บทที่ 2
การควบคุมแบบปรับตัวเอง

หลักการพื้นฐานของการควบคุมแบบปรับตัวเอง คือ จะคาดเดาค่าพารามิเตอร์ที่ไม่แน่นอนของระบบหรือตัวควบคุมแบบออนไลน์ (on-line) โดยใช้สัญญาณที่วัดเข้ามาจากระบบและใช้พารามิเตอร์นี้ในการคำนวณสัญญาณที่จะใช้ควบคุมระบบ

การควบคุมแบบมั่นคง (Robust control) จะพยายามรักษาการทำงานของระบบเมื่อเกิดความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ในระดับหนึ่งโดยใช้ตัวควบคุมที่มีพารามิเตอร์คงที่ ข้อได้เปรียบกว่าการควบคุมแบบปรับตัวเอง คือ ความสามารถในการจัดการกับ สัญญาณรบกวน พลวัตที่ไม่ได้ถูกจำลอง (unmodeled dynamic) พารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว และความง่ายของตัวควบคุม

การควบคุมแบบปรับตัวเอง (Adaptive control) จะเหมาะกับความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ที่เป็นค่าคงที่หรือเปลี่ยนแปลงช้าๆ (การเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบต้องช้ากว่าการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของตัวควบคุม) โดยตัวควบคุมแบบปรับตัวเองจะเริ่มปรับปรุงการทำงานของระบบขณะที่มีการเริ่มปรับพารามิเตอร์และมักจะใช้ข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าน้อยกว่าการควบคุมแบบมั่นคง

การควบคุมแบบปรับตัวเองแบบไม่ตรง (Indirect adaptive control) เป็นการควบคุมแบบปรับตัวเองที่จะต้องคาดเดาพารามิเตอร์ของระบบก่อนแล้วจึงนำพารามิเตอร์นี้ไปคำนวณหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (มีการเคลื่อนย้ายพารามิเตอร์)

การควบคุมแบบปรับตัวเองแบบตรง (Direct adaptive control) เป็นการควบคุมแบบปรับตัวเองที่จะปรับพารามิเตอร์ของระบบวงปิดโดยใช้การปรับพารามิเตอร์ของตัวควบคุมโดยตรง

2.1 แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการควบคุมแบบปรับตัวเอง

การคาดเดาพารามิเตอร์แบบออนไลน์มักเรียกว่า กฎการปรับ (Adaptation law) กฎปรับให้ทันการ (Update law) หรือกลไกการปรับ (Adjustment mechanism) ในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกว่า กฎการปรับ การออกแบบกฎการปรับมีความสำคัญมากต่อเสถียรภาพโดยรวมของระบบ การควบคุมแบบปรับตัวเองจะทำให้ระบบวงปิดมีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นและมักจะแปรตามเวลา ดังนั้นการวิเคราะห์ให้เข้าใจถึงเสถียรภาพและความมั่นคง (Robustness) ของการควบคุมแบบปรับตัวจึงเป็นสิ่งที่ท้าทาย

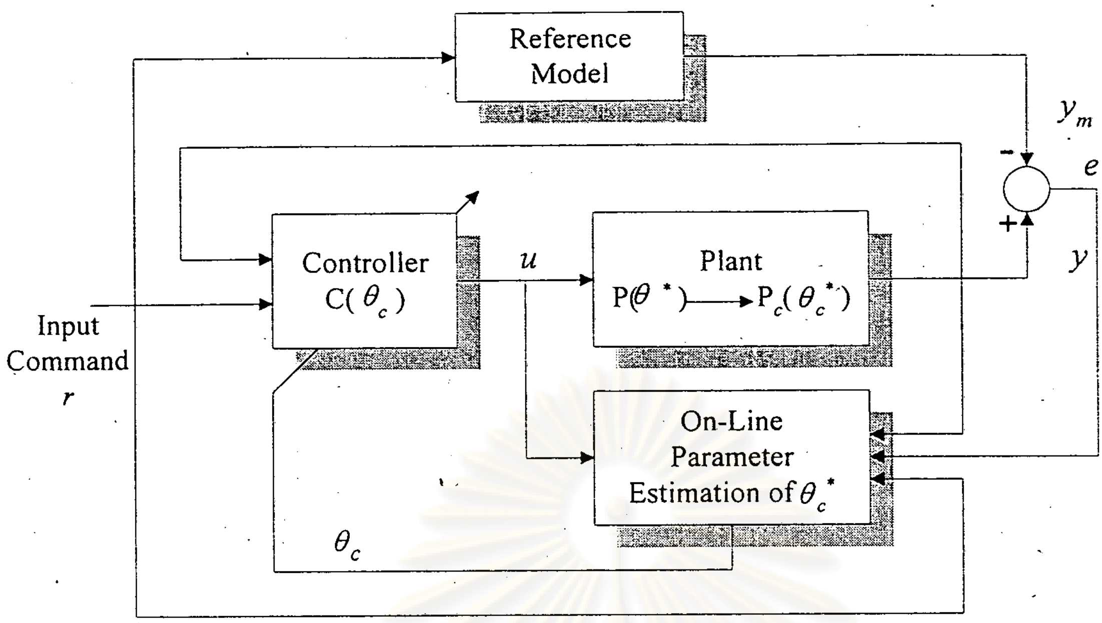
วิธีพื้นฐานที่ใช้ในการออกแบบกฎการปรับเบื้องต้นมีดังนี้

1. **วิธีความไว (Sensitivity methods)** เป็นวิธีเก่าแก่ที่สุดวิธีหนึ่งซึ่งเป็นที่นิยมมากในช่วงทศวรรษที่ 60 และยังคงใช้ในทางอุตสาหกรรมเป็นจำนวนมากสำหรับควบคุมระบบที่ไม่แน่นอน พารามิเตอร์ที่ได้จากกฎการปรับจะถูกปรับไปในทิศทางที่ลดฟังก์ชันสมรรถนะ (Performance function) กฎการปรับได้จากการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสมรรถนะเทียบกับพารามิเตอร์ที่คาดเดาคูณกับความคลาดเคลื่อน อนุพันธ์นี้เรียกว่าฟังก์ชันความไว แต่ปกติแล้วฟังก์ชันความไวจะสร้างไม่ได้ดังนั้นจึงมีการใช้ค่าประมาณแทน วิธีที่นิยมมากในการคำนวณค่าประมาณนี้คือ กฎเอ็มไอที (MIT rule) อย่างไรก็ตามกฎเอ็มไอทีทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้ในวงจำกัดคือ เมื่อพารามิเตอร์เริ่มต้นใกล้กับค่าจริงและ อัตราขยายในการปรับที่ใช้มีค่าเล็กๆ

2. **การออกแบบบวกและการออกแบบเลียปูนอฟ (Positivity and Lyapunov designs)** กฎการปรับได้จากวิธีตรงของเลียปูนอฟและความสัมพันธ์ของฟังก์ชันจริงบวก (Positive real) ปัญหาการออกแบบกฎการปรับจะพิจารณาเหมือนกับปัญหาทางด้านเสถียรภาพโดยสมการอนุพันธ์ของกฎการปรับจะถูกเลือกเพื่อให้มีเสถียรภาพตามทฤษฎีเลียปูนอฟ

3. **วิธีเกรเดียนท์และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Gradient and least-squares methods)** ปัญหาของวิธีความไวคือ ไม่สามารถสร้างฟังก์ชันความไวได้ วิธีหนึ่งที่จะหลีกเลี่ยงปัญหานี้คือ เลือกฟังก์ชันสมรรถนะใหม่ที่สามารถสร้างฟังก์ชันความไวได้จริง และฟังก์ชันต้องเป็นแบบโค้งนูน (Convex) เมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนคาดเดา (Estimation error) และ พารามิเตอร์ที่คาดเดา (Estimated parameters)

การควบคุมแบบปรับตัวเองมีหลายแบบ เช่น *การควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดวางขั้ว* (Adaptive pole placement control, APPC) หรือ บางทีก็เรียกว่า เรกูเลเตอร์แบบจูนตัวเอง (Self-tuning regulators) มีที่มาจากการควบคุมแบบวางขั้ว (Pole placement control) และเริ่มพัฒนามาจากระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time) โดยอาศัยหลักการทำให้ต่ำสุด (minimization) ส่วน *การควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิง* (Model reference adaptive control, MRAC) มีที่มาจากการควบคุมชนิดแบบจำลองอ้างอิง (Model reference control) และเริ่มพัฒนามาจากระบบเวลาต่อเนื่อง (continuous-time) การควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงสามารถพิจารณาให้เป็นแบบหนึ่งของชนิดวางขั้วได้ ข้อจำกัดหนึ่งของ MRAC คือ เนื่องจากต้องมีการตัดศูนย์ (Zeros) ของระบบทำให้มีข้อจำกัดเฉพาะกับระบบเฟสต่ำสุด (minimum phase) หรืออีกนัยหนึ่งคือมีศูนย์ที่เสถียร ในวิทยานิพนธ์นี้สนใจเฉพาะ การควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงแบบตรงซึ่งมีโครงสร้างตามรูปที่ 2.1 โดยที่ θ_c^* แทนพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่ต้องการและ $\theta_c(t)$ แทนพารามิเตอร์ที่คาดเดาของตัวควบคุม



รูปที่ 2.1 การควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงแบบตรง

2.2 ปรากฏการณ์ขาดเสถียรภาพในระบบปรับตัวเอง

การควบคุมแบบปรับตัวเองที่นำไปใช้กับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาซึ่งไม่ทราบพารามิเตอร์ส่วนใหญ่ได้จากข้อสมมุติดังต่อไปนี้

1. ระบบปราศจาก การรบกวน พลวัตที่ไม่ได้ถูกจำลอง และความไม่เป็นเชิงเส้น
2. พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบคงที่ตลอดเวลา

เพราะว่าในการใช้งานจริงข้อสมมุติเหล่านี้มักจะไม่เป็นจริง ในช่วงกลางทศวรรษที่ 80 การออกแบบและการวิเคราะห์ระบบปรับตัวเองให้ยังคงสามารถใช้ได้แม้ข้อสมมุติข้างต้นจะไม่เป็นจริงรวมเรียกว่า *การควบคุมแบบปรับตัวเองที่มั่นคง* (Robust adaptive control) การที่เราศึกษากลไกการขาดเสถียรภาพของระบบปรับตัวเองจะช่วยให้เราเข้าใจถึงแนวทางที่จะจัดการกับมัน

2.2.1 การเลื่อนของพารามิเตอร์

พิจารณาระบบซึ่งมีสัญญาณรบกวนมีขอบเขต $d(t)$ ดังนี้

$$y = \theta^* u + d$$

กฎการปรับเพื่อคาดเดา θ^* ในกรณีที่ $d(t) = 0,\ \forall t \geq 0$ คือ

$$\dot{\theta} = \gamma e u, \qquad e = y - \theta u \tag{2.2.1}$$

โดยที่ $\gamma > 0$ และ $\theta(t)$ เป็นการคาดเดาแบบออนไลน์ของ θ^* เราสามารถแสดงได้ว่าสำหรับ $d(t) = 0$

และ $u,\ \dot{u} \in L_\infty$ กฎการปรับ (2.2.1) จะรับประกันได้ว่า $\theta,\ e \in L_\infty$ และ $e(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ ต่อไปเราจะวิเคราะห์ (2.2.1) เมื่อ $d(t) \neq 0$ นิยามให้ $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ จะได้ว่า

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma u^2 \tilde{\theta} + \gamma d u, \qquad e = -\tilde{\theta} u + d \tag{2.2.2}$$

เราวิเคราะห์ (2.2.2) ด้วยฟังก์ชัน

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma} \tag{2.2.3}$$

แทน (2.2.2) ลงใน $\dot{V}$ จะได้ว่า

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^2 u^2 + d\,\tilde{\theta} u = -\frac{\tilde{\theta}^2 u^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\tilde{\theta} u - d\right)^2 + \frac{d^2}{2} \tag{2.2.4}$$

ในกรณีที่ $u,\ \dot{u} \in L_\infty$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\tilde{\theta}$ มีขอบเขตจากสมการ (2.2.3) และ (2.2.4) ลองศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้สมมุติให้ $\theta^* = 2$, $\gamma = 1$, $u = (1+t)^{-1/2} \in L_\infty$ และ

$$d(t) = (1+t)^{-1/4}\left(\frac{5}{4} - 2\,(1+t)^{-1/4}\right) \to 0 \text{ ขณะที่ } t \to \infty$$

เราจะได้ว่า

$$y(t) = \frac{5}{4}(1+t)^{-1/4} \to 0 \text{ ขณะที่ } t \to \infty$$

$$e(t) = \frac{1}{4}(1+t)^{-1/4} \to 0 \text{ ขณะที่ } t \to \infty$$

และ

$$\theta(t) = (1+t)^{1/4} \to \infty \text{ ขณะที่ } t \to \infty$$

นั่นคือ พารามิเตอร์คาดเดา $\theta(t)$ จะเลื่อนไปเรื่อยๆอย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อเวลา t เพิ่มขึ้น เราเรียกปรากฏการณ์ขาดเสถียรภาพนี้ว่า *การเลื่อนของพารามิเตอร์* (Parameter drift)

อย่างไรก็ตามถ้าเราจำกัดว่า $u(t)$ กระตุ้นคงอยู่ (Persistent excitation) จะสามารถพิสูจน์ได้ว่าความคลาดเคลื่อนจะลู่เข้าแบบเลขชี้กำลัง (exponentially) ไปสู่เซตตกค้าง (Residual set) หนึ่งซึ่งขนาดของเซตตกค้างจะขึ้นกับระดับของการรบกวน แต่เราไม่สามารถเลือก $u(t)$ ให้กระตุ้นคงอยู่ได้ในกรณีของการควบคุมแบบปรับตัวเองเพราะว่า $u(t)$ สร้างจากสัญญาณป้อนกลับต่างๆ

2.2.2 ผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์

เราลองมาพิจารณาระบบอันดับหนึ่งที่แปรตามเวลา

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)\,u \tag{2.2.5}$$

โดยที่ $a(t)$, $b(t)$ เป็นพารามิเตอร์ที่แปรตามเวลาซึ่งมีขอบเขตและมีอนุพันธ์อันดับหนึ่งจำกัดสำหรับทุกๆ t และ $b(t) \geq b_0 > 0$ ยิ่งกว่านั้น $|\dot{a}(t)|$, $|\dot{b}(t)|$ สมมุติว่ามีขนาดเล็กนั่นคือพารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆเทียบกับเวลา จุดประสงค์ของการควบคุมคือต้องการหา u ที่ทำให้ x ตามสัญญาณออกจากแบบจำลอง

$$\dot{x}_m = -x_m + r$$

สำหรับทุกๆสัญญาณอ้างอิง r ซึ่งมีขอบเขตและต่อเนื่องแบบเป็นช่วงๆ ถ้ารู้พารามิเตอร์ $a(t)$, $b(t)$ สำหรับทุกๆ $t \geq 0$ ดังนั้นสัญญาณควบคุมคือ

$$u(t) = -k^*(t)\,x + l^*(t)\,r$$

โดยที่

$$k^*(t) = \frac{1+a(t)}{b(t)}, \qquad l^*(t) = \frac{1}{b(t)}$$

ในกรณีที่ไม่ทราบ $a(t)$, $b(t)$ ดังนั้นเลือก

$$u = -k(t)\,x + l(t)\,r$$

พร้อมทั้งกฎการปรับสำหรับ $k(t)$ และ $l(t)$ เราสมมุติว่ายังคงใช้กฎการปรับเหมือนกับกรณี $a(t)$, $b(t)$ คงที่ซึ่งจะได้ว่า

$$\dot{k} = \gamma_1 e x, \qquad \dot{l} = -\gamma_2 e r, \qquad \gamma_1,\ \gamma_2 > 0 \tag{2.2.6}$$

โดยที่ $e = x - x_m$ ซึ่งเป็นไปตามสมการความคลาดเคลื่อน

$$\dot{e} = -e + b(t)(-\tilde{k}x + \tilde{l}r) \tag{2.2.7}$$

โดยที่ $\tilde{k}(t) = k(t) - k^*(t)$, $\tilde{l}(t) = l(t) - l^*(t)$ เพราะว่า $k^*(t)$, $l^*(t)$ แปรตามเวลาดังนั้น $\dot{\tilde{k}} = \dot{k} - \dot{k}^*$, $\dot{\tilde{l}} = \dot{l} - \dot{l}^*$ และจาก (2.2.6) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปความคลาดเคลื่อนพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{\tilde{k}} = \gamma_1 e x - \dot{k}^*, \qquad \dot{\tilde{l}} = -\gamma_2 e r - \dot{l}^* \tag{2.2.8}$$

ดังนั้นผลกระทบคือพจน์ $\dot{k}^*$, $\dot{l}^*$ ซึ่งมีขอบเขตเพราะเราสมมุติว่า $|\dot{a}(t)|$, $|\dot{b}(t)|$ มีขอบเขต เราเลือกฟังก์ชันเลียปูนอฟเหมือนกับกรณีระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาสำหรับวิเคราะห์เสถียรภาพสำหรับ (2.2.7) และ (2.2.8) คือ

$$V(e,\tilde{k},\tilde{l}) = \frac{e^2}{2} + b(t)\frac{\tilde{k}^2}{2\gamma_1} + b(t)\frac{\tilde{l}^2}{2\gamma_2} \tag{2.2.9}$$

โดยที่ $b(t) \geq b_0 > 0$ แทน (2.2.7) และ (2.2.8) ลงใน $\dot{V}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -e^2 - eb\tilde{k}x + eb\tilde{l}r + \dot{b}\frac{\tilde{k}^2}{2\gamma_1} + b\tilde{k}ex - b\frac{\tilde{k}\dot{k}^*}{\gamma_1} + \dot{b}\frac{\tilde{l}^2}{2\gamma_2} - b\tilde{l}er - b\frac{\tilde{l}\dot{l}^*}{\gamma_2} \\
&= -e^2 + \frac{\dot{b}}{2}\left(\frac{\tilde{k}^2}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}^2}{\gamma_2}\right) - b\left(\frac{\tilde{k}\dot{k}^*}{\gamma_1} + \frac{\tilde{l}\dot{l}^*}{\gamma_2}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

จาก (2.2.9) และ (2.2.10) เราไม่สามารถพิสูจน์การมีขอบเขตของ e, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$ ได้เว้นเสียแต่ว่า $\dot{k}^*$, $\dot{l}^*$ จะเป็นศูนย์หรือลดลงแบบเลขชี้กำลังเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว แม้ว่า $\dot{k}^*(t)$, $\dot{l}^*(t)$ จะเล็กมากหรือ $a(t)$, $b(t)$ เปลี่ยนแปลงช้าๆเมื่อเทียบกับเวลาคุณสมบัติของ V, $\dot{V}$ ในสมการ (2.2.9) และ (2.2.10) ก็ไม่สามารถรับประกันได้ว่า e, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$ มีขอบเขต

ยังมีปรากฏการณ์การขาดเสถียรภาพแบบอื่นๆอีกได้แก่ ความไม่มีเสถียรภาพจากอัตราขยายสูง (High-gain instability) ความไม่มีเสถียรภาพจากการปรับเร็ว (Instability resulting from fast adaptation) และความไม่มีเสถียรภาพจากความถี่สูง (High-frequency instability) การวิเคราะห์ต้องอาศัยแบบจำลองความไม่แน่นอนของโครงสร้างแบบต่างๆ เช่น การรบกวนแบบบวก (Additive perturbations), การรบกวนแบบคูณ (Multiplicative perturbations) และการรบกวนเอกฐาน (Singular perturbation) ซึ่งจะไม่ขอกล่าวไว้ในที่นี้

2.3 การปรับปรุงเพื่อเพิ่มความมั่นคง

การขาดความมั่นคงของการควบคุมแบบปรับตัวเองในกรณีที่มีพลวัตที่ไม่ได้ถูกจำลองและการรบกวนที่มีขอบเขต ดังนั้นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือ กฎการปรับจะต้องรับประกันได้ว่าทุกๆสัญญาณยังคงมีขอบเขตเมื่อมีความไม่แน่นอนของระบบเกิดขึ้นเราจึงเรียกว่าเป็นการควบคุมแบบปรับตัวเองที่มั่นคง

จุดประสงค์ของส่วนนี้คือเพื่อนำเสนอและวิเคราะห์เทคนิคต่างๆซึ่งใช้ในทศวรรษที่ 80 เพื่อที่จะปรับปรุงกฎการปรับที่ได้จากระบบอุดมคติให้สามารถใช้ได้เมื่อระบบมีความไม่แน่นอนเกิดขึ้น

พิจารณาระบบ

$$y = \theta^* u + \eta \tag{2.3.1}$$

โดยที่ η เป็นเทอมไม่ทราบค่ามีขอบเขตที่เกิดจากความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองและ/หรือการรบกวน

กำหนดให้ y, u เป็นสัญญาณออกและสัญญาณเข้าซึ่งสามารถวัดได้ จุดประสงค์ของการควบคุมคือต้องการออกแบบกฎการปรับสำหรับคาดเดา θ^* ซึ่งจะต้องมั่นคงต่อผลกระทบที่เกิดจาก η โดยยังคงคุณสมบัติของกฎการปรับปกติได้เมื่อ $\eta = 0$ และมีคุณสมบัติใกล้เคียงกฎการปรับปกติเมื่อ $\eta \neq 0$ (ขึ้นกับขนาดของ η)

เราเริ่มจากกฎการปรับปกติ

$$\dot{\theta} = \gamma e u, \qquad e = y - \theta u \tag{2.3.2}$$

เมื่อ $\eta = 0$ และ $u \in L_\infty$ กฎการปรับนี้รับประกันได้ว่า

$$\text{(I)} \quad e,\ \theta,\ \dot{\theta} \in L_\infty \qquad\qquad \text{(II)} \quad e,\ \dot{\theta} \in L_2 \tag{2.3.3}$$

และถ้า $\dot{u} \in L_\infty$ กฎการปรับจะประกันได้ว่า $e,\ \dot{\theta} \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

เราเรียกคุณสมบัติ (I) และ (II) ใน (2.3.3) ซึ่งได้จากขณะที่ $\eta = 0$ ว่า คุณสมบัติอุดมคติ (Ideal properties) ของกฎการปรับ เมื่อ $\eta \neq 0$ กฎการปรับ (2.3.2) จะไม่สามารถรับประกันคุณสมบัติ (I) และ (II) ได้ดังที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อ 2.2.1

2.3.1 การรั่ว

แนวคิดพื้นฐานของการรั่ว (Leakage) คือ การปรับปรุงกฎการปรับเพื่อให้ฟังก์ชันเลียปูนอฟมีขอบเขตเมื่อมีความไม่แน่นอนเกิดขึ้น กฎการปรับ (2.3.2) เขียนใหม่ในรูปของความคลาดเคลื่อนของพารามิเตอร์

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma e u, \qquad e = -\tilde{\theta} u + \eta \tag{2.3.4}$$

พิจารณาฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma} \tag{2.3.5}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเดียวกับที่ใช้พิสูจน์คุณสมบัติ (I) และ (II) ใน (2.3.3) เมื่อ $\eta = 0$ แทนกฎการปรับลงใน $\dot{V}$ จะได้ว่า

$$\dot{V} = \tilde{\theta} e u = -e^2 + e\eta \le -|e|\left(|e| - d_0\right) \tag{2.3.6}$$

โดย $d_0 > 0$ เป็นขอบเขตบนของ η จาก (2.3.5) และ (2.3.6) เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\tilde{\theta}$ มีขอบเขตเพราะถ้า $|e| < d_0$ นั่นคือ $\dot{V} \ge 0$ และ $\tilde{\theta} \to \infty$ ขณะที่ $t \to \infty$

ทางหนึ่งที่จะหลีกเลี่ยงปัญหานี้และยังคงทำให้สัญญาณทั้งหมดมีขอบเขตในกรณีที่มี η ด้วยการปรับปรุงกฎการปรับดังนี้

$$\dot{\theta} = \gamma e u - \gamma \omega \theta, \qquad e = y - \theta u \tag{2.3.7}$$

โดยที่เทอม $\omega\theta$ ซึ่ง $\omega > 0$ เรียกว่าการปรับปรุงรั่ว (Leakage modification) ตัวแปร $\omega(t) \ge 0$ ถูกเลือกเพื่อให้สำหรับบาง V_0 ซึ่งขึ้นกับ d_0 เมื่อ $V \ge V_0 > 0$ แล้ว $\dot{V} \le 0$ เราจะพิจารณาตัวเลือกต่างๆของ $\omega(t)$ จากสมการต่อไปนี้

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma e u - \gamma \omega \theta, \qquad e = -\tilde{\theta} u + \eta \tag{2.3.8}$$

(ก.) <u>การปรับปรุงซิกมา</u> (σ- modification) ตัวเลือกที่ง่ายที่สุดสำหรับ $\omega(t)$ คือ

$$\omega(t) = \sigma > 0, \qquad \forall t \ge 0$$

โดยที่ σ เป็นค่าคงที่เล็กๆและเรียกว่าเป็นการปรับปรุงซิกมาแบบคงที่ ดังนั้นสมการความคลาดเคลื่อน(2.3.8) เปลี่ยนเป็น

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma e u - \gamma \sigma \theta, \qquad e = -\tilde{\theta} u + \eta \tag{2.3.9}$$

ด้วยสมการ V ใน (2.3.5) และ กฎการปรับ (2.3.9) จะได้ว่า

$$\dot{V} = -e^2 + e\eta - \sigma\tilde{\theta}\theta \le -e^2 + |e| d_0 - \sigma\tilde{\theta}\theta \tag{2.3.10}$$

โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์กับเทอมใน (2.3.10)

$$-e^2 + |e| d_0 = -\frac{|e|^2}{2} - \frac{1}{2}\left(|e| - d_0\right)^2 + \frac{d_0^2}{2} \le -\frac{e^2}{2} + \frac{d_0^2}{2}$$

และ

$$-\sigma\tilde{\theta}\theta = -\sigma\tilde{\theta}(\tilde{\theta}+\theta^*) \le -\sigma\tilde{\theta}^2 + \sigma|\tilde{\theta}||\theta^*| \le -\frac{\sigma\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2} \tag{2.3.11}$$

ดังนั้น

$$\dot{V} \le -\frac{e^2}{2} - \frac{\sigma\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{d_0^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2}$$

บวกเข้าและลบออกเทอม αV สำหรับบาง $\alpha > 0$ จะได้

$$\dot{V} \le -\alpha V - \frac{e^2}{2} - \left(\sigma - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{d_0^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2}$$

ถ้าเราเลือก $0 < \alpha \le \sigma\gamma$ ดังนั้น

$$\dot{V} \le -\alpha V + \frac{d_0^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2} \tag{2.3.12}$$

จาก (2.3.12) $\dot{V} = 0$ เมื่อ $V = V_0 = \frac{1}{2\alpha}\left(d_0^2 + \sigma|\theta^*|^2\right)$ และถ้า $V \ge V_0$ แล้ว $\dot{V} \le 0$ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า θ, $\tilde{\theta} \in L_\infty$ ซึ่งรวมกับ $u \in L_\infty$ หมายความว่า e, $\dot{\theta} \in L_\infty$ จะเห็นว่าด้วยการปรับปรุงซิกมา เราสามารถทำให้ระบบยังคงคุณสมบัติ (I) ใน (2.3.3) ไว้ได้แม้ $\eta \ne 0$ ($\eta \in L_\infty$) ด้วยการอินทิเกรต (2.3.12) นั่นคือ

$$V(\tilde{\theta}(t)) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2\gamma} \le \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\tilde{\theta}^2(0)}{2\gamma} + \frac{1}{2\alpha}\left(d_0^2 + \sigma|\theta^*|^2\right)$$

หมายความว่า $\tilde{\theta}$ ลู่เข้าแบบเลขชี้กำลังสู่เซตตกค้าง

$$D_\sigma = \left\{ \tilde{\theta} \in \Re \mid \tilde{\theta}^2 \le \frac{\gamma}{\alpha}\left(d_0^2 + \sigma|\theta^*|^2\right) \right\}$$

ต่อไปเราต้องการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติ (II) ใน (2.3.3) เมื่อใช้กฎการปรับ (2.3.9) ในกรณีที่ $\eta \ne 0$ แต่ $\eta \in L_\infty$

พิจารณา $\dot{V}$ ต่อไปนี้

$$\dot{V} \le -\frac{e^2}{2} - \frac{\sigma\theta^2}{2} + \frac{d_0^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2} \tag{2.3.13}$$

ซึ่งได้มาจากการใช้อสมการ

$$-\sigma\tilde{\theta}\theta \le -\frac{\sigma\theta^2}{2} + \frac{\sigma|\theta^*|^2}{2}$$

แทนสมการ (2.3.11) แล้วอินทิเกรต (2.3.13) จะได้

$$\int_t^{t+T} e^2 d\tau + \int_t^{t+T} \sigma\theta^2 d\tau \le \left(d_0^2 + \sigma|\theta^*|^2\right)T + 2[V(t) - V(t+T)] \le c_0\left(d_0^2 + \sigma\right)T + c_1 \tag{2.3.14}$$

$\forall t \ge 0$ และ $T > 0$ โดยที่ $c_0 = \max\left[1, |\theta^*|^2\right]$, $c_1 = 2\sup_t[V(t) - V(t+T)]$

สมการ (2.3.14) แสดงว่า e, $\sqrt{\sigma}\theta$ มีขนาดเล็กแบบนัยกำลังสองเฉลี่ย (Mean square sense, m.s.s.) ใน $d_0^2 + \sigma$ หรืออีกนัยหนึ่งคือ e, $\sqrt{\sigma}\theta \in S(d_0^2 + \sigma)$

เพราะว่า

$$|\dot{\theta}|^2 \le 2\gamma^2 e^2 u^2 + 2\gamma^2 \sigma^2 \theta^2$$

เพราะฉะนั้น $\dot{\theta} \in S(d_0^2 + \sigma)$ ด้วย ดังนั้นคุณสมบัติอุดมคติ (II) จะเปลี่ยนเป็น

$$(\mathrm{II})^1 \qquad e,\ \dot{\theta} \in S(d_0^2 + \sigma) \tag{2.3.15}$$

จะเห็นว่าเราไม่สามารถรับประกันได้ว่า e, $\dot{\theta}$ อยู่ใน L_2 เหมือนคุณสมบัติอุดมคติ อีกทั้ง (2.3.15) แสดงให้เห็นว่าแม้ $\eta = 0$ กฎการปรับที่ใช้การปรับปรุง σ ไม่สามารถบอกได้ว่า $e(t) \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ เว้นแต่ $\sigma = 0$ ดังนั้นความมั่นคงที่ได้จะทำลายคุณสมบติอุดมคติ (II) ในสมการ (2.3.3) อุปสรรคข้อนี้แก้ได้ด้วยวิธีการปรับปรุงซิกมาสวิตชิง (Switching σ- modification) ซึ่งจะกล่าวต่อไป

(ข.) <u>การปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิง</u> (Switching σ- modification) [22] ด้วยตัวเลือก $\alpha(t)$ ที่เหมาะสมกว่า

$$\alpha(t) = \sigma_s, \qquad \sigma_s = \begin{cases} 0, & |\theta| < M_0 \\ \sigma_0, & |\theta| \ge M_0 \end{cases}$$

โดยที่ $M_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$ เป็นค่าคงที่ในการออกแบบและ M_0 ต้องถูกเลือกให้ $M_0 > |\theta^*|$ อย่างไรก็ตาม กฎการปรับ (2.3.2) จะไม่ต่อเนื่องจึงไม่สามารถรับประกันการมีอยู่ของผลเฉลย $\theta(t)$ ได้ อีกทั้งอาจทำให้เกิดการแกว่งบนพื้นผิวสวิตชิง (Switching surface) เพื่อลดผลดังกล่าวเราสามารถแทนการปรับปรุงสวิตชิงที่ไม่ต่อเนื่องให้ต่อเนื่องดังนี้

$$\alpha(t) = \sigma_s, \quad \sigma_s = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad |\theta(t)| < M_0 \\ \sigma_0\left(\dfrac{|\theta(t)|}{M_0} - 1\right) & \text{ถ้า} \quad M_0 \le |\theta(t)| \le 2M_0 \\ \sigma_0 & \text{ถ้า} \quad |\theta(t)| > 2M_0 \end{cases} \tag{2.3.16}$$

ค่าคงที่ในการออกแบบ M_0, σ_0 นิยามเหมือนเดิม การวิเคราะห์อาศัยหลักการเดียวกับการปรับปรุงซิกมาธรรมดาโดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟในสมการ (2.3.5) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า $\tilde{\theta}$ ลู่เข้าแบบเลขชี้กำลังสู่เซตตกค้าง

$$D_s = \left\{ \tilde{\theta} \mid |\tilde{\theta}|^2 \le \frac{\gamma}{\alpha}\left(d_0^2 + \sigma_0|\theta^*|^2 + 4\sigma_0 M_0^2\right) \right\}$$

ขนาดของ D_s ใหญ่กว่า D_σ ในการปรับปรุง σ ธรรมดาเพราะว่ามีเทอม $4\sigma_0 M_0^2$ เพิ่มเข้ามา การมีขอบเขตของ $\tilde{\theta}$ หมายความว่า e, θ, $\dot{\theta} \in L_\infty$ ดังนั้นการปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิงสามารถรักษาคุณสมบัติอุดมคติ (I) เอาไว้ได้เมื่อ $\eta \neq 0$ แต่ $\eta \in L_\infty$ กฎการปรับที่ใช้การปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิงจะรับประกันได้ว่า

$$(\mathrm{II})^2 \quad e,\ \dot{\theta} \in S(d_0^2)$$

เปรียบเทียบกับการปรับปรุงซิกมาธรรมดาจะเห็นว่าการปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิงจะยังคงรักษาคุณสมบัติอุดมคติของกฎการปรับ (II) เอาไว้ได้ด้วยนั่นคือ เมื่อ $\eta = d_0 = 0$ แล้ว $e(t)$, $\dot{\theta}(t) \to 0$

ขณะที่ $t \to \infty$ อุปสรรคที่สำคัญของการปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิง เมื่อเทียบกับการปรับปรุงซิกมาธรรมดาคือ ต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับขอบเขตบน M_0 ของ $|\theta^*|$ ถ้า M_0 ใน (2.3.16) ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $|\theta^*|$ คุณสมบัติและอุปสรรคต่างๆจะเหมือนกับการปรับปรุงซิกมาธรรมดา

ยังมีตัวเลือก $\omega(t)$ แบบอื่นๆอีกซึ่งให้ผลคล้ายๆกัน เช่น การปรับปรุงอี (e - modification) [20] จะไม่ขอกล่าวถึงในที่นี้

ข้อสังเกต 2.1

1. เทอม $-\omega\theta$ โดย $\omega(t) > 0$ ในกฎการปรับจะทำให้ $\theta(t)$ ลู่เข้าหาศูนย์เมื่อเทอมอื่นๆใน (2.3.7) มีขนาดเล็ก ถ้า $\theta^* \neq 0$ เทอม $-\omega\theta$ อาจทำให้ $\theta(t)$ ห่างจากค่าจริง θ^* ถ้าเรามีความรู้เบื้องต้น $\hat{\theta}^*$ ของ θ^* เทอม $-\omega\theta$ อาจแทนด้วย $-\omega(\theta - \hat{\theta}^*)$ ซึ่งจะเลื่อนแนวโน้ม $\theta(t)$ จากศูนย์ไปยัง θ^* ส่วนการวิเคราะห์ต่างๆยังคงเหมือนเดิม
2. แม้ว่าการปรับปรุงซิกมาจะรับประกันการมีขอบเขตของความคลาดเคลื่อนในการตาม e แบบ นัยกำลังสองเฉลี่ย แต่การมีขอบเขตแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยบอกได้ว่าในคาบหนึ่งๆพื้นที่ใต้กราฟ e^2 มีค่าเล็กๆ แต่ไม่ได้บอกว่าขนาดของ e มีขนาดเล็ก พฤติกรรมที่ไม่พึงประสงค์นี้เรียกว่า การโพล่ง (Bursting) ทางหนึ่งที่จะหลีกเลี่ยงการโพล่ง คือ การใช้สัญญาณกระตุ้นคงอยู่ (Persistent excitation) หรือใช้การปรับปรุงเขตไร้ผลสนอง (Dead-zone modification) ซึ่งจะกล่าวต่อไป

2.3.2 การใช้เขตไร้ผลสนอง

เราลองมาพิจารณาสมการความคลาดเคลื่อน (2.3.4) นั่นคือ

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma e u, \qquad e = -\tilde{\theta} u + \eta \tag{2.3.17}$$

เพราะว่า $\sup_t |\eta(t)| \le d_0$ จาก (2.3.17) จะเห็นว่าถ้า $|e| >> d_0$ ดังนั้นสัญญาณ $-\tilde{\theta} u$ จะสำคัญกว่าใน e อย่างไรก็ตามถ้า $|e| < d_0$ แล้ว η จะเป็นส่วนสำคัญใน e เพราะฉะนั้นก็เป็นส่วนสำคัญใน $\dot{\tilde{\theta}}$ ด้วย ดังนั้นกฎการปรับ $\theta(t)$ ที่มีเหตุผลคือ จะปรับเมื่อสัญญาณ $-\tilde{\theta} u$ มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับสัญญาณรบกวน η และหยุดปรับเมื่อ e มีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับ η วิธีการปรับนี้เรียกว่า *การปรับปรุงเขตไร้ผลสนอง* (Dead-zone modification) การใช้เขตไร้ผลสนองปรับปรุงกฎการปรับปกติ $\dot{\theta} = \gamma e u$ ซึ่งใช้เมื่อ $\eta = 0$ ดังนี้

$$\dot{\theta} = \gamma u(e+g), \qquad g = \begin{cases} 0, & |e| \ge g_0 \\ -e, & |e| < g_0 \end{cases} \tag{2.3.18}$$

$$e = y - \theta u$$

โดยที่ $g_0 > 0$ เป็นขอบเขตบนของ $|\eta(t)|$ ซึ่งทราบค่า นั่นคือ $g_0 > d_0 \ge \sup_t |\eta(t)|$ ฟังก์ชัน $f(e) = e + g$ เรียกว่า ฟังก์ชันเขตไร้ผลสนอง (Dead-zone function) เพราะว่าเขตไร้ผลสนองทำให้ (2.3.18) ไม่ต่อเนื่องซึ่งอาจทำให้เกิดปัญหาการมีอยู่ของผลเฉลย ทำนองเดียวกับกรณีของการปรับปรุงซิกมาแบบสวิตชิงทางหนึ่งที่จะหลีกเลี่ยงปัญหานี้คือการใช้เขตไร้ผลสนองที่ต่อเนื่อง

$$\dot{\theta} = \gamma u(e+g), \qquad g = \begin{cases} g_0 & \text{ถ้า} \quad e < -g_0 \\ -g_0 & \text{ถ้า} \quad e > g_0 \\ -e & \text{ถ้า} \quad |e| \le g_0 \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

การวิเคราะห์อาศัยหลักการเดียวกับการปรับปรุงซิกมาธรรมดา โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟในสมการ (2.3.5) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า $e,\ \theta,\ \tilde{\theta},\ \dot{\theta} \in L_\infty$ และ $e \in S(d_0^2 + g_0^2)$ ดังนั้นจึงไม่สามารถรับประกันได้ว่า $e \in L_2$ แต่บอกได้ว่าขนาด e ขึ้นกับสัญญาณรบกวนและพารามิเตอร์ในการออกแบบ g_0 แบบนัยกำลังสองเฉลี่ย ยิ่งกว่านั้นเมื่อ $\eta = 0$ นั่นคือ $d_0 = 0$ ก็ยังบอกไม่ได้ว่า $e \in L_2$ เว้นเสียแต่ว่า $g_0 = 0$

เมื่อ $u,\ \eta$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป (Uniformly continuous function) เทียบกับเวลา ขอบเขตของ $|e|$ ที่สภาวะอยู่ตัวจะเป็นไปตามสมการ

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\tau \ge t} |e(\tau)| \le g_0 \qquad (2.3.20)$$

อสมการนี้แสดงให้เห็นว่าที่สภาวะอยู่ตัวขนาดของ e จะขึ้นกับพารามิเตอร์ออกแบบ g_0 ซึ่งเป็นขอบเขตบนของ $|\eta(t)|$ ดังนั้นถ้า g_0 เป็นค่าที่ถูกต้องปรากฏการณ์การโพล่งซึ่งเกิดในกรณีของการปรับปรุงรั่ว (leakage) และโปรเจคชัน (projection) (คือการปรับพารามิเตอร์ในขอบเขตที่กำหนดเพื่อลดฟังก์ชันสมรรถนะ) จะไม่เกิดขึ้นกับกรณีที่ใช้การปรับปรุงเขตไร้ผลสนอง

อุปสรรคที่สำคัญของการใช้เขตไร้ผลสนองคือข้อสมมุติที่ว่าจะต้องรู้ขอบเขตบนของความไม่แน่นอนต่างๆ ถ้าขอบเขตที่ใช้ใหญ่เกินไปความคลาดเคลื่อนในการตาม e ก็จะมีขนาดใหญ่ด้วยแต่ถ้าเล็กเกินไปก็จะไม่สามารถรักษาคุณสมบัติดังที่ได้กล่าวมาแล้วได้ ตัวอย่างของการใช้เขตไร้ผลสนองกับกฎการปรับศึกษาได้จาก [13, 27]

ยังมีวิธีการอื่นๆอีกที่ใช้เพิ่มความมั่นคงให้กับกฎการปรับได้แก่ การโปรเจคชันพารามิเตอร์ (Parameter projection) หรือ นอร์แมลไลซ์แบบพลวัต (Dynamic normalization) เป็นต้น ตัวอย่างการใช้วิธีเหล่านี้ศึกษาได้จาก [2, 22, 28]

ข้อสังเกต 2.2

1. วิธีการเพิ่มความมั่นคงให้กับกฎการปรับที่แสดงไว้สมมุติให้ระบบเป็นสมการเชิงเส้นธรรมดาเพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ ถึงแม้ว่าโดยทั่วไปแล้วระบบส่วนมากจะถูกจำลองด้วยสมการอนุพันธ์แต่หลักการและการวิเคราะห์ก็ยังคงเป็นไปในลักษณะเดียวกัน
2. วิธีการที่กล่าวมาข้างต้นจะไม่สามารถลดความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)$ ได้เลยถ้าการรบกวนมีอยู่ตลอดเวลา

2.4 การเพิ่มประสิทธิภาพของการควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิง

การปรับปรุงตัวควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงให้มั่นคงต่อการรบกวนไม่ได้หมายความว่าสภาวะเริ่มต้น (Transient) และการลู่เข้าของสัญญาณจะดีตามไปด้วย เพราะว่าการพิสูจน์

ความคลาดเคลื่อนแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยไม่ได้หมายความว่าความคลาดเคลื่อนจะเล็กแบบจุดต่อจุดของเวลา ดังนั้นความคลาดเคลื่อนอาจจะมีขนาดใหญ่ในช่วงเวลาสั้นๆได้ที่สภาวะอยู่ตัว ปรากฏการณ์การโพล่งซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวแล้วความคลาดเคลื่อนจะเริ่มแกว่งด้วยขนาดที่ใหญ่ในช่วงเวลาสั้นๆ ดังนั้นปรากฏการณ์การโพล่งไม่สามารถแก้ไขได้ด้วยการมีขอบเขตแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยที่กล่าวไว้ในส่วนที่แล้ว เว้นเสียแต่ว่าสัญญาณอ้างอิงจะมีข้อมูลเพียงพอ หรือใช้เขตไร้ผลสนองกับกฎการปรับ ในส่วนนี้เราจะเสนอตัวอย่างการปรับปรุงตัวควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงที่สามารถลดผลกระทบที่เกิดจากการโพล่งและช่วยให้ความคลาดเคลื่อนที่สภาวะอยู่ตัวดีขึ้น

ระบบ $\dot{x} = a\,x + b\,u + d$

แบบจำลองอ้างอิง $\dot{x}_m = -x_m + r, \quad x_m(0) = 0$

โดยที่ a, b แทนพารามิเตอร์คงที่ไม่ทราบค่า เราจะปรับปรุงสัญญาณควบคุมดังต่อไปนี้

$$u = \theta_0(t)x + c_0(t)r - \frac{s+1}{\tau\, s}\operatorname{sgn}(b)\; e_1 \tag{2.3.21}$$

ด้วยสัญญาณควบคุม (2.3.21) สามารถเขียนสมการความคลาดเคลื่อนได้ดังนี้

$$\dot{e}_1 = -e_1 + b\tilde{\theta}^T\omega - |b|\frac{s+1}{\tau\, s}e_1 + d \tag{2.3.22}$$

โดยที่ $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$, $\theta = [\theta_0, c_0]^{\mathrm{T}}$, $\theta^* = [\theta_0^*, c_0^*]^{\mathrm{T}}$, $\theta_0^* = -\dfrac{a+1}{b}$, $c_0^* = \dfrac{1}{b}$,

$\omega = [x,\ r]^{\mathrm{T}}$, $e_1 = x - x_m$ หรือ

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\left(1+\frac{|b|}{\tau}\right) e_1 + b\tilde{\theta}^T\omega - \frac{|b|}{\tau}\; e_2 + d \\ \dot{e}_2 &= e_1 \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

เราสร้างกฎการปรับ θ_0, c_0 จากฟังก์ชันคล้ายเลียปูนอฟต่อไปนี้

$$V = \frac{\left(e_1+e_2\right)^2}{2} + l_0\frac{e_2^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}^T\tilde{\theta}}{2}|b| \tag{2.3.24}$$

โดยที่ $l_0 > 0$ เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$\begin{aligned} \dot{V} = &-\left(1+\frac{|b|}{\tau}\right) e_1^2 - \frac{|b|}{\tau}\; e_2^2 + \left(e_1+e_2\right) d + e_1 e_2\left(l_0 - 2\frac{|b|}{\tau} - 1\right) \\ &+\left(e_1+e_2\right) b\tilde{\theta}^T\omega + |b|\tilde{\theta}^T \operatorname{Pr}\left[-\left(e_1+e_2\right)\omega\operatorname{sgn}(b)\right] \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

ด้วยการเลือกกฎการปรับแบบโปรเจคชัน (Pr)

$$\dot{\theta} = \operatorname{Pr}\left[-(e_1+e_2)\ \omega\operatorname{sgn}(b)\right]$$

$$= \begin{cases} -(e_1+e_2)\omega\operatorname{sgn}(b) & \text{ถ้า}\ |\theta| < M_0 \ \text{ หรือ } \ \text{ถ้า}\ |\theta| = M_0 \ \text{และ}\ \theta^T(e_1+e_2)\omega\operatorname{sgn}(b) \ge 0 \\ -\left(I - \dfrac{\theta\theta^T}{\theta^T\theta}\right)(e_1+e_2)\omega\operatorname{sgn}(b) & \text{อื่นๆ} \end{cases} \tag{2.3.26}$$

โดยที่ $|\theta(t)| \le 0$ และ $M_0 \ge |\theta^*|$ เลือก $l_0 = \dfrac{2|b|}{\tau}+1$ โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์และคุณสมบัติของโปรเจคชันจะสรุปได้ว่า

$$\dot{V} \;\le\; -\frac{|b|}{2\tau}e_1^2 - \frac{|b|}{2\tau}e_2^2 + \frac{\tau\, d^2}{|b|} \tag{2.3.27}$$

ซึ่งหมายความว่า $e_1,\ e_2,\ \theta \in L_\infty$ และ $e_1,\ e_2 \in S(\tau d^2)$ ดังนั้นการมีขอบเขตแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยสำหรับ $e_1,\ e_2$ สามารถทำให้เล็กได้ด้วยการลด τ ยิ่งกว่านั้น $\omega,\ x \in L_\infty$ ถ้า $d = 0$ แล้ว $e_1,\ e_2 \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$

เราลองมาพิจารณาขอบเขตของ e_1 จาก (2.3.22)

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\tau\, s}{\tau\, s^2 + (\tau + |b|)s + |b|}(w+d) \\ &= \frac{\tau}{|b|-\tau}\left[\frac{|b|}{\tau\, s + |b|} - \frac{1}{s+1}\right](w+d) \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

โดยที่ $w = b\tilde{\theta}^{T}\omega$ จากที่ได้แสดงมาสรุปได้ว่า $\omega \in L_\infty$ สำหรับ $\tau > 0$ ใดๆ เราสามารถมองได้ว่าเป็นการรบกวนที่มีขอบเขต สำหรับ $|b| \ne \tau$ หมายความว่า

$$|e_1(t)| \;\le\; \frac{\tau}{|b|-\tau}\left|\frac{|b|}{\tau}e^{-\frac{|b|}{\tau}t} - e^{-t}\right| |e_1(0)| + \frac{2\tau}{|b|-\tau}(w_0 + d_0) \tag{2.3.29}$$

โดยที่ w_0 และ d_0 เป็นขอบเขตบนของ w และ d ตามลำดับ ความคลาดเคลื่อนในการตามลู่เข้าแบบเลขชี้กำลังสู่เซตตกค้าง

$$S_e \;=\; \left\{ e_1 \,\middle|\, |e_1| \le \frac{2\tau}{|b|-\tau}\left(w_0 + d_0\right) \right\} \tag{2.3.30}$$

ซึ่งขนาดของเซตจะทำให้เล็กลงได้ด้วยการลดขนาดของ τ และในกรณีที่ไม่มีการรบกวน การปรับปรุงนี้ยังรับประกันได้ว่า $e_1 \to 0$ ขณะที่ $t \to \infty$ สำหรับ $\tau > 0$ ใดๆ ด้วยค่า τ ที่เหมาะสมเราจะสามารถลดการโพล่งและช่วยให้การลู่เข้าของความคลาดเคลื่อนดีขึ้น

การปรับปรุงตัวควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดายังมีอีกหลายวิธี วิธีการที่จะนำเสนอต่อไปในบทที่ 4 ก็เป็นวิธีการหนึ่งในการปรับปรุงตัวควบคุมแบบปรับตัวเองชนิดแบบจำลองอ้างอิงธรรมดาให้มีความมั่นคงต่อการรบกวนต่างๆ