บทที่ 5

การปรับขนาดขั้นเวลาอัตโนมัติ

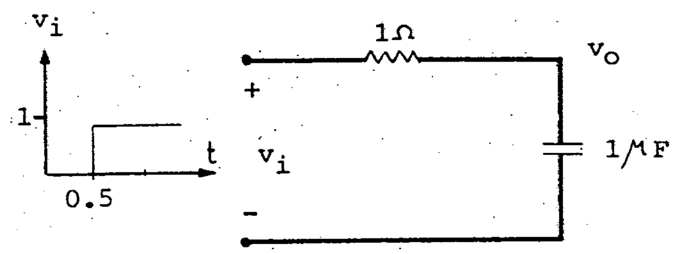
5.1 ประโยชน์ของการใช้ขนาดขั้นเวลาที่เปลี่ยนได้อย่างเหมาะสม

ในบทที่ 3 เราได้กล่าวไว้แล้วว่าการประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยวิธี Backward Euler นั้น ความแม่นยำในการประมาณอนุพันธ์จะมากขึ้นถ้าขั้นเวลา h มีขนาดเล็กลง ซึ่งหมายถึงจำนวนจุดเวลาในช่วงเวลาที่ต้องการหาค่าตอบก็จะมีมากขึ้น เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็ต้องมากขึ้นตามไปด้วย

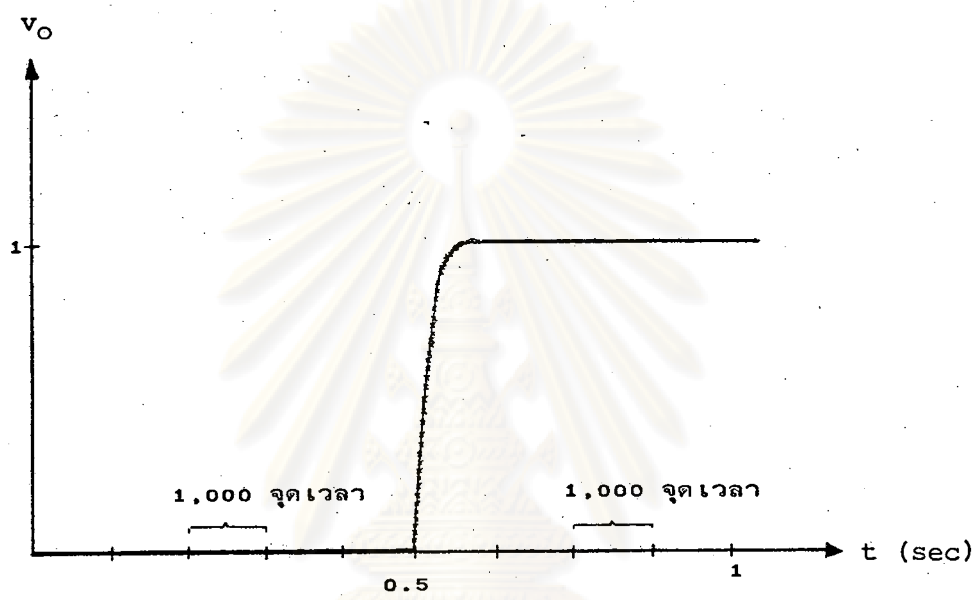
ขนาดที่เหมาะสมของขั้นเวลา h ขึ้นกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของตัวแปรสถานะ x(t) ที่เราประมาณอนุพันธ์ของมันนั่นเอง ถ้า x(t) เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว h ก็ควรมีค่าน้อยๆ และในทางกลับกัน ถ้า x(t) เปลี่ยนแปลงช้าๆ h ก็มีค่ามากๆ ได้

สำหรับวงจรอิเล็กทรอนิกส์โดยทั่วไปแรงดันและกระแสมักมีการเปลี่ยนแปลงเร็วบ้างช้าบ้างตามการเปลี่ยนแปลงของแรงดันและกระแสขาเข้า และการเปลี่ยนแปลงภายในตัววงจรเอง ดังนั้นถ้าเราให้ขนาดขั้นเวลามีค่าคงที่ตลอดช่วงเวลา [O,T] ที่ต้องการคำนวณแล้ว เราจำเป็นต้องกำหนดค่าของ h โดยพิจารณาจากช่วงที่ตัวแปรสถานะของวงจรมีการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด ตัวอย่างเช่นวงจร RC ในรูปที่ 5.1(ก) ซึ่งมีแรงดันขาเข้าเป็น unit step function ช่วงเวลาที่แรงดันขาออก v_o เกิดการเปลี่ยนแปลงมากคือช่วงเวลา $0.5<t\leq 0.5001$ วินาที ดังนั้นเราควรต้องให้ h มีค่าเป็นหนึ่งในสิบของช่วงเวลาดังกล่าว เพื่อให้ได้ค่าตอบที่ใกล้เคียงกับค่าค่าตอบจริง แต่ถ้าเราทำการคำนวณหาคำตอบโดยใช้ h คงที่ตลอดช่วงเวลา 0 ถึง 1 วินาทีแล้ว จำนวนจุดเวลาที่ต้องทำการคำนวณจะมีมากถึง 10000 จุด ซึ่งถ้าแต่ละจุดใช้เวลาคำนวณ 1 วินาที การคำนวณในช่วงเวลา 0 ถึง 1 วินาที จะใช้เวลาทั้งหมดถึง 2.7 ชั่วโมง!

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าการแบ่งจุดเวลาอย่างมากมายในช่วงที่ v_o เปลี่ยนแปลงน้อยๆ หรือไม่เปลี่ยนแปลงเลยนั้น แม้ว่าค่าคำตอบ v_o ที่ได้จะมีความถูกต้องมาก แต่คำตอบที่ได้ก็แทบไม่แตกต่างกับการใช้ h ค่ามากๆ ($\cong$ 0.05 วินาที) สำหรับการคำนวณในช่วงเวลานี้เลย ดังนั้นการวิเคราะห์วงจรโดยใช้ขั้นเวลาที่มีขนาดคงที่ตลอดช่วงเวลาที่ต้องการวิเคราะห์นั้นจะทำให้เราต้องใช้ขั้นเวลาที่มีขนาดเล็กมากเกินความจำเป็นต่อการคำนวณในช่วงที่วงจรมีผลตอบสนองเชิงเวลาเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ทำให้เสียเวลาในการคำนวณมากโดยไม่ได้ประโยชน์เท่าที่ควร ที่สำคัญคือเรามักไม่สามารถทำนายได้ว่าวงจรอิเล็กทรอนิกส์นั้นจะมีผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจรเปลี่ยนแปลงในช่วงไหนมากและมีอัตราการเปลี่ยนแปลงมากน้อยเพียงใด ดังนั้นการกำหนดค่า h ให้พอเหมาะล่วงหน้า จึงเป็นเรื่องยากและอาจเป็นไปไม่ได้เลยสำหรับบางวงจร



(ก)

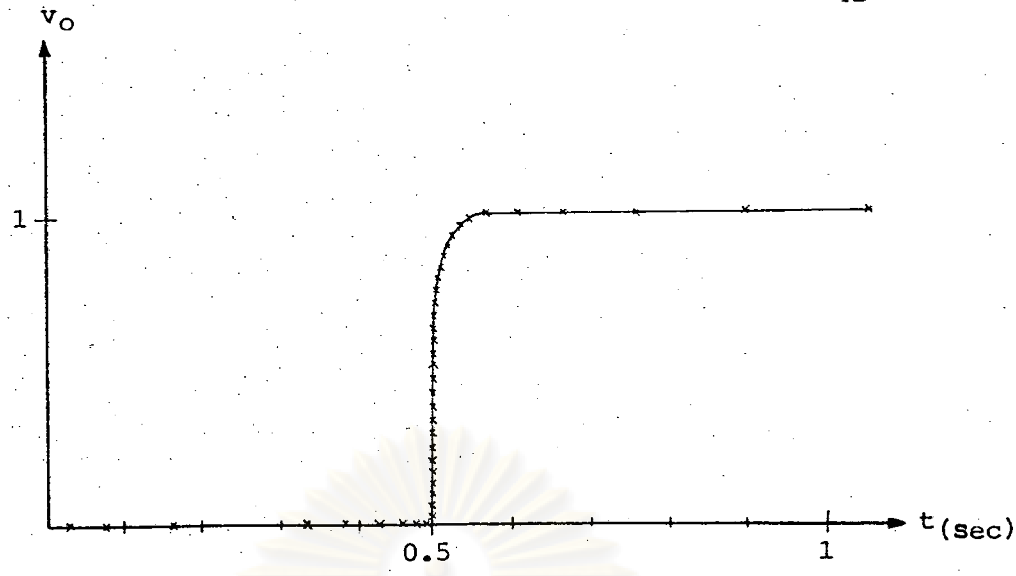


(ข)

รูปที่ 5.1 ตัวอย่างการคำนวณวงจร RC ที่ใช้ h คงที่

ปัญหาทั้งหลายที่กล่าวมาสามารถแก้ไขได้ถ้าเราให้ขนาดขั้นเวลา h เปลี่ยนแปลงได้มากน้อยตามผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจร ยกตัวอย่างวงจรในรูปที่ 5.1(ก) เมื่อให้ค่า h เปลี่ยนแปลงได้ จุดเวลาในการคำนวณจะมีลักษณะคล้ายกับรูปที่ 5.2 จะเห็นว่าจำนวนจุดเวลาที่ใช้คำนวณในช่วง 0 ถึง 1 วินาที จะมีเพียงประมาณ 30 จุด ซึ่งจากผลการทดลองจะได้ความผิดพลาดในการคำนวณไม่เกิน 0.02 โวลท์ และถ้าแต่ละจุดเวลาต้องใช้เวลาในการคำนวณ 1 วินาที แบบเดียวกับในรูปที่ 5.1 แล้ว การคำนวณจะใช้เวลาเพียง 30 วินาทีเท่านั้น

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงกรรมวิธีและขบวนการในการปรับขนาดขั้นเวลาอัตโนมัติโดยอาศัยการพิจารณาจากความชันและอนุพันธ์อันดับสูงของตัวแปรสถานะของวงจร ซึ่งมีชื่อเรียกว่า "Local Truncation Error" หรือ LTE



รูปที่ 5.2 แสดงจุดเวลาในการคำนวณวงจรรูป 5.1(ก)
เมื่อให้ h เปลี่ยนแปลงได้

5.2 ความหมายของ LTE (Local Truncation Error)

เนื่องจากไม่มีวิธีเชิงเลขใดที่สามารถหาค่า x(t) จากสมการ $\dot{x} = f(x,t)$ ได้ถูกต้องจริงๆ ออกมาได้ ถ้าเราสมมุติให้ $x_{t_{n+1}}$ คือ ค่าคำตอบจริงของสมการ $\dot{x} = f(x,t)$ ที่เวลา t_{n+1} และ x_{n+1} คือคำตอบของสมการอนุพันธ์ดังกล่าวที่ได้จากการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์โดยใช้วิธีเชิงเลขประมาณอนุพันธ์ ดังนั้นสมการ

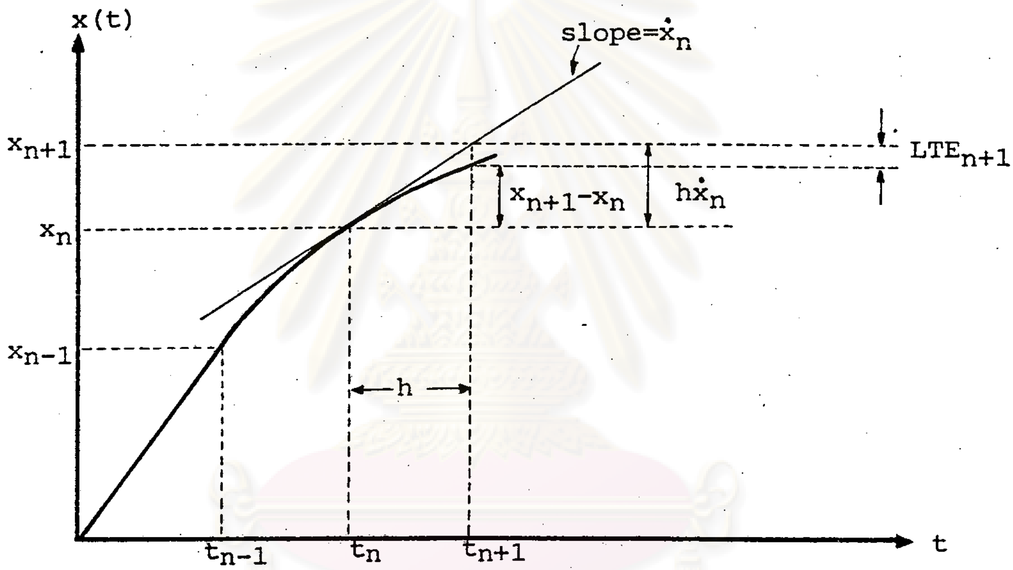
$$\epsilon_{n+1} \triangleq \| x_{t_{n+1}} - x_{n+1} \| \qquad -(5.1)$$

จะแทนความผิดพลาดทั้งหมด (total error) ที่เวลา t_{n+1} ความผิดพลาดนี้จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ round-off error และ truncation error round-off error เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์เอง เนื่องจากมันไม่สามารถเก็บค่าตัวเลขจริงได้ถูกต้องและเราก็ไม่สามารถลดความผิดพลาดแบบนี้ลงได้ด้วย ส่วน truncation error หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า 'algorithmic error' เกิดจากการใช้วิธีเชิงเลขในการประมาณอนุพันธ์ ซึ่งความผิดพลาดแบบนี้เราสามารถคำนวณหาค่าโดยประมาณออกมาได้ เนื่องจาก truncation error มักมีขนาดมากกว่า round-off error มาก ดังนั้นความผิดพลาดส่วนใหญ่จึงเกิดจาก truncation error นี้นั่นเอง

เมื่อสมมุติว่าเราสามารถละเลยค่าของ round-off error ที่จุดเวลา t_{n+1} ได้ และค่าคำตอบที่เวลาในอดีต (t_n, t_{n-1}, -----, t_{n-k}) เป็นค่าคำตอบจริงแล้ว เราจะเรียกความผิดพลาดตามนิยามในสมการ (5.1) ว่า 'Local Truncation Error' หรือเรียกสั้นๆ ว่า 'LTE' ซึ่งหมายถึงความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการคำนวณในแต่ละจุดเวลานั่นเอง เนื่องจากวิธี Backward Euler เป็นวิธีประมาณอนุพันธ์ที่ถูกต้องถึงอันดับหนึ่ง (first order approximation) เท่านั้น เราจึงสามารถพิสูจน์ [7] ได้ว่า

$$LTE_{n+1} \triangleq \| x_{t_{n+1}} - x_{n+1} \| \approx -\frac{1}{2}h^2\ddot{x}_{n+1}$$
$$\approx x_{n+1} - x_n - h\dot{x}_n \qquad -(5.2)$$

โดยที่ h คือขนาดขั้นเวลา $\ddot{x}_{n+1}$ คืออนุพันธ์อันดับสองของค่าคำนวณ (computed value) ที่เวลา $t = t_{n+1}$ และ $\dot{x}_n$ คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของ x(t) ที่เวลา $t = t_n$ ซึ่งได้จากการประมาณอนุพันธ์ด้วยวิธี Backward Euler นั่นเอง จะเห็นได้ว่า LTE มีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ h และการเปลี่ยนแปลงของ x(t) ว่ามากหรือน้อยเพียงใด ดังแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 ลักษณะทางเรขาคณิตของการคำนวณค่า LTE_{n+1}

5.3 <u>การเลือกขนาดขั้นเวลาโดยใช้ LTE</u>

จากสมการ (5.2) จะเห็นว่า เราต้องคำนวณหา x_{n+1} ก่อนแล้วจึงนำมาประมาณค่าความผิดพลาดคือ LTE_{n+1} ได้ ถ้าหากความผิดพลาดนี้มีขนาดมากเกินกว่าค่าที่เรากำหนดไว้ซึ่งสมมุติว่าเป็นค่า δ แสดงว่าขั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณ x_{n+1} นั้นใหญ่เกินไป ต้องยกเลิก (reject) ค่าของ x_{n+1} เสียและปรับขนาดขั้นเวลาเสียใหม่ตามสูตร [7] ดังต่อไปนี้

$$\hat{h} = h \cdot \sqrt{\frac{\delta}{LTE_{n+1}}} \qquad -(5.3)$$

โดยที่ $\hat{h}$ คือขนาดขั้นเวลาใหม่ จากนั้นจึงนำขั้นเวลาใหม่นี้ไปใช้ในการคำนวณหาค่า x_{n+1} อีกครั้งหนึ่ง ค่า x_{n+1} ใหม่ที่ได้นี้ก็จะต้องถูกนำไปทดสอบความผิดพลาดตามกรรมวิธีเดิม จนกว่าจะได้ค่า LTE_{n+1} น้อยกว่าค่า δ

ในกรณีที่เราคำนวณได้ LTE_{n+1} มีค่าน้อยกว่า δ นั้น เราจะยอมรับค่า x_{n+1} และก็ยังคงใช้สมการ (5.3) ในการคำนวณหาค่าขนาดขั้นเวลาใหม่สำหรับใช้คำนวณ x_{n+2} ต่อไปด้วย ซึ่งขั้นเวลาใหม่นี้จะมีขนาดใหญ่ขึ้นกว่าเดิม กรรมวิธีที่กล่าวมานี้จะทำให้เราสามารถปรับขนาดของขั้นเวลาให้ใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงได้อย่างอัตโนมัติตามความผิดพลาดสูงสุด (δ) ที่กำหนดไว้

ในทางปฏิบัติ เราอาจดัดแปลงการปรับขนาดขั้นเวลา h โดยใช้ตัวคูณประกอบดังนี้

$$h = w\hat{h} \; : \; \text{โดยที่} \; w \leqslant 1 \qquad (5.4)$$

การดัดแปลงนี้ จะช่วยมิให้ h ขยายใหญ่ขึ้นเร็วเกินไปในกรณีที่ LTE_{n+1} มีค่าน้อยกว่า δ มาก ขณะเดียวกัน จะทำให้ h มีขนาดเล็กลงเร็วขึ้นในกรณีที่ LTE_{n+1} มากกว่า δ ทั้งนี้เพื่อช่วยไม่ให้การคำนวณมีความผิดพลาดเกินกำหนดบ่อยครั้งจนเกินไป

เนื่องจาก LTE เกิดจากการประมาณอนุพันธ์ของอุปกรณ์พลวัตด้วยวิธีเชิงเลข ดังนั้นการหา LTE จึงคำนวณได้จากค่าที่เปลี่ยนแปลงไปของตัวแปรสถานะทุกตัวในสมการวงจรพลวัต ซึ่งเป็นแรงดันคร่อมตัวเก็บประจุ และกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ จากสมการที่ (5.2) จะเห็นว่า เราต้องเก็บค่าของตัวแปรสถานะที่เวลา t_n(v_{C_n} และ i_{L_n}) ไว้ใช้ในการคำนวณค่า LTE ที่เวลา t_{n+1} ด้วย สำหรับอุปกรณ์ไม่เชิงเส้นเราก็ต้องเก็บภาวะของอุปกรณ์ที่เวลา t_n เพิ่มขึ้นมาอีก เพื่อให้สามารถตั้งต้นการคำนวณที่เวลา t_n ใหม่ได้อย่างถูกต้องนั่นเอง ส่วนการกำหนดค่า δ เพื่อใช้เปรียบเทียบ LTE ของแรงดันและ LTE ของกระแสนั้นต้องแยกกันเพราะมีหน่วยวัดต่างกัน แต่การปรับขนาดขั้นเวลาก็จะยังคงใช้กรรมวิธีเดียวกัน

เราสามารถสรุปขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรพลวัตที่มีการปรับขนาดขั้นเวลาอย่างอัตโนมัติได้ดังนี้

ขั้นที่ 1) $t_{n+1} = t_n + h$

ขั้นที่ 2) วิเคราะห์สมการวงจรที่เวลา t_{n+1} โดยวิธีประมาณอนุพันธ์

ขั้นที่ 3) คำนวณ LTE_{n+1} และ $\hat{h}$ สำหรับตัวแปรสถานะแต่ละตัวตามสมการ 5.2 และ 5.3 ตามลำดับ

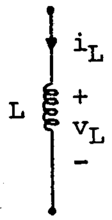
ขั้นที่ 4) ถ้า $\hat{h} > h$ แสดงว่าใช้ได้ ให้ $h = \hat{h}$ และ $n = n+1$ ไปที่ 1)

มิฉะนั้น $h = \hat{h}$ ทำการคำนวณซ้ำที่จุดเวลาเดิม ไปที่ 1)

5.4 LTE ของอุปกรณ์พลวัต

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการคำนวณค่า LTE สำหรับอุปกรณ์พลวัตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ ตัวเหนี่ยวนำ ตัวเก็บประจุ ออปแอมป์ และทรานซิสเตอร์ สมการที่ใช้ในการคำนวณก็คือสมการที่ (5.2) และ (5.3) ดังแสดงต่อไปนี้

ตัวเหนี่ยวนำ



จากสมการ (5.2) จะได้

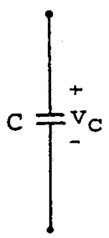
$$LTE_{n+1} = i_{L_{n+1}} - i_{L_n} - h\dot{i}_{L_n}$$

$$= i_{L_{n+1}} - i_{L_n} - \frac{h}{L}v_{L_n} \quad \text{แอมป์} \qquad -(5.5)$$

โดยที่ $i_{L_{n+1}}$, i_{L_n} และ v_{L_n} เป็นค่าของตัวแปรสมการวงจร

ตัวเก็บประจุ

จากสมการที่ (5.2) จะได้

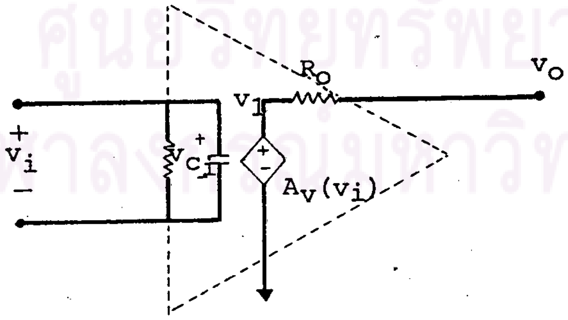


$$LTE_{n+1} = v_{C_{n+1}} - v_{C_n} - h\dot{v}_{C_n} \quad \text{โวลท์} \qquad -(5.6)$$

$$\dot{v}_{C_n} = \frac{v_{C_n} - v_{C_{n-1}}}{h}$$

และ $v_{C_{n+1}}$, v_{C_n} และ $v_{C_{n-1}}$ เป็นค่าของตัวแปรสมการวงจร

ออปแอมป์



เนื่องจากออปแอมป์มีตัวเก็บประจุขาเข้า (C_i) อยู่หนึ่งตัวและมีขั้วของอัตราขยายลูปเปิดอยู่ 2 ขั้ว ดังนั้น LTE ของออปแอมป์จะมีได้ 3 ค่า คือ LTE ที่เกิดจากการประมาณอนุพันธ์ของ v_{C_i} ค่าหนึ่ง และ LTE ของการประมาณสมการอนุพันธ์ที่เกิดจากขั้วแต่ละตัวอีก 2 ค่า LTE ของ v_{C_i} สามารถหาได้โดยใช้สมการ (5.6) ส่วน LTE ของสมการอนุพันธ์เนื่องจากขั้วทั้งสองจะหาได้ดังต่อไปนี้

จากสมการด้านขาออกของออปแอมป์ขณะอยู่ในภาวะไวงานเราได้

$$v_1 = \frac{A_o(v_i - v_j)}{(1 + s/\rho_1)(1 + s/\rho_2)} \; ; \; v_1 = v_o + i_o R_o \qquad -(5.7)$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของสมการอนุพันธ์คือ

$$\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \ddot{v}_1 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \cdot \dot{v}_1 + v_1 = A_o(v_i - v_j) \qquad -(5.8)$$

เมื่อใช้ Backward Euler ประมาณอนุพันธ์ในสมการ (5.8) จะได้

$$\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \bullet \frac{\dot{v}_{1_{n+1}} - \dot{v}_{1_n}}{h} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \cdot \frac{v_{1_{n+1}} - v_{1_n}}{h} + v_1 = A_o(v_{i_{n+1}} - v_{j_{n+1}}) \qquad -(5.9)$$

เป็นสมการเชิงเลขอันดับสอง (2nd order numerical equation) ซึ่งอยู่ในรูปแรงดันขาออกและอนุพันธ์ที่เกิดเนื่องจากขั้วทั้งสอง ดังนั้น LTE ของสมการที่ 5.9 จึงมี 2 ชุดคือ LTE ของ $v_{1_{n+1}}$ และ LTE ของ $\dot{v}_{1_{n+1}}$ แต่เนื่องจาก LTE ของ $\dot{v}_{1_{n+1}}$ มีหน่วยเป็นโวลท์ต่อวินาที ดังนั้นเพื่อทำให้มีหน่วยเป็นโวลท์เหมือนกัน เราจึงเปลี่ยนให้อยู่ในรูป LTE ของ $h\dot{v}_{1_{n+1}}$

การคำนวณหา LTE ของ $v_{1_{n+1}}$ และ $h\dot{v}_{1_{n+1}}$ จะมีขั้นตอนดังนี้คือ

ขั้นที่ 1: จากสมการวงจรแก้สมการหาคำตอบ เราจะได้ค่า $V_{o_{n+1}}$ และ $I_{o_{n+1}}$

ขั้นที่ 2: หา $v_{1_{n+1}} = v_{o_{n+1}} + i_{o_{n+1}} R_o$

ขั้นที่ 3: คำนวณ $\dot{v}_{1_{n+1}}$ จาก $\dfrac{v_{1_{n+1}} - v_{1_n}}{h}$

และ $\ddot{v}_{1_n}$ จาก $\dfrac{\dot{v}_{1_n} - \dot{v}_{1_{n-1}}}{h} \cong -\dfrac{2v_{1_n}}{h^2} + \dfrac{2v_{1_{n-1}}}{h^2} + \dfrac{2\dot{v}_{1_n}}{h}$

ขั้นที่ 4: คำนวณ LTE ของ $v_{1_{n+1}}$ จาก $v_{1_{n+1}} - v_{1_n} - h\dot{v}_{1_n}$ โวลท์

ขั้นที่ 5: คำนวณ LTE ของ $h\dot{v}_{1_{n+1}}$ จาก

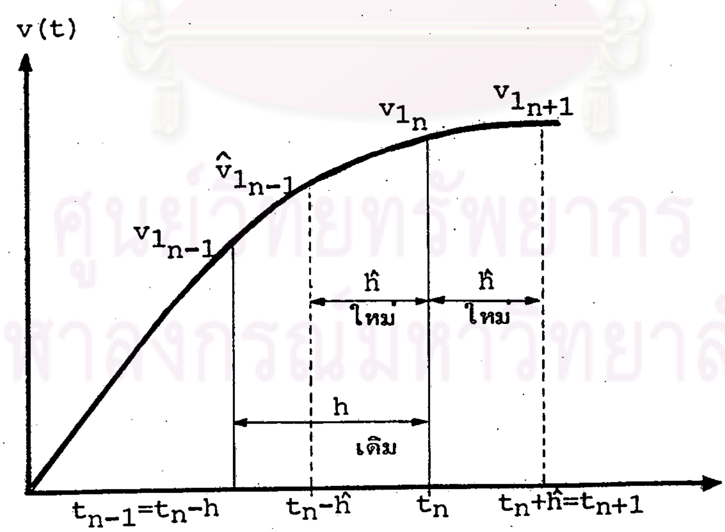
$$\begin{aligned} \text{LTE ของ } h.\dot{v}_{1_{n+1}} &= h(\dot{v}_{1_{n+1}} - \dot{v}_{1_n} - h\ddot{v}_{1_n}) \\ &= v_{1_{n+1}} - v_{1_n} - h\dot{v}_{1_n} + 2v_{1_n} - 2\hat{v}_{1_{n-1}} - 2h\dot{v}_n \\ &= v_{1_{n+1}} + v_{1_n} - 2\hat{v}_{1_{n-1}} - 3h\dot{v}_{1_n} \text{ โวลท์} \end{aligned} \qquad (5.10)$$

จากสมการที่ (5.10) จะเห็นว่าในการคำนวณหา LTE ของออปแอมป์ที่เวลา t_{n+1} ค่าที่เราต้องเก็บเพิ่มขึ้นมาจากการเก็บ v_{1_n} และ $\dot{v}_{1_n}$ คือ $\hat{v}_{1_{n-1}}$ ในที่นี้ $\hat{v}_{1_{n-1}}$ หมายถึงค่าของ v_1 ที่เวลา $t_n-\hat{h}$ ซึ่งอาจไม่เท่ากับค่าของ v_1 ที่เวลา t_{n-1} ก็ได้ เนื่องจากมีการเปลี่ยนขนาดขั้นเวลาอยู่ตลอดเวลาดังแสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 5.4 ด้วยเหตุนี้เราจึงไม่สามารถแทนค่า $\hat{v}_{1_{n-1}}$ ด้วย $v_{1_{n-1}}$ ได้โดยตรง จำเป็นต้องคำนวณค่าของ $\hat{v}_{1_{n-1}}$ โดยใช้วิธี interpolation ตามสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{v}_{1_{n-1}} = (1-\alpha^2)v_{1_n} + \alpha^2 v_{1_{n-1}} + h(-1+\alpha)\dot{v}_{1_n}$$

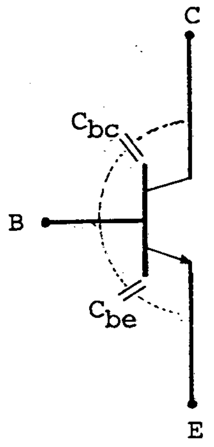
$$\text{โดยที่} \qquad \alpha = \frac{t_{n+1}-t_n}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\hat{h}}{h} \qquad (5.11)$$

การที่เราต้องคำนวณค่าของ $\hat{v}_{1_{n-1}}$ ใหม่ทุกครั้งที่มีการปรับค่า h ทำให้เรามุ่งสนใจเฉพาะวิธีการประมาณอนุพันธ์ด้วยวิธีที่มีความถูกต้องเพียงอันดับหนึ่งอย่าง Backward Euler เท่านั้น เพราะการประมาณอนุพันธ์ที่มีความถูกต้องอันดับสูงขึ้นไปจะมีเทอมของ v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_{n-k} เพิ่มขึ้นตามอันดับที่สูงขึ้น ทำให้การปรับค่า h แต่ละครั้งมีขั้นตอนการคำนวณเพิ่มขึ้นมามาก จึงไม่คุ้มกับการนำมาใช้



รูปที่ 5.4 แสดงการปรับขนาดขั้นเวลากับการปรับค่า $\hat{v}_{1_{n-1}}$

<u>ทรานซิสเตอร์</u>



สำหรับทรานซิสเตอร์ อุปกรณ์พลวัตในวงจรสมมูลของมันก็คือตัวเก็บประจุที่รอยต่อ เบส-อิมิตเตอร์ และเบส-คอลเลกเตอร์ ดังนั้น LTE ของทรานซิสเตอร์ ก็คือ LTE ของแรงดันที่เบส-อิมิตเตอร์ และเบส-คอลเลกเตอร์นั่นเอง โดยที่

$$\text{LTE ของ } v_{BE_{n+1}} = v_{BE_{n+1}} - v_{BE_n} - h_\circ \dot{v}_{BE_n}$$

และ

$$\text{LTE ของ } v_{BC_{n+1}} = v_{BC_{n+1}} - v_{BC_n} - h_\circ \dot{v}_{BC_n}$$

ค่าที่ต้องเก็บไว้สำหรับการคำนวณ LTE ที่เวลา t_{n+1} ก็คือ v_{BE_n}, $\dot{v}_{BE_n}$, v_{BC_n} และ $\dot{v}_{BC_n}$