดวางซีวีทีทั้งสามในโครงสร้างของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ซึ่งจะถูกติดตั้งกับฐานที่อยู่กับที่ ดังนั้นกรอบอ้างอิงในปริภูมิการจับคู่จึงเป็นกรอบหยุดนิ่งทั้งหมด และกรอบเหล่านี้ถูกนิยามตามโครงสร้างของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ



รูปที่ 4.9 กรอบอ้างอิงการเคลื่อนที่ฐาน

กำหนดให้ซีวีทีเรียงลำดับเริ่มจากชุดที่ 1 จะอยู่ด้านหลังของหุ่นยนต์และนับวนตามกฎมือขวารอบแกน Z ของกรอบฐานจนถึงชุดที่ 3 ตามรูปที่ 4.9 เมื่อลากเส้นจากจุดศูนย์กลางทรงกลมไปสู่ตำแหน่งที่ล้อทั้งสามสัมผัสกับทรงกลม จะได้เส้นตรงสามเส้นซึ่งตั้งฉากกัน กรอบทั้งสามที่ใช้อธิบายการปรับอัตราทดของแต่ละซีวีทีจะซ้อนทับเส้นตรงทั้งสาม โดยที่แกน z ของแต่ละกรอบจะชี้ไปที่ซีวีทีชุดนั้นๆ ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 กรอบอ้างอิงของแต่ชุดซีวีที

จากลักษณะของกรอบอ้างอิงซีวีทีทั้งสามกับกรอบฐาน ทำให้มีความสัมพันธ์ตามเมตริกซ์การหมุน (Rotation Matrix) ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$ {}^{cvt1}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{4.28} $$

$$ {}^{cvt2}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{4.29} $$

$$ {}^{cvt3}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{4.30} $$

หรืออาจจะเขียนในรูปแบบของสัญลักษณ์ดังนี้

$$ {}^{cvt\,i}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_i \tag{4.31} $$

เมื่อ ${}^{cvt\,i}_{B}\mathbf{R}$ คือ เมตริกซ์การหมุนของกรอบอ้างอิงซีวีทีชุดที่ i

การวิเคราะห์การหมุนของทรงกลมจะเป็นไปตามหลักการในหนังสือ “Classical Mechanics”, Goldstein, Poole & Safko เป็นหลัก การหมุนของทรงกลมจึงถูกพิจารณาให้

เป็นการหมุนแบบน้อยมาก (Infinitesimal Rotations) ซึ่งก็คือสมมุติฐานการหมุนของวัตถุรอบแกนใดๆที่มีน้อยมาก ทำให้สามารถแทนมุมการหมุนด้วยเวกเตอร์ได้

ปริมาณที่สำคัญในการหมุนอย่างหนึ่งก็คือความเร็วเชิงมุม เมื่อถูกอ้างอิงบนกรอบอ้างอิงฐาน จะแสดงได้ดังสมการ

$$\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_B \cdot \hat{i} \\ \vec{\omega}_B \cdot \hat{j} \\ \vec{\omega}_B \cdot \hat{k} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

เมื่อ $\vec{\omega}_B$ คือความเร็วเชิงมุมที่อ้างอิงกับกรอบฐาน

$\omega_{Bx}, \omega_{By}, \omega_{Bz}$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}_B$ ในทิศทาง X, Y, Z ของกรอบฐานตามลำดับ

จากสมการ $\vec{\omega}_B = d\vec{\theta}_B / dt$ จะสามารถหาเวกเตอร์มุมบิดของทรงกลมได้ดังนี้

$$d\vec{\theta}_B = \vec{\omega}_B dt \tag{4.33}$$

$$d\vec{\theta}_B = \begin{bmatrix} d\theta_{Bx} \\ d\theta_{By} \\ d\theta_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Bx} dt \\ \omega_{By} dt \\ \omega_{Bz} dt \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

เมื่อ $d\vec{\theta}_B$ คือเวกเตอร์มุมบิดของทรงกลม ที่อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงฐาน

$d\theta_{Bx}, d\theta_{By}, d\theta_{Bz}$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์มุมของทรงกลมที่เปลี่ยนไป $d\vec{\theta}_B$ ในทิศทาง X, Y, Z ตามลำดับ

ทำการเปลี่ยนการอ้างอิงเวกเตอร์มุมบิดของทรงกลมจากกรอบอ้างอิงฐานไปสู่กรอบอ้างอิงของชุดซีวีที โดยใช้เมตริกซ์การหมุน (Rotation Matrix) ตามสมการที่ 4.31 จะได้ดังนี้

$$d\vec{\theta}_{cvt\ i} = {}^{cvt\ i}_{B}\mathbf{R} d\vec{\theta}_B \tag{4.35}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} d\theta_{xi} \\ d\theta_{yi} \\ d\theta_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_B \cdot \hat{i}_{cvt\ i} & \hat{j}_B \cdot \hat{i}_{cvt\ i} & \hat{k}_B \cdot \hat{i}_{cvt\ i} \\ \hat{i}_B \cdot \hat{j}_{cvt\ i} & \hat{j}_B \cdot \hat{j}_{cvt\ i} & \hat{k}_B \cdot \hat{j}_{cvt\ i} \\ \hat{i}_B \cdot \hat{k}_{cvt\ i} & \hat{j}_B \cdot \hat{k}_{cvt\ i} & \hat{k}_B \cdot \hat{k}_{cvt\ i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_{Bx} \\ d\theta_{By} \\ d\theta_{Bz} \end{bmatrix}$$

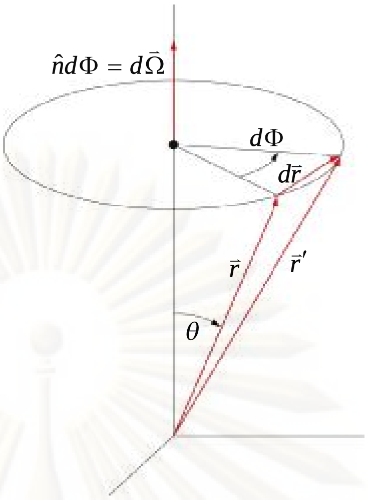
$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} d\theta_{Bx} \\ d\theta_{By} \\ d\theta_{Bz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\theta_{xi} \\ d\theta_{yi} \\ d\theta_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 d\theta_{Bx} + b_1 d\theta_{By} + c_1 d\theta_{Bz} \\ a_2 d\theta_{Bx} + b_2 d\theta_{By} + c_2 d\theta_{Bz} \\ a_3 d\theta_{Bx} + b_3 d\theta_{By} + c_3 d\theta_{Bz} \end{bmatrix}_i \qquad (4.36)$$

เมื่อ $d\bar{\theta}_{cvt\ i}$ คือเวกเตอร์มุมบิดของทรงกลม ที่อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงซีวีทีชุดที่ i

$d\theta_{xi}, d\theta_{yi}, d\theta_{zi}$ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์มุมของทรงกลมที่เปลี่ยนไป $d\bar{\theta}_{cvt\ i}$ ในทิศทาง X, Y, Z ตามลำดับ

เนื่องจากซีวีทีที่นำมาใช้เป็นซีวีทีประเภทล้อ ซึ่งเป็นซีวีทีที่สร้างความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วแบบเชิงเส้น การหมุนของทรงกลมจึงถูกแปลงเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้นตามหลักการของการหมุนแบบน้อยมาก (Infinitesimal Rotations) ในกรณีทั่วไปสามารถหาได้จากรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์แบบการหมุนแบบน้อยมาก (Infinitesimal Rotations)

ตามรูปที่ 4.11 นำมาเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$d\bar{r} = d\bar{\Omega} \times \bar{r} = (\hat{n} \times \bar{r})\, d\Phi \tag{4.37}$$

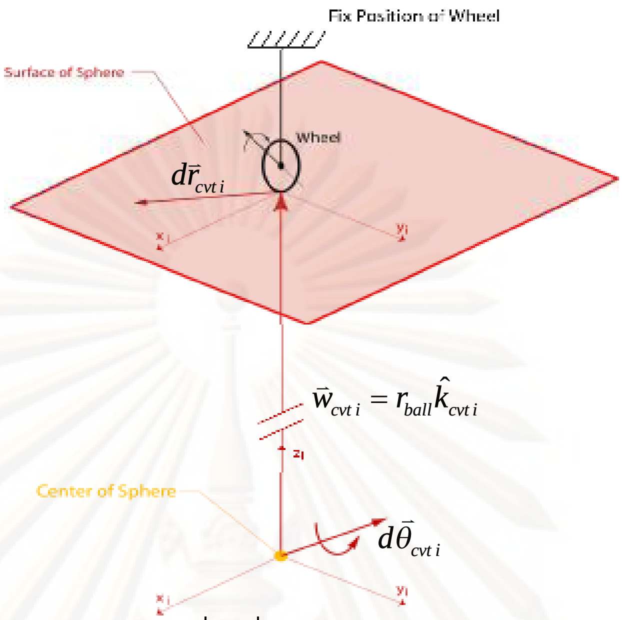
เมื่อ $d\bar{\Omega} = \bar{\omega} dt$ หรือก็คือเวกเตอร์มุมบิดที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา dt

$\bar{r}$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่ง

นำสมการที่ 4.37 มาหารทั้งสองด้านของสมการด้วย dt ก็จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมดังนี้

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{4.38}$$

เมื่อ $\bar{\omega}$ คือความเร็วเชิงมุม



รูปที่ 4.12 แผนภาพการเคลื่อนที่ (Kinematics Diagram) ของทรงกลมและล้อ

กลับมาพิจารณาที่การเคลื่อนที่ของล้อและทรงกลม เมื่อนำมาวาดแผนภาพการเคลื่อนที่ของล้ออ้างอิงบนกรอบอ้างอิงได้ดังรูปที่ 4.12 เวกเตอร์ $d\vec{r}_{cvt\,i}$ คือการขจัดบนผิวทรงกลมที่เคลื่อนที่ไปในช่วงเวลา dt เวกเตอร์ $\vec{w}_{cvt\,i}$ คือเวกเตอร์แสดงตำแหน่งล้อของซีวีทีชุดที่ i สัมผัสกับผิวทรงกลม ดังนั้นแต่ละ $\vec{w}_{cvt\,i}$ แสดงได้ดังนี้

$$\vec{w}_{cvt1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{ball} \end{bmatrix}_i^T \tag{4.39}$$

$$\vec{w}_{cvt2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{ball} \end{bmatrix}_i^T \tag{4.40}$$

$$\vec{w}_{cvt3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{ball} \end{bmatrix}_i^T \tag{4.41}$$

เมื่อ r_{ball} คือค่ารัศมีของทรงกลม, ตัวห้อย i คือสิ่งที่บอกว่าเทียบอยู่บนกรอบซีวีทีไหน

ดังนั้นจากสมการที่ 4.37

$$d\bar{r}_{cvt\,i} = d\bar{\theta}_{cvt\,i} \times \bar{w}_{cvt\,i} = \begin{bmatrix} d\theta_{xi} \\ d\theta_{yi} \\ d\theta_{zi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{ball} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

สามารถนำสมการมาจัดให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ดังนี้

$$d\bar{r}_{cvt\,i} = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_{zi} & d\theta_{yi} \\ d\theta_{zi} & 0 & -d\theta_{xi} \\ -d\theta_{yi} & d\theta_{xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{ball} \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ball} d\theta_{yi} \\ -r_{ball} d\theta_{xi} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

นำสมการที่ 4.36 แทนในสมการที่ 4.44 จะได้

$$dx_i = r_{ball} \left(a_2 d\theta_{Bx} + b_2 d\theta_{By} + c_2 d\theta_{Bz} \right)_i \tag{4.45}$$

$$dy_i = -r_{ball} \left(a_1 d\theta_{Bx} + b_1 d\theta_{By} + c_1 d\theta_{Bz} \right)_i \tag{4.46}$$

แต่เนื่องจากทฤษฎีต่างๆของซีวีทีประเภทล้อถูกพัฒนามาจากล้อเคลื่อนที่อยู่บนพื้นระนาบที่ถูกตรึง ดังนั้นสมการที่ 4.45 และ 4.46 จึงถูกคูณด้วย -1 ซึ่งจะได้

$$d\bar{r}_{wi} = \begin{bmatrix} dx_{wi} \\ dy_{wi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{ball} \left(a_2 d\theta_{Bx} + b_2 d\theta_{By} + c_2 d\theta_{Bz} \right)_i \\ r_{ball} \left(a_1 d\theta_{Bx} + b_1 d\theta_{By} + c_1 d\theta_{Bz} \right)_i \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

เวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิการจับคู่ ($\hat{t}_{wi}$) ของแต่ละชุดซีวีที หาได้จากของจาโคเบียนในปริภูมิการจับคู่ ($\mathbf{j}_{wi}$) และเวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิการเคลื่อนที่ทรงกลม ($\hat{T}_B$) เป็นไปตามสมการ

$$\hat{t}_{wi} = \frac{\mathbf{j}_{wi}\hat{T}_B}{\left|\mathbf{j}_{wi}\hat{T}_B\right|} \tag{4.48}$$

เมื่อ $\mathbf{j}_{wi} = \dfrac{\partial \vec{r}_{wi}}{\partial \vec{\theta}_B}$ คือจาโคเบียนในปริภูมิการจับคู่ของซีวีทีชุดที่ i สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{j}_{wi} = \frac{\partial \vec{r}_{wi}}{\partial \vec{\theta}_B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_{wi}}{\partial \theta_{Bx}} & \dfrac{\partial x_{wi}}{\partial \theta_{By}} & \dfrac{\partial x_{wi}}{\partial \theta_{Bz}} \\ \dfrac{\partial y_{wi}}{\partial \theta_{Bx}} & \dfrac{\partial y_{wi}}{\partial \theta_{By}} & \dfrac{\partial y_{wi}}{\partial \theta_{Bz}} \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

ดังนั้นจากสมการที่ 4.47 จะได้

$$\mathbf{j}_{wi} = r_{ball}\begin{bmatrix} -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}_{wi} \tag{4.50}$$

เวกเตอร์เคอเวเจอร์ในปริภูมิการจับคู่ ($k_{wi}\hat{n}_{wi}$) ของแต่ละชุดซีวีที หาได้จากสมการ

$$k_{wi}\hat{n}_{wi} = \frac{\partial \hat{t}_{wi}}{\partial s_{wi}} = \frac{\left[\mathbf{I} - \hat{t}_{wi}\hat{t}_{wi}^{\ T}\right]}{\left|\mathbf{j}_{wi}\hat{T}_B\right|}\left[\hat{T}_B^{\ T}\frac{\partial \mathbf{j}_{wi}}{\partial \vec{\theta}_B}\hat{T}_B + \mathbf{j}_{wi}k_B\hat{N}_B\right] \tag{4.51}$$

แต่จากสมการที่ 4.47 ซึ่งทำให้ $\dfrac{\partial \mathbf{j}_{wi}}{\partial \vec{\theta}_B} = \mathbf{0}$ ดังนั้นสมการที่ 4.51 จะลดรูปได้ดังนี้

$$k_{wi}\hat{n}_{wi} = \frac{\left[\mathbf{I} - \hat{t}_{wi}\hat{t}_{wi}^{\ T}\right]}{\left|\mathbf{j}_{wi}\hat{T}_B\right|}\left[\mathbf{j}_{wi}k_B\hat{N}_B\right] \tag{4.52}$$

ปริภูมิการปรับอัตราทด (Steering Space: Φ_i)

ปริภูมิการปรับอัตราทด คือการปรับอัตราทดด้วยการปรับมุมเลี้ยวของล้อ เพื่อให้ปลายแขนกลเคลื่อนที่ตามทิศทางที่กำหนด สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติซึ่งใช้ซีวีทีประเภทล้อดังรูปที่ 4.8 จะแบ่งปริภูมิการปรับอัตราทดออกเป็น 3 ปริภูมิย่อยเช่นเดียวกับจำนวนปริภูมิการจับคู่

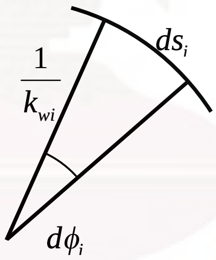
อัตราทดของชุดซีวีทีขึ้นอยู่กับมุมที่ล้อแต่ละล้อ มุมนี้ถูกเรียกว่ามุมเลี้ยว (Steering Angle: ϕ) มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$Tr_i = \frac{\dot{y}_{wi}}{\dot{x}_{wi}} = \tan(\phi_i) \tag{4.53}$$

เมื่อ Tr_i คืออัตราทดที่ได้จากซีวีทีประเภทล้อ

ϕ_i คือมุมปรับอัตราทดของซีวีทีชุดที่ i

$\dot{x}_{wi}, \dot{y}_{wi}$ คือส่วนประกอบของความเร็วบนแกน x และ y ปริภูมิการจับคู่ที่ i



รูปที่ 4.13 ความสัมพันธ์ของตัวแปรในปริภูมิของมุมปรับอัตราทด

การควบคุมมอเตอร์ในหุ่นยนต์โคบอทเราจะใช้การควบคุมความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ ซึ่งรูปที่ 4.13 แสดงความสัมพันธ์ของมุมปรับอัตราทด (ϕ_i) ระยะทางที่ล้อเคลื่อนที่ไป (ds_i) และค่าความโค้ง(k_{wi}) ดังนั้นจะได้สมการต่อไปนี้

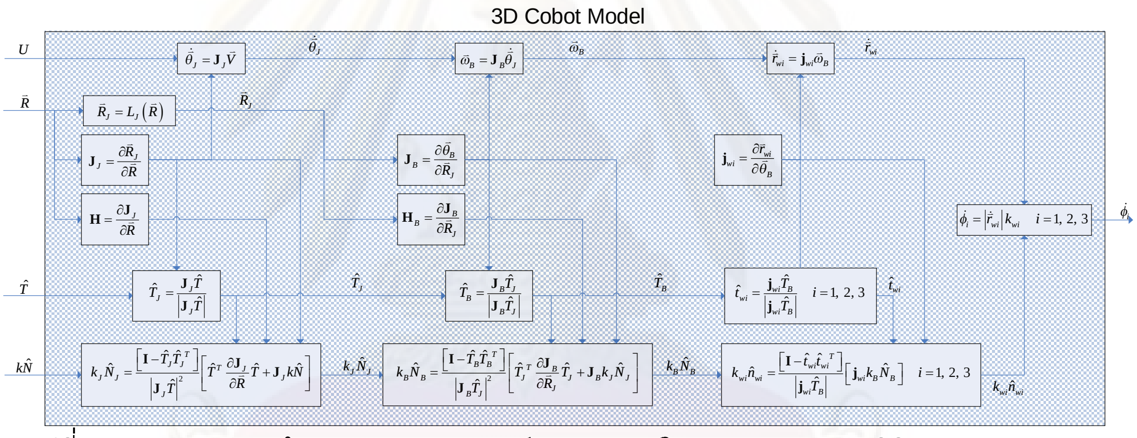
$$k_{wi} = \frac{d\phi_i}{ds_i} = \frac{d\phi_i}{dt}\frac{dt}{ds_i} \tag{4.54}$$

จะได้

$$\dot{\phi}_i = u_i k_{wi} \qquad i = 1,\, 2,\, 3 \tag{4.55}$$

4.2 สรุปแบบจำลองทางจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ (3D Cobot Model)

ความสัมพันธ์ของทั้ง 5 ปริภูมิสามารถแสดงเป็นแผนผังแบบจำลองทางจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ (3D Cobot Model) ได้ดังรูปที่ 4.14 โดยที่ระบบแบบจำลองมี 4 ข้อมูลขาเข้า (Input) ของปลายแขนกล คือ ตำแหน่ง ($\bar{R}$), อัตราเร็ว (U), เวกเตอร์สัมผัส ($\hat{T}$), เวกเตอร์เคอเวเจอร์ ($k\hat{N}$) และมีอัตราเร็วของมุมปรับอัตราทด ($\dot{\phi}_i$) ทั้ง 3 ของชุดซีวีทีเป็นข้อมูลขาออก (Output)



รูปที่ 4.14 แผนผังแบบจำลองทางจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ (3D Cobot Model)

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปริภูมิ	ปลายแขนกล	ข้อต่อ	ทรงกลม	การจับคู่ $i=1,\ 2,\ 3$	ปรับอัตราทด $i=1,\ 2,\ 3$
เวกเตอร์ตำแหน่ง	$\vec{R}$	$\vec{R}_J$	$d\vec{\theta}_B$	$\vec{r}_{wi}$	ϕ_i
สมาชิกของเวกเตอร์ตำแหน่ง	x, y, z	$l\theta_1, l\theta_2, l\theta_3$	$d\theta_{Bx}, d\theta_{By}, d\theta_{Bz}$	$x_{wi},\ y_{wi}$	-
ความเร็ว	$\vec{V}$	$\dot{\vec{\theta}}_J$	$\vec{\omega}_B$	$\dot{\vec{r}}_{wi}$	$\dot{\phi}_i$
เวกเตอร์สัมผัส	$\hat{T}$	$\hat{T}_J$	$\hat{T}_B$	$\hat{t}_{wi}$	-
เวกเตอร์เคอเวเจอร์	$k\hat{N}$	$k_J\hat{N}_J$	$k_B\hat{N}_B$	$k_{wi}\hat{n}_{wi}$	-
จาโคเบียนเมตริกซ์	-	$\mathbf{J}_J$	$\mathbf{J}_B$	$\mathbf{j}_B$	-
เฮสเซียนเมตริกซ์	-	$\mathbf{H}_{J1}, \mathbf{H}_{J2}, \mathbf{H}_{J3}$	$\mathbf{H}_{Bx}, \mathbf{H}_{By}, \mathbf{H}_{Bz}$	-	-

ตารางที่ 4.1 สรุปสัญลักษณ์และตัวแปรทั้ง 5 ปริภูมิ

บทที่ 5

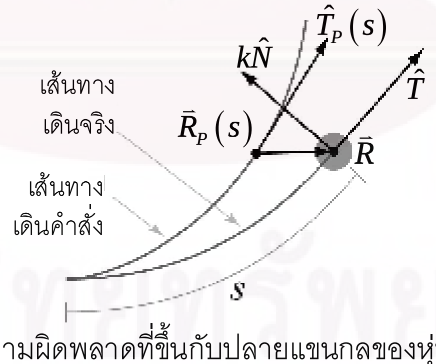
ระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

การเคลื่อนปลายแขนกลไปตามเส้นทางคำสั่ง โดยใช้เพียงแค่จลนศาสตร์ ตามปกติแล้วจะเกิดความผิดพลาดทั้งตำแหน่ง และทิศทางขึ้น ซึ่งระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทสามารถช่วยลดความผิดพลาดได้ ส่วนแรกของบทนี้อธิบายถึงระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอททั่วไป เมื่อนำมาจำลองการทำงานของระบบควบคุมร่วมกับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ จะสามารถลดความผิดพลาด และปลายแขนกลสามารถเคลื่อนตามเส้นทางคำสั่งได้ดี แต่เมื่อวิเคราะห์รายละเอียด พบว่าในหลายตำแหน่งของการเคลื่อนที่จะไม่สามารถเคลื่อนปลายแขนกลได้อย่างไหลลื่น

หัวข้อถัดมาจะอธิบายวิธีการควบคุมเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่เกิดขึ้น โดยใช้ระบบควบคุมที่อาศัยเวกเตอร์สัมผัสเป็นหลัก ซึ่งเมื่อนำมาจำลองการทำงานก็ยังให้ผลที่ดี

5.1 ระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอททั่วไป

การควบคุมหุ่นยนต์โคบอทโดยทั่วไปจะใช้วิธีกำหนดเส้นทาง แล้วจึงควบคุมให้หุ่นยนต์โคบอทวิ่งตาม ระบบควบคุมมีเป้าหมายเพื่อลดความผิดพลาดของตำแหน่ง และทิศทางให้มีน้อยที่สุด



รูปที่ 5.1 ความผิดพลาดที่ขึ้นกับปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอท

เมื่อปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทเคลื่อนที่เป็นระยะทาง s ตามรูปที่ 5.1 จะเห็นว่าปลายแขนเคลื่อนห่างออกมาจากเส้นทางคำสั่ง ทำให้เกิดความผิดพลาดของตำแหน่ง ($\Delta\bar{R} = \bar{R} - \bar{R}_P$) และความผิดพลาดของทิศทาง ($\Delta\hat{T} = \hat{T} - \hat{T}_P$) การควบคุมหุ่นยนต์โคบอทจะช่วยเลี้ยวปลายแขนกลเข้า

ไปสู่เส้นทางคำสั่ง จึงต้องคำนวณหาตำแหน่งบนเส้นทางคำสั่งใหม่ที่ปลายแขนกลจะเลี้ยวเข้าสู่ตำแหน่งบนเส้นทางคำสั่งนั้น การคำนวณหาตำแหน่งดังกล่าวสามารถหาได้ด้วยการคำนวณหาค่าระยะทางบนเส้นทางที่ต้องการ s_p ซึ่งหาได้จากค่าความผิดพลาดของระยะทาง ($s_P - s$) สามารถประมาณเป็น $\left(\vec{R}-\vec{R}_P(s)\right)\cdot\hat{T}_P(s)$ ดังนั้นจะได้

$$s_P = s + \left(\vec{R}-\vec{R}_P(s)\right)\cdot\hat{T}_P(s) \tag{5.1}$$

การควบคุมหุ่นยนต์โคบอทเพื่อให้เคลื่อนที่ราบเรียบ สามารถทำได้ด้วยการคำนวณหาจุดหมุนชั่วขณะ (Instantaneous Center of Rotation) เวกเตอร์เคอเวเจอร์ ($k\hat{N}$) ซึ่งมีทิศทางจากปลายแขนกลชี้ไปสู่จุดหมุนชั่วขณะ และมีขนาดเท่ากับค่าความโค้งของการเคลื่อนที่จึงถูกนำมาใช้เพื่อควบคุมหุ่นยนต์โคบอท ดังนั้นเมื่อปลายแขนกลเคลื่อนออกนอกเส้นทางเล็กน้อย ระบบควบคุมจะสามารถนำความผิดพลาดทั้งสองชดเชยเข้าไปในระบบตามสมการ

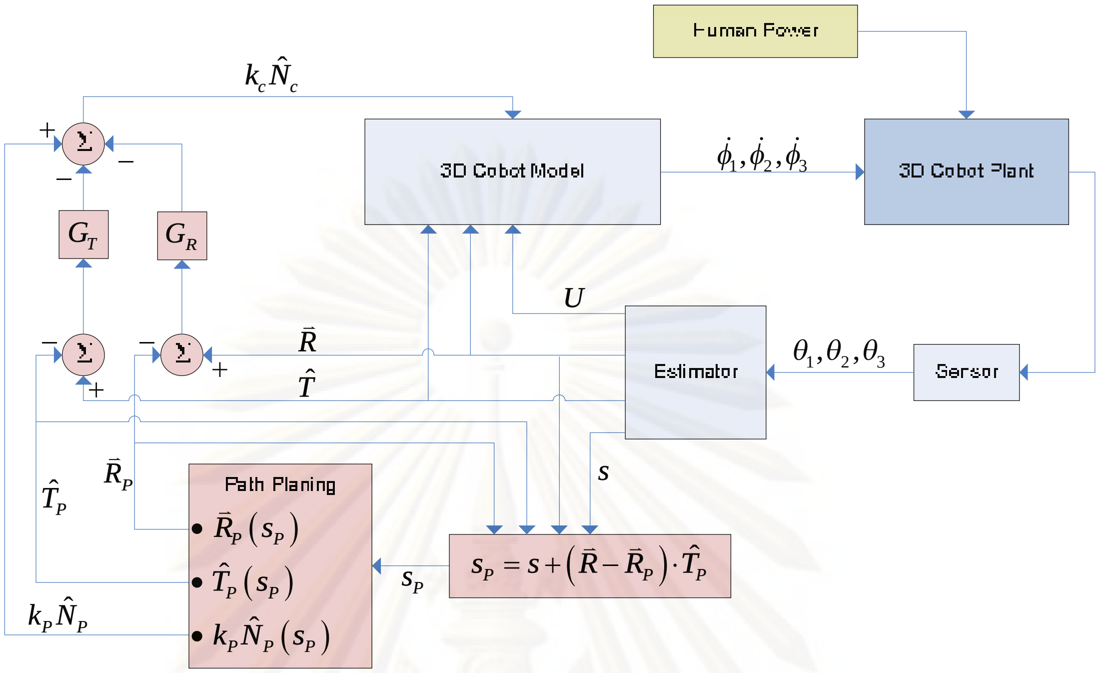
$$k_c\hat{N}_c = k\hat{N} - \left(G_R\Delta\vec{R} + G_T\Delta\hat{T}\right) \tag{5.2}$$

เมื่อ $k_c\hat{N}_c$ คือเวกเตอร์เคอเวเจอร์ที่เป็นสัญญาณควบคุม

G_R คือค่าเกนควบคุมตำแหน่ง

G_T คือค่าเกนควบคุมทิศทาง

จากสมการที่ 5.1 และ 5.2 เมื่อนำมาใช้เป็นระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ แสดงได้ดังแผนภาพรูปที่ 5.2 หุ่นยนต์โคบอทตัวนี้มีเซนเซอร์วัดตำแหน่งของข้อต่อแขนกลทั้งสาม ($\vec{R}_J \in \theta_1, \theta_2, \theta_3$) จากนั้นจะถูกนำไปคำนวณเพื่อหาตำแหน่ง ความเร็ว เวกเตอร์สัมผัส และระยะทางที่เคลื่อนที่ไปของปลายแขนกล เพื่อเข้าสู่ระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอท นำเวกเตอร์ $k_c\hat{N}_c$ ป้อนเข้าสู่แบบจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ก็จะได้ความเร็วเชิงมุมที่ใช้ในการสั่งให้มอเตอร์ของชุดซีวีทีทั้งสามทำงาน



รูปที่ 5.2 ระบบควบคุมแบบทั่วไปหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

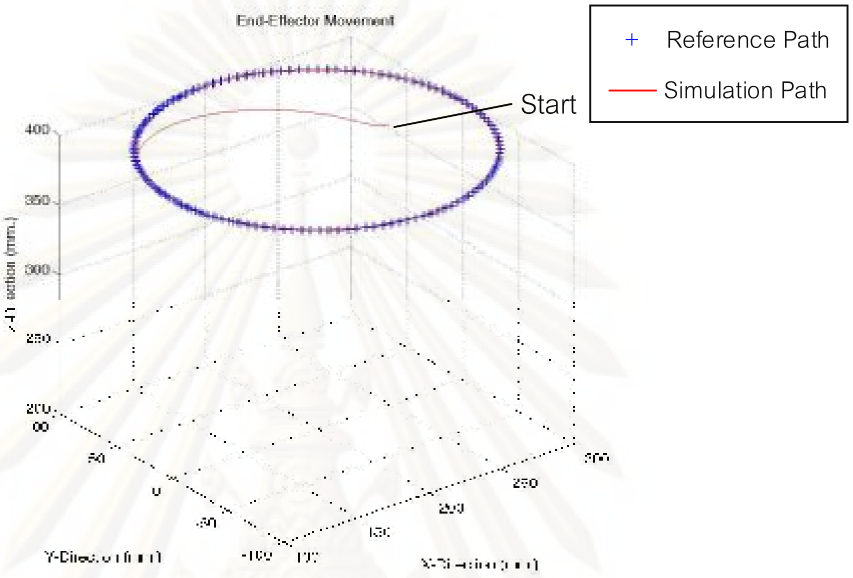
5.2 การจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป

ในเบื้องต้นสามารถตรวจสอบหลักการระบบควบคุมของหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป ด้วยวิธีจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติตามสมการจลนศาสตร์ต่างๆที่แสดงในบทที่ 4

ทำการจำลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติด้วยเส้นทางคำสั่งเป็นแบบวงกลมในระนาบ X-Y ตามสมการ

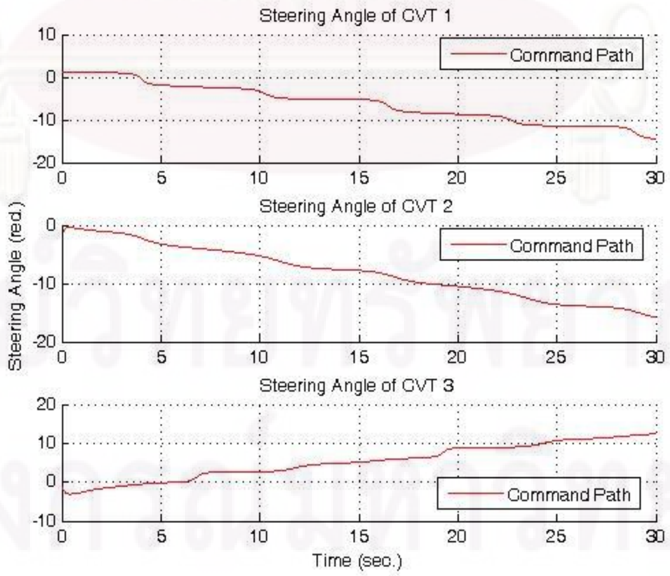
$$\vec{R}_p = \begin{bmatrix} 100\cdot\cos\left(\dfrac{s_p}{100}\right)+200 \\ 100\cdot\sin\left(\dfrac{s_p}{100}\right) \\ 400 \end{bmatrix}$$

ตำแหน่งเริ่มต้นของปลายแขนกลอยู่ที่ $\vec{R} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 400 \end{bmatrix}^T$ และเมื่อกำหนดให้ระบบควบคุมตามรูป 5.2 มีค่าเกน G_R เท่ากับ 0.002 และเกน G_T เท่ากับ 0.03 จะได้ผลการจำลองปลายแขนกลดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 จำลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลด้วยระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป

และจะได้มุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสามดังนี้



รูปที่ 5.4 มุมปรับอัตราทดของซีวีทีทั้งสาม

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากการจำลองการเคลื่อนที่ของระบบนี้ เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยการคำนวณหาแกนหมุนที่เกิดขึ้นจากล้อแต่ละคู่ สามารถหาได้จากการตัดกันของระนาบแกนหมุนในแต่ละล้อ ในการวิเคราะห์แกนหมุนจะถูกแทนด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับแกนหมุนที่เกิดจากล้อคู่นั้นๆ แกนหมุนที่เกิดจากล้อชุดที่ 1 และชุดที่ 2 จะเป็นไปตามสมการ

$$A_{12x} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\left(\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \cos\phi_2 - 2\sin\phi_1 \sin\phi_2\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_1}} \tag{5.3}$$

$$A_{12y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\phi_2 \left(\cos\phi_1 + \sin\phi_1\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_1}} \tag{5.4}$$

$$A_{12z} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_1}} \tag{5.5}$$

เมื่อ A_{12x}, A_{12y}, A_{12z} คือส่วนประกอบของเวกเตอร์แกนหมุนในทิศทาง X, Y. และ Z ตามลำดับที่เกิดจากล้อชุดที่ 1 และล้อชุดที่ 2

แกนหมุนที่เกิดจากล้อชุดที่ 2 และชุดที่ 3 จะเป็นไปตามสมการ

$$A_{23x} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\left(\sin\left(\phi_2 + \phi_3\right) + \sin\left(\phi_2 - \phi_3\right) + \cos\left(\phi_2 - \phi_3\right)\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_2 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_2}} \tag{5.6}$$

$$A_{23y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(\phi_2 + \phi_3\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_2 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_2}} \tag{5.7}$$

$$A_{23z} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\left(2\cos\left(\phi_2 - \phi_3\right) - \sin\left(\phi_2 + \phi_3\right) - \sin\left(\phi_2 - \phi_3\right)\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_2 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_2}} \tag{5.8}$$

เมื่อ A_{23x} , A_{23y} , A_{23z} คือส่วนประกอบของเวกเตอร์แกนหมุนในทิศทาง X, Y. และ Z ตามลำดับ ที่เกิดจากล้อชุดที่ 2 และล้อชุดที่ 3

แกนหมุนที่เกิดจากล้อชุดที่ 3 และชุดที่ 1 จะเป็นไปตามสมการ

$$A_{31x} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\left(2\cos\phi_1 \cos\phi_3 + \cos\phi_1 \sin\phi_3 - \sin\phi_1 \sin\phi_3\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_3}} \tag{5.9}$$

$$A_{31y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\phi_3\left(\cos\phi_1 + \sin\phi_1\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_3}} \tag{5.10}$$

$$A_{31z} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(\cos\phi_1 \cos\phi_3 - \cos\phi_1 \sin\phi_3 + \sin\phi_1 \sin\phi_3\right)}{\sqrt{\cos^2\phi_1 \cos^2\phi_3 + \sin^2\phi_3}} \tag{5.11}$$

เมื่อ A_{31x} , A_{31y} , A_{31z} คือส่วนประกอบของเวกเตอร์แกนหมุนในทิศทาง X, Y. และ Z ตามลำดับ ที่เกิดจากล้อชุดที่ 3 และล้อชุดที่ 1

เนื่องจากเวกเตอร์แกนหมุนทั้งสามเป็นปริมาณเวกเตอร์ในสามมิติซึ่งยากต่อการวิเคราะห์จึงทำการลดรูปลงด้วยความจริงที่ว่า เมื่อแกนหมุนทั้งสามซ้อนทับกัน เวกเตอร์แกนหมุนทั้งสามต้องมีส่วนประกอบของเวกเตอร์ที่เท่ากัน ดังนั้นจึงทำการจัดรูปสมการใหม่ และจะได้สมการดังนี้

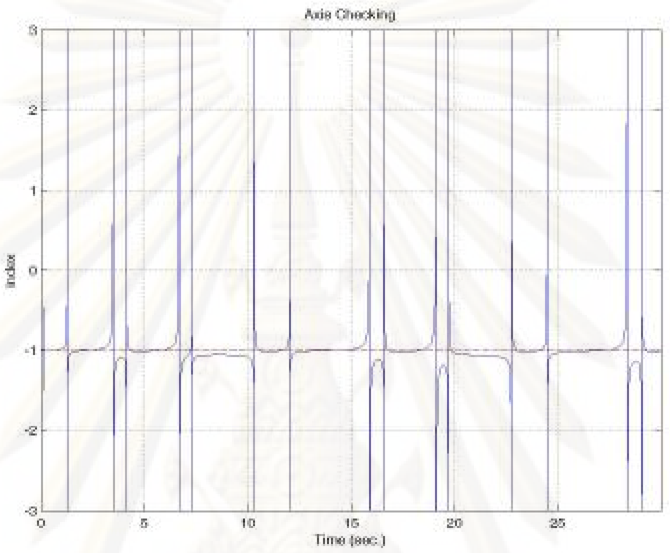
$$-1 = \tan\phi_1 \tan\phi_2 \tan\phi_3 \tag{5.12}$$

สมการ (5.12) แสดงให้เห็นว่า แกนหมุนของทรงกลมจะซ้อนทับกลายเป็นแกนเดียวกัน ผลคูณของค่า $\tan\phi_i$ ในแต่ละล้อต้องมีค่าเท่ากับ -1 เพื่อความสะดวกจึงทำการปรับปรุงสมการอีกครั้งโดยกำหนดให้ด้านขวาของสมการ (5.12) มีค่าเท่ากับตัวชี้วัดการซ้อนทับกันของแกนหมุน (Axis checking index : i_{ac}) จะได้สมการ

$$i_{ac} = \tan\phi_1 \tan\phi_2 \tan\phi_3 \tag{5.13}$$

โดยขอตั้งชื่อสมการ (5.13) ว่า สมการตรวจสอบแกนหมุน

กลับมาที่การจำลองการเคลื่อนที่โดยใช้สมการ (5.13) เมื่อวิเคราะห์มุมปรับอัตราทดทั้งสาม จะได้ดังรูป



รูปที่ 5.5 สมการตรวจสอบแกนหมุนของการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแบบทั่วไป

จากรูปที่ 5.5 จะพบว่าค่าส่วนใหญ่ของตัวชี้วัดการซ้อนทับกันของแกนหมุนมีค่าประมาณเท่ากับ -1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ส่วนใหญ่ของการจำลองแกนหมุนจะซ้อนทับกัน ปลายแขนกลสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างสะดวก แต่ ณ บางเวลาค่าตัวชี้วัดไม่ได้มีค่าเท่ากับ -1 หมายความว่าแกนหมุนทั้งสามไม่ได้ซ้อนทับกัน

จากการวิเคราะห์พบว่าปัญหาเกิดขึ้นจาก ระนาบแกนหมุนสองระนาบถูกหมุนมาจนเกือบจะขนานกัน และ/หรือ ขนานกัน (ระนาบแกนหมุนของล้อคู่ใดๆซ้อนทับกัน) จุดที่ตัดกันของทั้งสองระนาบมีความไวสูงมากสามารถเกิดความผิดพลาดได้ง่าย และในกรณีของระนาบหมุนขนานกันจุดที่ตัดกันของทั้งสองระนาบจะมีจุดตัดจำนวนนับไม่ถ้วน กรณีเช่นนี้เกิดขึ้นการเปลี่ยนแปลงของมุมเพียงเล็กน้อยทำให้คำตอบทางคณิตศาสตร์ที่คำนวนแกนหมุนที่เกิดจากการตัดกันของระนาบทั้งสองเปลี่ยนไปอย่างรวดเร็ว

กรณีเช่นนี้ถ้าหากว่าแกนหมุนทั้งสามยังอยู่ใกล้กันทรงกลมจะหมุนได้อย่างฝืดๆ รอบแกนหมุนที่เกิดในบริเวณหนึ่งไม่สามารถทำนายตำแหน่งแกนหมุนที่แน่นอนได้ และถ้าหากว่าแกนหมุนทั้งสามยังอยู่ไกลจากกันทรงกลมจะไม่สามารถหมุนได้

5.3 ระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

ผู้วิจัยจึงได้ปรับปรุงระบบควบคุมให้เหมาะกับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ โดยจะนำสมการควบคุม (5.2) มาประยุกต์ใช้งานร่วมกับหลักการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสมการ $k\hat{N} = d\hat{T}/ds$ ดังนั้นระบบควบคุมจะถูกปรับปรุงเป็น

$$\hat{T}_c = \hat{T}_p + \left[k\hat{N} - \left(G_R \Delta\vec{R} + G_T \Delta\hat{T} \right) \right] U \Delta t \qquad (5.14)$$

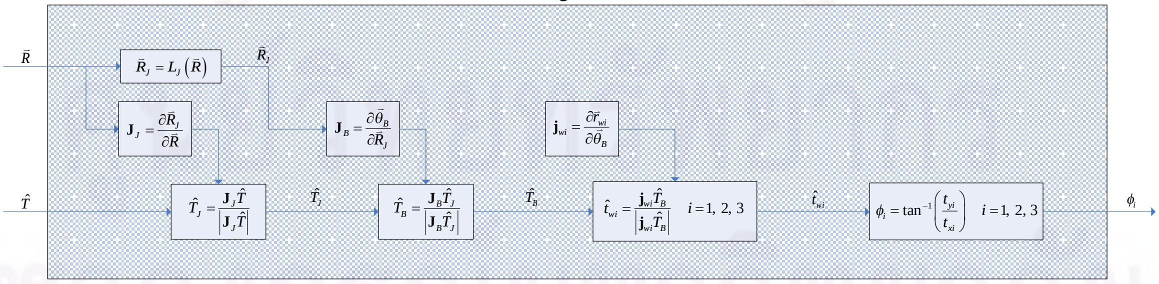
เมื่อ $\hat{T}_c$ คือเวกเตอร์ทิศทางที่เป็นสัญญาณควบคุม

U คืออัตราเร็วของปลายแขนกล

Δt คือช่วงเวลาอัตราการสุ่ม (Sampling rate) สำหรับกรณีในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 0.001 วินาที

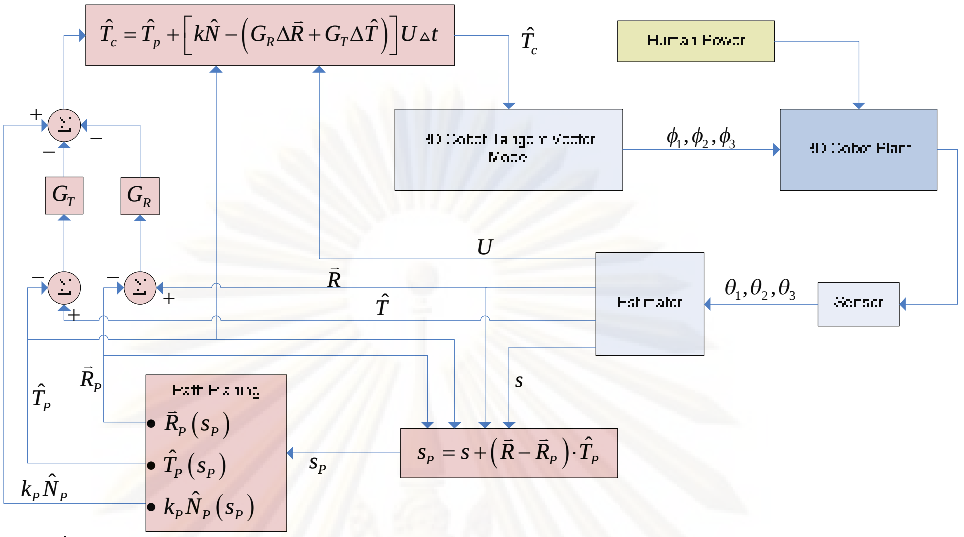
เมื่อระบบควบคุมถูกเปลี่ยนมาควบคุมด้วยเวกเตอร์ทิศทาง จลนศาสตร์ที่ใช้สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจึงถูกปรับเปลี่ยนมาใช้ตามแผนผังรูปที่ 5.6

3D Cobot Tangent Vector Model



รูปที่ 5.6 แผนผังแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยเวกเตอร์ทิศทางของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

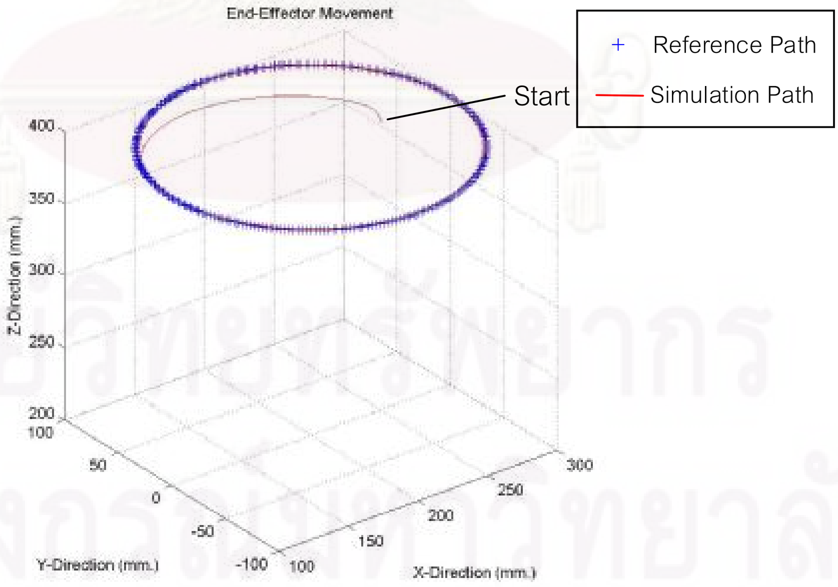
และระบบควบคุมจะถูกเปลี่ยนมาใช้ตามแผนผังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 แผนผังการควบคุมด้วยเวกเตอร์ทิศทางของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

5.4 การจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

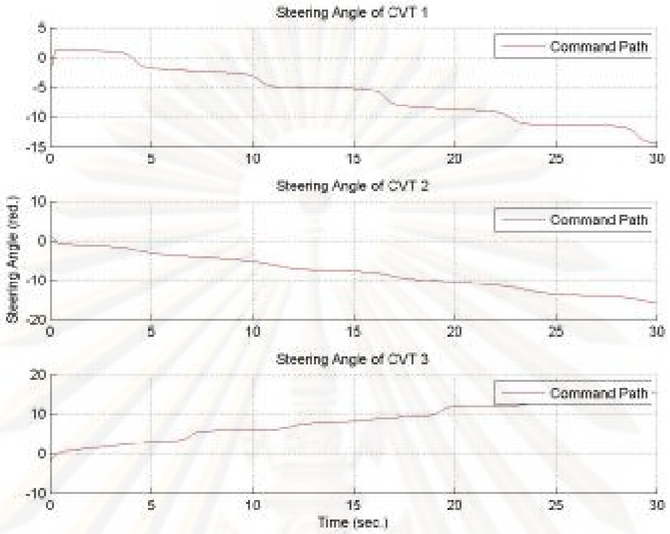
ทำการจำลองการเคลื่อนที่ระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติอีกครั้ง โดยใช้เส้นทางการเคลื่อนที่ และจุดเริ่มต้นของปลายแขนกลเช่นเดียวกับการจำลองในหัวข้อ 5.2 ซึ่งจะได้ดังรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 จำลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลด้วยระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทาง

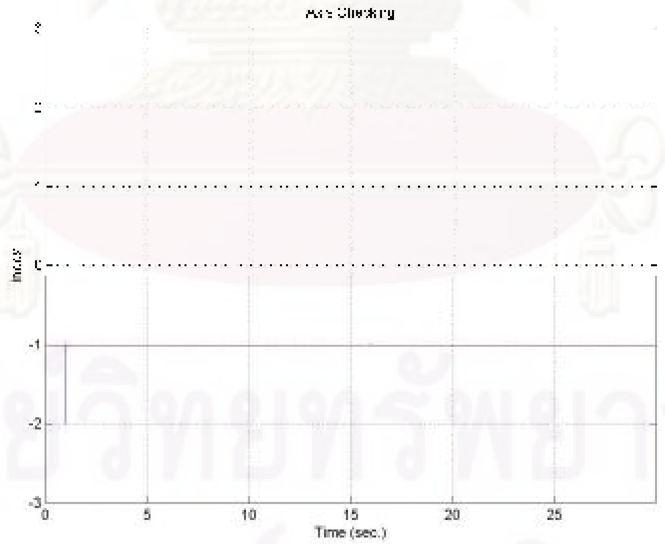
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และมุมล้อปรับอัตราทดคือ



รูปที่ 5.9 มุมปรับอัตราทดของซีวีทีทั้งสาม

ใช้สมการ (5.13) มาวิเคราะห์มุมปรับอัตราทดทั้งสาม จะได้ดังรูป



รูปที่ 5.10 สมการตรวจสอบแกนหมุนของการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทาง

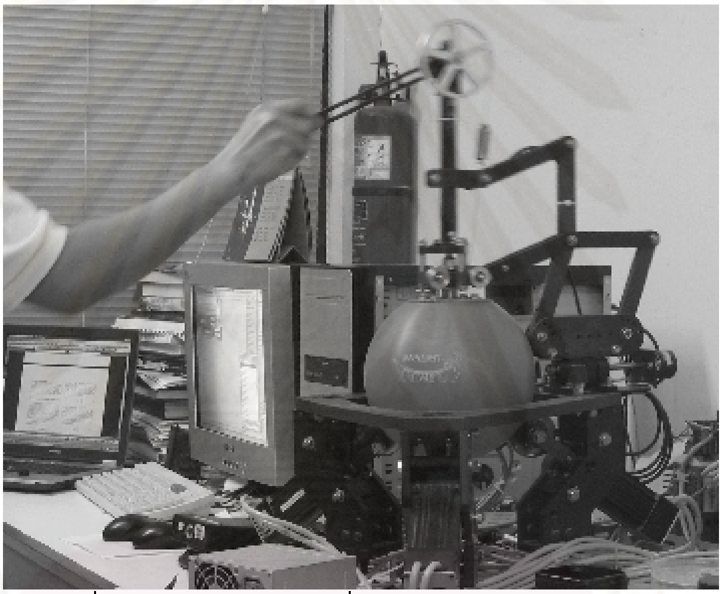
รูปที่ 5.10 แสดงให้เห็นการตัดกันของแกนหมุนตลอดเวลา ยกเว้นอยู่ที่ ณ ตำแหน่งหนึ่ง ซึ่งเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับรูปที่ 5.5จะเห็นว่าระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทางทำให้แกนหมุนทั้งสามของทรงกลมเกิดการตัดกันได้ดีกว่ากันมาก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

การทดลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลตามเส้นทางเดินของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

ในการทดลองจะใช้จลนศาสตร์และระบบควบคุมที่ออกแบบไว้ในบทก่อนหน้า มาทดสอบร่วมกับมนุษย์ด้วยเส้นทางคำสั่งแบบวงกลม โดยแบ่งออกเป็นสองการทดลอง



รูปที่ 6.1 ผู้ทดลองกำลังเคลื่อนปลายแขนกลขณะทดลอง

6.1 วัตถุประสงค์ของการทดลอง

1. เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางจลนศาสตร์หุ่นยนต์
2. การทดลองจะใช้เส้นทางเดินคำสั่งแบบวงกลม ซึ่งจะให้ทิศทางการเคลื่อนที่อย่างต่อเนื่องครบตั้งแต่ 0° ถึง 360° และยังช่วยให้ผู้ทดลองสามารถเคลื่อนที่ปลายแขนกลไปได้เรื่อยๆ ไม่สิ้นสุด
3. เพื่อทดสอบความสามารถของระบบควบคุม

6.2 ขั้นตอนการทดลอง

การทดลองจะถูกแบ่งออกเป็นสองการทดลอง การทดลองแรกจะนำไปเปรียบเทียบกับการจำลองการเคลื่อนที่ในบทที่ 6 ซึ่งใช้ระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทาง การทดลองที่สองจะทดสอบการทำงานเส้นทางเดินวงกลมในระนาบ Y-Z มีขั้นตอนหลักของทั้งสองการทดลองดังนี้

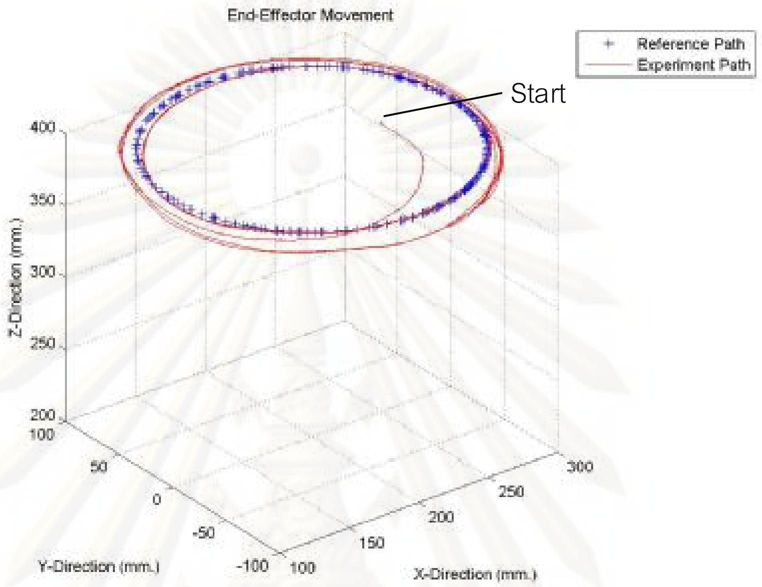
1. กำหนดตำแหน่งเริ่มต้น (home) ให้กับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ โดยการเสียบสลักกำหนดตำแหน่งเข้าไปในทุกข้อต่อ
2. เปิดระบบปฏิบัติการคิวเอ็นเอ็กซ์ (QNX) และโปรแกรมโฟรตรอน (Photon Application Builder)
3. คอมไพล และเริ่มโปรแกรมที่ใช้ทดลอง
4. ดึงสลักออกจากหุ่นยนต์โคบอททุกตัว
5. เปิดสวิทช์สั่งงานสำหรับระบบควบคุมมอเตอร์
6. ผู้ทดลองเคลื่อนที่ปลายแขนกล
7. เก็บ และบันทึกค่าการทดลอง
8. วิเคราะห์ผลการทดลอง โดยใช้โปรแกรมแมตแล็ป (MATLAB)

6.3 การทดลองที่ 1

เส้นทางเดินคำสั่งในการทดลองแรกจะเป็นเส้นทางเดินแบบวงกลมมีขนาดของรัศมีเท่ากับ 100.0 มม. อยู่บนระนาบ X-Y ตามสมการ

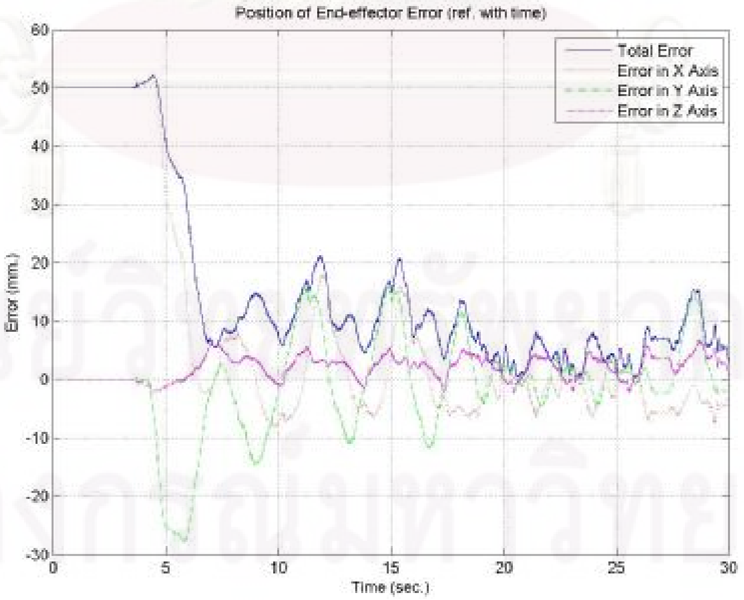
$$\vec{R}_p = \begin{bmatrix} 100 \cdot \cos\left(\dfrac{s_p}{100}\right) + 200 \\ 100 \cdot \sin\left(\dfrac{s_p}{100}\right) \\ 400 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

ตำแหน่งเริ่มต้นของปลายแขนกลอยู่ที่ $\vec{R} = [250 \quad 0 \quad 400]^T$ และเมื่อกำหนดให้ระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทางตามรูปที่ 5.7 มีค่าเกน G_R เท่ากับ 0.09 และเกน G_T เท่ากับ 0.00 จะได้ผลการทดลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลดังรูปที่ 6.2



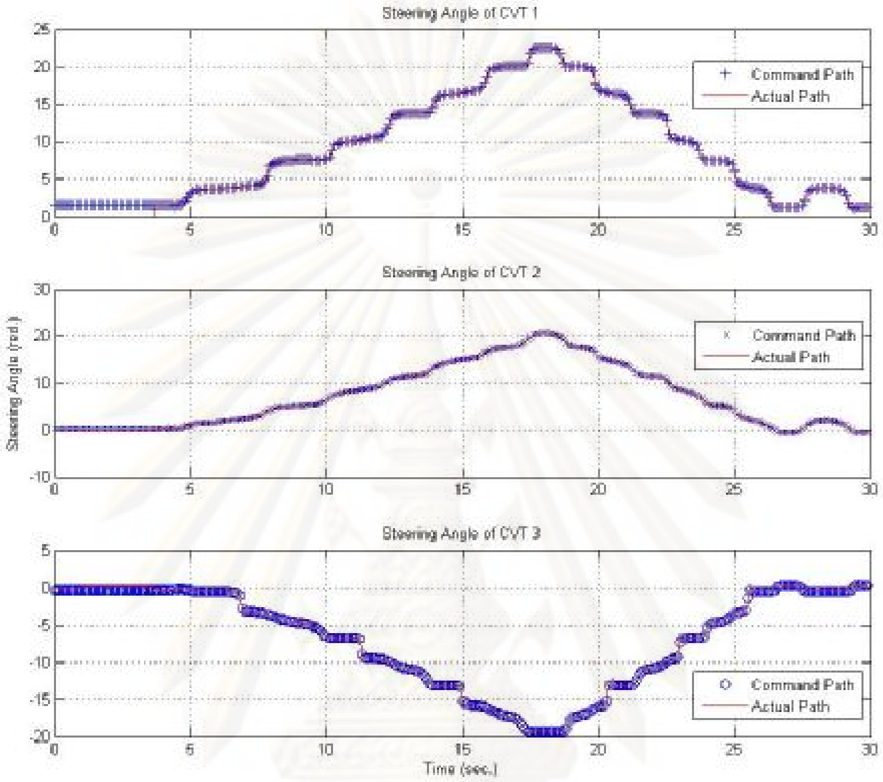
รูปที่ 6.2 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 1

ค่าความผิดพลาดของตำแหน่งปลายแขนกลที่เคลื่อนที่จริง เมื่อเทียบกับเส้นทางคำสั่งแสดงในรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 ความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 1

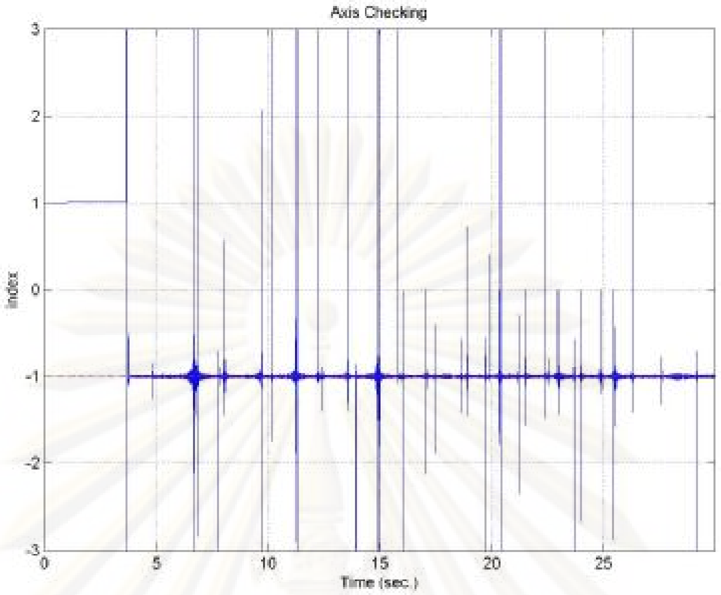
คำสั่งมุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสาม และมุมตำแหน่งจริงที่มอเตอร์ทำงานแสดงในรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 มุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสามในการทดลองที่ 1

แกนหมุนของทรงกลมที่เกิดเนื่องจากล้อทั้งสามสามารถตรวจสอบการตัดกันของแกนหมุนได้ตามสมการ (5.13) ซึ่งจะได้ตามรูปที่ 6.5

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



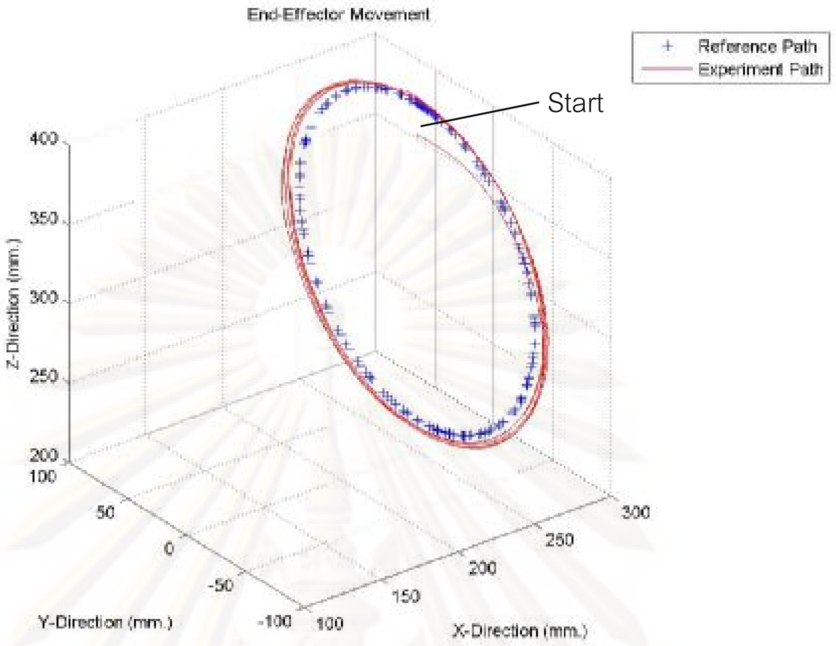
รูปที่ 6.5 กราฟตรวจสอบแกนหมุนของการทดลองที่ 1 โดยใช้ตำแหน่งของมุมล้อที่อ่านค่าได้จริงจากอุปกรณ์ตรวจวัดมุมของทั้งสามล้อ

6.4 การทดลองที่ 2

เส้นทางเดินคำสั่งในการทดลองแรกจะเป็นเส้นทางเดินแบบวงกลมมีขนาดของรัศมีเท่ากับ 100.0 มม. อยู่บนระนาบ Y-Z ตามสมการ

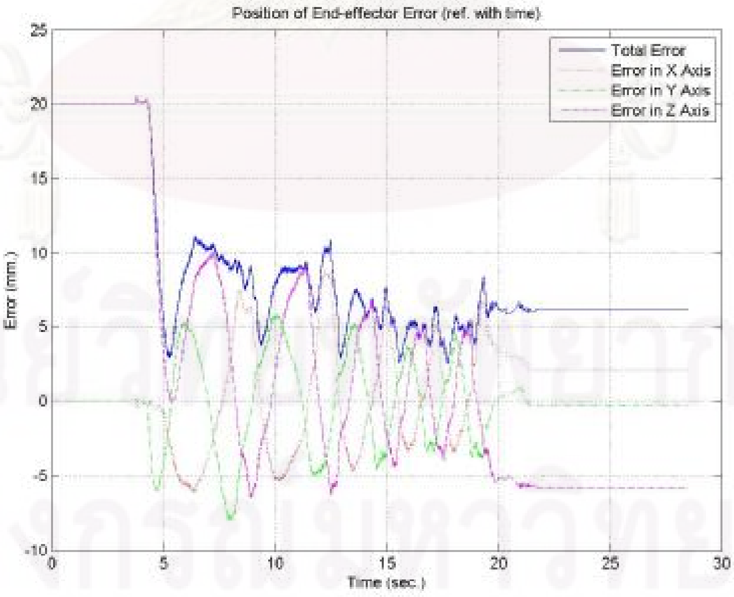
$$\vec{R}_p = \begin{bmatrix} 250 \\ 100\cdot\cos\left(\dfrac{s_p}{100}\right) \\ 100\cdot\sin\left(\dfrac{s_p}{100}\right)+320 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

ตำแหน่งเริ่มต้นของปลายแขนกลอยู่ที่ $\vec{R} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 400 \end{bmatrix}^T$ และเมื่อกำหนดให้ระบบควบคุมแบบเวกเตอร์ทิศทางตามรูปที่ 5.7 มีค่าเกน G_R เท่ากับ 0.09 และเกน G_T เท่ากับ 0.00 จะได้ผลการทดลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลดังรูปที่ 6.6



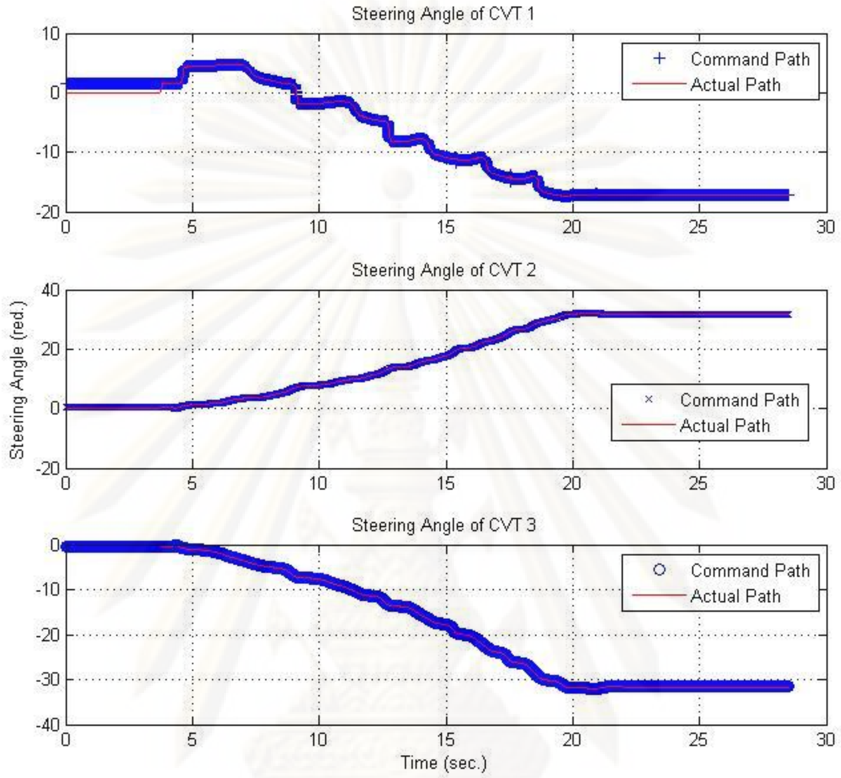
รูปที่ 6.6 การเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 2

ค่าความผิดพลาดของตำแหน่งปลายแขนกลที่เคลื่อนที่จริง เมื่อเทียบกับเส้นทางคำสั่งแสดงในรูปที่ 6.7



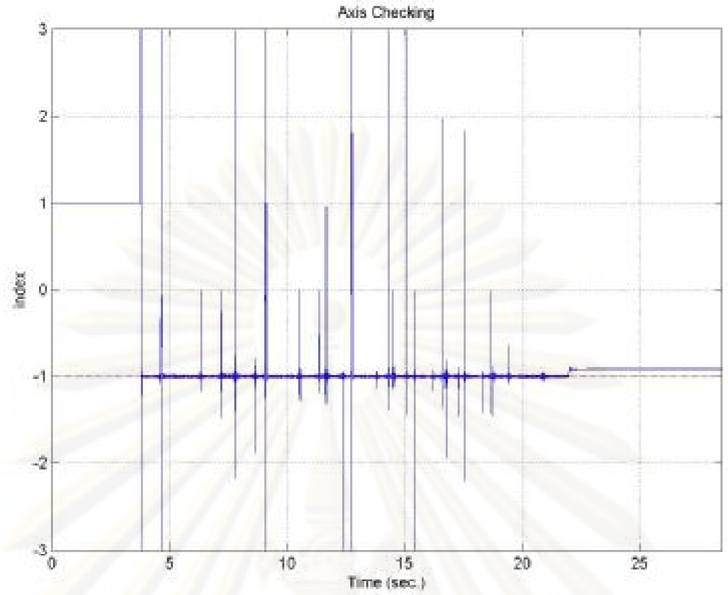
รูปที่ 6.7 ความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 2

คำสั่งมุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสาม และมุมตำแหน่งจริงที่มอเตอร์ทำงานแสดงในรูปที่ 6.8



รูปที่ 6.8 มุมปรับอัตราทดของล้อทั้งสามในการทดลองที่ 2

แกนหมุนของทรงกลมที่เกิดเนื่องจากล้อทั้งสามสามารถตรวจสอบการตัดกันของแกนหมุนได้ตามสมการ (5.13) ซึ่งจะได้ตามรูปที่ 6.9



รูปที่ 6.9 กราฟตรวจสอบแกนหมุนของการทดลองที่ 2 โดยใช้ตำแหน่งของมุมล้อที่อ่านค่าได้จริงจากอุปกรณ์ตรวจวัดมุมของทั้งสามล้อ

6.5 วิเคราะห์ผลการทดลอง

การทดลองทั้งสองในบทที่ 6 มีเส้นทางคำสั่งแบบวงกลมในระนาบต่างๆ การทดลองแรกมีเส้นทางคำสั่งอยู่บนระนาบ X-Y ตำแหน่งเริ่มต้นของปลายแขนกลถูกกำหนดให้อยู่ห่างจากเส้นทางคำสั่ง 50.0 มม. ในการทดลองผู้ทดลองจะเคลื่อนปลายแขนกลตามทิศทางที่กำหนดจากระบบควบคุม รูปที่ 6.3 ซึ่งแสดงความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 1 จะเห็นว่าผู้ทดลองเริ่มขยับปลายแขนกล ณ วินาทีที่ 4 นับจากเปิดเครื่อง จากนั้นระบบควบคุมจะบังคับปลายแขนกลเคลื่อนเข้าสู่เส้นทางคำสั่งในวินาทีที่ 8 สำหรับระบบควบคุมนี้สามารถทำให้ความผิดพลาดมีค่าในช่วง 0.0 มม. ถึง 20.0 มม.

การทดลองที่ 2 มีเส้นทางคำสั่งอยู่ในระนาบ Y-Z ตำแหน่งเริ่มต้นของปลายแขนกลถูกกำหนดให้อยู่ห่างจากเส้นทางคำสั่ง 20.0 มม. ในการทดลองผู้ทดลองจะเป็นผู้เคลื่อนปลายแขนกลตามทิศทางที่กำหนดจากระบบควบคุม รูปที่ 6.7 ซึ่งแสดงความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกลในการทดลองที่ 2 จะเห็นว่าผู้ทดลองเริ่มขยับปลายแขนกล ณ วินาทีที่ 4 นับจากเปิดเครื่อง จากนั้น

ระบบควบคุมจะบังคับปลายแขนกลเคลื่อนเข้าสู่เส้นทางคำสั่งในวินาทีที่ 5 สำหรับระบบควบคุมนี้สามารถทำให้ความผิดพลาดมีค่าในช่วง 3.0 มม. ถึง 11.0 มม.

พิจารณาการตรวจสอบการตัดกันของแกนหมุนตามสมการ (5.13) ของทั้งสองการทดลองโดยการนำมุมปรับอัตราทดจริงที่ได้จากการอ่านค่าจากอุปกรณ์ตรวจวัดตำแหน่งมุมของมอเตอร์แสดงได้ตามรูป 6.5 และรูป 6.9 พบว่าแกนหมุนทั้งสามของมอเตอร์เมื่อเริ่มทำการทดลองประมาณเวลาวินาทีที่ 4 เป็นต้นไป แกนหมุนจะตัดกันเกือบตลอดเวลา

6.6 สรุปผลการทดลอง

ผลการทดลองการเคลื่อนที่ปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติตามเส้นทางคำสั่งจะเห็นว่าระบบควบคุมสามารถบังคับให้ปลายแขนกลสามารถเคลื่อนเข้าสู่เส้นทางคำสั่งได้ แต่ก็ยังเกิดความผิดพลาดในการทำงานบ้างเล็กน้อย (ความผิดพลาดประมาณ 10.0 มม.)

ในการทดลองผู้ทำการทดลองพบว่าสามารถเคลื่อนปลายแขนกลได้อย่างไหลลื่น ไม่รู้สึกการเคลื่อนที่ที่ติดขัดแต่อย่างไร ซึ่งเป็นผลที่สอดคล้องกับการตรวจสอบการตัดกันของแกนหมุนตามสมการ (5.13)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 7

สรุปผลงานวิจัย

7.1 สรุปงานวิจัย

งานวิจัยที่เกี่ยวกับหุ่นยนต์โคบอทในปัจจุบันส่วนใหญ่จะมีความแตกต่างกันทางกลไกและพื้นที่ใช้งาน เช่น หุ่นยนต์โคบอทล้อเดียว, หุ่นยนต์โคบอทสกูตเตอร์, หุ่นยนต์โคบอทสามแกนหมุน, หุ่นยนต์โคบอทแบบราง และหุ่นยนต์โคบอทปรับรูปเป็นต้น สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติในงานวิจัยนี้ก็มีลักษณะทางกายภาพที่แตกต่างจากหุ่นยนต์โคบอทข้างต้น

หุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติถูกออกแบบให้มีระบบแบบพาสซีฟ สามารถทำงานร่วมกับมนุษย์อย่างปลอดภัย ปลายแขนกลเคลื่อนที่ในพื้นที่ใช้งานแบบคาร์ทีเซียนเชิงเส้น X, Y และ Z โดยใช้ซีวีทีประเภทล้อสามชุดมาบังคับแกนหมุนทั้งสาม โรล, พิตช์ และยอว์ (roll, pitch and yaw) ของทรงกลม ส่วนบนของทรงกลมถูกติดตั้งด้วยแขนกล 3 ข้อต่อ ที่ 2 ข้อต่อแรกจะตรึงติดกับทรงกลมโดยตรง ข้อต่อที่ 3 ถูกส่งกำลังจากแกนยอว์ของทรงกลมด้วยสายเคเบิล ผู้ใช้ก็สามารถเคลื่อนปลายของกลไกแขนกลจากการบังคับทิศทางด้วยซีวีที ในช่วงแรกผู้วิจัยได้ปรับปรุงบางส่วนของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติดังนี้

- สายเคเบิลส่งกำลังถูกเปลี่ยนจากเคเบิลสเตนเลสแบบมีปลอกพลาสติกหุ้ม เป็นเคเบิล สเตนเลสที่ไม่มีปลอกหุ้ม ซึ่งมีความทนทานมากกว่า
- ปรับปรุงพูเล่ชุดเปลี่ยนทิศทางสายเคเบิล ทำให้เคเบิลไม่เกิดการเสียดสีกันจนเสียหาย
- เพิ่มความแข็งแรงให้เพลาแกนกลางด้านในของทรงกลม ด้วยการขึ้นรูปชุดฐานเพลาและเพลาเป็นชิ้นเดียวกัน

จลนศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทจะแสดงถึง เวกเตอร์ตำแหน่ง เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์เคอเวเจอร์ ซึ่งเมื่อผู้ใช้เคลื่อนปลายแขนกล ปริมาณเวกเตอร์ทั้งสามก็จะถูกแปลงไปในแต่ละปริภูมิ โดยที่ปริภูมิจะถูกแบ่งลำดับความสัมพันธ์เชิงกายภาพของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติเป็นห้าปริภูมิ ประกอบด้วย ปริภูมิตำแหน่งปลาย ปริภูมิข้อต่อ ปริภูมิการเคลื่อนที่ทรงกลม ปริภูมิการจับคู่ และ ปริภูมิการปรับอัตราทด ในการแปลงปริมาณเวกเตอร์ทั้งสามจากปริภูมิหนึ่งไปสู่อีกปริภูมิหนึ่ง โดยปกติจะมีเป้าหมายเพื่อหาค่าเคอเวเจอร์ในปริภูมิการจับคู่ เพื่อนำไปคำนวณหา

อัตราทดในปริภูมิการปรับอัตราทด แต่ด้วยข้อจำกัดบางประการของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ เมื่อมาวิเคราะห์ลงรายละเอียดพบว่าในหลายช่วงของเส้นทางคำสั่ง มุมปรับอัตราทดของซีวีทีทั้งสามอยู่ในตำแหน่งที่ไม่ทำให้ทรงกลมเกิดแกนหมุนชั่วขณะ ทรงกลมจึงไม่สามารถหมุนได้ตามปกติ ซึ่งส่งผลไปถึงการเคลื่อนที่ของปลายแขนกล งานวิจัยฉบับนี้จึงนำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิแบบเวกเตอร์สัมผัส โดยนำเวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิสุดท้ายไปคำนวณหาอัตราทดของแต่ละซีวีที

ระบบควบคุมที่ใช้จึงต้องเปลี่ยนให้สอดคล้องกับจลนศาสตร์แบบเวกเตอร์สัมผัส โดยประยุกต์สมการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแบบปกติ ด้วยการเปลี่ยนเวกเตอร์เคอเวเจอร์ของระบบควบคุมแบบปกติ ให้เป็นเวกเตอร์สัมผัสควบคุม แล้วจึงส่งไปคำนวณต่อในจลนศาสตร์ เพื่อให้ได้มุมปรับอัตราทด เมื่อนำวิธีควบคุมแบบเวกเตอร์สัมผัสไปจำลองการทำงาน ปลายแขนกลที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ห่างจากเส้นทางคำสั่งก็สามารถที่จะเคลื่อนที่เลี้ยวเข้าสู่เส้นทางคำสั่ง และเคลื่อนไปตามเส้นทางที่ถูกต้องได้

ในการทดลองผู้วิจัยพยายามจะใช้เส้นทางคำสั่งที่มีทิศทางการเคลื่อนที่ครอบคลุม และสามารถที่จะให้การเคลื่อนที่มีความต่อเนื่องตอบสนองระยะทางการเคลื่อนที่ที่ไม่จำกัด ดังนั้นเส้นทางคำสั่งที่เหมาะสมจึงเป็นแบบวงกลม โดยผู้วิจัยได้เลือกรัศมีของวงกลมขนาด 100.0 มม. การทดลองแรกอยู่ในระนาบ X-Y การทดลองที่สองอยู่ในระนาบ Y-Z ซึ่งทั้งสองการทดลองจุดเริ่มต้นของปลายแขนกลจะอยู่ห่างจากเส้นทางคำสั่ง ระบบควบคุมถูกกำหนดให้ค่าเกนตำแหน่งมีค่าเท่ากับ 0.09 เมื่อผู้ใช้เริ่มทดลองขยับปลายแขน พบว่าระบบควบคุมสามารถเลี้ยวปลายแขนกลเข้าสู่เส้นทางคำสั่งได้ จากนั้นปลายแขนกลจะเคลื่อนโดยมีความผิดพลาดของตำแหน่งอยู่ในช่วง 0 ถึง 20.0 มม. ในการทดลองเคลื่อนปลายแขนกลสามารถเคลื่อนที่ได้เรียบลื่นและต่อเนื่อง

7.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

การเพิ่มประสิทธิภาพในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติเป็นหัวข้องานวิจัยที่น่าสนใจควรศึกษา และวิจัยเพิ่มเติม อาจจะสามารถทำโดยการปรับปรุงโครงสร้าง และกลไกให้ดีขึ้น หรือใช้วิธีปรับปรุงระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ซึ่งผู้วิจัยคิดว่าจะทำให้ลดความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ปลายแขนกล

การนำหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆก็เป็นสิ่งที่น่าศึกษาความเป็นไปได้ เช่น การติดตั้งเครื่องมือด้านการเจาะ หรือกัดไว้ที่ปลายแขน แล้วนำไปขึ้นรูปวัสดุแบบง่ายๆ การติดตั้งดินสอไว้ปลายแขนเพื่อศึกษาไกด์เส้นทางเดินแบบต่างๆ

งานวิจัยในอนาคตอีกด้านที่น่าสนใจคือ การศึกษา และวิเคราะห์พลศาสตร์ของทุกกลไกในหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

การศึกษาด้านแรงเสียดทานระหว่างล้อและทรงกลม การเพิ่มแรงเสียดทานด้านข้าง แต่ต้องทำให้แรงเสียดทานของการบิดมุมเลี้ยวของล้อให้น้อยลง การศึกษาด้านวัสดุที่จะนำมาทำเป็นล้อ และทรงกลม งานวิจัยเหล่านี้ล้วนเป็นสิ่งที่น่าศึกษา และวิจัยเพิ่มเติม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] Colgate, J.E., Peshkin, M.A. and Wannasuphoprasit, W. 1996. Nonholonomic Haptic Display. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis, pp. 539-544.

[2] W. Wannasuphoprasit, R.B. Gillespie, J.E. Colgate, M.A. Peshkin. 1997. Cobot Control. Proceeding of the IEEE 1997 International Conference on Robotics & Automation, pp. 3571-3576.

[3] Santos, M.J. 1997. Extreme Joystick: A Cobot with Stored Energy. Ph.D. Proposal, Mechanical Engineering Department, Northwestern University.

[4] Moore, C.A., Peshkin, M.A., Colgate, J.E. 1999. A Three Revolute Cobot Using CVTs in Parallel. Proceeding of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.

[5] M. Peshkin, J.E. Colgate, P. Akella, W. Wannasuphoprasit, B. Gillespie, C. Moore. 2001. Cobot architecture. IEEE Trans. Robot. Automatation. vol.17 , pp377-389.

[6] C. Moore. 1997. Continuously Variable Transmission for Serial Link Cobot Architectures. Master’s thesis, Department of Mechanical Engineering, Northwestern University.

[7] Chanphat, S., Wannasuphoprasit, W. 2006. A Novel Transformable Cobot, Robotics, Automation and Mechatronics, 2006 IEEE Conference on Dec.

[8] ภาวิต สุวจิตตานนท์, วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์. 2549. แนวคิดในการควบคุมความเฉื่อยปรากฏสำหรับหุ่นยนต์โคบอทแบบแพนโทกราฟ. การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 20.

[9] Farling. E. L., J. Edward Colgate. and Michael A. Peskin. 2004. A High Performance 6 DOF Cobot. IEEE International Conference on Robotics and Automation.

[10] Gregory J. Hamlin, A. C. Sanderson. 1994. A Novel Concentric Multilink Spherical Joint with Parallel. Robotics Applications, IEEE International Conference on Robotics and Automation., Vol. 2, pp. 1267-1272.

[11] Colgate, J.E., and Brown, J.M. 1994. Factors Affecting the Z-witdh of a Haptic Display. Proc. International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA: IEEE R&A Society, 4, pp. 3205-10.

[12] Delnondedieu, Y., Troccaz, J. 1995. PADyC: a Passive Arm with Dynamic Constraints. Proceedings of the 2nd International Symposium on Medical Robotics and Computer Assisted Surgery.

[13] G. Bachman. 1997. An Experimental Investigation of the Cobot Wheel Contact Patch. Master's thesis, Department of Mechanical Engineering, Northwestern University.

[14] Wannasuphoprasit, W., Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate. 1998. Cobot: A Novel Material Handling Technology. J.E. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Anaheim, ASME 98-WA/MH-2.

[15] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J. 2001. Classical Mechanics. Reading, MA: Addison-Wesley.

[16] R. Brent Gillespie, J. Edward Colgate, Michael A. Peshkin. 2001. A General Framework for Cobot Control. IEEE Transactions on robotics and automation, Vol. 17, No. 4.

[17] W. Wannasuphoprasit, S. Sirikasemsuk. 2002. The Design and Development of 3DP Cobotic Manipulator. Proceedings of IMECE.

[18] Wannasuphoprasit W., Sirikasemsuk S. 2002. On development of a 3D passive manipulator. IEEE ICIT '02. 2002 IEEE International Conference on, Volume: 2,pp. 1285-1289.

[19] Carl A. Moore, Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate. 2002. Cobot Implementation of 3D Virtual Surfaces. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics &Automation. Washington, DC.

[20] Carl A. Moore, Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate. 2003. Cobot Implementation of Virtual Paths and 3-D Virtual Surfaces. IEEE Transactions on robotics and automation, vol. 19, no. 2.

[21] Songho Kim. 2003. Control of the Powered Arm Cobot and Analysis of the Rotational CVT. A dissertation for the degree doctor of philosophy field of Mechanical Engineering, Northwestern university.

[22] ES Boy, E Burdet, CL Teo, JE Colgate. 2003. Motion Guidance Experiments with Scooter Cobot. Proceedings of the11th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems.

[23] ZHANG Li-xun, LU Dun-min, WANG Lan, SHEN Jin-hua, BERNHARD R. 2003. Dynamics of five-bar COBOT using differential mechanism. Journal of Marine Science and Application, Vol. 2, No. 2.

[24] Worsnopp, T., Peshkin, M., Colgate, J.E., Lynch, K. 2004. Controlling the apparent inertia of passive human-interactive robots. Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on Volume 2.

[25] Dunmin Lu, Lixun Zhang, Lan Wang; Jinhua Shen. 2004. Architecture and trajectory constraint control of a five bar Cobot. Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on, Volume 6.

[26] Yuhong Dong, Lixun Zhang, Dunmin Lu, Bernbardt, R., Surdilovic, D. 2004. A novel cobot and control. Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on Volume 5.

[27] Surdilovic, D., Simon, H. 2004. Singularity avoidance and control of new cobotic systems with differential CVT. Robotics and Automation, Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on Volume 1.

[28] Wannasuphoprasit, W. and Chanphat, S. 2005. T-Cobot: Transformable collaborative robot. Proceedings of 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE2005). Orlando, Florida, USA, code IMECE2005-82027.

[29] Eric L. Faulring, J. Edward Colgate, Michael A. Peshkin. 2005. High Performance Cobotics. Proceedings of IEEE 9^{th}. International Conference on Rehabilitation Robotics.

[30] Sirisak Sirikasemsuk, Witaya Wannasuphoprasit. 2006. Using Redundant CVTs for Controlling Manipulator's Direction. JSAE Manuscripts JSAE Annual Congress, Yokohama Japan.

[31] Chanphat, S., Wannasuphoprasit, W. 2006. A Novel Transformable Cobot, Robotics, Automation and Mechatronics, 2006 IEEE Conference on Dec.

[32] Eric L. Faulring, J. Edward Colgate, Michael A. Peshkin. 2006. Control and Performance of the Rotational-to-Linear Cobotic Transmission. proceedings of the IEEE 14th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environments and Teleoperator Systems.

[33] Tom Worsnopp, Michael Peshkin, Kevin Lynch, J. Edward Colgate. 2006. Controlling the Apparent Inertia of Passive Human-Interactive Robots. Transactions of the ASME, Vol. 128.

[34] Eng Seng Boy, Burdet, E., Teo, C.L., Colgate, J.E. 2007. Investigation of Motion Guidance With Scooter Cobot and Collaborative Learning. Robotics, IEEE Transactions on Volume 23, Issue 2.

[35] Z. M. Bi , Sherman Y. T. Lang and Lihui Wang. 2008. Improved control and simulation models of a tricycle collaborative robot. Journal of Intelligent Manufacturing, Springer Netherlands, Volume 19, Number 6.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

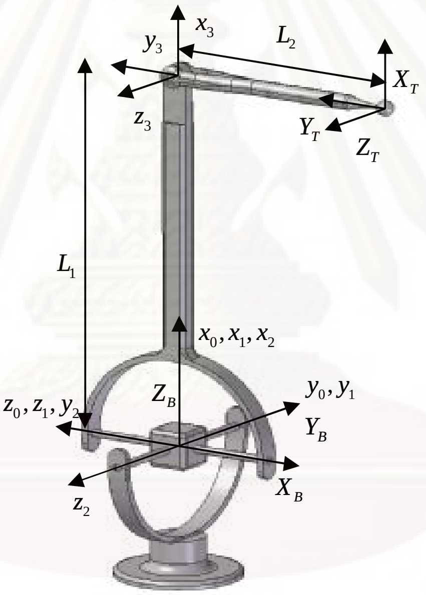
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก.

จลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้า และแบบย้อนกลับ

ก.1 จลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward kinematics)

จลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้าเราจะหาโดยอาศัยทฤษฎี Denavit-Hartenberg notation ตามแบบอย่างในหนังสือ “Introduction to Robotics mechanics and control, 2nd” ของ John J. Craig ดังนั้นจากในบทที่ผ่านมาที่ได้กล่าวถึงรายละเอียดกลไกของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ทำให้เราสามารถที่กำหนดกรอบให้กับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติได้ดังแสดงในรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1 การกำหนดกรอบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

เมื่อทำการกำหนดกรอบการเคลื่อนที่ต่างๆให้กับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติแล้ว จากนั้นจะสามารถกำหนดตัวแปรของข้อต่อ (Link parameters) ได้ดังตารางต่อไปนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ ก.1 ตัวแปรของข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	θ_3

และจาก ${}^{i-1}_{i}\mathbf{T}$ หรือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ (Transformations matrix) แบบทั่วไป ของกรอบ i เทียบกับกรอบ $i-1$ ซึ่งก็คือ

$$ {}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ก.1) $$

เมื่อ $c\theta_i = \cos\theta_i$, $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\alpha_{i-1} = \cos\alpha_{i-1}$ และ $s\alpha_{i-1} = \sin\alpha_{i-1}$

จากนั้นจะสามารถหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติได้โดยนำตัวแปรของข้อต่อที่ได้กำหนดขึ้นในตารางที่ ก.1 ไปแทนในเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่แบบทั่วไปสมการ (ก.1) จะได้

$$ {}^{0}_{1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ก.2) $$

$$ {}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ก.3) $$

$$
{}^{2}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_1 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.4)
$$

เราสามารถที่จะหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของกรอบ 3 เทียบกับกรอบ 0 ได้จากสมการ ${}^{0}_{3}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}{}^{1}_{2}\mathbf{T}{}^{2}_{3}\mathbf{T}$ สามารถที่จะหาได้ดังนี้

$$
{}^{0}_{2}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}{}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & 0 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.5)
$$

$$
{}^{0}_{3}\mathbf{T} = {}^{0}_{2}\mathbf{T}{}^{2}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.6)
$$

$$
{}^{0}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1\left(c_2c_3 - s_2s_3\right) & -c_1\left(c_2s_3 + s_2c_3\right) & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1\left(c_2c_3 - s_2s_3\right) & -s_1\left(c_2s_3 + s_2c_3\right) & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.7)
$$

เมื่อ $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $i = 1, 2, 3$

สมการ (ก.7) สามารถนำมาจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$
{}^{0}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.8)
$$

เมื่อ $c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3$, $s_{23} = c_2s_3 + s_2c_3$

แต่ที่เราสนใจจะหาจริงๆก็คือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของทูลกรอบ (Tool frame, $\{T\}$) เทียบกับกรอบฐาน (Base frame, $\{B\}$) สามารถที่จะหาได้จากสมการ ${}^{B}_{T}\mathbf{T} = {}^{B}_{0}\mathbf{T}\,{}^{0}_{3}\mathbf{T}\,{}^{3}_{T}\mathbf{T}$ โดยที่ ${}^{B}_{0}\mathbf{T}$, ${}^{3}_{T}\mathbf{T}$ จะหาได้จากการกำหนดกรอบในรูปที่ ก.1 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$ {}^{3}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.9) $$

$$ {}^{B}_{0}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.10) $$

จากสมการ (ก.9) และ (ก.10) สามารถที่จะหา ${}^{B}_{T}\mathbf{T}$ ได้ดังนี้

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.11) $$

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -s_{23} & -c_{23} & 0 & -L_1s_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.12) $$

เพราะฉะนั้นจะได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -s_{23} & -c_{23} & 0 & L_2c_{23} - L_1s_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_2s_1s_{23} + L_1s_1c_2 \\ c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_2c_1s_{23} + L_1c_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ก.13) $$

จากสมการ (ก.13) ซึ่งก็คือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของทูลกรอบเทียบกับกรอบฐาน ทำให้ได้จลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward kinematics) ดังนี้

$$ \vec{R}(\theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\cos(\theta_2+\theta_3) - L_1\sin\theta_2 \\ L_2\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) + L_1\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ L_2\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) + L_1\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (ก.14) $$

เมื่อ $\vec{R}(\theta)$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งปลายแขนของหุ่นยนต์เทียบกับกรอบฐาน

x, y, z คือ ตำแหน่งที่ปลายแขนของหุ่นยนต์เทียบกับกรอบฐาน

L_1, L_2 คือ คือขนาดความยาวของก้านที่ 1 (Link 1) และก้านที่ 2 (Link 2) ตามลำดับ

θ_1, θ_2 คือ มุมของข้อต่อที่มีลักษณะแบบข้อต่อทรงกลม (roll and pitch)

θ_3 คือ มุมของข้อต่อที่มีลักษณะแบบข้อศอก (elbow joint)

ก.2 **จลน์ศาสตร์แบบย้อนกลับ** (Inverse kinematics)

สมการจลน์ศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics) ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะสามารถที่จะหาได้โดยการแก้สมการจลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้าในสมการที่ (ก.14) ในอันดับแรกจะสามารถหา θ_1 โดยการนำ y และ z มาหารกันจะได้

$$ \frac{y}{z} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \tan\theta_1 \qquad (ก.15) $$

ซึ่งก็คือ

$$ \theta_1 = A\tan 2(y, z) \qquad (ก.16) $$

นำสมการ x และ y มาจัดรูปใหม่จะได้

$$L_2 \cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) = x + L_1 \sin\theta_2 \quad (ก.17)$$

$$L_2 \sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) = \frac{y}{\sin\theta_1} - L_1 \cos\theta_2 \quad (ก.18)$$

จากสมการ (ก.15) จะได้

$$\sin\theta_1 = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \quad (ก.19)$$

จากนั้นนำสมการ (ก.19) ไปแทนในสมการ (ก.18)

$$L_2 \sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) = \sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos\theta_2 \quad (ก.20)$$

นำสมการ (ก.17) และสมการ (ก.20) มายกกำลังสองแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$L_2^{\,2} = \left(x + L_1 \sin\theta_2\right)^2 + \left(\sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos\theta_2\right)^2 \quad (ก.21)$$

ซึ่ง

$$\left(x + L_1 \sin\theta_2\right)^2 = x^2 + 2xL_1 \sin\theta_2 + L_1^{\,2} \sin^2\theta_2 \quad (ก.22)$$

$$\left(\sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos\theta_2\right)^2 = \left(z^2 + y^2\right) - 2L_1\sqrt{z^2 + y^2}\,\cos\theta_2 + L_1^{\,2} \cos^2\theta_2 \quad (ก.23)$$

ทำให้สมการ (ก.21) สามารถจัดใหม่ได้ดังนี้

$$L_2^{\,2} - L_1^{\,2} = \left(z^2 + y^2 + x^2\right) + 2L_1 x \sin\theta_2 - 2L_1\sqrt{z^2 + y^2}\,\cos\theta_2 \quad (ก.24)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นำมาจัดสมการใหม่จะได้

$$\sqrt{y^2+z^2}\cos\theta_2 - x\sin\theta_2 = \frac{1}{2L_1}\left(x^2+y^2+z^2+L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right) \qquad (ก.25)$$

นำสมการ (ก.25) มาเขียนใหม่ให้ง่ายดังนี้

$$a\cos\theta_2 + b\sin\theta_2 = c \qquad (ก.26)$$

เมื่อ $a=\sqrt{y^2+z^2}$, $b=-x$, $c=\frac{1}{2L_1}\left(x^2+y^2+z^2+L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)$

เราสามารถแปลง $\cos\theta_2$, $\sin\theta_2$ ให้อยู่ในรูปของ $\tan\frac{\theta_2}{2}$ ได้จาก

$$u=\tan\frac{\theta}{2} \qquad (ก.27)$$

$$\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin\theta=\frac{2u}{1+u^2} \qquad (ก.28)$$

จะได้

$$a\left(1-u^2\right)+b\left(2u\right)=c\left(1+u^2\right) \qquad (ก.29)$$

$$\left(a-au^2\right)+\left(2bu\right)=\left(c+cu^2\right) \qquad (ก.30)$$

$$a=c+cu^2+au^2-2bu \qquad (ก.31)$$

$$\left(a+c\right)u^2-2bu+\left(c-a\right)=0 \qquad (ก.32)$$

$$u=\frac{b\pm\sqrt{b^2-(a+c)\left(c-a\right)}}{\left(a+c\right)} \qquad (ก.33)$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - \left(c^2 - a^2\right)}}{\left(a + c\right)} \qquad (ก.34)$$

$$\tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a + c} \qquad (ก.35)$$

ดังนั้นจะได้

$$\theta_2 = 2 \cdot A\tan 2\left(b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, a + c\right) \qquad (ก.36)$$

เมื่อ $a = \sqrt{y^2 + z^2}$, $b = -x$, $c = \frac{1}{2L_1}\left(x^2 + y^2 + z^2 + L_1{}^2 - L_2{}^2\right)$

จากสมการ (ก.17) และสมการ (ก.20) สามารถที่จะนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$x = L_2\cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) - L_1\sin\theta_2 \qquad (ก.37)$$

$$\sqrt{z^2 + y^2} = L_2\sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) + L_1\cos\theta_2 \qquad (ก.38)$$

นำสมการ (ก.37) และสมการ (ก.38) มายกกำลังสองแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(L_2\cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) - L_1\sin\theta_2\right)^2 + \left(L_2\sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) + L_1\cos\theta_2\right)^2 \qquad (ก.39)$$

$$\begin{aligned}\left(L_2\cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) - L_1\sin\theta_2\right)^2 &= L_1{}^2\sin^2\theta_2 - 2L_1L_2\sin\theta_2\cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) \\ &\quad + L_2{}^2\cos^2\left(\theta_2 + \theta_3\right)\end{aligned} \qquad (ก.40)$$

$$\begin{aligned}\left(L_2\sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) + L_1\cos\theta_2\right)^2 &= L_1{}^2\cos^2\theta_2 + 2L_1L_2\cos\theta_2\sin\left(\theta_2 + \theta_3\right) \\ &\quad + L_2{}^2\sin^2\left(\theta_2 + \theta_3\right)\end{aligned} \qquad (ก.41)$$

$$x^2+y^2+z^2=L_1^{\ 2}+L_2^{\ 2}+2L_1L_2\left(\cos\theta_2\sin\left(\theta_2+\theta_3\right)-\sin\theta_2\cos\left(\theta_2+\theta_3\right)\right) \quad (ก.42)$$

และจาก $\sin\left(A-B\right)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ จะได้

$$x^2+y^2+z^2=L_1^{\ 2}+L_2^{\ 2}+2L_1L_2\sin\theta_3 \quad (ก.43)$$

เมื่อ $\sin\theta=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ จะได้

$$x^2+y^2+z^2=L_1^{\ 2}+L_2^{\ 2}+2L_1L_2\frac{2u}{1+u^2} \quad (ก.44)$$

$$\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)\left(1+u^2\right)=4L_1L_2u \quad (ก.45)$$

$$\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)u^2-4L_1L_2u+\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)=0 \quad (ก.46)$$

เพราะฉะนั้น

$$u=\frac{4L_1L_2\pm\sqrt{\left(4L_1L_2\right)^2-4\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)^2}}{2\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)} \quad (ก.47)$$

$$u=\tan\frac{\theta_3}{2}=\frac{2L_1L_2\pm\sqrt{4L_1^{\ 2}L_2^{\ 2}-\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)^2}}{\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)} \quad (ก.48)$$

$$\tan\frac{\theta_3}{2}=\frac{L_2\pm\sqrt{L_2^{\ 2}-\dfrac{1}{4L_1^{\ 2}}\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)^2}}{\dfrac{1}{2L_1}\left(x^2+y^2+z^2-L_1^{\ 2}-L_2^{\ 2}\right)} \quad (ก.49)$$

ดังนั้นจะได้

$$\theta_3 = 2 \cdot A\tan 2\left(L_2 \pm \sqrt{L_2^{\ 2} - d^2}, d\right) \qquad \text{(ก.50)}$$

เมื่อ $d = \frac{1}{2L_1}\left(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^{\ 2} - L_2^{\ 2}\right)$

ดังนั้นจากสมการ (ก.16) สมการ (ก.36) และสมการ (ก.50) ทำให้ได้สมการจลน์ศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics) ดังนี้

$$\vec{R}_J(r) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\tan 2(y, z) \\ 2 \cdot A\tan 2\left(b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, a + c\right) \\ 2 \cdot A\tan 2\left(L_2 \pm \sqrt{L_2^{\ 2} - d^2}, d\right) \end{bmatrix} \qquad \text{(ก.51)}$$

เมื่อ $\vec{R}_J(r)$ คือ เวกเตอร์บนสเปซของข้อต่อ (Joint space)

$a = \sqrt{y^2 + z^2}$, $b = -x$, $c = \frac{1}{2L_1}\left(x^2 + y^2 + z^2 + L_1^{\ 2} - L_2^{\ 2}\right)$,

$d = \frac{1}{2L_1}\left(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^{\ 2} - L_2^{\ 2}\right)$

ภาคผนวก ข.

เมตริกซ์จาโคเบียน และเมตริกซ์เฮสสเซี่ยนของปริภูมิข้อต่อ

ข.1 เมตริกซ์จาโคเบียน

จากสมการการหาเวกเตอร์เวกเตอร์สัมผัสในปริภูมิข้อต่อ ($\hat{T}_J$) ดังสมการ

$$\hat{T}_J = \frac{d\vec{R}_J}{ds_J} = \frac{\partial L_J}{\partial \vec{R}} \frac{d\vec{R}}{ds} \frac{ds}{ds_J} \qquad \text{(ข.1)}$$

ซึ่งเทอม $\partial L_J / \partial \vec{R}$ คือจาโคเบียนเมตริกซ์ จะสามารถแสดงโดยใช้สัญลักษณ์ $\mathbf{J}$ ทำให้สามารถเขียน $\hat{T}_J$ ได้ใหม่ดังนี้

$$\hat{T}_J = \frac{\mathbf{J}\hat{T}}{\left|\mathbf{J}\hat{T}\right|} \qquad \text{(ข.2)}$$

เมื่อ

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \text{(ข.3)}$$

และจาก $\left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)\right]' = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\right]\left[\frac{vu'-uv'}{v^2}\right] = \frac{vu'-uv'}{u^2+v^2}$ จะได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 \qquad (ข.4)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{z}{y^2 + z^2} = \frac{z}{a^2} \qquad (ข.5)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{-y}{y^2 + z^2} = \frac{-y}{a^2} \qquad (ข.6)$$

จาก $\left[\cos^{-1} u\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} u'$ จะได้

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{r}\right)^2}} \left[\frac{r\frac{\partial c}{\partial x} - c\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\right] - \left[\frac{a}{x^2 + a^2}\right] \qquad (ข.7)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{x}{L_1} \qquad (ข.8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(2x) = \frac{x}{r} \qquad (ข.9)$$

นำสมการ (ข.8) และ (ข.9) ไปแทนในสมการ (ข.7) จะได้

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{r^2 - c^2}{r^2}}}\left(\frac{rx/L_1 - cx/r}{r^2}\right)\right] - \left[\frac{a}{r^2}\right] \qquad (ข.10)$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{r^2 - c^2}} \cdot \frac{xr^2 - L_1 xc}{L_1 r^3} - \frac{a}{r^2} \qquad (ข.11)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{L_1 xc - xr^2}{L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}} - \frac{a}{r^2} \qquad (ข.12)$$

สามารถหา $\frac{\partial \theta_2}{\partial y}$ ได้โดย

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \left(\frac{-r}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right) \cdot \left(\frac{r\frac{\partial c}{\partial y} - c\frac{\partial r}{\partial y}}{r^2} \right) - \left(\frac{-x\frac{\partial a}{\partial y}}{x^2 + a^2} \right) \quad \text{(ข.13)}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{y}{L_1} \quad \text{(ข.14)}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(2y) = \frac{y}{r} \quad \text{(ข.15)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}}(2y) = \frac{y}{a} \quad \text{(ข.16)}$$

นำสมการ (ข.14), (ข.15) และ (ข.16) แทนลงในสมการ (ข.13) จะได้

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \frac{-r}{\sqrt{r^2 - c^2}} \left(\frac{\frac{ry}{L_1} - \frac{cy}{r}}{r^2} \right) + \frac{\left(\frac{xy}{a} \right)}{r^2} \quad \text{(ข.17)}$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{r^2 - c^2}} \left(\frac{\frac{yr^2 - L_1 yc}{L_1 r}}{r^2} \right) + \frac{xy}{ar^2} \quad \text{(ข.18)}$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{r^2 - c^2}} \left(\frac{yr^2 - L_1 yc}{L_1 r^3} \right) + \frac{xy}{ar^2} \quad \text{(ข.19)}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\frac{L_1yc-yr^2}{L_1r^2\sqrt{r^2-c^2}}+\frac{xy}{ar^2} \quad (ข.20)$$

สามารถหา $\frac{\partial\theta_2}{\partial z}$ ได้โดย

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial z}=\left(\frac{-r}{\sqrt{r^2-c^2}}\right)\cdot\left(\frac{r\frac{\partial c}{\partial z}-c\frac{\partial r}{\partial z}}{r^2}\right)-\left(\frac{-x\frac{\partial a}{\partial z}}{x^2+a^2}\right) \quad (ข.21)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{z}{L_1},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},\ \frac{\partial a}{\partial z}=\frac{z}{a} \quad (ข.22)$$

นำสมการ (ข.22) ไปแทนในสมการ (ข.21) จะได้

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial z}=\frac{-r}{\sqrt{r^2-c^2}}\cdot\left(\frac{\frac{zr}{L_1}-\frac{zc}{r}}{r^2}\right)+\frac{\left(\frac{xz}{a}\right)}{r^2} \quad (ข.23)$$

$$=\left(\frac{-r}{\sqrt{r^2-c^2}}\right)\cdot\left(\frac{zr^2-L_1zc}{L_1r^3}\right)+\left(\frac{xz}{ar^2}\right) \quad (ข.24)$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial z}=\frac{L_1zc-zr^2}{L_1r^2\sqrt{r^2-c^2}}+\frac{xz}{ar^2} \quad (ข.25)$$

จาก $\left(\sin^{-1}u\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ จะได้

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{L_2}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d}{L_2}\right) \quad (ข.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d}{L_2}\right)=\frac{x}{L_1L_2} \qquad (ข.27)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{L_2^{\,2}-d^2}{L_2^{\,2}}}}\right)\left(\frac{x}{L_1L_2}\right) \qquad (ข.28)$$

$$=\left(\frac{L_2}{\sqrt{L_2^{\,2}-d^2}}\right)\cdot\left(\frac{x}{L_1L_2}\right) \qquad (ข.29)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x}=\frac{x}{L_1\sqrt{L_2^{\,2}-d^2}} \qquad (ข.30)$$

สามารถหา $\frac{\partial\theta_3}{\partial y}$ ได้โดย

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial y}=\frac{L_2}{\sqrt{L_2^{\,2}-d^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d}{L_2}\right) \qquad (ข.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d}{L_2}\right)=\frac{y}{L_1L_2} \qquad (ข.32)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial y}=\frac{y}{L_1\sqrt{L_2^{\,2}-d^2}} \qquad (ข.33)$$

สามารถหา $\frac{\partial\theta_3}{\partial z}$ ได้โดย

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial z}=\frac{L_2}{\sqrt{L_2^{\,2}-d^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d}{L_2}\right) \qquad (ข.34)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d}{L_2}\right) = \frac{z}{L_1 L_2} \qquad (ข.35)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial z} = \frac{z}{L_1\sqrt{L_2^{\ 2} - d^2}} \qquad (ข.36)$$

ข.2 เมตริกซ์เฮลสเซี่ยน

ในการเปลี่ยนรูปเป็นเวกเตอร์เคอเวเจอร์ของสมการ $k_J \hat{N}_J = \frac{d\hat{T}_J}{ds_J}$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของเวกเตอร์

$$\vec{A} = \frac{\vec{X}}{\left|\vec{X}\right|} \qquad (ข.37)$$

แล้วค่าอนุพันธ์ของเวกเตอร์นี้คือ

$$\vec{A}' = [\mathbf{I} - \vec{A}\vec{A}^T]\frac{\vec{X}'}{\left|\vec{X}\right|} \qquad (ข.38)$$

เมื่อ $\vec{A}$, $\vec{X}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ $\vec{A}'$, $\vec{X}'$ จะเป็นอนุพันธ์ของเวกเตอร์นั้นๆ ดังนั้นจากสมการ (ข.38) สมการ (ข.37) และ สมการ (ข.2) จะได้

$$k_J \hat{N}_J = \frac{\left[\mathbf{I} - \hat{T}_J \hat{T}_J^{\ T}\right]}{\left|\mathbf{J}\hat{T}\right|^2}\left[\hat{T}^T \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \vec{R}}\hat{T} + \mathbf{J}k\hat{N}\right] \qquad (ข.39)$$

เทรมของ $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \bar{R}}$ ก็คือเทอมเมตริกซ์เฮลสเซี่ยน (Hessians, $\mathbf{H}_J$) ในหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติเทอมของเมตริกซ์เฮลสเซี่ยนจะมี 3 ชุด สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{H}_{J1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{ข.40}$$

$$\mathbf{H}_{J2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{ข.41}$$

$$\mathbf{H}_{J3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{ข.42}$$

จากสมการ (ข.40) จะได้

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z\partial x} = 0 \tag{ข.43}$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{a^2}\right) = \frac{\left(-z\frac{\partial a^2}{\partial y}\right)}{a^4} = \frac{-2yz}{a^4} \tag{ข.44}$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{a^2}\right)=\frac{a^2-z\dfrac{\partial a^2}{\partial z}}{a^4}=\frac{a^2-2z^2}{a^4}=\frac{y^2-z^2}{a^4} \qquad (ข.45)$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{a^2}\right)=\frac{\left(y\dfrac{\partial a^2}{\partial z}\right)}{a^4}=\frac{2yz}{a^4} \qquad (ข.46)$$

สมการ (ข.41) จะสามารถหาสมาชิกได้โดย

เมื่อ $\frac{\partial\theta_2}{\partial x}=\frac{L_1xc-xr^2}{L_1r^2\sqrt{r^2-c^2}}-\frac{a}{r^2}$ และจาก $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$ จะแสดงการหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1xc-xr^2\right)=L_1c+L_1x\frac{\partial c}{\partial x}-r^2-x\frac{\partial r^2}{\partial x} \qquad (ข.47)$$

$$=L_1c+L_1x\left(\frac{x}{L_1}\right)-r^2-2x^2 \qquad (ข.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1xc-xr^2\right)=L_1c-x^2-r^2 \qquad (ข.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1r^2\sqrt{r^2-c^2}\right)=L_1\sqrt{r^2-c^2}\,\frac{\partial r^2}{\partial x}+L_1r^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{r^2-c^2}\right) \qquad (ข.50)$$

$$=2L_1x\sqrt{r^2-c^2}+\frac{L_1r^2}{2\sqrt{r^2-c^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2-c^2\right) \qquad (ข.51)$$

$$=2L_1x\sqrt{r^2-c^2}+\frac{L_1r^2}{2\sqrt{r^2-c^2}}\left(2x-2c\left(\frac{x}{L_1}\right)\right) \qquad (ข.52)$$

$$=2L_1x\sqrt{r^2-c^2}+\frac{L_1xr^2}{\sqrt{r^2-c^2}}\left(1-\frac{c}{L_1}\right) \qquad (ข.53)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= \frac{2L_1x\left(r^2 - c^2\right) + xr^2\left(L_1 - c\right)}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{(ข.54)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}\right) = \frac{3L_1 xr^2 - 2L_1 xc^2 - xr^2 c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{(ข.55)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1 xc - xr^2\right) = L_1 x \frac{\partial c}{\partial y} - x\frac{\partial r^2}{\partial y} = -xy \quad \text{(ข.56)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(L_1 xc - xr^2\right) = L_1 x \frac{\partial c}{\partial z} - x\frac{\partial r^2}{\partial z} = -xz \quad \text{(ข.57)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}\right) = 2L_1 y\sqrt{r^2 - c^2} + \frac{L_1 r^2}{2\sqrt{r^2 - c^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(r^2 - c^2\right) \quad \text{(ข.58)}$$

$$= 2L_1 y\sqrt{r^2 - c^2} + \frac{L_1 r^2}{2\sqrt{r^2 - c^2}}\left(2y - \frac{2cy}{L_1}\right) \quad \text{(ข.59)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}\right) = \frac{3L_1 yr^2 - 2L_1 yc^2 - yr^2 c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{(ข.60)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}\right) = \frac{3L_1 zr^2 - 2L_1 zc^2 - zr^2 c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{(ข.61)}$$

จากสมการ $\frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \frac{L_1 yc - yr^2}{L_1 r^2 \sqrt{r^2 - c^2}} + \frac{xy}{ar^2}$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1 yc - yr^2\right) = L_1 c + L_1 y\frac{\partial c}{\partial y} - r^2 - y\frac{\partial r^2}{\partial y} \quad \text{(ข.62)}$$

$$= L_1 c + y^2 - r^2 - 2y^2 \quad \text{(ข.63)}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1yc - yr^2\right) = L_1c - y^2 - r^2 \tag{ข.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(L_1yc - yr^2\right) = L_1y\frac{\partial c}{\partial z} - y\frac{\partial r^2}{\partial z} = -yz \tag{ข.65}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(ar^2\right) = r^2\frac{\partial a}{\partial y} + a\frac{\partial r^2}{\partial y} = \frac{yr^2}{a} + 2ya \tag{ข.66}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(ar^2\right) = r^2\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial r^2}{\partial z} = \frac{zr^2}{a} + 2za \tag{ข.67}$$

จากสมการ $\frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \frac{L_1zc - zr^2}{L_1r^2\sqrt{r^2 - c^2}} + \frac{xz}{ar^2}$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(L_1zc - zr^2\right) = L_1c + L_1z\frac{\partial c}{\partial z} - r^2 - z\frac{\partial r^2}{\partial z} = L_1c - z^2 - r^2 \tag{ข.68}$$

สมการ (ข.42) จะสามารถหาสมาชิกได้โดย

เมื่อ $\frac{\partial \theta_3}{\partial x} = \frac{x}{L_1\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}}$ จะแสดงการหาได้โดย

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}\right) = \frac{L_1}{2\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}}\frac{\partial\left(-d^2\right)}{\partial x} \tag{ข.69}$$

$$= \frac{-2L_1d}{2\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}} \cdot \frac{x}{L_1} \tag{ข.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L_1\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}\right) = \frac{-xd}{\sqrt{L_2^{\,2} - d^2}} \tag{ข.71}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_1\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}\right)=\frac{-L_1 d}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\cdot\frac{y}{L_1}=\frac{-yd}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}} \quad (\text{ข}.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(L_1\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}\right)=\frac{-L_1 d}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\cdot\frac{z}{L_1}=\frac{-zd}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}} \quad (\text{ข}.73)$$

และจาก $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$ จะได้

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2}=\frac{L_1\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}+\frac{x^2 d}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)} \quad (\text{ข}.74)$$

$$=\frac{L_1\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)+x^2 d}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)^{3/2}} \quad (\text{ข}.75)$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{L_1\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\right)=\frac{(-x)\left(\frac{-yd}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\right)}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)} \quad (\text{ข}.76)$$

$$=\frac{xyd}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)^{3/2}} \quad (\text{ข}.77)$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{L_1\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\right)=\frac{(-x)\left(\frac{-zd}{\sqrt{L_2^{\ 2}-d^2}}\right)}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)} \quad (\text{ข}.78)$$

$$=\frac{xzd}{L_1^{\ 2}\left(L_2^{\ 2}-d^2\right)^{3/2}} \quad (\text{ข}.79)$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L_1\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)=\frac{\left(L_1\sqrt{L_2{}^2-d^2}\right)-y\left(\frac{-yd}{\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)} \tag{ข.80}$$

$$=\frac{L_1\left(L_2{}^2-d^2\right)+y^2d}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)^{3/2}} \tag{ข.81}$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\theta_3}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{L_1\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)=\frac{(-y)\left(\frac{-zd}{\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)} \tag{ข.82}$$

$$=\frac{yzd}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)^{3/2}} \tag{ข.83}$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{L_1\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)=\frac{\left(L_1\sqrt{L_2{}^2-d^2}\right)-z\left(\frac{-zd}{\sqrt{L_2{}^2-d^2}}\right)}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)} \tag{ข.84}$$

$$=\frac{L_1\left(L_2{}^2-d^2\right)+z^2d}{L_1{}^2\left(L_2{}^2-d^2\right)^{3/2}} \tag{ข.85}$$

ภาคผนวก ค.

สมการการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ

สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) ของกลไกทั่วๆ ไป สามารถหาได้โดยอาศัยกฎข้อที่สองของนิวตัน หรือในกลไกที่ซับซ้อนจะนิยมหาโดยวิธีพลังงานตามสมการลากรานจ์ (Lagrangian Formulation) ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่สำหรับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติก็จะหาโดยวิธีการนี้

ค.1 สมการลากรานจ์

ฟังก์ชันของลากรานจ์ (Lagrangian function: L) ถูกนิยามจากความแตกต่างระหว่างพลังงานจลน์ (K) และพลังงานศักย์ (U) ของทั้งระบบกลไกดังนี้

$$L = K - U \qquad (ค.1)$$

สมการการเคลื่อนที่รูปแบบหนึ่งสามารถแสดงได้ในเทอมของสมการลากรานจ์ (Goldstein, 1980) ซึ่งก็คือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (ค.2)$$

เมื่อ q_i คือตัวแปรพิกัดวางนัยทั่วไป (Generalized coordinate)

Q คือแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ (Generalized force)

ตัวห้อย i คือตำแหน่งของพิกัดวางนัยทั่วไป

จากลักษณะกลไกแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะมีพิกัดวางนัยทั่วไป 3 ตัวแปร ซึ่งก็คือ มุมทั้งสามข้อต่อของแขนกล ($\vec{R}_J : \theta_1, \theta_2, \theta_3$)

ค.2 พลังงานจลน์

พลังงานจลน์รวมของก้านต่อ i (Link i) เป็นผลรวมของพลังงานจลน์ที่เกิดจากความเร็วเชิงเส้น และที่เกิดจากความเร็วเชิงมุมที่จุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i ดังนี้

$$K_i = \frac{1}{2}\vec{v}_{ci}^{T} m_i \vec{v}_{ci} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_i^{T} \mathbf{I}_i \vec{\omega}_i \qquad \text{(ค.3)}$$

เมื่อ $\vec{v}_{ci}$ คือเวกเตอร์ความเร็วเชิงเส้นที่จุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i

m_i คือมวลของก้านต่อ i

$\vec{\omega}_i$ คือเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของก้านต่อ i

$\mathbf{I}_i$ คือเมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i บนกรอบอ้างอิงฐาน

ความเร็วเชิงเส้น และความเร็วเชิงมุมที่จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละก้านต่อของหุ่นยนต์ มีความสัมพันธ์กับความเร็วของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ ตามทฤษฎีของการเคลื่อนที่แบบชั่วขณะของสกรู (Theory of instantaneous screw motion) ในรูปแบบของสมการเมตริกซ์

$$\dot{\vec{R}}_{ci} = \mathbf{J}_{li}\dot{\vec{\theta}}_J \qquad \text{(ค.4)}$$

เมื่อ

$$\dot{\vec{R}}_{ci} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{ci} \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_{li} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{vi} \\ \mathbf{J}_{\omega i} \end{bmatrix} \text{ และ } \dot{\vec{\theta}}_J = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_{li}$ คือเมตริกซ์ที่ใช้เพื่อแปลงความเร็วข้อต่อเป็นความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมของจุดศูนย์กลางมวลในแต่ละก้านต่อ มี $\mathbf{J}_{vi}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}$ เป็นเมตริกซ์ส่วนประกอบย่อย ซึ่ง $\mathbf{J}_{li}$ ถูกเรียกว่าเมตริกซ์จาโคเบียนของก้านต่อ (Link Jacobian matrix) และในทำนองเดียวกัน $\mathbf{J}_{vi}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}$ เรียกว่าเมตริกซ์ส่วนประกอบย่อยจาโคเบียนของก้านต่อ (Link Jacobian submatrices)

เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{J}_{vi}^{j}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}^{j}$ คือเวกเตอร์หลักที่ j ของ $\mathbf{J}_{vi}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}$ ตามลำดับ ดังนั้นจากทฤษฎีของการเคลื่อนที่แบบชั่วขณะของสกรูกับข้อต่อแบบหมุนก็จะได้

$$\mathbf{J}_{vi}^{j} = \hat{z}_j \times {}^{j}\vec{p}_{ci}^{*}, \quad j \le i \tag{ค.5}$$

$$\mathbf{J}_{\omega i}^{j} = \hat{z}_j, \quad j \le i \tag{ค.6}$$

เมื่อ ${}^{j}\vec{p}_{ci}^{*}$ คือเวกเตอร์ที่อ้างอิงบนกรอบอ้างอิงฐาน และชี้จากจุดศูนย์กลางของข้อต่อ j (Origin of Joint j) ไปสู่จุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i

$\hat{z}_j$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงฐาน ชี้ในทิศทางเดียวกับแกนหมุนของข้อต่อ j

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $\mathbf{J}_{vi}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}$ เป็นเมตริกซ์ที่เปลี่ยนแปลงตามรูปร่างของระบบกลไก เมตริกซ์ $\mathbf{J}_{vi}$ และ $\mathbf{J}_{\omega i}$ สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$\mathbf{J}_{vi} = \left[\mathbf{J}_{vi}^{1}, \mathbf{J}_{vi}^{2}, \ldots, \mathbf{J}_{vi}^{j}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\right] \tag{ค.7}$$

$$\mathbf{J}_{\omega i} = \left[\mathbf{J}_{\omega i}^{1}, \mathbf{J}_{\omega i}^{2}, \ldots, \mathbf{J}_{\omega i}^{j}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\right] \tag{ค.8}$$

กลับมาพิจารณาที่พลังงานจลน์ สำหรับกรณีของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติในก้านต่อแรก จะมีพลังงานจลน์เป็นไปตามสมการ

$$K_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_{c1}^{T} m_1 \vec{v}_{c1} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_1^{T}\mathbf{I}_1\vec{\omega}_1 \tag{ค.9}$$

และพลังงานจลน์ของก้านต่อที่สอง ซึ่งข้อต่อของก้านต่อนี้จะมีการต่อชุดส่งผ่านกำลังด้วยสายเคเบิลกับทรงกลม โดยมีอัตราทด ρ ดังนั้นสมการพลังงานจลน์ของข้อต่อที่สองจะเป็นดังนี้

$$K_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_{c2}^{T} m_2 \vec{v}_{c2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2^{T}\mathbf{I}_2\vec{\omega}_2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{Bj3}^{T}\mathbf{I}_B\vec{\omega}_{Bj3} \tag{ค.10}$$

เมื่อ $\mathbf{I}_B$ คือเมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลของทรงกลม

$\bar{\omega}_{Bj3}$ คือเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมที่ข้อต่อที่ 3 ส่งผ่านชุดส่งผ่านกำลังมาที่ทรงกลม

พิจารณาชิ้นส่วนที่เคลื่อนไหวทั้งหมดของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ จะพบว่ามีส่วนประกอบที่ทำให้เกิดพลังงานจลน์ทั้งหมดสามระบบ ระบบแรกคือส่วนของแขนกลทั้งสองก้านต่อและการหมุนของทรงกลมมีพลังงานจลน์ดังสมการ (ค.9) และ (ค.10) ระบบที่สองคือการเคลื่อนที่ของชุดซีวีทีทั้งสาม ซึ่งมีมวลน้อยมากเมื่อเทียบกับมวลของแขนกลจึงทำการละทิ้งพลังงานจลน์ในระบบนี้ ระบบที่สามคือกลไกของชุดจับยึด (CMS Joint) ซึ่งในที่นี้ก็จะถือว่ามีมวลน้อยมากเมื่อเทียบกับมวลของแขนกลเช่นกัน ดังนั้นสมการพลังจลน์ทั้งหมดของระบบจะเป็นไปตามผลรวมของพลังงานจลน์ของทั้งสองก้านต่อตามสมการ (ค.9) และ (ค.10)

สมการพลังงานสามารถจัดรูปแบบให้เป็นฟังก์ชันของความเร็วเชิงมุมของข้อต่อทั้งสาม โดยนำสมการ (ค.4) ไปแทนค่าในสมการ (ค.9) และ (ค.10) จะได้

$$K = \frac{1}{2}\dot{\bar{\theta}}_J^T\left[\mathbf{J}_{v1}^T m_1 \mathbf{J}_{v1} + \mathbf{J}_{\omega 1}^T \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{\omega 1} + \mathbf{J}_{v2}^T m_2 \mathbf{J}_{v2} + \mathbf{J}_{\omega 2}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{J}_{\omega 2} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{I}_B \mathbf{J}_C\right]\dot{\bar{\theta}}_J \qquad (ค.11)$$

เมื่อ $\mathbf{J}_C$ คือเมตริกซ์จาโคเบียนตามความสัมพันธ์ $\bar{\omega}_{Bj3} = \mathbf{J}_C\dot{\bar{\theta}}_J$ ซึ่งเมตริกซ์ $\mathbf{J}_C$ มีค่าตามระบบการส่งกำลังของพูเล่ที่มีอัตราทดเท่ากับ ρ ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{J}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

และเมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลของทรงกลม $\mathbf{I}_B$ คือ

$$\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{by} \end{bmatrix}$$

เทอมในวงเล็บของสมการ (ค.11) โดยทั่วไปจะถูกนิยามว่าคือ เมตริกซ์ความเฉื่อยของทั้งระบบ (Manipulator inertia matrix: $\mathbf{M}$)

เมตริกซ์ส่วนประกอบย่อยจาโคเบียนของแต่ละก้านต่อสามารถหาได้ตามสมการ (ค.5) ถึง (ค.6) และจากเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ (Transformation matrix) ในภาคผนวกจะได้

$$^{1}\vec{p}_{c1}^{*} = {}^{2}\vec{p}_{c1}^{*} = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \\ a_1 s_1 c_2 \\ a_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \quad (ค.12)$$

$$^{3}\vec{p}_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} a_2 c_{23} \\ a_2 s_1 s_{23} \\ a_2 c_1 s_{23} \end{bmatrix} \quad (ค.13)$$

$$^{1}\vec{p}_{c2}^{*} = {}^{2}\vec{p}_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} a_2 c_{23} - L_1 s_2 \\ a_2 s_1 s_{23} + L_1 s_1 c_2 \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \quad (ค.14)$$

และเวกเตอร์ $\hat{z}_j$ คือ

$$\hat{z}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ค.15)$$

$$\hat{z}_2 = \hat{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad (ค.16)$$

เมื่อ L_1 คือความยาวของก้านต่อที่ 1

L_2 คือความยาวของก้านต่อที่ 2

a_1 คือระยะจากข้อต่อที่ 2 ถึงจุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อที่ 1

a_2 คือระยะจากข้อต่อที่ 3 ถึงจุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อที่ 2

$s_1 = \sin\theta_1$, $c_1 = \cos\theta_1$, $s_2 = \sin\theta_2$, $c_2 = \cos\theta_2$, $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$, $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$

จะได้

$$\mathbf{J}_{v1}^{1} = \hat{z}_1 \times {}^{1}\vec{p}_{c1}^{*} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \\ a_1 s_1 c_2 \\ a_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \\ a_1 s_1 c_2 \\ a_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.17}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 c_1 c_2 \\ -a_1 s_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.18}$$

$$\mathbf{J}_{v1}^{2} = \hat{z}_2 \times {}^{2}\vec{p}_{c1}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 \\ s_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \\ a_1 s_1 c_2 \\ a_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.19}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 c_2 \\ -a_1 s_1 s_2 \\ -a_1 c_1 s_2 \end{bmatrix} \tag{ค.20}$$

$$\mathbf{J}_{v2}^{1} = \hat{z}_1 \times {}^{1}\vec{p}_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 c_{23} - L_1 s_2 \\ a_2 s_1 s_{23} + L_1 s_1 c_2 \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.21}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \\ -a_2 s_1 s_{23} - L_1 s_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.22}$$

$$\mathbf{J}_{v2}^{2} = \hat{z}_2 \times {}^{2}\vec{p}_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 \\ s_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 c_{23} - L_1 s_2 \\ a_2 s_1 s_{23} + L_1 s_1 c_2 \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \end{bmatrix} \tag{ค.23}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= \begin{bmatrix} -a_2 s_{23} - L_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_{23} - L_1 s_1 s_2 \\ a_2 c_1 c_{23} - L_1 c_1 s_2 \end{bmatrix} \tag{ค.24}$$

$$\mathbf{J}_{v2}^{3} = \hat{z}_3 \times {}^{3}\vec{p}_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 \\ s_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 c_{23} \\ a_2 s_1 s_{23} \\ a_2 c_1 s_{23} \end{bmatrix} \tag{ค.25}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_2 s_{23} \\ a_2 s_1 c_{23} \\ a_2 c_1 c_{23} \end{bmatrix} \tag{ค.26}$$

จากสมการ (ค.17) ถึง (ค.26) นำไปแทนค่าในสมการ (ค.7) จะได้

$$\mathbf{J}_{v1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 c_2 & 0 \\ a_1 c_1 c_2 & -a_1 s_1 s_2 & 0 \\ -a_1 s_1 c_2 & -a_1 c_1 s_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{ค.27}$$

และ

$$\mathbf{J}_{v2} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 s_{23} - L_1 c_2 & -a_2 s_{23} \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 & a_2 s_1 c_{23} - L_1 s_1 s_2 & a_2 s_1 c_{23} \\ -a_2 s_1 s_{23} - L_1 s_1 c_2 & a_2 c_1 c_{23} - L_1 c_1 s_2 & a_2 c_1 c_{23} \end{bmatrix} \tag{ค.28}$$

จากสมการ (ค.15) และสมการ (ค.16) นำไปแทนค่าในสมการ (ค.8) จะได้

$$\mathbf{J}_{\omega 1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{ค.29}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\mathbf{J}_{\omega 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix} \quad (ค.30)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลบนแกนหลัก (Principal inertia: $\mathbf{I}_{Pi}$) ของแต่ละก้านต่อ ($\mathbf{I}_{P1}, \mathbf{I}_{P2}$) คือ

$$\mathbf{I}_{P1} = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix} \quad (ค.31)$$

$$\mathbf{I}_{P2} = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix} \quad (ค.32)$$

เมื่อ I_{xi}, I_{yi}, I_{zi} คือความเฉื่อยของโมเมนต์จุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i ที่หมุนรอบแกนของก้านต่อ x, y, z ตามลำดับ, $i = 1, 2$

แต่เนื่องจากในสมการ (ค.11) เป็นการพิจารณาพลังงานจลน์ ณ จุดศูนย์กลางมวลอ้างอิงอยู่บนกรอบอ้างอิงฐาน ดังนั้นเมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละก้านต่อ 1 บนกรอบอ้างอิงฐานจะหาได้จาก

$$\mathbf{I}_1 = {}^{B}_{l1}\mathbf{R}\mathbf{I}_{P1}\left({}^{B}_{l1}\mathbf{R}\right)^T \quad (ค.33)$$

เมื่อ ${}^{B}_{l1}\mathbf{R}$ คือเมตริกซ์การหมุน (Rotation matrix) ของกรอบที่ตรึงกับก้านต่อ 1 อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงฐาน

$${}^{B}_{l1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \end{bmatrix} \quad (ค.34)$$

และจากสมการ (ค.33) และสมการ (ค.34) จะได้

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_{x1}s_2^2 + I_{y1}c_2^2 & \left(I_{y1} - I_{x1}\right)s_1s_2c_2 & \left(I_{y1} - I_{x1}\right)c_1s_2c_2 \\ \left(I_{y1} - I_{x1}\right)s_1s_2c_2 & I_{x1}s_1^2c_2^2 + I_{y1}s_1^2s_2^2 + I_{z1}c_1^2 & I_{x1}s_1c_1c_2^2 + I_{y1}s_1c_1s_2^2 - I_{z1}s_1c_1 \\ \left(I_{y1} - I_{x1}\right)c_1s_2c_2 & I_{x1}s_1c_1c_2^2 + I_{y1}s_1c_1s_2^2 - I_{z1}s_1c_1 & I_{x1}c_1^2c_2^2 + I_{y1}c_1^2s_2^2 + I_{z1}s_1^2 \end{bmatrix}$$

(ค.35)

และเมตริกซ์ความเฉื่อยของโมเมนต์ที่จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละก้านต่อ 2 อ้างอิงอยู่บนกรอบอ้างอิงฐานสามารถหาได้จาก

$$\mathbf{I}_2 = {}^{B}_{l2}\mathbf{R}\mathbf{I}_{P2}\left({}^{B}_{l2}\mathbf{R}\right)^T \qquad \text{(ค.36)}$$

เมื่อ ${}^{B}_{l2}\mathbf{R}$ คือเมตริกซ์การหมุน (Rotation matrix) ของกรอบที่ตรึงกับก้านต่อ 2 อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงฐาน

$${}^{B}_{l2}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -s_{23} & -c_{23} & 0 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ค.37)}$$

และจากสมการ (ค.36) และสมการ (ค.37) จะได้

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_{x2}s_{23}^2 + I_{y2}c_{23}^2 & \left(I_{y2} - I_{x2}\right)s_1s_{23}c_{23} & \left(I_{y2} - I_{x2}\right)c_1s_{23}c_{23} \\ \left(I_{y2} - I_{x2}\right)s_1s_{23}c_{23} & I_{x2}s_1^2c_{23}^2 + I_{y2}s_1^2s_{23}^2 + I_{z2}c_1^2 & I_{x2}s_1c_1c_{23}^2 + I_{y2}s_1c_1s_{23}^2 - I_{z2}s_1c_1 \\ \left(I_{y2} - I_{x2}\right)c_1s_{23}c_{23} & I_{x2}s_1c_1c_{23}^2 + I_{y2}s_1c_1s_{23}^2 - I_{z2}s_1c_1 & I_{x2}c_1^2c_{23}^2 + I_{y2}c_1^2s_{23}^2 + I_{z2}s_1^2 \end{bmatrix}$$

(ค.38)

นำสมการ (ค.27) ถึง (ค.30) สมการ (ค.35), (ค.38) แทนค่าลงในสมการ (ค.11) จะได้เมตริกซ์ความเฉื่อยของทั้งระบบ (Manipulator inertia matrix: $\mathbf{M}$) คือ

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1a_1^2c_2^2+I_{x1}s_2^2+I_{y1}c_2^2+m_2\left(a_2s_{23}+L_1c_2\right)^2+I_{x2}s_{23}^2+I_{y2}c_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1a_1^2+I_{z1}+I_{z2}+m_2\left(a_2^2+2L_1a_2s_3+L_1^2\right) & m_2a_2\left(a_2+L_1s_3\right)+I_{z2} \\ 0 & m_2a_2\left(a_2+L_1s_3\right)+I_{z2} & m_2a_2^2+I_{z2}+\rho^2 I_{bz} \end{bmatrix} \quad (ค.39)$$

ค.3 พลังงานศักย์

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่าแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติมีพื้นที่ทำงาน (Workspace) แบบคาร์ทีเซี่ยนเชิงเส้นในสามมิติ (X, Y และ Z) ดังนั้นหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจึงต้องนำผลของพลังงานศักย์มาพิจารณาด้วย สมการพลังงานศักย์ของทั้งระบบคือ

$$U=-\sum_{i=1}^{2} m_i\bar{g}^T\bar{p}_{ci} \quad (ค.40)$$

เมื่อ $\bar{g}$ คือเวกเตอร์ความเร่งจากแรงโน้มถ่วงโลก ($\bar{g}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -g_c\end{bmatrix}^T$), g_c คือค่าคงที่ 9.81 m/s^2

$\bar{p}_{ci}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของก้านต่อ i อ้างอิงอยู่บนกรอบอ้างอิงฐาน

ค.4 แรงภายนอก

หุ่นยนต์โคบอทเป็นหุ่นยนต์ที่มีลักษณะเฉพาะ คุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งก็คือมอเตอร์ของระบบมีไว้เพียงเพื่อเปลี่ยนอัตราทดของชุดซีวีทีเท่านั้น ดังนั้นแรงภายนอกตามสมการของลากรานจ์ที่นำมาพิจารณาก็คือ แรงที่เกิดจากมนุษย์ที่ตำแหน่งปลายแขนกลเท่านั้น

$$\bar{F}_h=\begin{bmatrix}F_{hx} & F_{hy} & F_{hz}\end{bmatrix}^T \quad (ค.41)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อ $\vec{F}_h$ คือแรงกระทำที่ปลายแขนกลเนื่องจากมนุษย์ สามารถวัดค่าได้โดยตรงจากอุปกรณ์ตรวจวัดแรงซึ่งติดตั้งไว้ที่ปลายแขนกล

ค.5 สมการการเคลื่อนที่

สมการของลากรานจ์ในสมการที่ (ค.2) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ทั่วไปตามหนังสือ “Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators” ของผู้แต่งชื่อ “Lung-Wen Tsai” ดังสมการ

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}} + \vec{V}_f + \vec{G}_f = \vec{Q}_f \qquad (ค.42)$$

เมื่อ $\mathbf{M}$ คือเมตริกซ์ความเฉื่อยของระบบ ในกรณีของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติก็คือสมการ (ค.39)

$\vec{V}_f = \begin{bmatrix} V_{f1} & V_{f2} & V_{f3} \end{bmatrix}^T$ คือเวกเตอร์แรงของความเร็วคู่ควบ (Velocity coupling force vector)

$\vec{G}_f = \begin{bmatrix} G_{f1} & G_{f2} & G_{f3} \end{bmatrix}^T$ คือเวกเตอร์แรงที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงโลก (Gravitational force vector)

$\vec{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_{f1} & Q_{f2} & Q_{f3} \end{bmatrix}^T$ คือเวกเตอร์โมเมนต์ที่เกิดจากแรงภายนอกตามนิยามของสมการของลากรานจ์

เวกเตอร์แรงของความเร็วคู่ควบ $\vec{V}_f$ ของหุ่นยนต์ทั่วไปจะได้จากเมตริกซ์ความเฉื่อยของระบบตามสมการ

$$V_{fi} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (ค.43)$$

ในกรณีของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะได้

$$V_{f1} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{1j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (ค.44)$$

$$V_{f2} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{2j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{ค.45}$$

$$V_{f3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{3j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_3}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{ค.46}$$

ดังนั้นนำสมการ (ค.39) ในแต่ละเทอมมาหาค่าอนุพันธ์ย่อยเทอมแรกคือ M_{11} จะได้

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} = 0 \tag{ค.47}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} = 2c_2 s_2\left(I_{x1} - I_{y1} - m_1 a_1^2\right) + 2c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + 2m_2\left(a_2 s_{23} + L_1 c_2\right)\left(a_2 c_{23} - L_1 s_2\right) \tag{ค.48}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_3} = 2c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + 2m_2 a_2 c_{23}\left(a_2 s_{23} + L_1 c_2\right) \tag{ค.49}$$

มาหาค่าอนุพันธ์ย่อยเทอม M_{22} จะได้

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} = 0 \tag{ค.50}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} = 0 \tag{ค.51}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_3} = 2m_2 L_1 a_2 c_3 \tag{ค.52}$$

มาหาค่าอนุพันธ์ย่อยเทอม M_{23} และ M_{32} จะได้

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial M_{32}}{\partial \theta_1} = 0 \qquad (ค.53)$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial M_{32}}{\partial \theta_2} = 0 \qquad (ค.54)$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta_3} = \frac{\partial M_{32}}{\partial \theta_3} = m_2 L_1 a_2 c_3 \qquad (ค.55)$$

มาหาค่าอนุพันธ์ย่อยเทอม M_{33} จะได้

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \theta_1} = 0 \qquad (ค.56)$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \theta_2} = 0 \qquad (ค.57)$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \theta_3} = 0 \qquad (ค.58)$$

จากแรงของความเร็วคู่ควบ V_{f1} สมการ (ค.44) เมื่อทำการตัดพจน์ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ออกจะได้

$$V_{f1} = \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_3}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \qquad (ค.59)$$

และ V_{f2} ในสมการ (ค.45) คือ

$$V_{f2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_3}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{\partial M_{23}}{\partial \theta_3}\dot{\theta}_3^2 \qquad (ค.60)$$

และ V_{f3} ในสมการ (ค.46) คือ

$$V_{f3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_3}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_3}\dot{\theta}_2^2 \qquad (ค.61)$$

แทนค่าสมการ (ค.48) (ค.49) (ค.52) (ค.55) ลงในสมการ (ค.59) ถึง (ค.61) จะได้

$$V_{f1} = \left[2c_2s_2\left(I_{x1} - I_{y1} - m_1a_1^2\right) + 2c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + 2m_2\left(a_2s_{23} + L_1c_2\right)\left(a_2c_{23} - L_1s_2\right)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \left[2c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + 2m_2a_2c_{23}\left(a_2s_{23} + L_1c_2\right)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \qquad (ค.62)$$

$$V_{f2} = -\left[c_2s_2\left(I_{x1} - I_{y1} - m_1a_1^2\right) + c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + m_2\left(a_2s_{23} + L_1c_2\right)\left(a_2c_{23} - L_1s_2\right)\right]\dot{\theta}_1^2 + \left[2m_2L_1a_2c_3\right]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \left[m_2L_1a_2c_3\right]\dot{\theta}_3^2 \qquad (ค.63)$$

$$V_{f3} = -\left[c_{23}s_{23}\left(I_{x2} - I_{y2}\right) + m_2a_2c_{23}\left(a_2s_{23} + L_1c_2\right)\right]\dot{\theta}_1^2 - \left[m_2L_1a_2c_3\right]\dot{\theta}_2^2 \qquad (ค.64)$$

เวกเตอร์แรงที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงโลก $\vec{G}_f$ (Gravitational force vector) หาได้จากสมการ

$$G_{fi} = -\sum_{j=1}^{2} m_j\vec{g}^T\mathbf{J}_{vj}^i \qquad (ค.65)$$

ในกรณีของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะได้

$$G_{f1} = -\left(m_1\vec{g}^T\mathbf{J}_{v1}^1 + m_2\vec{g}^T\mathbf{J}_{v2}^1\right) \qquad (ค.66)$$

$$G_{f2} = -\left(m_1\vec{g}^T\mathbf{J}_{v1}^2 + m_2\vec{g}^T\mathbf{J}_{v2}^2\right) \qquad (ค.67)$$

$$G_{f3} = -\left(m_1\vec{g}^T\mathbf{J}_{v1}^3 + m_2\vec{g}^T\mathbf{J}_{v2}^3\right) \qquad (ค.68)$$

ทำการแทนค่าจากสมการ (ค.27) และ (ค.28) จะได้

$$G_{f1} = -\left(m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 c_1 c_2 \\ -a_1 s_1 c_2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \\ -a_2 s_1 s_{23} - L_1 s_1 c_2 \end{bmatrix} \right) \quad (ค.69)$$

$$G_{f1} = -m_1 g_c a_1 s_1 c_2 - m_2 g_c \left(a_2 s_1 s_{23} + L_1 s_1 c_2 \right) \quad (ค.70)$$

และ G_{f2} คือ

$$G_{f2} = -\left(m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 c_2 \\ -a_1 s_1 s_2 \\ -a_1 c_1 s_2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 s_{23} - L_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_{23} - L_1 s_1 s_2 \\ a_2 c_1 c_{23} - L_1 c_1 s_2 \end{bmatrix} \right) \quad (ค.71)$$

$$G_{f2} = -m_1 g_c a_1 c_1 s_2 + m_2 g_c \left(a_2 c_1 c_{23} - L_1 c_1 s_2 \right) \quad (ค.72)$$

และ G_{f3} คือ

$$G_{f3} = -\left(m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 s_{23} \\ a_2 s_1 c_{23} \\ a_2 c_1 c_{23} \end{bmatrix} \right) \quad (ค.73)$$

$$G_{f3} = m_2 g_c a_2 c_1 c_{23} \quad (ค.74)$$

เวกเตอร์โมเมนต์ $\vec{Q}_f$ ที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำกับแต่ละข้อต่อ สามารถหาได้จากหลักการงานเสมือน (Virtual work) จะได้

$$\vec{Q}_f = \mathbf{J}^T \vec{F}_e \quad (ค.75)$$

เมื่อ $\mathbf{J} = \dfrac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{R}_J}$ คือเมตริกซ์จาโคเบียนทั่วไปของหุ่นยนต์ เมตริกซ์นี้ได้ถูกแสดงไว้ในภาคผนวก หรือก็คือ

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -L_2 s_{23} - L_1 c_2 & -L_2 s_{23} \\ L_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 & L_2 s_1 c_{23} - L_1 s_1 s_2 & L_2 s_1 c_{23} \\ -L_2 s_1 s_{23} - L_1 s_1 c_2 & L_2 c_1 c_{23} - L_1 c_1 s_2 & L_2 c_1 c_{23} \end{bmatrix} \quad (ค.76)$$

$\vec{F}_e$ คือแรงกระทำที่ปลายแขน เวกเตอร์นี้ต้องแสดงบนกรอบอ้างอิงฐานของหุ่นยนต์โคบอท แต่ $\vec{F}_h$ คือเวกเตอร์แรงที่ได้มาจากอุปกรณ์ตรวจวัดแรง ซึ่งถูกอ้างอิงบนกรอบที่ยึดอยู่กับก้านต่อที่สอง ดังนั้น $\vec{F}_e$ จะสัมพันธ์กับผลคูณของเมตริกซ์การหมุนของกรอบที่ตรึงกับก้านต่อ 2 เทียบกับกรอบอ้างอิงฐาน ${}^{B}_{l2}\mathbf{R}$ และ $\vec{F}_h$ ดังสมการ

$$\vec{F}_e = {}^{B}_{l2}\mathbf{R}\vec{F}_h \quad (ค.77)$$

ดังนั้นจากสมการ (ค.77) จะสามารถปรับปรุงสมการ (ค.75) ได้เป็น

$$\vec{Q}_f = \mathbf{J}^T\, {}^{B}_{l2}\mathbf{R}\vec{F}_h \quad (ค.78)$$

ค.6 ความเร่งปลายแขนกล

ความเร่งที่ตำแหน่งปลายแขนกล ($\vec{A}$) สามารถหาได้จากความเร่งเชิงมุมของแต่ละข้อต่อ อันดับแรกพิจารณาสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วปลายแขนกล และความเร็วเชิงมุมของแต่ละข้อต่อดังนี้

$$\vec{V} = \mathbf{J}\dot{\vec{\theta}}_J \quad (ค.79)$$

ทำการหาอนุพันธ์สมการ (ค.79) เทียบกับเวลา จะได้ความเร่งที่ตำแหน่งปลายแขนกลดังนี้

$$\vec{A} = \mathbf{J}\ddot{\vec{\theta}}_J + \dot{\mathbf{J}}\dot{\vec{\theta}}_J \quad (ค.80)$$

เมตริกซ์ $\dot{\mathbf{J}}$ สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์สมการ (ค.76) เทียบกับเวลาจะได้

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -L_2 c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)+L_1 s_2\dot{\theta}_2 & -L_2 c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) \\ L_2\left[c_1c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)-s_1s_{23}\dot{\theta}_1\right]-L_1\left[s_1c_2\dot{\theta}_1+c_1s_2\dot{\theta}_2\right] & L_2\left[c_1c_{23}\dot{\theta}_1-s_1s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\right]-L_1\left[c_1s_2\dot{\theta}_1+s_1c_2\dot{\theta}_2\right] & L_2\left[c_1c_{23}\dot{\theta}_1-s_1s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\right] \\ -L_2\left[c_1s_{23}\dot{\theta}_1+s_1c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\right]-L_1\left[c_1c_2\dot{\theta}_1-s_1s_2\dot{\theta}_2\right] & -L_2\left[s_1c_{23}\dot{\theta}_1+c_1s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\right]+L_1\left[s_1s_2\dot{\theta}_1-c_1c_2\dot{\theta}_2\right] & -L_2\left[s_1c_{23}\dot{\theta}_1+c_1s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\right] \end{bmatrix} \tag{ค.81}$$

ซึ่งความเร่งเชิงมุมของแต่ละข้อต่อ $\ddot{\vec{\theta}}_J = \begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_3\end{bmatrix}^T$ สามารถหาได้จากสมการการเคลื่อนที่ (ค.42) ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติตามสมการ

$$\ddot{\vec{\theta}}_J = \mathbf{M}^{-1}\left(\vec{Q}_f - \vec{V}_f - \vec{G}_f\right) \tag{ค.82}$$

แทนสมการ (ค.82) เข้าไปในสมการ (ค.80) ซึ่งจะได้

$$\vec{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\left(\vec{Q}_f - \vec{V}_f - \vec{G}_f\right) + \dot{\mathbf{J}}\dot{\vec{\theta}}_J \tag{ค.83}$$

สมการ (ค.83) คือสมการความสัมพันธ์ที่ใช้หาความเร่งของปลายแขนกล จากแรงกระทำโดยมนุษย์ที่ตำแหน่งปลายแขนกล ตำแหน่งและ ความเร็วเชิงมุมของแต่ละข้อต่อของแขนกล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายศิริศักดิ์ สิริเกษมสุข เกิดเมื่อวันที่ 21 มีนาคม พ.ศ.2521 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ สาขาวิชาชีพช่างยนต์ จากวิทยาลัยเทคนิคมีนบุรี ในปีการศึกษา 2538 จากนั้นได้เข้าศึกษาต่อในคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ และสำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ในปีการศึกษา 2542 และได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา 2546 แล้วจึงได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิตในปีถัดมา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย