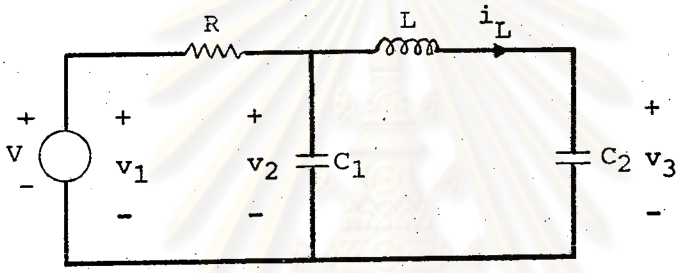
บทที่ 3

การวิเคราะห์วงจรพลวัตเชิงเส้น

3.1 บทนำ

ในบทที่ 2 เราได้กล่าวไว้แล้วว่าวงจรพลวัตเป็นวงจรที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรบางตัวปรากฏอยู่ในสมการวงจร ตัวอย่างของวงจรพลวัตเชิงเส้นแสดงไว้ในรูปที่ 3.1 ซึ่งมีตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุเป็นอุปกรณ์พลวัตนั่นเอง ดังนั้นการวิเคราะห์วงจรพลวัตจึงเกี่ยวข้องกับการแก้สมการอนุพันธ์ซึ่งใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนกว่าการแก้สมการพีชคณิต



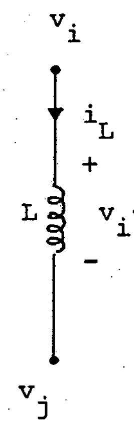
รูป 3.1 ตัวอย่างของวงจรพลวัตเชิงเส้น

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงตราประจำอุปกรณ์ของอุปกรณ์พลวัตเชิงเส้น โดยจะพิจารณาเฉพาะตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุเท่านั้น ส่วนทรานซิสเตอร์ ไดโอด และออปแอมป์ ที่เป็นอุปกรณ์พลวัตเพราะมีตัวเก็บประจุภายในอยู่ด้วยนั้น เราจะกล่าวถึงอย่างละเอียดในบทถัดไป การสร้างสมการของวงจรพลวัตก็ยังคงใช้วิธีโมดิฟายด์โนดัลเช่นเดียวกับการสร้างสมการของวงจรต้านทาน แต่เนื่องจากสมการของวงจรพลวัตเป็นสมการอนุพันธ์ เราจึงต้องกล่าวถึงการนำคณิตศาสตร์เชิงเลข (numerical mathematics) มาประมาณสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตล้วนๆ ซึ่งทำให้เราสามารถแก้สมการเมตริกด้วยวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยูเพื่อหาคำตอบของวงจรได้ เช่นเดียวกับการวิเคราะห์วงจรต้านทาน

3.2 ตราประจำอุปกรณ์แบบอนุพันธ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ

เรายังคงใช้หลักการของวิธีโมดิฟายด์โนดัลในการสร้างสมการของวงจรพลวัตเช่นเดียวกับที่ใช้กับวงจรต้านทาน ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจึงกล่าวถึงเฉพาะตราประจำอุปกรณ์ของส่วนที่เพิ่มเติมขึ้นมาซึ่งได้แก่ ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุเท่านั้น สำหรับตัวเหนี่ยวนำนั้นเนื่องจากมีสมการของอุปกรณ์ (device equation) อยู่ในรูปอนุพันธ์ของกระแสดังแสดงในรูปที่ 3.2 (ก) ดังนั้นเราจึงให้กระแสของตัวเหนี่ยวนำเป็นตัวแปรของวงจรด้วยเพื่อให้สามารถสร้างตราประจำอุปกรณ์ได้ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (ข) ส่วนตัวเก็บประจุนั้นมีสมการของอุปกรณ์อยู่ในรูปของอนุพันธ์ของแรงดันอยู่แล้วดังแสดงในรูป 3.2 (ค) จึงไม่จำเป็นต้องเพิ่มตัวแปรวงจรเข้าไปอีก ตราประจำอุปกรณ์ของตัวเก็บประจุจึงมีรูปแบบตามที่แสดงในรูปที่

3.2 (ง) เนื่องจากตราประจำอุปกรณ์ที่ได้นี้มีอนุพันธ์ติดอยู่เราจึงเรียกตราประจำอุปกรณ์ประเภทนี้ว่า "ตราประจำอุปกรณ์แบบอนุพันธ์"

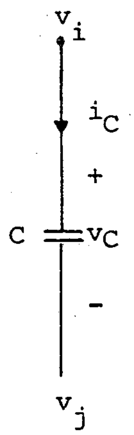


$$v_i - v_j = L\frac{di_L}{dt}$$

	v_i	v_j	i_L	b
KCL_i			1	
KCL_j			-1	
BR	1	-1	$-L\frac{d}{dt}$	

(ก) ตัวเหนี่ยวนำ

(ข) ตราประจำอุปกรณ์ของตัวเหนี่ยวนำ



$$i_C = C\frac{d}{dt}(v_i - v_j)$$

	v_i	v_j	b
KCL_i	$C\frac{d}{dt}$	$-C\frac{d}{dt}$	
KCL_j	$-C\frac{d}{dt}$	$C\frac{d}{dt}$	

(ค) ตัวเก็บประจุ

(ง) ตราประจำอุปกรณ์ของตัวเก็บประจุ

รูปที่ 3.2 ตราประจำอุปกรณ์แบบอนุพันธ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ

เราสามารถสร้างสมการวงจรของวงจรพลวัตเชิงเส้นได้โดยง่าย ถูกต้อง และรวดเร็วโดยนำตราประจำอุปกรณ์เหล่านี้มาใช้ร่วมกันตามกรรมวิธีแบบเดียวกับในบทที่ 2 ตัวอย่างเช่นสมการวงจรตามวิธีโมดิฟายด์โนดัลของวงจรในรูปที่ 3.1 จะเขียนได้โดยเอาตราประจำอุปกรณ์ของแรงดัน (รูปที่ 2.5ก) ตัวต้านทาน R (รูปที่ 2.5ค) ตัวเหนี่ยวนำ L (รูปที่ 3.2ข) และตัวเก็บประจุ C_1, C_2 (รูปที่ 3.2ง) มารวมกันเป็นสมการดังแสดงในรูปที่ 3.3

	v_1	v_2	v_3	i_V	i_L	b
KCL_1	$\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{R}$		1		
KCL_2	$-\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}+C1\frac{d}{dt}$			1	
KCL_3			$C2\frac{d}{dt}$		-1	
BR_V	1					v
BR_L		1	-1		$-L\frac{d}{dt}$	

รูปที่ 3.3 สมการของวงจรพลวัตเชิงเส้นในรูปที่ 3.1

ข้อดีประการหนึ่งของการกำหนดตัวแปรและสมการตามวิธีโมดิฟายด์โนดัลก็คือ ในกรณีที่ต้องการศึกษาจุดทำงานสงบ (dc operating point) ของวงจรพลวัต เราเพียงแต่แทนอนุพันธ์ $\frac{d}{dt} = 0$ ก็จะได้สมการพีชคณิตของวงจรที่จะนำมาคำนวณหาจุดทำงานสงบได้ทันที จากตราประจำอุปกรณ์ในรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าตัวเหนี่ยวนำจะกลายเป็นวงจรลัด และตัวเก็บประจุจะกลายเป็นวงจรเปิด ซึ่งตรงกับความเป็นจริงในการวิเคราะห์จุดทำงานสงบ

3.3 การแก้สมการของวงจรพลวัตด้วยวิธีเชิงเลข

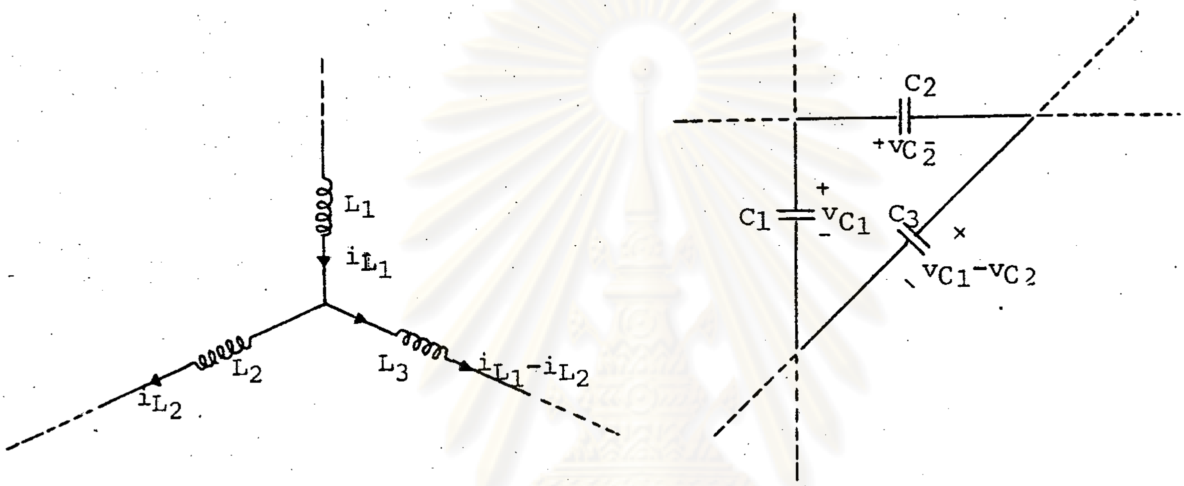
เมื่อพิจารณาสมการในรูปที่ 3.3 เราจะเห็นว่า สมการชุดนี้ประกอบด้วยสมการในรูปพีชคณิตและรูปอนุพันธ์รวมกันอยู่ เราเรียกสมการประเภทนี้ว่า สมการอนุพันธ์-พีชคณิต (differential-algebraic equation) ปกติแล้วการใช้วิธีโมดิฟายด์โนดัลในการสร้างสมการของวงจรพลวัตจะให้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตเสมอ เราเรียกตัวแปรที่มีอนุพันธ์ของมันปรากฏอยู่ในสมการว่า 'ตัวแปรสถานะ (state variable)' จะเห็นว่าตัวแปรสถานะในที่นี้ก็คือ แรงดันของโนดที่ปลายทั้งสองข้างของตัวเก็บประจุ และกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำนั่นเอง ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างในตอนที่ 3.2

วิธีหนึ่งที่อาจนำมาใช้แก้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตคือ การเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ล้วนๆ อย่างเดียวเสียก่อน ซึ่งจะมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad -(3.1)$$

สมการ (3.1) นี้มีชื่อเรียกว่า 'สมการสถานะ (state equation)' โดยมี x เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรสถานะ u เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรขาเข้า และ A,B เป็นเมตริกค่าคงที่ จากนั้นจึงใช้วิธีการเชิงเลขต่างๆ แก้สมการสถานะนี้ แล้วจึงนำคำตอบที่ได้มาคำนวณหาค่าตัวแปรอื่นๆ ของวงจรภายหลัง รายละเอียดของการแก้สมการสถานะเชิงเส้นนี้จะพบได้ในหนังสือที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เชิงเลขและทฤษฎีควบคุมเช่น [7] ข้อเสียของวิธีนี้อยู่ตรง

ที่ขั้นตอนการแปลงสมการอนุพันธ์-พีชคณิตให้อยู่ในรูปสมการสถานะนั้นซับซ้อนยุ่งยาก ที่สำคัญคือจำนวนสมการในสมการสถานะนั้นอาจน้อยกว่าจำนวนสมการอนุพันธ์ในสมการอนุพันธ์-พีชคณิตเดิมก็ได้ หรือพูดอีกอย่างหนึ่งก็คือ จำนวนตัวแปรสถานะในสมการสถานะอาจน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่มีอนุพันธ์ของสมการอนุพันธ์-พีชคณิตเดิม ตัวอย่างที่เห็นได้ง่ายๆ คือ ในกรณีที่วงจรพลวัตมีคัทเซท (cut-set) ของตัวเหนี่ยวนำล้วนๆ ดังในรูปที่ 3.4 (ก) หรือ ลูป (loop) ของตัวเก็บประจุล้วนๆ ดังในรูปที่ 3.4 (ข) ตัวแปรสถานะในกรณีเหล่านี้จะน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่มีอนุพันธ์ในสมการอนุพันธ์-พีชคณิตอยู่เท่ากับจำนวนคัทเซทและลูปทั้งหมดที่มีคุณสมบัติดังกล่าว การพัฒนาโปรแกรมให้สามารถตรวจสอบและแก้ไขกรณีเหล่านี้จึงทำได้ยาก



รูปที่ 3.4 ตัวอย่างของวงจรพลวัตที่มีจำนวนตัวแปรสถานะน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่มีอนุพันธ์ในสมการวงจร

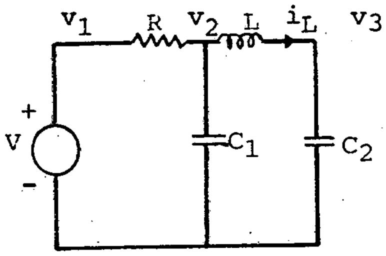
ด้วยสาเหตุนี้ การใช้วิธีการดังกล่าวในการแก้สมการของวงจรพลวัตจึงไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการพัฒนาโปรแกรมบนไมโครคอมพิวเตอร์

วิธีที่เราจะใช้แก้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตก็คือ วิธีประมาณอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงเลขตามแบบของ Backward Differential Formulas [6], [7] ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \qquad -(3.2)$$

โดยที่ h เป็นค่าคงที่ที่มีขนาดเล็กและมีชื่อเรียกว่า 'ขั้นเวลา (timestep)' สูตรการประมาณอนุพันธ์ตามสมการ (3.2) เป็นที่รู้จักทั่วไปในชื่อว่า Backward Euler โดยการแทนอนุพันธ์ของตัวแปรทุกตัวในสมการอนุพันธ์-พีชคณิตด้วยการประมาณแบบ Backward Euler จะทำให้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตเปลี่ยนเป็นสมการพีชคณิตล้วนๆ โดยที่มีตัวแปรที่เวลา t คือ x(t) เป็นตัวแปรของสมการที่ต้องการหาค่า ส่วนตัวแปรที่เวลา t-h คือ x(t-h) นั้นเป็นค่าคงที่เพราะผ่านการคำนวณค่ามาแล้ว ดังแสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 3.5 ซึ่งเป็นการประมาณสมการอนุพันธ์-พีชคณิตในรูปที่ 3.3 ด้วยวิธี Backward Euler ทำให้ได้สมการอยู่

ในรูปสมการพีชคณิตล้วนๆ และมีแรงดันในดทุกโนด กระแสของแหล่งกำเนิดแรงดัน และกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา t_{n+1} เป็นตัวแปรของวงจรที่ต้องการหาค่า



	$v_{1_{n+1}}$	$v_{2_{n+1}}$	$v_{3_{n+1}}$	$i_{V_{n+1}}$	$i_{L_{n+1}}$	b
KCL_1	$\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{R}$		-1		
KCL_2	$-\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}+\frac{C_1}{h}$			1	$\frac{C_1}{h} \cdot v_{2_n}$
KCL_3			$\frac{C_2}{h}$		-1	$\frac{C_2}{h} v_{3_n}$
BR_V	1					V
BR_L		1	-1		$-\frac{L}{h}$	$-\frac{L}{h} \cdot i_{L_n}$

รูปที่ 3.5 ตัวอย่างของสมการเมตริกของวงจร RLC ที่ได้จากการประมาณอนุพันธ์

จากวิธีการดังกล่าว เราสามารถสรุปขั้นตอนโดยย่อของวิธีการแก้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตในช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = T$ ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนด $h =$ ค่าคงที่ขนาดเล็กๆ และ $t =$ เวลาเริ่มต้น $= 0$

ขั้นที่ 2 $t = t + h$

ขั้นที่ 3 ประมาณอนุพันธ์ในสมการอนุพันธ์-พีชคณิตด้วย Backward Euler

ขั้นที่ 4 แก้สมการพีชคณิตโดยวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู

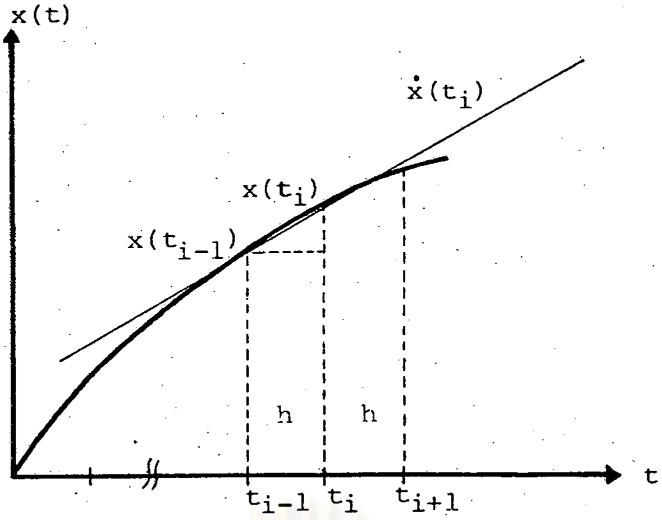
ขั้นที่ 5 เก็บค่าคำตอบของสมการวงจร

ขั้นที่ 6 ถ้า $t < T$ ไปที่ขั้นที่ 2

ขั้นที่ 7 เสร็จสิ้นการคำนวณ

วิธีในการแก้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตที่เวลา $t = 0$ ถึง $t = T$ นี้สามารถแสดงให้เห็นง่ายๆ ในเชิงเรขาคณิต ดังแสดงในรูปที่ 3.6 จะเห็นว่าเราแบ่งช่วงเวลา $[0,T]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ ได้แก่ $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\ldots\ldots,[t_{N-1},t_N]$ โดยที่ $t_0,t_1,t_2,\ldots t_N$ เรียกว่า " จุดเวลา(time point)" และช่วงเวลาย่อยๆ ระหว่างจุดเวลาสองจุดที่อยู่ติดกันคือขนาดขั้นเวลา (step size) ซึ่งมีค่าเท่ากับ h การประมาณอนุพันธ์ที่เวลา t_i คือ $x(t_i)$ ก็คือการประมาณลักษณะของฟังก์ชัน $x(t)$ ให้มีความชันคงที่ในแต่ละช่วงเวลาย่อยๆ $[t_i, t_{i+1}]$

การประมาณอนุพันธ์ตามสมการ(3.2)นั้นเป็นเพียงการประมาณค่าของ $x(t)$ ที่มีความถูกต้องแบบอันดับหนึ่ง (first order approximation) เท่านั้น การประมาณจะมี



รูปที่ 3.6 การแก้สมการอนุพันธ์-พีชคณิตที่เวลา t=0 ถึง t=T โดยวิธีคณิตศาสตร์เชิงเลข

ความแม่นยำมากขึ้นเมื่อ h มีขนาดเล็กลงซึ่งหมายถึงจำนวนจุดเวลาก็จะมีมากขึ้น เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็ต้องมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นการกำหนดขนาด h ให้พอเหมาะจึงขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน x(t) ถ้าฟังก์ชัน x(t) เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว h ก็ควรมีค่าน้อยๆ และถ้า x(t) เปลี่ยนแปลงช้าๆ h ก็มีค่ามากๆ ได้ นั่นคือขนาดของ h อาจมีค่าไม่คงที่ได้ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของ x(t) ซึ่งวิธีการหาค่าของ h ที่เหมาะสมนี้เราจะกล่าวไว้ในบทที่ 5

ความจริงแล้ววิธีการประมาณอนุพันธ์มีมากมายหลายวิธี แต่วิธี Backward Euler เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากที่สุดเพราะเข้าใจง่าย ไม่ซับซ้อน และมีเสถียรภาพเชิงเลข (numerical stability[7])ที่ดีมากอีกด้วย เราจึงเลือกใช้วิธีนี้ในการพัฒนาโปรแกรม

3.4 <u>ตราประจำอุปกรณ์แบบพีชคณิตของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ</u>

เราอาจนำเอาวิธีการประมาณอนุพันธ์แบบเชิงเลข มาประมาณสมการอนุพันธ์-พีชคณิตของวงจรพลวัตให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตโดยตรง แต่เนื่องจากการสร้างสมการของวงจรพลวัตด้วยวิธีโมดิฟายด์โนดัลนั้น ค่าของอุปกรณ์ต่างๆ จะถูกนำไปสร้างสมการวงจรตามตราประจำอุปกรณ์ของอุปกรณ์นั้นๆ และอนุพันธ์ในสมการของวงจรพลวัตก็มาจากตราประจำอุปกรณ์แบบอนุพันธ์ของอุปกรณ์พลวัต ดังนั้นจึงเป็นการง่ายกว่าที่เราจะใช้วิธีการประมาณอนุพันธ์กับตราประจำอุปกรณ์แบบอนุพันธ์ของอุปกรณ์พลวัตก่อนที่จะนำไปสร้างสมการวงจรซึ่งจะทำให้ได้สมการวงจรในรูปพีชคณิตได้โดยตรง และสามารถนำไปแก้สมการหาคำตอบได้ทันที ด้วยเหตุนี้เราจึงต้องเขียนตราประจำอุปกรณ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุที่ผ่านการประมาณอนุพันธ์ไปแล้ว ซึ่งเราจะเรียกว่า "ตราประจำอุปกรณ์แบบพีชคณิต" ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

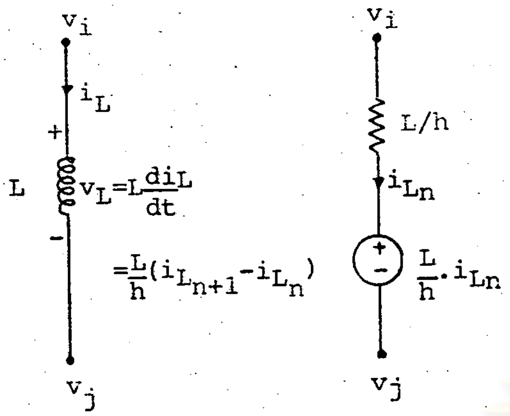
<u>สำหรับตัวเหนี่ยวนำ</u> (รูปที่ 3.7)

$$v_L = v_i - v_j = L\frac{di_L}{dt} \qquad -(3.3)$$

แทนสมการที่ (3.2) ในสมการ (3.3) โดยที่ $x_t = x_{n+1} = i_{L_{n+1}}$ จะได้

$$v_{L_{n+1}} = v_{i_{n+1}} - v_{j_{n+1}} = \frac{L}{h}(i_{L_{n+1}} - i_{L_n}) \qquad -(3.4)$$

สมการที่ (3.4) สามารถตีความเป็นวงจรสมมูลและตราประจำอุปกรณ์ได้ดังนี้



	$v_{i_{n+1}}$	$v_{j_{n+1}}$	$i_{L_{n+1}}$	b
KCL_i			1	
KCL_j			-1	
BR	1	-1	-L/h	$-\frac{L}{h} \cdot i_{L_n}$

รูปที่ 3.7 ตัวเหนี่ยวนำที่ผ่านการประมาณอนุพันธ์ (ก) วงจรสมมูล (ข) ตราประจำอุปกรณ์แบบพีชคณิต

<u>สำหรับตัวเก็บประจุ</u> (รูปที่ 3.8)

ในทำนองเดียวกันวงจรสมมูลและตราประจำอุปกรณ์ของตัวเก็บประจุที่ผ่านการประมาณอนุพันธ์ด้วย Backward Euler สามารถหาได้โดยวิธีเดียวกันกับตัวเหนี่ยวนำดังนี้

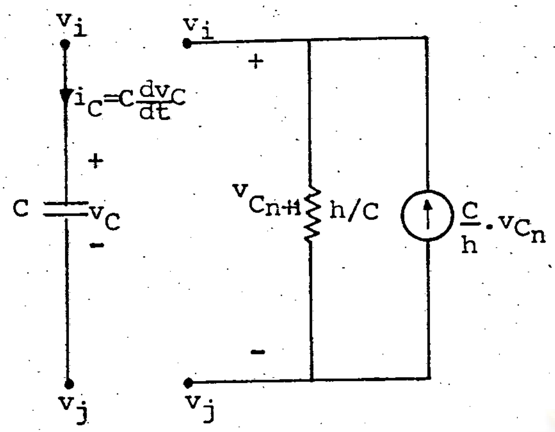
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad -(3.5)$$

แทนสมการที่ (3.2) ในสมการ (3.5) โดยที่ $x_t = v_{C_{n+1}}$ จะได้

$$i_{C_{n+1}} = \frac{C}{h}(v_{C_{n+1}} - v_{C_n}) \qquad -(3.6)$$

สมการที่ (3.6) เขียนเป็นวงจรสมมูลและตราประจำองค์ประกอบได้ดังในรูปที่ 3.8

โดยการใช้ตราประจำอุปกรณ์แบบพีชคณิตของอุปกรณ์พลวัตร่วมกับตราประจำอุปกรณ์ของอุปกรณ์ต้านทานกล่าวไว้ในบทที่ 2 เราจะสามารถสร้างสมการพีชคณิตที่ได้จากการประมาณอนุพันธ์ของวงจรพลวัตเชิงเส้นดังในรูปที่ 3.5 ได้โดยตรงและรวดเร็วยิ่งขึ้น จากนั้นเราก็สามารถแก้สมการพีชคณิตดังกล่าวด้วยวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู เพื่อหาค่าตัวแปรวงจรที่เวลานั้นได้



	$v_{i_{n+1}}$	$v_{j_{n+1}}$	b
KCL_i	$\frac{C}{h}$	$-\frac{C}{h}$	$\frac{C}{h} \cdot v_{C_n}$
KCL_j	$-\frac{C}{h}$	$\frac{C}{h}$	$-\frac{C}{h} \cdot v_{C_n}$

(ข)

รูปที่ ๓.๘ ตัวเก็บประจุที่ผ่านการประมาณอนุพันธ์แล้ว (ก) วงจรสมมูล (ข) ตราประจำอุปกรณ์แบบพีชคณิต