บทที่ 4
โครงสร้างที่นำเสนอ

เนื้อหาในบทนี้จะแบ่งเป็น 2 ช่วงคือ ในช่วงแรกจะได้นำเสนอโครงสร้างของการควบคุมระบบเชิงเส้นแปรตามเวลาซึ่งมีความสามารถในการควบคุมได้ดีใกล้เคียงกับการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันแต่อาศัยข้อมูลของระบบพอๆกับการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดาคือ ไม่จำเป็นต้องรู้พารามิเตอร์เบื้องต้นและความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์นั้น แต่ยังคงมีข้อจำกัดบางประการซึ่งรายละเอียดจะได้กล่าวต่อไป ช่วงที่สองเป็นการเสนอโครงสร้างการควบคุมระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่มีเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าซึ่งเขตไร้ผลสนองอาจมีพารามิเตอร์คงที่หรือเปลี่ยนแปลงตามเวลาก็ได้ การควบคุมระบบดังที่ได้กล่าวมาแล้วจะอาศัยการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดาซึ่งแสดงไว้ในหนังสือเกี่ยวกับการควบคุมแบบปรับตัวเองทั่วๆไป [1, 20, 24] โดยการปรับปรุงโครงสร้างจะพยายามคงรูปแบบเดิมไว้ให้ได้มากที่สุด ในท้ายที่สุดแล้วเราสามารถนำโครงสร้างจากทั้งสองช่วงมารวมกันเพื่อควบคุมระบบเชิงเส้นแปรตามเวลาที่มีเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าแปรตามเวลาได้

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 การควบคุมแบบปรับตัวเองที่มีสัญญาณควบคุมราบเรียบ (Smooth) ซึ่งใช้ควบคุมระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา ส่วนใหญ่จะต้องมีข้อสมมุติเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของระบบในลักษณะที่ว่าการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์จะต้องราบเรียบและอนุพันธ์ของมันต้องมีค่าจำกัด กฎการปรับที่ได้ส่วนใหญ่อาศัยหลักการปรับปรุงซิกมาหรือใช้เทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) ที่มีการจำกัดขอบเขตพารามิเตอร์ (Parameter projection) [1, 2] ในกรณีที่ข้อสมมุติต่างๆเป็นจริงจากผลการจำลองแม้ว่าทุกๆสัญญาณวงปิดมีขอบเขตแต่ความคลาดเคลื่อนในการตามยังคงมีขนาดใหญ่โดยเฉพาะเมื่อสัญญาณอ้างอิงเป็นค่าคงที่ เนื่องจากคงจะเป็นการยากที่จะคาดเดาพารามิเตอร์ที่แปรตามเวลาโดยตรง ในการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันพารามิเตอร์ส่วนที่แปรตามเวลาจะถูกพิจารณาให้เป็นความไม่แน่นอนจึงไม่จำเป็นต้องสนใจลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ ผลการจำลองที่ได้เป็นที่น่าพอใจคือ ความคลาดเคลื่อนในการตามมีขนาดเล็ก แต่ข้อจำกัดของการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันคือ ต้องการข้อมูลของพารามิเตอร์มากกว่า สัญญาณควบคุมมีความถี่สูงและไม่มีการเรียนรู้คุณสมบัติของระบบ ส่วนต่อไปจะเป็นความพยายามในการรวมจุดเด่นของทั้งสองวิธีเอาไว้ด้วยกันโดยได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการพิจารณาพารามิเตอร์ของระบบและแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลาอันดับหนึ่งเพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ ในส่วนที่ 4.2 ได้เสนอโครงสร้างของตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นแปรตามเวลาอันดับ n ตัวควบคุมสำหรับระบบที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าได้ถูกแสดงไว้ในส่วนที่ 4.3 ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าความคลาดเคลื่อนในการตามจะมีขนาดเล็กลงและลู่เข้าสู่เซตตกค้าง (Residual set) หนึ่ง เซตตกค้างนี้สามารถทำให้มีขนาดเล็กได้ตามต้องการ

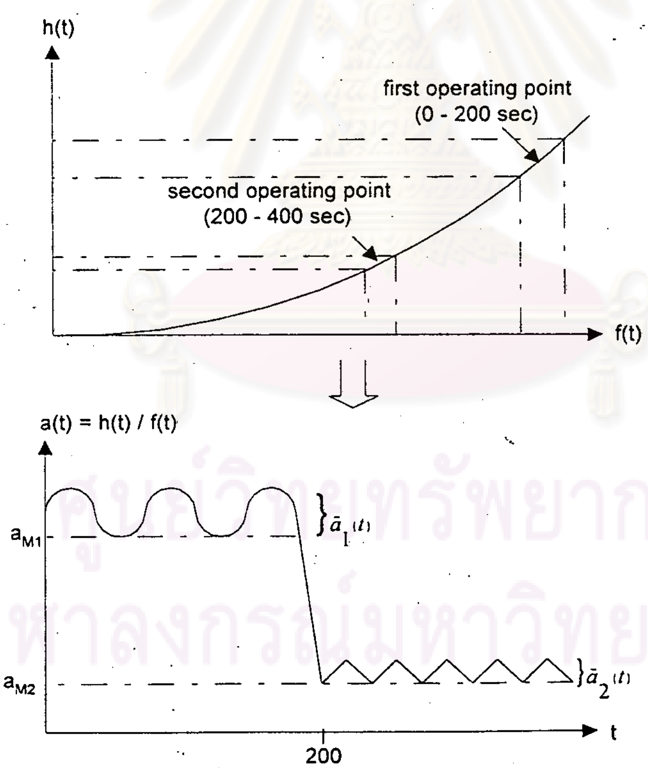
4.1 พารามิเตอร์พลานต์ในนามและระบบอันดับหนึ่ง

สมมุติให้ระบบแทนได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,u(t) \tag{4.1.1}$$

โดยที่ $a(t)$, $b(t)$ แทนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่ามีขอบเขตที่แปรตามเวลาซึ่งเปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ในเซตกระชับ

กำหนดให้ $\tilde{a}_i(t) = a_i(t) - \tilde{a}_{iM}$, $\tilde{b}_i(t) = b_i(t) - b_{iM}$ ยกตัวอย่างเช่น ในการควบคุมระดับของของเหลวความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหล $f(t)$ และความสูง $h(t)$ อาจแทนได้ด้วยเส้นโค้งในรูปที่ 4.1 (บน) โดยปกติแล้ว $f(t)$ จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ในเซตจำกัดหนึ่งดังนั้นพารามิเตอร์ $a(t)$ ซึ่งเป็นความชันระหว่าง $h(t)$ และ $f(t)$ ก็จะเปลี่ยนแปลงอยู่ในเซตจำกัดหนึ่งเช่นกัน ในรูปที่ 4.1 (ล่าง) พารามิเตอร์ a_i หมายถึงพารามิเตอร์ $a(t)$ ที่จุดทำงาน i ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน คือ ค่าคงที่ในนาม (Nominal) a_{Mi} และ $\tilde{a}_i$ จะเห็นได้ว่า $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ จะถูกทำให้มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบก็ได้ขึ้นอยู่กับว่าเราจะสมมุติให้ a_{Mi}, b_{Mi} เป็นค่าที่น้อยกว่าหรือมากกว่า a_i, b_i เท่านั้นเองและเราจะพิจารณา $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ เป็นความไม่แน่นอน



รูปที่ 4.1 (บน) : เส้นโค้งของพารามิเตอร์ $a(t)$ (ล่าง) : ระบบที่มีจุดทำงานสองจุด

ให้แบบจำลองอ้างอิงบรรยายได้ด้วยสมการ

$$\dot{x}_m = -a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad , \quad a_m > 0 \tag{4.1.2}$$

มีข้อสงสัยเกิดขึ้นว่าถ้าเรารู้ขอบเขตบนของ $\tilde{a}(t)$ และ $\tilde{b}(t)$ เราจะสามารถหาจุดทำงานในนาม a_M และ b_M ได้หรือไม่ เราไม่ได้ใช้ความรู้เหล่านี้ให้เป็นประโยชน์สำหรับสัญญาณควบคุมและ/หรือกฎการปรับของการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดา แต่ข้อมูลเหล่านี้จะมีประโยชน์สำหรับการควบคุมที่มั่นคง เราจะใช้มันให้เป็นประโยชน์สำหรับการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงที่จะนำเสนอ

สมมุติให้สัญญาณควบคุมเป็น

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) \tag{4.1.3}$$

โดยที่ $u_1(t)$ ใช้สำหรับระบบในนามและ $u_2(t)$ ใช้สำหรับส่วนที่ไม่แน่นอน ในการออกแบบที่ดีขนาดของ $u_2(t)$ ควรจะมีขนาดเล็ก

แนวคิดในการแบ่ง $u(t)$ ออกเป็น 2 ส่วนได้มาจากการควบคุมระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่า ใน [11, 12] $u_1(t)$ ใช้สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา และ $u_2(t)$ ใช้สำหรับลดผลที่เกิดจากเขตไร้ผลสนอง แนวคิดเดียวกันนี้สามารถนำไปใช้กับระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา โดยแบ่งระบบออกเป็น 2 ส่วน คือ ในส่วนแรกเป็นส่วนไม่แปรตามเวลา (ส่วนในนาม) และอีกส่วนหนึ่งเป็นความไม่แน่นอน ให้

$$u_1(t) = k(t)x(t) + l(t)r(t) \tag{4.1.4}$$

และ

$$u_2(t) = \mathrm{sgn}(b_M)\frac{|l(t)|}{|b_m|}\Big(\Delta a|x(t)| + \Delta b|u_1(t)|\Big)\mathrm{sat}(e(t)) \tag{4.1.5}$$

โดยสมมุติว่าเครื่องหมายของ $b(t)$ ไม่เปลี่ยนสำหรับทุกๆ t และรู้หรืออีกนัยหนึ่งคือ $\mathrm{sgn}(b(t)) = \mathrm{sgn}(b_M)$

$$k_M = \frac{-(a_m + a_M)}{b_M}, \quad l_M = \frac{b_m}{b_M}, \quad |\tilde{a}(t)| \le \Delta a = \Delta a^*, \quad |\tilde{b}(t)| \le \Delta b = \Delta b^*, \quad e(t) = x(t) - x_m(t)$$

k_M และ l_M แทนพารามิเตอร์ที่ต้องการ

$$\mathrm{sat}(e(t)) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า} \quad e(t) \ge \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}e(t) & \text{ถ้า} \quad -\varepsilon < e(t) < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0 \\ -1 & \text{ถ้า} \quad e(t) \le -\varepsilon \end{cases}$$

กฎการปรับที่ใช้ต่างจากการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดาเพียงเล็กน้อย คือ

$$\dot{k}(t) = -\gamma_1 x(t)e(t)\,\mathrm{sgn}(b_M) - \sigma_1(t)k(t) \tag{4.1.6}$$

$$\dot{l}(t) = \gamma_2\left(-r(t)e(t) + \frac{1}{b_m}\Big(\Delta a|x(t)| + \Delta b|u_1(t)|\Big)e(t)\,\mathrm{sat}(e(t))\right)\mathrm{sgn}(b_M) - \sigma_2(t)k(t) \tag{4.1.7}$$

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} 0, & |e(t)| \ge \varepsilon \\ \sigma_{0i}, & |e(t)| < \varepsilon \end{cases} \qquad i = 1,\ 2 \tag{4.1.8}$$

โดยที่ $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$ เป็นอัตราในการปรับและ σ_{0i} เป็นค่าคงที่เล็กๆ อันที่จริงแล้ว σ_i ควรแทนด้วย $\sigma_i(e(t))$ แต่เพื่อความสะดวก σ_i ถูกแทนด้วย $\sigma_i(t)$ เพื่อแสดงว่ามันไม่ใช่ค่าคงที่

ทฤษฎีบท 4.1 สำหรับสัญญาณอ้างอิงมีขอบเขตที่ต่อเนื่องเป็นช่วงใดๆ $r(t)$ ทุกๆสัญญาณในระบบวงปิด (4.1.1) ถึง (4.1.8) จะมีขอบเขตและความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)$ จะลู่เข้าหาค่าตกค้างเล็กๆค่าหนึ่ง

พิสูจน์ กำหนดให้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V = \frac{1}{2}e(t)^2 + \frac{b_M}{2\gamma_1}\operatorname{sgn}(b_M)\tilde{k}(t)^2 + \frac{b_M}{2\gamma_2}\operatorname{sgn}(b_M)\tilde{l}(t)^2$$

โดย $\tilde{k}(t) = k(t)-k_M$, $\tilde{l}(t) = l(t)-l_M$ กำหนดให้ความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)=x(t)-x_m(t)$ จะได้สมการความคลาดเคลื่อน

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \left(a_M x(t)+b_M u_1(t)\right)-\left(-a_m x_m(t)+b_m r(t)\right)+\tilde{a}(t)x(t)+\tilde{b}(t)u(t)-b_M u_2(t)\\ &= -a_m e(t)+b_M\tilde{k}(t)x(t)+b_M\tilde{l}(t)r(t)+\tilde{a}x(t)+\tilde{b}(t)u(t)-b_M u_2(t)\end{aligned}$$

ด้วยการแทนสมการความคลาดเคลื่อนและกฎการปรับลงในอนุพันธ์ของ V เทียบกับเวลาจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -a_m e(t)^2+b_M\tilde{k}(t)x(t)e(t)+b_M\tilde{l}(t)r(t)e(t)+\tilde{a}(t)x(t)e(t)+\tilde{b}(t)u(t)e(t)+\\ &\quad b_M\frac{1}{\gamma_1}\tilde{k}(t)\dot{\tilde{k}}(t)\operatorname{sgn}(b_M)+b_M\frac{1}{\gamma_2}\tilde{l}(t)\dot{\tilde{l}}(t)\operatorname{sgn}(b_M)-\\ &\quad b_M\frac{|l(t)|}{|b_m|}\left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)\operatorname{sgn}(b_M)e(t)\operatorname{sat}(e(t))\\ &= -a_m e(t)^2-\frac{|b_M|}{\gamma_1}\sigma_1(t)\tilde{k}(t)k(t)-\frac{|b_M|}{\gamma_2}\sigma_2(t)\tilde{l}(t)l(t)+\tilde{a}(t)x(t)e(t)+\tilde{b}(t)u(t)e(t)+\\ &\quad |b_M|\tilde{l}(t)\frac{1}{b_m}\left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)\operatorname{sgn}(b_M)e(t)\operatorname{sat}(e(t))-\\ &\quad |b_M|\frac{|l(t)|}{|b_m|}\left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)e(t)\operatorname{sat}(e(t))\\ &= -a_m e(t)^2-\frac{|b_M|}{\gamma_1}\sigma_1(t)\tilde{k}(t)k(t)-\frac{|b_M|}{\gamma_2}\sigma_2(t)\tilde{l}(t)l(t)+\tilde{a}(t)x(t)e(t)+\tilde{b}(t)u(t)e(t)+\\ &\quad |b_M|\left(\frac{l(t)}{|b_m|}\operatorname{sgn}(l_M)-\frac{1}{|b_M|}-\frac{|l(t)|}{|b_m|}\right)\left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)e(t)\operatorname{sat}(e(t))\\ &\le -a_m e(t)^2-\frac{|b_M|}{\gamma_1}\sigma_1(t)\tilde{k}(t)k(t)-\frac{|b_M|}{\gamma_2}\sigma_2(t)\tilde{l}(t)l(t)+\tilde{a}(t)x(t)e(t)+\tilde{b}(t)\ u_1(t)e(t)-\\ &\quad \left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)e(t)\operatorname{sat}(e(t))-\tilde{b}(t)\ \frac{|l(t)|}{|b_m|}\operatorname{sgn}(b_M)\left(\Delta a|x(t)|+\Delta b|u_1(t)|\right)e(t)\operatorname{sat}(e(t))\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

สำหรับ $|e(t)| \ge \varepsilon$ ถ้า $\operatorname{sgn}(b_M)>0$ เราจะสมมุติว่า b_M เป็นค่าคงที่น้อยกว่า $b(t)$ ทำให้ $\tilde{b}(t)=b(t)-b_M \ge 0$ ดังนั้น (4.1.9) เป็นลบ ในทางกลับกันถ้า $\operatorname{sgn}(b_M)<0$ เราจะสมมุติว่า b_M เป็นค่าคงที่มากกว่า $b(t)$ ทำให้ $\tilde{b}(t)=b(t)-b_M \le 0$ ดังนั้น (4.1.9) จึงเป็นลบอีกเช่นกัน

สำหรับ $|e(t)| < \varepsilon$ ให้

$$\dot{V} \le -\alpha V + \alpha V + (4.1.9) \quad \text{สำหรับบาง } \alpha > 0$$

$$\dot{V} \le -\alpha V + \frac{\alpha}{2} e(t)^2 + \frac{\alpha|b_M|}{2\gamma_1}\tilde{k}(t)^2 + \frac{\alpha|b_M|}{2\gamma_2}\tilde{l}(t)^2 - a_m e(t)^2 - \frac{\sigma_{01}|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}(t)k(t) - \tag{4.1.10}$$

$$\frac{\sigma_{02}|b_M|}{\gamma_2}\tilde{l}(t)l(t) + \tilde{a}(t)x(t)e(t) + \tilde{b}(t)\ u_1(t)e(t)$$

พิจารณาเทอม

$$-\sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}k = -\sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}(\tilde{k}+k_M) \le -\sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}^2 + \sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}|\tilde{k}|\,|k_M|$$

$$\le -\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}\tilde{k}^2 + \sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$-\sigma_{02}\frac{|b_M|}{\gamma_2}\tilde{l}\,l \le -\sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}\tilde{l}^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2$$

พิจารณาเทอม

$$\tilde{a}xe + \tilde{b}u_1 e = \tilde{a}xe + \tilde{b}(kx+lr)e = \tilde{a}(e+x_m)e + \tilde{b}(\tilde{k}+k_M)(e+x_m)e + \tilde{b}(\tilde{l}+l_M)re$$

$$= \tilde{a}e^2 + \tilde{a}x_m e + \tilde{b}\tilde{k}(e+x_m)\sqrt{e}\sqrt{e} + \tilde{b}k_M(e+x_m)e + \tilde{b}\tilde{l}r\sqrt{e}\sqrt{e} + \tilde{b}l_M re$$

$$\le \Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2}\tilde{k}^2 + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \Delta b^*|k_M|(\varepsilon+|x_m|)\varepsilon +$$

$$\frac{\Delta b^*\varepsilon}{2}\tilde{l}^2 + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon + \Delta b^*|l_M||r|\varepsilon$$

โดยที่ $|\tilde{a}(t)| \le \Delta a = \Delta a^*$, $|\tilde{b}(t)| \le \Delta b = \Delta b^*$ เนื่องจากสมมุติว่ารู้ขอบเขตบน ดังนั้น

$$\dot{V} \le -\alpha V - (a_m - \frac{\alpha}{2})\ e^2 - (\sigma_{01} - \frac{\Delta b^*\varepsilon\gamma_1}{|b_M|} - \alpha)\frac{|b_M|}{2\gamma_1}\tilde{k}^2 - (\sigma_{02} - \frac{\Delta b^*\varepsilon\gamma_2}{|b_M|} - \alpha)\frac{|b_M|}{2\gamma_2}\tilde{l}^2 +$$

$$\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2 + \Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon +$$

$$\Delta b^*|k_M|(\varepsilon+|x_m|)\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon + \Delta b^*|l_M||r|\varepsilon$$

จากกรณีที่ $|e(t)| \ge \varepsilon$ จะเห็นได้ว่าขนาดของ $e(t)$, $\tilde{k}(t)$, $\tilde{l}(t)$ จะลดลงจากค่าเริ่มต้น ดังนั้นจากสมการ (4.1.10) ข้างบนสรุปได้ว่าระบบวงปิดมีเสถียรภาพและถ้าเราเลือก

$$(0 < \alpha \le 2a_m) \cap (0 < \alpha \le (\sigma_{01} - \frac{\Delta b^*\varepsilon\gamma_1}{|b_M|})) \cap (0 < \alpha \le (\sigma_{02} - \frac{\Delta b^*\varepsilon\gamma_2}{|b_M|})) \tag{4.1.11}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่า ε, γ_1, γ_2 มีผลต่อการมีอยู่ของ $\alpha > 0$ (แต่ไม่มีผลต่อเสถียรภาพของระบบวงปิด) ดังนั้นในกรณีที่เราไม่รู้ขอบเขตบนของ $b(t)$ เลย ค่า ε, γ_1, γ_2 ควรจะมีค่าเล็กๆ

ในทางกลับกันถ้าเรารู้ขอบเขตบนของ $b(t)$ เราก็จะกำหนดค่าที่เหมาะสมของ ε, γ_1, γ_2 ได้ อันที่จริงแล้วถ้าคูณ γ_1, γ_2 ให้กับเทอมสุดท้ายของกฎการปรับ (4.1.6) และ (4.1.7) ด้วย γ_1, γ_2 ก็จะไม่มีผลต่อการมีอยู่ของ $\alpha > 0$ ซึ่งการวิเคราะห์กฎการปรับนี้ทำได้โดยการแทน $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ในการวิเคราะห์ที่เราได้กล่าวถึงไปแล้วและที่จะกล่าวถึงต่อไป สมมุติว่าพารามิเตอร์ที่เลือกเป็นไปตาม (4.1.11) จะได้

$$\dot{V} \le -\alpha V + \sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2 + \Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \Delta b^*|k_M|(\varepsilon+|x_m|)\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon + \Delta b^*|l_M||r|\varepsilon \tag{4.1.12}$$

หมายความว่า $\dot{V} = 0$ เมื่อ $V = V_0 = \frac{|b_M|}{2\alpha}\left(\frac{\sigma_{01}}{\gamma_1}|k_M|^2 + \frac{\sigma_{02}}{\gamma_2}|l_M|^2\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \Delta b^*|k_M|(\varepsilon+|x_m|)\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon + \Delta b^*|l_M||r|\varepsilon\right)$
และถ้า $V \ge V_0$ แล้ว $\dot{V} \le 0$ เพราะฉะนั้น $e, \tilde{k}, \tilde{l} \in L_\infty$ ดังนั้น $u, \dot{k}, \dot{l} \in L_\infty$

จาก (4.1.12) สรุปได้ว่า $\frac{e^2}{|b_M|} + \frac{\tilde{k}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}^2}{\gamma_2}$ ลู่เข้าแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially) สู่เซตตกค้าง (Residual set)

$$D_1 = \Big\{ \frac{e^2}{|b_M|} + \frac{\tilde{k}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}^2}{\gamma_2} \in \Re \;\Big|\; \frac{e^2}{|b_M|} + \frac{\tilde{k}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}^2}{\gamma_2} \le \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sigma_{01}}{\gamma_1}|k_M|^2 + \frac{\sigma_{02}}{\gamma_2}|l_M|^2\right) + \frac{2}{\alpha|b_M|}(\Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \Delta b^*|k_M|(\varepsilon+|x_m|)\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon + \Delta b^*|l_M||r|\varepsilon) \Big\}$$

จะเห็นว่าเซตตกค้างนี้สามารถทำให้เล็กลงได้ด้วยขนาดของพารามิเตอร์ในการออกแบบ ได้แก่ ε, σ_{01}, σ_{02}, γ_1, γ_2

เพื่อพิสูจน์การมีขอบเขตแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยจากเทอม $-\frac{|b_M|}{\gamma_1}\sigma_1(t)\tilde{k}(t)k(t)$ ใน (4.1.9) ซึ่งจะเปลี่ยนเป็น $-\sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}(t)k(t)$ เมื่อ $|e(t)| < \varepsilon$ โดยใช้อสมการต่อไปนี้

$$-\sigma_{01}\frac{|b_M|}{\gamma_1}\tilde{k}k \le -\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}k^2 + \sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$-\sigma_{02}\frac{|b_M|}{\gamma_2}\tilde{l}l \le -\sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}l^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2$$

และ

$$\tilde{a}xe+\tilde{b}u_1e = \tilde{a}xe + \tilde{b}(kx+lr)e = \tilde{a}xe + \tilde{b}kxe + \tilde{b}lre$$
$$\leq \Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*\varepsilon k^2}{2} + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2}l^2 + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon$$

ดังนั้น (4.1.9) จะเปลี่ยนเป็น

$$\dot{V} \leq -(a_m)\varepsilon^2 - (\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1} - \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2})k^2 - (\sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2} - \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2})l^2 + \sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2 +$$
$$\Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon \tag{4.1.13}$$

สำหรับค่าที่เหมาะสมใน (4.1.11) ทำให้ $(\sigma_{0i}\frac{|b_M|}{2\gamma_i} - \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2}) \geq 0,\ I = 1, 2, ...$ โดยการอินทิเกรต (4.1.13) จะได้ว่า

$$\int_t^{t+T}\left((a_m)e^2 + (\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1} - \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2})k^2 + (\sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2} - \frac{\Delta b^*\varepsilon}{2})l^2\right)d\tau \leq [V(t) - V(t+T)] +$$
$$\left[\sigma_{01}\frac{|b_M|}{2\gamma_1}|k_M|^2 + \sigma_{02}\frac{|b_M|}{2\gamma_2}|l_M|^2 + \Delta a^*\varepsilon^2 + \Delta a^*|x_m|\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}(\varepsilon+|x_m|)^2\varepsilon + \frac{\Delta b^*}{2}r^2\varepsilon\right]T$$

การพิสูจน์จะรับประกันได้ว่า $|e(t)| < 1/\varepsilon$ ขณะที่ $t \to \infty$ อีกทั้งยังช่วยลดการโพร่งที่เกิดจากการปรับปรุงรั่วในการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดาแต่ข้อเสียที่เกิดขึ้นตามมาคือ สัญญาณควบคุมจะมีความถี่สูงขึ้นเมื่อระบบมีความไม่แน่นอนเพิ่มขึ้น

กรณีที่ไม่ทราบค่า Δa^* และ Δb^* จึงจำเป็นต้องหากฎการปรับที่เหมาะสมให้ ในที่นี้ $\tilde{a}(t),\ \tilde{b}(t)$ เปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ในขอบเขตจำกัดหนึ่ง ดังนั้นข้อสมมุติที่สมเหตุสมผลคือ $|\tilde{a}(t)| \leq \Delta a^*$ และ $|\tilde{b}(t)| \leq \Delta b^*$ โดย Δa^* และ Δb^* เป็นค่าคงที่บวก การสมมุติขอบเขตบนของความไม่แน่นอนขึ้นกับว่าความไม่แน่นอนนั้นเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ใดบ้าง

เราจะเพิ่มเทอม $\frac{\Delta\tilde{a}(t)^2}{2\beta_1}$ และ $\frac{\Delta\tilde{b}(t)^2}{2\beta_2}$ ลงในฟังก์ชันเลียปูนอฟเดิมโดยที่ $\Delta\tilde{a}(t) = \Delta a(t) - \Delta a^*$ และ $\Delta\tilde{b}(t) = \Delta b(t) - \Delta b^*$ ดังนั้นอนุพันธ์ของ V เทียบกับเวลา t คือ

$$\dot{V} \leq -a_m e(t)^2 - \frac{|b_M|}{\gamma_1}\sigma_1(t)\tilde{k}(t)k(t) - \frac{|b_M|}{\gamma_2}\sigma_2(t)\tilde{l}(t)l(t) + \tilde{a}(t)x(t)e(t) + \tilde{b}(t)u_1(t)e(t) -$$
$$\Delta a(t)|x(t)|e(t)\,\mathrm{sat}(e(t)) - \Delta b(t)|u_1(t)|e(t)\,\mathrm{sat}(e(t)) + \frac{1}{\beta_1}\Delta\tilde{a}(t)\Delta\dot{a}(t) + \frac{1}{\beta_2}\Delta\tilde{b}(t)\Delta\dot{b}(t) \tag{4.1.14}$$

จาก (4.1.14) ทางเลือกสำหรับกฎการปรับคือ

$$\Delta\dot{a}(t) = \beta_1|x(t)|e(t)\,\mathrm{sat}(e(t)) - \sigma_3(t)\Delta a(t) \quad \text{โดย } \Delta a(0) \geq 0,\ \beta_1 > 0 \tag{4.1.15}$$
$$\Delta\dot{b}(t) = \beta_2|u_1(t)|e(t)\,\mathrm{sat}(e(t)) - \sigma_4(t)\Delta b(t) \quad \text{โดย } \Delta b(0) \geq 0,\ \beta_2 > 0 \tag{4.1.16}$$

ข้อสังเกต 4.1

1. ส่วนของสัญญาณควบคุมที่เป็นสวิทชิ่งใช้เฉพาะกับ $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$ เท่านั้นซึ่งแตกต่างจาก [3] ที่ใช้โดยตรงกับพารามิเตอร์ $a(t)$, $b(t)$
2. ถ้าระบบมีจุดทำงานเพียงจุดเดียว ข้อสมมุติที่ว่าจำเป็นต้องทราบขอบเขตบนของ $|\tilde{a}(t)|$, $|\tilde{b}(t)|$ อาจจะทดแทนด้วย $\Delta a(t)$, $\Delta b(t)$ ซึ่งใช้การปรับตัวเองเพื่อหาขอบเขตบนแต่เราไม่สามารถรับประกันได้ว่าค่าที่ได้จะเป็นขอบเขตบนจริงๆขึ้นอยู่กับ ค่าเริ่มต้น อัตราขยายในการปรับ หรือความชันของ $1/\varepsilon$ ที่ใช้มีค่าเป็นเท่าใด อย่างไรก็ตามสำหรับระบบที่เปลี่ยนจุดทำงานบ่อยๆ ถ้าเรายังใช้กฎการปรับเดิมแม้ว่าความคลาดเคลื่อนในการตามจะยังคงทำให้เล็กลงได้เหมือนเดิมแต่สัญญาณควบคุมจะแกว่งมากเพราะว่า $u_2(t)$ มีขนาดเพิ่มขึ้น แต่ถ้าระบบมีการเปลี่ยนจุดทำงานเมื่อเวลาผ่านไปนานๆการแกว่งของ $u_2(t)$ จะค่อยๆลดลง เพราะว่า $\Delta a(t)$ และ $\Delta b(t)$ จะค่อยๆมีขนาดลดลงเมื่อขนาดของ $e(t)$ ลดลงตามสมการที่ 4.1.15 และ 4.1.16
3. จะเห็นว่ากฎการปรับและโครงสร้างที่ใช้ใกล้เคียงกับของการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดา เรายังคงสามารถใช้เทคนิคต่างๆของการควบคุมแบบปรับตัวเองที่มั่นคงได้เพื่อรับประกันความสามารถต่อระบบที่มีการเปลี่ยนจุดทำงานแต่การเปลี่ยนจุดทำงานต้องเกิดขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปนานเพียงพอ
4. เราสามารถแก้ไข σ ให้ต่อเนื่องได้แบบเดียวกับการปรับปรุงซิกมาที่ได้เคยกล่าวไว้ในบทที่ 2
5. สำหรับความไม่แน่นอนอื่นๆที่เป็นการรบกวนทางเข้าดังเช่น [7, 9] เราสามารถจัดการกับมันได้ด้วยวิธีต่อไปนี้
   - ถ้าสัญญาณรบกวนเกิดขึ้นตลอดการทำงาน เราจะเพิ่ม $-u_3(t)$ ดังนั้น $u(t) = u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)$ โดยที่ $u_3(t) = \text{sgn}(b_M)D(t)\,\text{sat}(e(t))$ และ $D(t)$ จะถูกปรับเข้าหาขอบเขตบนของการรบกวนทางเข้า เทคนิคนี้เหมือนกับการควบคุมระบบที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองที่ทางเข้าซึ่งจะได้กล่าวในส่วนท้ายของบทนี้
   - ถ้าระบบมีการรบกวนเพียงชั่วขณะเราควรใช้เทคนิคการการปรับตัวเองที่มั่นคง (Robust adaptive technique) กับ $u_1(t)$ เพื่อที่จะลดการใช้ส่วนที่เป็นสวิตชิงโดยไม่จำเป็น

4.2 การควบคุมแบบปรับตัวเองสำหรับระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา

จุดประสงค์ของส่วนนี้เพื่อการขยายผลจากระบบอันดับหนึ่งไปเป็นระบบอันดับ n ที่อยู่ในรูปทั่วไป สมมุติระบบที่ถูกควบคุมอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) = \left(A_M + \tilde{A}(t)\right)y(t) + \left(B_M + \tilde{B}(t)\right)u(t) \tag{4.2.1}$$

โดยที่ $A(t) \in \Re^{n\times n}$ และ $B(t) \in \Re^{n\times q}$ เป็นพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าที่แปรตามเวลาและ $(A(t), B(t))$ ควบคุมได้ (Controllable) เมทริกซ์ A_M, B_M เป็นค่าคงที่ในนามของ $A(t)$, $B(t)$ และ

$$|\tilde{A}(t)| \le \Delta A^*, \quad |\tilde{B}(t)| \le \Delta B^*$$

เครื่องหมาย ≤ ให้เทียบจากสมาชิกที่ตำแหน่งเดียวกัน

โดย ΔA^*, ΔB^* เป็นเมทริกซ์คงที่ซึ่งมีสมาชิกมากกว่าศูนย์และ $|\tilde{A}(t)|$ แทน $\left\{\left|\tilde{a}_{ij}(t)\right|\right\}$ ของเมทริกซ์ $\tilde{A}(t)=\left\{\tilde{a}_{ij}(t)\right\}$ แบบจำลองอ้างอิงกำหนดด้วยระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาต่อไปนี้

$$\dot{y}_m(t) = A_m y_m(t) + B_m r(t) \tag{4.2.2}$$

โดยที่ $A_m \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์เสถียรและ $B_m \in \Re^{n\times q}$ สัญญาณควบคุมจะถูกปรับปรุงคล้ายๆกับในระบบอันดับหนึ่งคือ

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) \tag{4.2.3}$$

โดย

$$u_1(t) = -K(t)y(t) + L(t)r(t) \tag{4.2.4}$$

$$u_2(t) = \mathrm{sgn}(l)L_s(t)R(t)\Big(\Delta A(t)|y(t)| + \Delta B(t)|u_1(t)|\Big) \tag{4.2.5}$$

และ $K(t) \in \Re^{q\times n}$, $L(t), L_s(t) \in \Re^{q\times q}$, $R(t) \in \Re^{q\times n}$ จุดประสงค์ของเราก็คือหากฎการปรับพารามิเตอร์ใน (4.2.4) และหาโครงสร้างที่เหมาะสมของ $L_S(t)$, $R(t)$ ใน (4.2.5)

สมมุติว่า $P = P^T > 0$ เป็นไปตามสมการเลียปูนอฟ $PA_m + A_m^T P = -Q$ สำหรับบาง $Q = Q^T > 0$ $L_M^{-1} = \Gamma\,\mathrm{sgn}(l)$, $l = 1$ ถ้า $L_M > 0$ และ $l = -1$ ถ้า $L_M < 0$ โดย L_M เป็นบวกแน่นอน (Positive definite) หรือลบแน่นอน (Negative definite) ได้เท่านั้น

พารามิเตอร์ที่ต้องการของตัวควบคุมได้จากเงื่อนไขเท่าเทียม (Matching condition) ต่อไปนี้

$$A_M - A_m = B_M K_M \qquad \text{และ} \qquad B_m = B_M L_M \tag{4.2.6}$$

โดยที่ K_M; L_M แทนพารามิเตอร์ที่ต้องการ เงื่อนไขเท่าเทียมเดิมของระบบคือ

$$A - A_m = BK^* \qquad \text{และ} \qquad B_m = BL^* \tag{4.2.7}$$

ข้อสมมุติต่างๆยังคงเหมือนกับการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดา ด้วยโครงสร้างดังที่กล่าวมาแล้วสามารถเขียนสมการความคลาดเคลื่อนในการตามได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \left(A_M y(t) + B_M u_1(t)\right) - \left(A_m y_m(t) + B_m r(t)\right) + \tilde{A}(t)y(t) + \tilde{B}(t)u(t) - B_M u_2(t)\\ &= A_m e(t) - B_M \tilde{K}(t)x(t) + B_M \tilde{L}(t)r(t) + \tilde{A}(t)y(t) + \tilde{B}(t)u(t) - B_M u_2(t)\end{aligned}$$

โดย $e(t) = y(t) - y_m(t)$, $\tilde{K}(t) = K(t) - K_M$ และ $\tilde{L}(t) = L(t) - L_M$

เสถียรภาพและกฎการปรับได้มาจากฟังก์ชันเลียปูนอฟต่อไปนี้

$$V = \frac{1}{2}e(t)^T P\, e(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{K}(t)^T \Gamma \tilde{K}(t)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{L}^T(t)\Gamma\tilde{L}(t)\right) +$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{A}(t)^T S_1^{-1}\Delta\tilde{A}(t)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{B}(t)^T S_2^{-1}\Delta\tilde{B}(t)\right)$$

โดย $\Delta\tilde{A}(t) = \Delta A(t) - \Delta A^*$, $\Delta\tilde{B}(t) = \Delta B(t) - \Delta B^*$ และ S_1, S_2 เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ดังนั้น

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e(t)^T Qe(t) - \mathrm{tr}\left(\tilde{K}(t)^T \Gamma B_m^T Pe(t)y(t)^T\right)\mathrm{sgn}(l) + \mathrm{tr}\left(\tilde{L}(t)^T \Gamma B_m^T Pe(t)r(t)^T\right)\mathrm{sgn}(l) +$$
$$\mathrm{tr}\left(\tilde{K}(t)^T \Gamma \dot{\tilde{K}}(t)\right) + \mathrm{tr}\left(\tilde{L}(t)^T \Gamma \dot{\tilde{L}}(t)\right) + e(t)^T P\tilde{A}(t)y(t) + e(t)^T P\tilde{B}(t)u(t) -$$
$$e(t)^T PB_m \Gamma L_S(t)R(t)\left(\Delta A(t)|y(t)| + \Delta B(t)|u_1(t)|\right)\mathrm{sgn}(l) + \tag{4.2.8}$$
$$\mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{A}(t)^T S_1^{-1}\Delta\dot{\tilde{A}}(t)\right) + \mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{B}(t)^T S_2^{-1}\Delta\dot{\tilde{B}}(t)\right)$$

ถ้าเลือกกฎการปรับ

$$\dot{K}(t) = B_m^T Pe(t)y(t)^T \mathrm{sgn}(l) - \sigma_1(t)K(t) \tag{4.2.9}$$

$$\dot{L}(t) = -\sigma_2(t)L(t) - B_m^T Pe(t)\left[r(t)^T - \left(\Delta A|y(t)| + \Delta B|u_1(t)|\right)^T R(t)^T\right]\mathrm{sgn}(l) \tag{4.2.10}$$

$$\Delta\dot{A}(t) = S_1\left(R(t)^T B_m^T Pe(t)|y(t)|^T - \sigma_3(t)\Delta A(t)\right) \tag{4.2.11}$$

$$\Delta\dot{B}(t) = S_2\left(R(t)^T B_m^T Pe(t)|u_1(t)|^T - \sigma_4(t)\Delta B(t)\right) \tag{4.2.12}$$

โดย $\Delta a_{ij}(0) \geq 0, \quad \Delta b_{ij}(0) \geq 0$

แทน (4.2.9) ถึง (4.2.12) ลงไปจะได้

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e(t)^T Q\, e(t) - \mathrm{tr}\left(\tilde{K}(t)^T \Gamma\sigma_1(t)K(t)\right) - \mathrm{tr}\left(+\tilde{L}(t)^T \Gamma\sigma_2(t)L(t)\right) - \mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{A}(t)^T \sigma_3(t)\Delta A(t)\right) -$$
$$\mathrm{tr}\left(\Delta\tilde{B}(t)^T \sigma_4(t)\Delta B(t)\right) + e(t)^T P\tilde{A}(t)y(t) + e(t)^T P\tilde{B}(t)u(t) -$$
$$e(t)^T PB_m R(t)\left(\Delta A^*|y(t)| + \Delta B^*|u_1(t)|\right) +$$
$$e(t)^T PB_m \Gamma\left(L(t)\,\mathrm{sgn}(l) - L_S(t)\right)R(t)\left(\Delta A(t)|y(t)| + \Delta B(t)|u_1(t)|\right) \tag{4.2.13}$$

สิ่งที่เราต้องการคือทำให้ (4.2.13) < 0 ในห้าเทอมแรกของ (4.2.13) มีลักษณะเดียวกับในระบบอันดับหนึ่งซึ่งไม่เป็นปัญหา ดังนั้นจึงพิจารณาเฉพาะเทอมที่เหลือดังนี้

$$e(t)^T P\tilde{A}(t)y(t) + e(t)^T P\tilde{B}(t)u(t) - e(t)^T PB_m R(t)\left(\Delta A^*|y(t)| + \Delta B^*|u_1(t)|\right) +$$
$$e(t)^T PB_m \Gamma\left(L(t)\,\mathrm{sgn}(l) - L_S(t)\right)R(t)\left(\Delta A(t)|y(t)| + \Delta B(t)|u_1(t)|\right) \tag{4.2.14}$$

การที่จะทำให้ (4.2.14) < 0 ได้ก็ด้วยการหาโครงสร้างที่เหมาะสมของ $L_S(t)$ และ $R(t)$

<u>กรณีที่ 1</u> ในขั้นแรกเราลองมาพิจารณาระบบสัญญาณเข้าเดี่ยว (Single input, SI) ที่มีเมทริกซ์ $A(t)$ และ $B(t)$ อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A_m, B_m ซึ่งสอดคล้องกับระบบ คือ

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ด้วยการเลือก

$$R(t) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots\ldots & 0 & \dfrac{\text{sat}(s(t))}{b_m} \end{bmatrix}, \quad L_s(t) = |L(t)|, \quad s(t) = e(t)^T \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, \quad P_3 \in \Re, \quad \sigma_i(t) = \begin{cases} 0, & |s(t)| \geq \varepsilon \\ \sigma_{0i}, & |s(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

โดยที่ $\sigma_{0i} > 0$ เป็นค่าคงที่เล็กๆ เพื่อลดความยุ่งยาก $\sigma_i(t)$ จะถูกเลือกเป็นสเกลาร์ ด้วยตัวเลือกที่นำเสนอจะทำให้ (4.2.14) < 0 เมื่อ $|s(t)| \geq \varepsilon$ และ V มีขอบเขตเมื่อ $|s(t)| < \varepsilon$

ข้อสมมุติ 1 เครื่องหมายของ $b(t)$ คงที่ตลอดเวลา t

ด้วยข้อสมมุติและรูปแบบที่พิจารณาในกรณีที่ 1 สำหรับสัญญาณอ้างอิงมีขอบเขต $r(t)$ ซึ่งต่อเนื่องแบบเป็นช่วงๆ ด้วยการพิสูจน์แบบเดียวกับระบบอันดับหนึ่งจะรับประกันได้ว่าทุกๆสัญญาณในระบบวงปิดจะมีขอบเขตและความคลาดเคลื่อนในการตามจะลดลง ขนาดของความคลาดเคลื่อนสามารถถูกทำให้ลดลงได้ด้วยขนาดของพารามิเตอร์ในการออกแบบ

<u>กรณีที่ 2</u> สำหรับระบบสัญญาณเข้าเดี่ยวที่มีเมทริกซ์ $A(t)$ และ $B(t)$ อยู่ในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_i(t)$, $b_i(t)$ เป็นพารามิเตอร์มีขอบเขตที่แปรตามเวลาซึ่งเปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ในเซตกระชับ

เมทริกซ์ A_m และ B_m มีรูปแบบดังนี้

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} \\ a_{m3} & a_{m4} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B_m = \begin{bmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \end{bmatrix}$$

เรากำหนดให้ $e(t)^T = \begin{bmatrix} e_1^T(t) & e_2(t) \end{bmatrix}$, $y(t)^T = \begin{bmatrix} y_1^T(t) & y_2(t) \end{bmatrix}$,

$$\widetilde{A}(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_1(t) & \widetilde{a}_2(t) \\ \widetilde{a}_3(t) & \widetilde{a}_4(t) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1(t) \\ \widetilde{b}_2(t) \end{bmatrix}, \quad P \text{ เหมือนในกรณีที่ 1}$$

$$\Delta A^* = \begin{bmatrix} \Delta a_1^* & \Delta a_2^* \\ \Delta a_3^* & \Delta a_4^* \end{bmatrix}, \quad \Delta B^* = \begin{bmatrix} \Delta b_1^* \\ \Delta b_2^* \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} R_1(t) & R_2(t) \end{bmatrix}, \quad L_s(t) = |L(t)|$$

โดยที่ $a_4(t)$, $b_2(t)$, a_{m4}, b_{m2},....., $R_2(t) \in \Re$, $|\widetilde{a}_i(t)| \leq \Delta a_i^*$, $|\widetilde{b}_i(t)| \leq \Delta b_i^*$, $i = 1,2,\ldots$

พิจารณาเทอมต่างๆใน (4.2.14) คือ

$$e^T P(\widetilde{A}y + \widetilde{B}u) = e^T P(\widetilde{A}y + \widetilde{B}u_1) - e^T P(\widetilde{B}u_2) \tag{4.2.15}$$

และ $$-e^T PB_m R\left(\Delta A^*|y| + \Delta B^*|u_1|\right) \tag{4.2.16}$$

และ $$e^T PB_m \Gamma\left(L\,\mathrm{sgn}(l) - L_s\right) R\left(\Delta A|y| + \Delta B|u_1|\right) \tag{4.2.17}$$

เทอมแรกของ (4.2.15)

$$e^T P\left(\widetilde{A}y + \widetilde{B}u_1\right) = \left(e_1^T P_1 + e_2 P_2^T\right)\left(\widetilde{a}_1 y_1 + \widetilde{a}_2 y_2 + \widetilde{b}_1 u_1\right) + \left(e_1^T P_2 + e_2 P_3\right)\left(\widetilde{a}_3 y_1 + \widetilde{a}_4 y_2 + \widetilde{b}_2 u_1\right) \tag{4.2.18}$$

เทอมที่สองของ (4.2.15)

$$-e^T P\left(\widetilde{B}u_2\right) = -\left(e_1^T P_2 + e_2 P_3\right)\widetilde{b}_1 u_2 - \left(e_1^T P_2 + e_2 P_3\right)\widetilde{b}_2 u_2 \tag{4.2.19}$$

จาก (4.2.16)

$$-sR_1\left(\Delta a_1^*|y_1| + \Delta a_2^*|y_2| + \Delta b_1^*|u_1|\right) - sR_2\left(\Delta a_3^*|y_1| + \Delta a_4^*|y_2| + \Delta b_2^*|u_1|\right) \tag{4.2.20}$$

โดย

$$s = \left(e_1^T P_1 + e_2 P_2^T\right)b_{m1} + \left(e_1^T P_2 + e_2 P_3\right)b_{m2} \tag{4.2.21}$$

บทตั้ง 4.1: ให้ g_i และ μ เป็นค่าคงที่บวก ถ้า $s(t) \in \Re$ แล้ว

$$1 \le \frac{\left(g_i + 1\right)s(t)\,\mathrm{sat}(s(t))}{g_i s(t)\,\mathrm{sat}(s(t)) + \mu} < 1 + \frac{1}{g_i}, \qquad |s(t)| \ge \mu$$

และจะถูกแทนด้วย

$$0 \le \frac{\left(g_i + 1\right)\frac{1}{\varepsilon}s(t)^2}{g_i \frac{1}{\varepsilon}s(t)^2 + \mu} < 1, \qquad |s(t)| < \mu$$

ด้วยโครงสร้างของตัวควบคุม (4.2.3) เรายังไม่สามารถทำให้ (4.2.19) < 0 ได้เหมือนกับกรณีที่ 1 ถ้าพิจารณาในกรณีที่ $\widetilde{b}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ หรือเมทริกซ์ B คงที่ จาก (4.2.17), (4.2.18), (4.2.20) และบทตั้ง 4.1 ถ้าเรายังต้องการให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพทางเลือกหนึ่ง คือ $L_s(t) = |L(t)|$

$$R_1 = \frac{\left(g_1 + 1\right)\mathrm{sat}(s)}{\left(g_1 s\right)\mathrm{sat}(s) + \mu}\left|e_1^T P_1 + e_2 P_2^T\right|, \qquad R_2 = \frac{\left(g_2 + 1\right)\mathrm{sat}(s)}{\left(g_2 s\right)\mathrm{sat}(s) + \mu}\left|e_1^T P_2 + e_2 P_3\right| \tag{4.2.22}$$

เพื่อความสะดวกในที่นี้จะเลือก $\mu = \varepsilon$ จากตัวเลือก $R_1(t)$ และ $R_2(t)$ จะบอกได้ว่าเมื่อ $|s(t)| \ge \varepsilon$, $\dot{V} \le 0$ และ V มีขอบเขตเมื่อ $|s(t)| < \varepsilon$ นั่นคือ V จะลดลงไปเรื่อยๆจนกว่า $|s(t)| < \varepsilon$ แต่การที่ $|s(t)| < \varepsilon$ ไม่ได้หมายความว่าความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)$ จะลดลงด้วยหรือเมื่อขนาดของ $s(t)$ ใน (4.2.21) ลดลงแต่ขนาดของพจน์ที่คูณอยู่กับความไม่แน่นอน (ส่วนที่แปรตามเวลา) คือ $e_1^T P_1 + e_2 P_2^T$ และ

$e_1^T P_2 + e_2 P_3$ ใน (4.2.18) อาจจะไม่ลดลงตามไปด้วย ซึ่งในกรณีของระบบหลายสัญญาณเข้า (Multi input, MI) ก็ประสบปัญหาในลักษณะเดียวกัน ยกตัวอย่างเช่น เราทดลองใช้โครงสร้างนี้ควบคุมแบบจำลองเครื่องบิน [5] ซึ่งเป็นระบบที่แปรตามเวลา 4 สัญญาณออก 3 สัญญาณเข้า ผลที่ได้จากการจำลองพบว่ามีเพียง 2 สัญญาณออกเท่านั้นที่สามารถตามแบบจำลองได้

ดังนั้นการควบคุมระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลารูปทั่วๆไปซึ่งมีทุกๆสมาชิกของเมทริกซ์ $A(t)$ และ $B(t)$ แปรตามเวลาด้วยวิธีการที่ได้นำเสนอยังคงมีปัญหาบางประการได้แก่

- เงื่อนไขเท่าเทียม (4.2.6) และ (4.2.7) นั้นค่อนข้างจะเป็นไปได้ยากสำหรับระบบแปรตามเวลาซึ่งมีพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ในเซตกระชับ
- ถ้าเงื่อนไขเท่าเทียมของระบบเริ่มแรก (4.2.7) ถูกละเมิดเฉพาะเมทริกซ์ A แต่เงื่อนไข (4.2.6) ยังรักษาไว้ได้ (Unmatched parametric problem) สำหรับกรณีที่เมทริกซ์ B คงที่ เราจะสามารถทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพอยู่ได้แต่ไม่สามารถบอกได้ว่าความคลาดเคลื่อนในการตามจะลดลงไปมากเพียงใดนอกเสียจากว่าจะสามารถหา $s(t) = Ge(t)$ ที่เหมาะสมซึ่งมีคุณสมบัติที่ว่าเมื่อขนาดของ $s(t)$ ลดลงแล้วขนาดของ $e(t)$ จะลดลงด้วยหรือ (4.2.7) ถูกละเมิดเพียงชั่วขณะซึ่งเป็นปัญหาในลักษณะเดียวกับ [29] ด้วยโครงสร้างของตัวควบคุมที่นำเสนอทำให้ระบบวงปิดยังคงมีเสถียรภาพเมื่อเงื่อนไขเท่าเทียม (4.2.7) ถูกละเมิดและ $x_p \to x_m$ เมื่อระบบตรงตามเงื่อนไขเท่าเทียม (ไม่ใช่ $x_c \to x_m$)
- ในกรณีของระบบหลายสัญญาณเข้า จำนวนพื้นผิวสวิตชิงควรจะเท่ากับจำนวนสัญญาณเข้าแต่ในโครงสร้างนี้ยังคงใช้เพียงพื้นผิวเดียวซึ่งทำให้การพิสูจน์ทำได้เฉพาะกรณีที่ L^* ใน (4.2.7) เป็นบวกแน่นอนหรือลบแน่นอนอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

แม้ว่าเราจะยังคงไม่สามารถใช้โครงสร้างที่นำเสนอกับระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลาในรูปทั่วไปได้แต่ในกรณีที่ระบบมีลักษณะเฉพาะ เช่น สมาชิกบางตัวคงที่ หรือ ส่วนที่แปรตามเวลาบางค่าแปรตามเวลาด้วยฟังก์เดียวกันเราอาจหาโครงสร้างที่เหมาะสมของ $L_S(t)$ และ $R(t)$ ซึ่งทำให้ (4.2.14) < 0 ได้ ซึ่งคุณลักษณะนี้จะถูกนำไปใช้ในระบบไม่แปรตามเวลาที่มีเขตไร้ผลสนองแปรตามเวลา

4.3 การควบคุมแบบปรับตัวเองสำหรับระบบที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าที่แปรตามเวลา

ใน [11, 12, 23] ได้เสนอการควบคุมแบบปรับตัวเองกับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าโดยอาศัย *ส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง* (Adaptive dead-zone inverse, ADI) แนวคิดหลักของส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง คือ การคาดเดาพารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสนองแล้วนำพารามิเตอร์ที่ได้มาสร้างฟังก์ชันผกผันของมันดังที่ได้เคยกล่าวไว้แล้วในส่วนที่ 3.2 วิธีการนี้จะมีปัญหาเมื่อพารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสนองแปรตามเวลาและพารามิเตอร์คาดเดาที่ได้ก็ไม่แน่ว่าจะเป็นค่าจริง ดังนั้นจุดประสงค์ของส่วนนี้คือเสนอวิธีการอื่นซึ่งไม่ต้องอาศัยการคาดเดาพารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสนองโดยตรง เมื่อวิเคราะห์ต่อไปจะพบว่าตัวควบคุมนี้ยังคงทำให้การควบคุมบรรลุจุดประสงค์ได้เมื่อระบบมีการรบกวนทางเข้าที่มีขอบเขต เพราะเขตไร้ผลสนองที่ทางเข้าถือได้ว่าเป็นการรบกวนทางเข้าชนิดหนึ่งซึ่งรบกวนระบบเชิงเส้นอยู่ตลอดเวลา

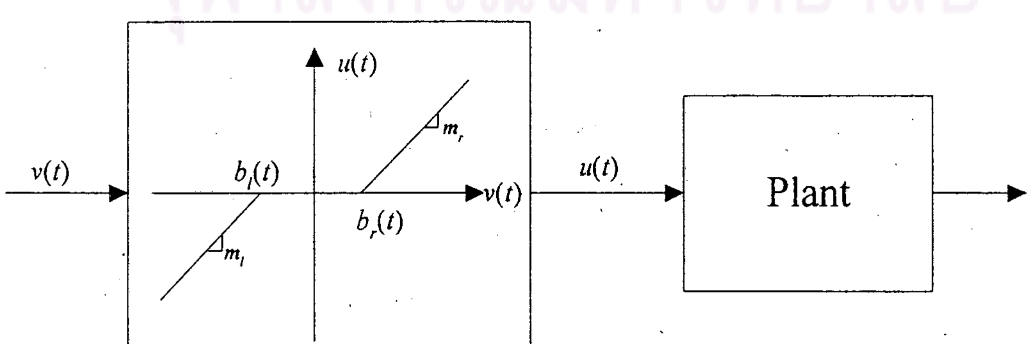
ระบบเชิงเส้นที่ถูกนำมาพิจารณาบรรยายได้ด้วยสมการ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{4.3.1}$$

โดยที่ $A \in \Re^{n\times n}$, $b \in \Re^{n\times 1}$ เป็นเมทริกซ์คงที่ไม่ทราบค่า $x(t)$ วัดได้และ $u(t)$ เป็นสัญญาณออกของเขตไร้ผลสนองที่บรรยายได้ด้วย (ดูรูปที่ 4.2)

$$u(t) = \begin{cases} m_r(v(t) - b_r(t)), & v(t) \geq b_r(t) \\ 0, & b_l(t) < v(t) < b_r(t) \\ m_l(v(t) - b_l(t)), & v(t) \leq b_l(t) \end{cases} \tag{4.3.2}$$

โดย $b_r(t) \geq 0$ และ $b_l(t) \leq 0$, m_r และ $m_l > 0$ สัญญาณออกของเขตไร้ผลสนอง $u(t)$ ไม่สามารถวัดได้



รูปที่ 4.2 ระบบที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนอง

ให้แบบจำลองอ้างอิงบรรยายได้ด้วย

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m r(t) \qquad (4.3.3)$$

โดยที่ $A_m \in \Re^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์เสถียร สัญญาณควบคุมถูกปรับปรุงได้ดังนี้

สำหรับ $m_r = m_l = m$

$$v(t) = u_1(t) - u_3(t) \qquad (4.3.4)$$

โดย $u_1(t) = -K(t)x(t) + l(t)r(t),\quad u_3(t) = \delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)$

สำหรับ $m_r \neq m_l$ หรือความชันแปรตามเวลา $m(t)$ โดย $0 < m(t) < \infty$

$$v(t) = u_1(t) - u_3(t) - u_4(t) \qquad (4.3.5)$$

โดย $u_4(t) = \Delta m(t)\left|u_1(t)\right|\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)$, $s(t) = e(t)^T Pb_m$ $\delta(t)$ ใน (4.3.4) เป็นพารามิเตอร์ที่ปรับเข้าหาขอบเขตบนของ $b_r(t)$ และ $b_l(t)$ แต่ $\delta(t)$ ใน (4.3.5) เป็นพารามิเตอร์ที่ปรับเข้าหาขอบเขตบนของ $b_r(t)\left(1+\tilde{m}/m_M\right)$ และ $b_l(t)\left(1+\tilde{m}/m_M\right)$ $m(t) = m_M + \tilde{m}(t)$ $\Delta m(t)$ ปรับเข้าหาขอบเขตบนของ $\tilde{m}(t)/m_M$

ด้วยโครงสร้างของตัวควบคุมแรก (4.3.4) สามารถเขียนสมการความคลาดเคลื่อนแบ่งได้เป็นกรณีย่อยๆดังต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1</u> $v(t) \geq b_r(t),\quad e(t) = x(t) - x_m(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= Ax(t) + bu(t) - A_m x_m(t) - b_m r(t)\\
&= A_m\left(x(t) - x_m(t)\right) + \left(A - A_m\right)x(t) + bu(t) - b_m r(t)\\
&= A_m e(t) + \left(A - A_m - bmK(t)\right)x(t) + \left(bml(t) - b_m\right)r(t) - bmb_r(t) - bm\delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)\\
&= A_m e(t) - bm\tilde{K}(t)x(t) + bm\tilde{l}(t)r(t) - bmb_r(t) - bm\delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)
\end{aligned} \qquad (4.3.6)$$

<u>กรณีที่ 2</u> $v(t) \leq b_l(t)$

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) - bm\tilde{K}(t)x(t) + bm\tilde{l}(t)r(t) - bmb(t) - bm\delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*) \qquad (4.3.7)$$

<u>กรณีที่ 3</u> $b_l(t) < v(t) < b_r(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= Ax(t) - A_m x_m(t) - b_m r(t) + A_m x(t) - A_m x(t) + bml(t)r(t) - bml(t)r(t)\\
&= A_m\left(x(t) - x_m(t)\right) + \left(A - A_m\right)x(t) + \left(bml(t) - b_m\right)r(t) + bm\left(-l(t)r(t)\right)\\
&= A_m\left(x(t) - x_m(t)\right) + \left(A - A_m\right)x(t) + \left(bml(t) - b_m\right)r(t) - bmK(t)x(t) -\\
&\quad bmv(t) - bm\delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)\\
&= A_m e(t) - bm\tilde{K}(t)x(t) + bm\tilde{l}(t)r(t) - bmv(t) - bm\delta(t)\,\mathrm{sat}(s(t))\,\mathrm{sgn}(l^*)
\end{aligned} \qquad (4.3.8)$$

โดยที่ $\tilde{K}(t) = K(t) - K^*,\ \tilde{l}(t) = l(t) - l^*$

ถ้าความชันของเขตไร้ผลสนองเท่ากัน จากตัวควบคุม (4.3.4) สมการความคลาดเคลื่อน (4.3.6) ถึง (4.3.8) เลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟดังต่อไปนี้

$$V = \frac{1}{2}e^T Pe + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{K}^T \Gamma \tilde{K}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{l}^T \Gamma \tilde{l}\right) + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\frac{\tilde{\delta}^2}{2\gamma}$$

โดย $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) - \delta^*$, δ^* แทนขอบเขตบนของ $b_r(t)$, $b_l(t)$ ซึ่งเป็นค่าคงที่บวก เงื่อนไขเท่าเทียม คือ $A - A_m = bmK^*$ และ $b_m = bml^*$ สัญลักษณ์ต่างๆ เช่น $\Gamma = (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)$ หรือ $\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{l}^T \Gamma \tilde{l}\right) = \frac{1}{2}\Gamma \tilde{l}^2$ แต่ที่ยังคงใช้รูปแบบเดียวกับส่วนที่ 4.2 ก็เพื่อให้สมการต่างๆมีรูปแบบใกล้เคียงกัน

ดังนั้นกฎการปรับที่เหมาะสม คือ

$$\dot{K}(t) = b_m^T Pe(t)x(t)^T\,\mathrm{sgn}(l^*) - \sigma_1(t)K(t) \qquad (4.3.9)$$

$$\dot{l}(t) = -b_m^T Pe(t)r(t)\,\mathrm{sgn}(l^*) - \sigma_2(t)l(t) \qquad (4.3.10)$$

$$\dot{\delta}(t) = \gamma\, e(t)^T Pb_m\,\mathrm{sat}(s(t)) - \sigma_3(t)\delta(t) \qquad (4.3.11)$$

โดย $\delta(0) \geq 0$, γ เป็นค่าคงที่บวก และ $\sigma_i(t)$ เหมือนกับส่วนที่ 4.2

การวิเคราะห์ตัวควบคุม (4.3.4) และกฎการปรับ (4.3.9) ถึง (4.3.11) เราสามารถแสดงได้ว่าฟังก์ชันเลียปูนอฟถูกทำให้ลดลงได้ด้วยตัวแปรในการออกแบบ

อนุพันธ์ของ V เทียบกับเวลาคือ

$$\dot{V} = e^T P\dot{e} + \mathrm{tr}\left(\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}}\right) + \mathrm{tr}\left(\tilde{l}^T \Gamma \dot{\tilde{l}}\right) + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\frac{\tilde{\delta}\dot{\delta}}{\gamma}$$

ขณะที่ $|s(t)| \geq \varepsilon$

พิจารณา $\dot{V}$ ได้เป็น 3 กรณีตามสมการความคลาดเคลื่อน (4.3.6) ถึง (4.3.8)

<u>กรณีที่ 1</u> $v(t) \geq b_r(t)$, $e(t) = x(t) - x_m(t)$

$$\begin{aligned}
e^T P\dot{e} &= e^T PA_m e - e^T Pbm\tilde{K}x + e^T Pbm\tilde{l}r - e^T Pbmb_r - e^T Pbm\delta\,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*) \\
&= -\frac{1}{2}e^T Qe - e^T Pb_m(l^*)^{-1}\tilde{K}x + e^T Pb_m(l^*)^{-1}\tilde{l}r - e^T Pb_m(l^*)^{-1}b_r - e^T Pb_m(l^*)^{-1}\delta\,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*) \\
&= -\frac{1}{2}e^T Qe - \left[x^T\tilde{K}^T\Gamma b_m^T Pe\right]\mathrm{sgn}(l^*) + \left[r\tilde{L}^T\Gamma b_m^T Pe\right]\mathrm{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m b_r - \\
&\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m\delta\,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*) \\
&= -\frac{1}{2}e^T Qe - \mathrm{tr}\left[\tilde{K}^T\Gamma b_m^T Pex^T\right]\mathrm{sgn}(l^*) + \mathrm{tr}\left[\tilde{l}^T\Gamma b_m^T Per\right]\mathrm{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m b_r - \\
&\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m\delta\,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*)
\end{aligned} \qquad (4.3.12)$$

<u>กรณีที่ 2</u> $v(t) \leq b_l(t)$

$$\begin{aligned}
e^T P\dot{e} &= -\frac{1}{2}e^T Qe - \mathrm{tr}\left[\tilde{K}^T\Gamma b_m^T Pex^T\right]\mathrm{sgn}(l^*) + \mathrm{tr}\left[\tilde{l}^T\Gamma b_m^T Per\right]\mathrm{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m b_l - \\
&\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m\delta\,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*)
\end{aligned} \qquad (4.3.13)$$

กรณีที่ 3 $\quad b_l(t) < v(t) < b_r(t)$

$$e^T P\dot{e} = -\frac{1}{2}e^T Qe - \mathrm{tr}\left[\widetilde{K}^T \Gamma b_m^T Pex^T\right]\mathrm{sgn}(l^*) + \mathrm{tr}\left[\widetilde{l}^T \Gamma b_m^T Per\right]\mathrm{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1} e^T Pb_m v - (l^*)^{-1} e^T Pb_m \delta \,\mathrm{sat}(s)\,\mathrm{sgn}(l^*) \tag{4.3.14}$$

ทำให้

$$\dot{V} = (4.3.12) \text{ หรือ } (4.3.13) \text{ หรือ } (4.3.14) + \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \dot{\widetilde{K}}\right) + \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \dot{\widetilde{l}}\right) + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\frac{\widetilde{\delta}\dot{\delta}}{\gamma} \tag{4.3.15}$$

เมื่อแทนกฎการปรับ 4.3.9 ถึง 4.3.11 ลงไปทำให้ (4.3.15) < 0

ขณะที่ $|s(t)| < \varepsilon$ การวิเคราะห์จะมีลักษณะคล้ายกับในส่วนที่ 4.2 คือการแสดงว่าฟังก์ชันเลียปูนอฟมีขอบเขต

$$\dot{V} = (4.3.12) \text{ หรือ } (4.3.13) \text{ หรือ } (4.3.14) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \sigma_{01} K\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \sigma_{02} l\right) - (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{\widetilde{\delta}\delta}{\gamma} \tag{4.3.16}$$

จากนั้นจะเริ่มพิจารณาเป็นกรณีย่อยๆเหมือนเดิมเริ่มจากกรณีที่ 1 (4.3.12) และ (4.3.16) จะได้ว่า

$$\dot{V} \le -\alpha V + \alpha V - \frac{1}{2}e^T Qe - (l^*)^{-1} e^T Pb_m b_r - \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \sigma_{01} K\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \sigma_{02} l\right) - (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{\widetilde{\delta}\delta}{\gamma}$$

แทน $K = \widetilde{K} + K^*, \quad l = \widetilde{l} + l^*, \quad \delta = \widetilde{\delta} + \delta^*$

$$\dot{V} \le -\alpha V + \alpha V - \frac{1}{2}e^T Qe + \left|(l^*)^{-1} b_r\right| |e^T Pb_m| - \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \sigma_{01} \widetilde{K}\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \sigma_{01} K^*\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \sigma_{02} \widetilde{l}\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \sigma_{02} l^*\right) - (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{\widetilde{\delta}^2}{2\gamma} + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{(\delta^*)^2}{2\gamma}$$

$$\le -\alpha V + \alpha V - \frac{1}{2}e^T Qe + \left|(l^*)^{-1} b_r\right| |s| - \mathrm{tr}\left(\widetilde{K}^T \Gamma \sigma_{01} \widetilde{K}\right) + \mathrm{tr}\left(\left|\widetilde{K}\right|^T \Gamma \sigma_{01} \left|K^*\right|\right) - \mathrm{tr}\left(\widetilde{l}^T \Gamma \sigma_{02} \widetilde{l}\right) + \mathrm{tr}\left(\left|\widetilde{l}\right|^T \Gamma \sigma_{02} \left|l^*\right|\right) - (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{\widetilde{\delta}^2}{2\gamma} + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{(\delta^*)^2}{2\gamma}$$

พิจารณา $\quad \mathrm{tr}\left(\left|\widetilde{K}\right|^T \Gamma \sigma_{01} \left|K^*\right|\right) = \Gamma \sigma_{01} \left|K^*\right| \left|\widetilde{K}\right|^T \le \Gamma \sigma_{01}\left(\frac{K^* K^{*T}}{2} + \frac{\widetilde{K}\widetilde{K}^T}{2}\right)$

ดังนั้น $\quad \mathrm{tr}\left(\left|\widetilde{K}\right|^T \Gamma \sigma_{01} \left|K^*\right|\right) \le \left(\frac{K^* \Gamma \sigma_{01} K^{*T}}{2}\right) + \left(\frac{\widetilde{K}\,\Gamma \sigma_{01} \widetilde{K}^T}{2}\right)$

โดยใช้คุณสมบัตินี้กับทุกเทอมที่คล้ายกันจะได้

$$\dot{V} \le -\alpha V + \alpha V - \frac{1}{2}e^T Qe + \left|(l^*)^{-1} b_r\right| \ \varepsilon \ - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{K}^T \Gamma\sigma_{01}\tilde{K}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(K^{*T}\Gamma\sigma_{01}K^*\right) -$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{l}^T\Gamma\sigma_{02}\tilde{l}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(l^{*T}\Gamma\sigma_{02}l^*\right) - (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{\tilde{\delta}^2}{2\gamma} + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{(\delta^*)^2}{2\gamma}$$

หลังจากแทน V ลงไป สำหรับค่า $\alpha > 0$ ที่เหมาะสมซึ่งมีอยู่แน่นอน คือ

$$Q - \alpha P \ge 0, \quad \Gamma\sigma_{01} - \alpha\Gamma \ge 0, \quad \Gamma\sigma_{02} - \alpha\Gamma \ge 0, \quad \sigma_{03} - \alpha \ge 0$$

เราจึงสามารถหา V_{01} ซึ่งเมื่อ $V \ge V_{01}$ แล้ว $\dot{V} \le 0$ โดย

$$V_{01} = \frac{1}{\alpha}\left\{\left|(l^*)^{-1} b_r\right| \ \varepsilon \ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(K^{*T}\Gamma\sigma_{01}K^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(l^{*T}\Gamma\sigma_{02}l^*\right) + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{(\delta^*)^2}{2\gamma}\right\}$$

เมื่อวิเคราะห์จากทุกๆกรณีใน (4.3.12) ถึง (4.3.14) V_{01}, V_{02} หรือ V_{03} ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด คือ

$$V_{0\max} = \frac{1}{\alpha}\left\{\left|(l^*)^{-1} b_{rl}\right| \ \varepsilon \ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(K^{*T}\Gamma\sigma_{01}K^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(l^{*T}\Gamma\sigma_{02}l^*\right) + (l^*)^{-1}\,\mathrm{sgn}(l^*)\sigma_{03}\frac{(\delta^*)^2}{2\gamma}\right\} \tag{4.3.17}$$

โดย $b_{rl} = \max_t\left[b_r(t),\ b_l(t)\right]$ จะเห็นได้ว่า $V_{0\max}$ สามารถทำให้เล็กลงได้ด้วยการลดขนาดของตัวแปรในการออกแบบ ε และ σ_{0i}, $i = 1, 2, 3$

สำหรับกรณีที่ความชันของเขตไร้ผลสนองไม่เท่ากันหรือแปรตามเวลา ด้วยโครงสร้างของตัวควบคุม (4.3.5) สามารถเขียนสมการความคลาดเคลื่อนแบ่งได้เป็นกรณีย่อยๆดังต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1</u> $v(t) \ge b_r(t)$, $e(t) = x(t) - x_m(t)$

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= Ax(t) + bu(t) - A_m x_m(t) - b_m r(t)\\ &= A_m e(t) + \left(A - A_m - bm_M K(t)\right)x(t) + \left(bm_M l(t) - b_m\right)r(t) - bm_M b_r(t) - bm_M(u_3(t) + u_4(t)) +\\ &\quad b\tilde{m}(t)(v(t) - b_r(t))\\ &= A_m e(t) - bm_M\tilde{K}(t)x(t) + bm_M\tilde{l}r(t) - bm_M b_r(t) - bm_M(u_3(t) + u_4(t)) + b\tilde{m}(t)(v(t) - b_r(t))\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

<u>กรณีที่ 2</u> $v(t) \le b_l(t)$

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) - bm_M\tilde{K}(t)x(t) + bm_M\tilde{l}r(t) - bm_M b_l(t) - bm_M(u_3(t) + u_4(t)) + b\tilde{m}(t)(v(t) - b_l(t)) \tag{4.3.19}$$

<u>กรณีที่ 3</u> $b_l(t) < v(t) < b_r(t)$

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= Ax(t) - A_m x_m(t) - b_m r(t) + A_m x(t) - A_m x(t) + bm_M l(t)r(t) - bm_M l(t)r(t)\\ &= A_m\left(x(t) - x_m(t)\right) + \left(A - A_m\right)x(t) + \left(bm_M l(t) - b_m\right)r(t) + bm_M\left(-l(t)r(t)\right)\\ &= A_m\left(x(t) - x_m(t)\right) + \left(A - A_m\right)x(t) + \left(bm_M l(t) - b_m\right)r(t) + bm_M(-K(t)x(t) - v(t) - u_3(t) - u_4(t))\\ &= A_m e(t) - bm_M\tilde{K}(t)x(t) + bm_M\tilde{l}r(t) - bm_M v(t) - bm_M(u_3(t) + u_4(t))\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

โดยที่ $\tilde{K}(t) = K(t) - K^*$, $\tilde{l}(t) = l(t) - l^*$

ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่พิจารณา คือ

$$V = \frac{1}{2}e^T Pe + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\tilde{K}^T \Gamma \tilde{K}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\tilde{l}^T \Gamma \tilde{l}\right) + \frac{(l^*)^{-1}\operatorname{sgn}(l^*)}{2\gamma_1}\tilde{\delta}^2 + \frac{(l^*)^{-1}\operatorname{sgn}(l^*)}{2\gamma_2}\Delta\tilde{m}^2$$

เงื่อนไขเท่าเทียม คือ $A - A_m = bm_M K^*$ และ $b_m = bm_M l^*$ โดย $\Gamma = (l^*)^{-1}\operatorname{sgn}(l^*)$, $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) - \delta^*$, $\Delta\tilde{m}(t) = \Delta m(t) - \Delta m^*$

อนุพันธ์ของ V เทียบกับเวลาคือ

$$\dot{V} = e^T P\dot{e} + \operatorname{tr}\left(\tilde{K}^T \Gamma \dot{\tilde{K}}\right) + \operatorname{tr}\left(\tilde{l}^T \Gamma \dot{\tilde{l}}\right) + \frac{m(l^*)^{-1}\operatorname{sgn}(l^*)}{\gamma_1}\tilde{\delta}\dot{\delta} + \frac{m(l^*)^{-1}\operatorname{sgn}(l^*)}{\gamma_2}\Delta\tilde{m}\Delta\dot{m}$$

โดย $\Delta\tilde{m}(t) = \Delta m(t) - \Delta m^*$ และ Δm^* เป็นขอบเขตบนของ $\tilde{m}/m_M$

พิจารณา $\dot{V}$ ได้เป็นสามกรณีตามสมการความคลาดเคลื่อน (4.3.18) ถึง (4.3.20)

<u>กรณีที่ 1</u> $v(t) \geq b_r(t)$, $e(t) = x(t) - x_m(t)$

$$\begin{aligned} e^T P\dot{e} &= e^T PA_m e - e^T Pbm_M \tilde{K}x + e^T Pbm_M \tilde{l}r - e^T Pbm_M b_r - e^T Pbm_M(u_3 + u_4) + \\ &\quad e^T Pbm_M\left(\frac{1}{m_M}\right)\tilde{m}(v - b_r) \\ &= -\frac{1}{2}e^T Qe - \operatorname{tr}\left[\tilde{K}^T \Gamma b_m^T Pex^T\right]\operatorname{sgn}(l^*) + \operatorname{tr}\left[\tilde{l}^T \Gamma b_m^T Per\right]\operatorname{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m b_r - \\ &\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m(u_3 + u_4) + (l^*)^{-1}e^T Pb_m\left(\frac{1}{m_M}\right)\tilde{m}(u_1 - u_3 - u_4 - b_r) \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

<u>กรณีที่ 2</u> $v(t) \leq b_l(t)$

$$\begin{aligned} e^T P\dot{e} &= -\frac{1}{2}e^T Qe - \operatorname{tr}\left[\tilde{K}^T \Gamma b_m^T Pex^T\right]\operatorname{sgn}(l^*) + \operatorname{tr}\left[\tilde{l}^T \Gamma b_m^T Per\right]\operatorname{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m b_l - \\ &\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m(u_3 + u_4) + (l^*)^{-1}e^T Pb_m\left(\frac{1}{m_M}\right)\tilde{m}(u_1 - u_3 - u_4 - b_l) \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

<u>กรณีที่ 3</u> $b_l(t) < v(t) < b_r(t)$

$$\begin{aligned} e^T P\dot{e} &= -\frac{1}{2}e^T Qe - \operatorname{tr}\left[\tilde{K}^T \Gamma b_m^T Pex^T\right]\operatorname{sgn}(l^*) + \operatorname{tr}\left[\tilde{l}^T \Gamma b_m^T Per\right]\operatorname{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1}e^T Pb_m v - \\ &\quad (l^*)^{-1}e^T Pb_m(u_3 + u_4) \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

ดังนั้นกฎการปรับที่เหมาะสม คือ

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= b_m^T Pe(t)x(t)^T\operatorname{sgn}(l^*) - \sigma_1(t)K(t) \\ \dot{l}(t) &= -b_m^T Pe(t)r(t)\operatorname{sgn}(l^*) - \sigma_2(t)l(t) \\ \dot{\delta}(t) &= \gamma_1 e(t)^T Pb_m \operatorname{sat}(s(t)) - \sigma_3(t)\delta(t) \\ \Delta\dot{m}(t) &= \gamma_2 e(t)^T Pb_m \operatorname{sat}(s(t))\left|u_1(t)\right| - \sigma_4(t)\Delta m(t) \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

จะเห็นได้ว่าสามสมการแรกของ (4.3.24) เหมือนกับสมการ (4.3.9) ถึง (4.3.11)

ขณะที่ $|s(t)| \geq \varepsilon$

$$\dot{V} \leq -(l^*)^{-1} e^T P b_m b_{r,l} (1+\frac{\widetilde{m}}{m_M}) - (l^*)^{-1} e^T P b_m u_3 + (l^*)^{-1} e^T P b_m \left(\frac{\widetilde{m}}{m_M}\right) u_1 - (l^*)^{-1} e^T P b_m u_4 -$$

$$(l^*)^{-1} e^T P b_m \left(\frac{\widetilde{m}}{m_M}\right)(u_3 + u_4) < 0$$

ขณะที่ $|s(t)| < \varepsilon$ การพิสูจน์ก็เป็นไปในลักษณะเดียวกับที่ได้เคยแสดงมาแล้ว

ข้อสังเกต 4.2

1. สำหรับระบบเชิงเส้นธรรมดาที่ถูกรบกวนบริเวณทางเข้าด้วยสัญญาณที่มีขอบเขต เรายังคงใช้ตัวควบคุมแบบเดียวกับระบบที่มีเขตไร้ผลสนองความชันเท่ากันคือตัวควบคุม (4.3.4) และกฎการปรับ (4.3.9) ถึง (4.3.11) การพิสูจน์ยังคงใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟเหมือนเดิม เราจะลองพิจารณาสมการ (4.3.12) เมื่อมีการรบกวนทางเข้าโดยสมมุติว่าความชันของเขตไร้ผลสนองเท่ากัน จะได้

   $$e^T P\dot{e} = -\frac{1}{2} e^T Q e - \mathrm{tr}\left[\widetilde{K}^T \Gamma b_m^T P e x^T\right] \mathrm{sgn}(l^*) + \mathrm{tr}\left[\widetilde{l}^T \Gamma b_m^T P e r\right] \mathrm{sgn}(l^*) - (l^*)^{-1} e^T P b_m b_r -$$

   $$(l^*)^{-1} e^T P b_m d - (l^*)^{-1} e^T P b_m \delta \,\mathrm{sat}(s)\, \mathrm{sgn}(l^*)$$

   โดย $d(t)$ แทนการรบกวนทางเข้าที่มีขอบเขต การวิเคราะห์ในส่วนอื่นๆยังคงเหมือนเดิมแต่ที่ต่างออกไปคือ $\delta(t)$ จะเป็นขอบเขตบนของ $d(t)$ รวมกับ $\max_t [b_r(t), b_l(t)]$
2. เมื่อเรารวมโครงสร้างของตัวควบคุมสำหรับระบบที่แปรตามเวลาซึ่งเสนอไว้ในตอนต้นด้วย ถ้าส่วนที่เป็นเชิงเส้นเป็นไปตามข้อกำหนดเราจะสามารถควบคุมระบบแปรตามเวลาที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองคงที่หรือแปรตามเวลาได้ ปัญหานี้เทียบเท่ากับการควบคุมระบบเชิงเส้นแปรตามเวลาที่มีการรบกวนทางเข้ามีขอบเขตรบกวนอยู่ตลอดเวลา
3. วิธีที่นำเสนอมีส่วนที่เป็นรีเลย์เช่นเดียวกับวิธีส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเองแต่มีพื้นผิวสวิตชิงต่างกัน
4. วิธีที่นำเสนอแม้จะถือได้ว่าเป็นการควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันชนิดหนึ่งแต่ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์ส่วนใหญ่แล้วเป็นของการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดา

เราสามารถสรุปปัญหาและวิธีการที่ใช้ได้ดังตารางต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1	ต้องการให้ระบบแปรตามเวลา $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ตาม $\dot{x}_m = A_m x + B_m r$
คำตอบ	ตัวควบคุม (4.2.3) ในหน้า 40 และกฎการปรับ (4.2.9) ถึง (4.2.12)
ข้อจำกัด	ตัวควบคุมต้องสามารถทำให้สมการ (4.2.14) < 0 ได้เมื่อ $\lvert s(t)\rvert \geq \varepsilon$ เช่น เป็นไปตามกรณีที่ 1 ในหน้า 41
ปัญหาที่ 2	ต้องการให้ระบบคงที่สัญญาณเข้าเดี่ยว (4.3.1) ซึ่งมีเขตไร้ผลสนองไม่ทราบค่าที่แปรตามเวลาในสมการ (4.3.2) หรือ $\dot{x} = Ax + b(u+d)$ โดย $d(t)$ เป็นการรบกวนทางเข้ามีขอบเขต ให้ตามแบบจำลองอ้างอิง $\dot{x}_m = A_m x + b_m r$
คำตอบ	ตัวควบคุม (4.3.4) ในหน้า 46 และกฎการปรับ (4.3.9) ถึง (4.3.11) หรือ ตัวควบคุม (4.3.5) และกฎการปรับ (4.3.24)
ข้อจำกัด	ความชันของเขตไร้ผลสนองที่แปรตามเวลาต้องมีขอบเขตและมากกว่าศูนย์
ปัญหาที่ 3	ต้องการควบคุมระบบสัญญาณเข้าเดี่ยว $\dot{x} = A(t)x + b(t)(u+d)$ ที่มีเขตไร้ผลสนองแปรตามเวลาทั้งความชันและแถบไร้ผลสนอง
คำตอบ	การรวมตัวควบคุม (4.2.3) และ (4.3.4) คือ $v(t) = -K(t)x(t) + l(t)r(t) - \mathrm{sgn}(l_M)L_s(t)R(t)\left(\Delta A(t)\lvert x(t)\rvert + \Delta b(t)\lvert u_1(t)\rvert\right) -$ $\delta(t)sat(s(t))\,\mathrm{sgn}(l_M)$ โดย $l_M \in \Re$ แทนพารามิเตอร์ในนาม กฎการปรับที่ใช้เหมือนกับปัญหาที่ 1 และ 2
ข้อจำกัด	เหมือนกับปัญหาที่ 1 และ 2