การวิเคราะห์ความโค้งมากของคานยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นไม่ยืดหด

นาย ประจักษ์ ด่านมงคลทิพย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2552

LARGE CURVATURE ANALYSIS OF INEXTENSIBLE NON-LINEAR ELASTIC BEAMS

Mr. Prajak Danmongkoltip

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering Program in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2009

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ความโค้งมากของคานยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นไม่ยืดหด
โดย	นายประจักษ์ ด่านมงคลทิพย์
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ดร. จรูญ รุ่งอมรรัตน์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

เอม เอี่ยม .... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(อาจารย์ ดร.จรูญ รุ่งอมรรัตน์)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัฒนชัย สมิทธากร)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.พฤทธา ณ นคร)

ประจักษ์ ด่านมงคลทิพย์ : การวิเคราะห์ความโค้งมากของคานยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นไม่ยืดหด. (LARGE CURVATURE ANALYSIS OF INEXTENSIBLE NON-LINEAR ELASTIC BEAMS.) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ดร.จรูญ รุ่งอมรรัตน์, 187 หน้า.

การศึกษานี้นำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์ปัญหาความโค้งมากสำหรับคานที่ทำจากวัสดุยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นและไม่มีการยืดหดตามแนวแกนด้วยวิธีการกึ่งวิเคราะห์ โดยวัสดุไร้เชิงเส้นที่พิจารณาจะอยู่ในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของโครงสร้าง วัสดุที่พิจารณาเป็นวัสดุที่มีความสัมพันธ์แบบกำลังและวัสดุที่ประกอบด้วยพฤติกรรมแบบเชิงเส้นและไร้เชิงเส้น สมการกำกับนั้นถูกสร้างจากการใช้ข้อกำหนดที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปในโครงสร้างมีความยืดหยุ่นและจะอยู่ในรูปปริพันธ์ซึ่งใกล้เคียงกับปริพันธ์เชิงวงรี สมการที่ได้นี้ถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหาโครงสร้างประเภทคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายโดยปรับเปลี่ยนค่าแรงกระทำที่ปลาย ซึ่งเทคนิคเชิงตัวเลขที่นำเสนอในงานวิจัยนี้จะใช้เพียงระเบียบวิธีการวนซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสันเพื่อหาผลเฉลยสำหรับปัญหาสมการไร้เชิงเส้น และใช้วิธีการควอดราเจอร์ที่มีรูปแบบเฉพาะเพื่อประสิทธิภาพและความแม่นยำในการหาค่าปริพันธ์เชิงเอกฐาน โดยจากผลเฉลยเชิงตัวเลขหลายกรณีที่ได้ศึกษานั้นพบว่าเทคนิคที่นำเสนอนี้ให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่น่าเชื่อถือและมีความแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยมาตรฐาน พฤติกรรมของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีผลต่อการโก่งตัวของคานและแรงภายในนั้นจะถูกนำเสนอพร้อมทั้งอภิปรายในวิทยานิพนธ์นี้

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่อนิสิต ประจักษ์.
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2552

5070333921 : MAJOR CIVIL ENGINEERING
KEYWORDS : LARGE CURVATURE ANALYSIS / NONLINEAR ELASTIC / ELASTICA / MOMENT-CURVATURE RELATIONSHIP / EXACT KINEMATICS.

PRAJAK DANMONGKOLTIP : LARGE CURVATURE ANALYSIS OF INEXTENSIBLE NON-LINEAR ELASTIC BEAMS. ADVISOR : JAROON RUNGAMORNRAT, Ph.D., 187 pp.

This study presents a semi-analytical technique capable of performing large curvature analysis of nonlinear elastic, inextensible beams. The material nonlinearity is incorporated into the mathematical model in terms of a specified, nonlinear moment-curvature relationship. In particular, both the power-law relation and one containing linear and nonlinear regimes are treated. The key governing equations are formulated in a fashion analogous to that of the elastic approach and the resulting equations contain integrals of similar features to elliptic integrals. These general equations are subsequently solved for the case of cantilever and simply-supported beams under various loading conditions at their ends. The current technique exploits only Newton-Raphson iteration as a nonlinear solver and a special quadrature for efficiently and accurately integrating singular integrals. From extensive numerical experiments on various cases, the proposed technique has been found promising and yielded highly accurate numerical solutions as compared with the benchmark solution. The influence of material nonlinearity on both the deformed shape and internal forces induced within the beam are then investigated and numerous results are reported and discussed.

Department : CIVIL ENGINEERING Student's Signature ประจักษ์

Field of Study : CIVIL ENGINEERING Advisor's Signature JR

Academic Year : 2009

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้ไม่อาจสำเร็จลุล่วงด้วยดีได้หากปราศจากความอนุเคราะห์และช่วยเหลือจากบุคคลหลายฝ่าย อันได้แก่บิดา มารดาและครอบครัวของข้าพเจ้าที่ให้การสั่งสอนอบรมและเลี้ยงดูและให้การศึกษาที่ดีแก่ข้าเจ้า คณาจารย์ของภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ความเข้าใจในวิชาการทางวิศวกรรมทั้งในด้านทฤษฎีและปฏิบัติเพื่อใช้ในการทำงานและเป็นพื้นฐานที่ดีในการทำวิทยานิพนธ์นี้ และด้วยคำแนะนำที่ดีจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ดร.จรูญ รุ่งอมรรัตน์ เพื่อใช้ในกระบวนการทำงานและการแก้ปัญหาที่ได้พบ ข้าพเจ้าจึงสามารถผ่านอุปสรรคเหล่านั้นได้อย่างราบรื่น และขอพระคุณขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่านที่ให้คำแนะนำที่มีประโยชน์และช่วยตรวจทานความถูกต้องของวิทยานิพนธ์นี้ ขอบคุณเพื่อน พี่และน้องนิสิตสาขาวิศวกรรมโครงสร้างทั้งระดับปริญญาโทและปริญญาเอกทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือด้วยดีตลอดมาทั้งด้านการเรียนและการดำเนินชีวิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งนายพีรศักดิ์ ตั้งนวรัตน์ ที่ให้คำแนะนำและช่วยแก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ นายปฐเมศ ผาณิตพจมาน ที่ช่วยสอนวิธีการใช้โปรแกรมไฟไนต์อิลิเมนต์ให้แก่ข้าพเจ้าเพื่อใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้ และสุดท้ายคือนายปาลพิพัฒน์ แสงชูวงศ์ ที่คอยให้คำแนะนำในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ท้ายที่สุดนี้หวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นพื้นฐานที่ดีให้กับผู้ที่สนใจศึกษาและนำไปปรับปรุงเพื่อให้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากขึ้นในอนาคต

สารบัญ

บทที่ หน้า

สารบัญภาพ

รูปที่		หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

เนื้อหาในบทแรกนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาของงานวิจัยนี้ งานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องซึ่งได้ศึกษาก่อนการทำงานวิจัย วัตถุประสงค์และขอบเขตของงานวิจัย พร้อมทั้งอธิบายถึงระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้ในงานวิจัยและสุดท้ายคือประโยชน์ที่ได้รับจากการทำงานวิจัยนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

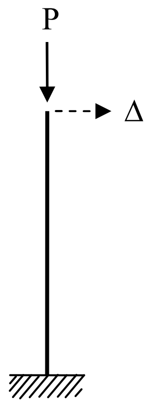
การวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้นเป็นวิธีการที่นิยมใช้แพร่หลายในการวิเคราะห์โครงสร้างทางวิศวกรรมโยธา เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย มีความสะดวกในการทำงานและใช้เวลาในการวิเคราะห์น้อย เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการวิเคราะห์ที่คำนึงถึงปัจจัยของความไร้เชิงเส้นแบบต่างๆ อย่างไรก็ตามผลที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้นนั้นมีค่าใกล้เคียงกับผลจากการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นก็ต่อเมื่อโครงสร้างที่พิจารณามีการเปลี่ยนตำแหน่งและการเปลี่ยนรูปเพียงเล็กน้อย ทั้งนี้เนื่องจากทฤษฎีการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นอ้างอิงจากสมมติฐานดังต่อไปนี้คือ

1. การเปลี่ยนตำแหน่งและการเปลี่ยนรูปของโครงสร้างเนื่องจากแรงกระทำมีค่าน้อยมากดังนั้นไม่พิจารณาความแตกต่างระหว่างสถานะก่อนและหลังการเปลี่ยนรูป
2. สมการสมดุลสร้างโดยอ้างอิงจากเรขาคณิตของโครงสร้างก่อนการเปลี่ยนรูป
3. ปริมาณวัดการเปลี่ยนรูปมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับปริมาณการเปลี่ยนตำแหน่ง
4. วัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

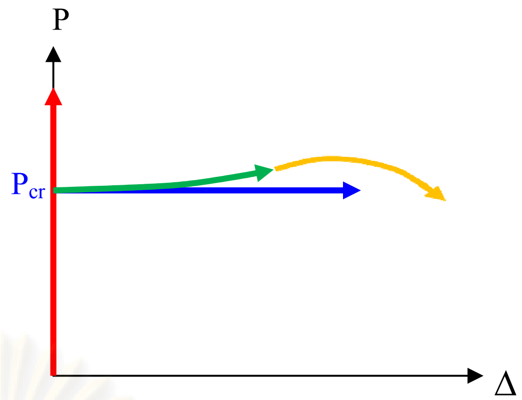
เนื่องด้วยข้อจำกัดจากสมมติฐานดังกล่าวนี้ ทำให้การวิเคราะห์แบบเชิงเส้นนั้นไม่สามารถหาค่าผลเฉลยหรืออธิบายพฤติกรรมบางอย่างของโครงสร้างได้ เช่น พฤติกรรมแบบคาน-เสา (beam-column behavior) หรือผลของพีเดลต้า (P-delta effect) ของโครงสร้างที่รับโมเมนต์

ดัดร่วมกับแรงอัดตามแนวแกน การหาค่าแรงอัดวิกฤติ (critical or buckling load) และพฤติกรรมของโครงสร้างหลังสภาวะโก่งเดาะ (post-buckling behavior) การวิเคราะห์หาการเปลี่ยนรูปและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างที่อ่อนไหวสูงต่อแรงกระทำ พฤติกรรมหลังจากหน่วยแรงภายในสูงสุดเกินค่าพิกัดแปรผันตรง (proportional limit) และค่าแรงกระทำสูงสุด (ultimate load) เป็นต้น

เพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมจริงมากขึ้น จึงจำเป็นต้องพิจารณาปัจจัยไร้เชิงเส้นแบบต่างๆในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และในขั้นตอนการวิเคราะห์ เช่น ในการพิจารณาปัจจัยไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิตอย่างง่ายในวิธีการวิเคราะห์อันดับสอง (second order analysis) การพิจารณาปัจจัยไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิตที่พิจารณาสมการสมดุลจากสมการจลนศาสตร์แบบแม่นตรงในวิธีการวิเคราะห์แบบความโค้งมาก (large curvature analysis) การวิเคราะห์แบบพลาสติก (plastic analysis) ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์ที่คำนึงถึงปัจจัยไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุโดยใช้ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัดและความโค้งแบบไม่เชิงเส้นอย่างง่าย เป็นต้น การวิเคราะห์โดยพิจารณาปัจจัยไร้เชิงเส้นดังกล่าว ทำให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่มีความถูกต้องมากขึ้นหรือสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมของโครงสร้างได้มากขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของเสาที่รับแรงอัดตามแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 1.1 ผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีต่างๆ แสดงดังในรูปที่ 1.2 ซึ่งจะพบว่าการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นนั้นไม่สามารถหาค่าแรงอัดวิกฤติและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะได้ (เส้นสีแดง) การวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์อันดับสองสามารถหาค่าแรงอัดวิกฤติของเสาได้แต่ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของเสาหลังเกิดการโก่งเดาะได้ (เส้นสีน้ำเงิน) ทั้งนี้เนื่องจากการวิเคราะห์อันดับสองยังคงใช้ความสัมพันธ์จลนศาสตร์แบบเชิงเส้น ส่วนการวิเคราะห์แบบความโค้งมากโดยพิจารณาวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น (การวิเคราะห์แบบอิลาสติกา) สามารถหาค่าแรงอัดวิกฤติและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะได้ (เส้นสีเขียว) จากเหตุผลดังกล่าวนี้ทำให้ในปัจจุบันมีการนำการวิเคราะห์แบบอิลาสติกามาใช้มากขึ้นเพื่อศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะและใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีความอ่อนตัวสูง

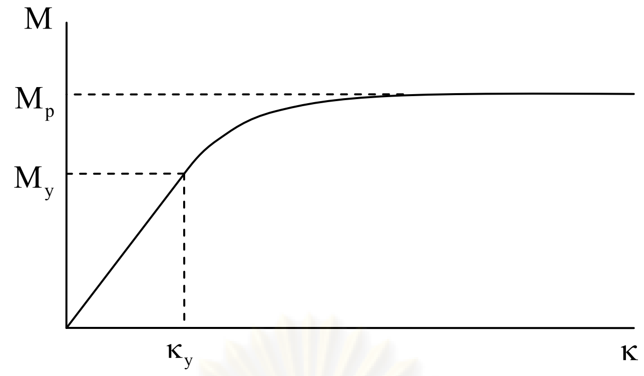


รูปที่ 1.1 โครงสร้างเสายื่นรับแรงอัดตามแนวแกน



รูปที่ 1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดและการเคลื่อนตัวด้านข้างของปลายเสายื่นด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบต่างๆ

โดยทั่วไปนั้นเมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งไปมาก ปริมาณการเปลี่ยนรูป เช่น การยืดหดตัว การบิด และการดัด จะมีค่ามากตามไปด้วย ซึ่งอาจส่งผลทำให้หน่วยแรงภายในเนื้อวัสดุมีค่าเกินหน่วยแรงพิกัดแปรผันตรง ดังนั้นการวิเคราะห์แบบอิลาสติกายังคงมีข้อจำกัด เนื่องจากไม่ได้พิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดที่ทำมาจากวัสดุทางวิศวกรรมโดยทั่วๆไปนั้นส่วนใหญ่ประกอบด้วยสองส่วนหลักๆ คือ ส่วนที่ความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น และส่วนที่ความสัมพันธ์เป็นแบบไร้เชิงเส้น โดยจุดเริ่มต้นที่หน้าตัดมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นเรียกว่าจุดพิกัดแปรผันตรง รูปที่ 1.3 แสดงความสัมพันธ์แบบอุดมคติระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดที่ทำมาจากเหล็กกล้าละมุน โดยสมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเค้นและความเครียดเป็นแบบยืดหยุ่นพลาสติกแบบสมบูรณ์ เมื่อทำการวิเคราะห์โครงสร้างในรูปที่ 1.1 โดยการวิเคราะห์แบบความโค้งมากร่วมกับความสัมพันธ์แบบไร้เชิงเส้นระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัด จะได้ผลดังเส้นสีเหลืองในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัด
ที่ทำจากเหล็กกล้าละมุน

จากตัวอย่างที่ได้กล่าว พบว่าเมื่อพิจารณาโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งและการเปลี่ยนรูปมาก ผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุจะปรากฏให้เห็นและอาจทำให้ผลการวิเคราะห์คลาดเคลื่อนไปมากหากไม่ได้พิจารณาความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุอย่างเหมาะสม เนื่องจากเมื่อโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนรูปน้อย และทำให้ความโค้งของโครงสร้างยังคงมีค่าน้อยกว่าค่าความโค้งที่พิกัดแปรผันตรง แต่เมื่อโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนรูปมากแล้วความโค้งของโครงสร้างอาจมีค่ามากจนเกินค่าความโค้งที่พิกัดแปรผันตรง ซึ่งส่งผลให้การวิเคราะห์โครงสร้างโดยไม่พิจารณาปัจจัยของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุให้คำตอบที่คลาดเคลื่อนหรืออาจได้คำตอบที่ผิดพลาดได้

1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากพฤติกรรมบางประเภทของโครงสร้างไม่สามารถอธิบายได้ด้วยการใช้วิธีการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น จึงทำให้มีความจำเป็นต้องพัฒนาวิธีการในการวิเคราะห์แบบอื่นๆขึ้นเพื่อที่จะสามารถอธิบายพฤติกรรมที่สนใจได้ ยกตัวอย่างเช่นพฤติกรรมของโครงสร้างที่รับแรงอัดตามแนวแกนที่นิยมศึกษากัน คือ พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสา โดยเริ่มแรกนั้นได้มีการพิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างโดยวิธีการวิเคราะห์อันดับสอง (Den Hartog, 1952; Timoshenko และ Gere, 1972) สร้างสมการสมดุลอ้างอิงจากเรขาคณิตหลังการเปลี่ยนรูป ร่วมกับการใช้สมการจลนศาสตร์แบบเชิงเส้น ทำให้สามารถหาค่าแรงอัดวิกฤติขณะที่เสาเกิดการโก่งเดาะได้ แต่ยังคงไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาได้ ต่อมาได้มีการพัฒนาวิธีการวิเคราะห์โดยพิจารณาปัจจัยไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิต ที่อ้างอิงจากสมการ

จลนศาสตร์แบบแม่นตรงซึ่งเรียกว่าการวิเคราะห์แบบอิลาสติกา (Timoshenko และ Gere, 1972) วิธีการดังกล่าวสามารถวิเคราะห์พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาได้ อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้จำเป็นต้องใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างมาก สำหรับการแก้ระบบสมการอนุพันธ์ไร้เชิงเส้นและโดยส่วนใหญ่ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปแบบปิดได้ (closed form solution) คำตอบส่วนใหญ่ที่ได้มักเขียนอยู่ในรูปของปริมาณปริพันธ์เชิงวงรี (elliptic integral) โดยปัญหาอิลาสติกาเริ่มมีในการศึกษาเป็นครั้งแรก ในปี ค.ศ. 1774 โดย Euler และในปี ค.ศ. 1770-1773 โดย Lagrange โดยวัตถุประสงค์ของการศึกษานั้นเพื่อหาเส้นโค้งการโก่งตัวที่ถูกต้องของคานในขณะที่คานมีการโก่งตัวมากโดยใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง ซึ่งรายระเอียดเพิ่มเติมของวิธีการดังกล่าวสามารถพบได้ในหนังสือของ Timoshenko (1953) เทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาอิลาสิกาในช่วงแรกๆยังค่อนข้างจำกัด ซึ่งส่วนใหญ่จะใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรงซึ่งเป็นวิธีที่ค่อนข้างยุ่งยากเนื่องจากความซับซ้อนของสมการกำกับทางคณิตศาสตร์ ต่อมาได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาอิลาสติกา ทำให้สามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้มากขึ้น โดยแบ่งการทบทวนงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบความโค้งมากออกเป็น 2 กลุ่มด้วยกันคือ การวิเคราะห์แบบความโค้งมากสำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นและการวิเคราะห์แบบความโค้งมากสำหรับวัสดุยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

สำหรับงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบความโค้งมากโดยพิจารณาวัสดุที่มีพฤติกรรมยืดหยุ่นเชิงเส้นนั้น มีผู้ศึกษาอย่างแพร่หลายโดยรูปแบบของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหานั้นมีความแตกต่างกันออกไป ยกตัวอย่างเช่น Rao และ Rao (1989) ศึกษาพฤติกรรมของคานยื่นที่รับแรงกระทำแบบแผ่ที่สามารถปรับมุมของแรงกระทำตามมุมของคานที่โก่งตัวด้วยวิธีรัง-คุททา (Runge-Kutta) อันดับที่สี่ และได้พิจารณากรณีที่แรงกระทำแบบแผ่อยู่ในรูปของฟังก์ชันไดแรค (Dirac-delta function) คือ $(n/\pi)^{1/2}\exp(-nx^2)$ ทำให้สามารถพิจารณากรณีที่คานรับแรงกระทำแบบจุดที่ปลาย และเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นตรงจากการศึกษาพบว่าในกรณีมุมที่ปลายของคานมีค่าน้อย ผลเฉลยมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในกรณีที่มุมที่ปลายคานค่ามาก แต่คลาดเคลื่อนดังกล่าวมีค่าลดลงเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น

Dado และ Al-Sadder (2005) ศึกษาโครงสร้างคานยื่นที่มีหน้าตัดคงที่และหน้าตัดไม่คงที่ รับแรงกระทำแบบต่างๆกันโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในการวิเคราะห์ทำการสมมุติผลเฉลยของมุมหมุนในรูปพหุนามอันดับที่ n และใช้เงื่อนไขขอบเขตเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ จากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์และผลที่ได้จากโปรแกรมวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์

MSC/NASTRAN พบว่าการวิเคราะห์ด้วยวิธีการสมมุติคำตอบนั้นสามารถให้คำตอบที่ถูกต้องมากกว่าการใช้ MSC/NASTRAN ในกรณีที่คานเกิดการโก่งตัวมากๆ

Wang และคณะ (2006) ศึกษาคานยื่นรับแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคาน โดยใช้ระเบียบวิธีวิเคราะห์แบบฮอมอโทปี (Homotopy analysis method; HAM) ซึ่งคล้ายกับ Dado และ Al-Sadder (2005) โดยทำการสมมุติผลเฉลยของมุมหมุนที่แต่ละตำแหน่งของคานเป็นสมการพหุนาม และใช้ค่าเริ่มต้นจากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น จากการศึกษาพบว่าวิธีดังกล่าวสามารถใช้ปัญหาความโค้งมากได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Shavartman (2007) ทำการศึกษาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยอื่นๆผ่านมาคือ แรงกระทำเอียงทำมุมกับแกนของคานโดยเปลี่ยนทิศทางตามทิศทางการหมุนของคาน โดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อเปลี่ยนจากปัญหาค่าขอบเขตแบบ 2 จุดเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น และทำการหาผลเฉลยด้วยวิธีกึ่งวิเคราะห์โดยใช้วิธีรัง-คุททาอันดับที่สี่โดยมีการปรับเปลี่ยนขนาดช่วง (step size) ในขั้นตอนการคำนวณ และหาค่าพิกัดโดยใช้หลักการของซิมป์สัน ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธียิงเป้า จากการศึกษาพบว่าการเปลี่ยนตัวแปรและการคำนวณโดยระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์ให้ผลเฉลยที่ถูกต้องกว่าการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า นอกจากนี้วิธีการดังกล่าวยังสามารถประยุกต์ใช้กับโครงสร้างคานยื่นแบบโค้งได้อีกด้วย

Banerjee และคณะ (2008) ทำการวิเคราะห์คานยื่นที่รับแรงกระทำในแนวดิ่ง แรงกระทำในแนวราบและโมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2 วิธี คือ วิธียิงเป้า และวิธีการแยกแบบเอโดเมน (Adomain decomposition) เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขจากทั้งสองวิธีกับที่ได้จากการใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ จากการศึกษาพบว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้ง 2 วิธีนั้นสามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบความโค้งมากรวมถึงกรณีที่เกิดจุดดัดกลับ (inflection point) ภายในคานได้เป็นอย่างมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยที่ได้นำเสนอมานั้นส่วนใหญ่เป็นการศึกษาปัญหาโครงสร้างคานที่รับแรงกระทำที่ไม่ซับซ้อน โดยใช้เทคนิคการวิเคราะห์แบบต่างๆกัน โครงสร้างที่ทำการศึกษาเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนเดียวและมีเพียง Banerjee และคณะ (2008) เท่านั้นที่พิจารณากรณีที่มีจุดดัดกลับภายในคาน ต่อมา พีรศักดิ์ ตั้งนวรัตน์ และ จรูญ รุ่งอมรรัตน์ (2008) ได้ทำการวิเคราะห์แบบความโค้งมากของโครงสร้างคานและโครงข้อแข็งด้วยวิธีการรวมสติฟเนสแบบตรงซึ่งใช้ระเบียบวิธีกึ่งเชิงวิเคราะห์ในการสร้างเมตริกสติฟเนสสัมผัสของชิ้นส่วนโครงสร้างขึ้น และใช้

วิธีนิวตัน-ราฟสันในการหาผลเฉลยของระบบสมการไร้เชิงเส้นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจากการใช้วิธีรวมสติฟเนสแบบตรงนี้ทำให้สามารถพิจารณาโครงสร้างที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนโครงสร้างหลายชิ้นส่วนและมีเรขาคณิตแบบต่างๆได้ และให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องเช่นเดียวกับการใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์

สำหรับในส่วนของงานวิจัยที่พิจารณาปัจจัยด้านความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุนั้นที่ผ่านมามีการพิจารณาแบบจำลองพฤติกรรมวัสดุหลายประเภทด้วยกัน แบบจำลองวัสดุที่ถูกนำใช้มากที่สุดในการศึกษาที่ผ่านมาคือวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นแบบกำลังหรือวัสดุแบบลัดวิค (Ludwick) ยกตัวอย่างเช่น Lee (2002) ทำการศึกษาคานยื่นรับแรงกระทำ 2 ชนิดคือ แรงกระทำแบบแผ่สม่ำเสมอตลอดความยาวคานและแรงกระทำเป็นจุดที่ปลายอิสระ โดยพิจารณาคานที่ทำมาจากวัสดุไร้เชิงเส้นแบบลัดวิค ซึ่งมีสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดคือ $\sigma = \sigma_0 \varepsilon^{1/n}$ วัสดุที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ได้แก่ ทองแดงและอลูมิเนียมเป็นต้น ในการหาผลเฉลย Lee ใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าและวิธีการตัดสองส่วน (bisection) เพื่อเพิ่มความถูกต้องในการคำนวณหาค่ามุมหมุนที่ปลาย เช่นเดียวกับ Shavartman (2007) ที่ใช้หลักการของซิมป์สันในการคำนวณค่าพิกัด

Lewist และ Monasa (1980) ทำการศึกษาการโก่งตัวของคานยื่นที่ทำจากวัสดุไร้เชิงเส้นแบบลัดวิค โดยคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีรัง-คุททาอันดับที่สี่ จากการศึกษาพบว่าการโก่งตัวของคานนั้นไม่ขึ้นกับค่าอัตราส่วนระหว่างความลึกของคานและความยาวคาน ต่อมาในปี 1983 ทั้งสองได้ศึกษาพฤติกรรมของคานยื่นที่เป็นวัสดุไร้เชิงเส้นแบบลัดวิค และรับแรงกระทำแบบจุดหลายแรงกระทำที่จุดต่างๆ กัน จากการศึกษาพบว่าควรใช้วิธีรัง-คุททาในการคำนวณค่าพิกัด เพราะให้ผลที่แม่นยำกว่าการหาค่าพิกัดด้วยหลักการของซิมป์สัน โดยงานวิจัยนี้ใช้วิธีรัง-คุททา อันดับที่สี่ในการคำนวณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยผลจากการศึกษาชี้ให้เห็นว่าค่าการโก่งตัวของโครงสร้างจะน้อยลงเมื่อ n มีค่าน้อยลง จากงานวิจัยทั้ง 3 ที่กล่าวข้างต้นวัสดุไร้เชิงเส้นแบบลัดวิคเท่านั้น

สำหรับวัสดุไร้เชิงเส้นประเภทอื่นๆนั้น Prathap และ Varadan (1984) ทำการวิเคราะห์โครงสร้างคานยื่นที่ทำมาจากวัสดุไร้เชิงเส้นแบบแรมเบิร์ก-ออสกูด (Ramberg-Osgood) ซึ่งมีสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นดังสมการ $\varepsilon = \sigma/E + K\left(\sigma/E\right)^n$ และรับแรงกระทำแบบจุดที่ปลายอิสระ ซึ่งแรงกระทำดังกล่าวสามารถแปรเปลี่ยนทิศทางได้ตามการหมุนของคาน การวิเคราะห์ใช้เทคนิคเชิงตัวเลขในการหาค่าปริพันธ์และเทคนิคการวนซ้ำ (iteration) เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมและใช้การกำหนดขนาดช่วงในการคำนวณเพื่อลด

ความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นจากการคำนวณ จากการศึกษาพบว่าโครงสร้างจะเข้าสู่สภาวะความไร้เสถียรภาพเมื่อแกนสะเทินของหน้าตัดยกตัวขึ้นไปอยู่นอกความลึกของคาน

Kounadis และ Mallis (1984) ทำการศึกษาพฤติกรรมของคานฐานรองรับอย่างง่ายซึ่งรับแรงอัดตามแนวแกน โดยพิจารณาวัสดุไร้เชิงเส้นที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด $\sigma = E\varepsilon\left(1-\alpha\varepsilon^2\right)$ โดยที่ค่าพารามิเตอร์ α ใช้สำหรับการปรับเปลี่ยนความไร้เชิงเส้นของวัสดุและใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย จากการศึกษาพบว่าเมื่ออัตราส่วนความชะลูด (slenderness ratio) มีค่าเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ค่าวิกฤตของความไร้เชิงเส้นซึ่งเป็นค่าที่กำหนดความมีเสถียรภาพของวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย และค่ารัศมีความโค้ง (radius of curvature) ขณะเกิดการโก่งเดาะจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าอัตราส่วนความชะลูดของโครงสร้าง

ต่อมา Vaz และ Patel (2006) ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานฐานรองรับอย่างง่ายที่มีความชะลูดสูงและพิจารณาวัสดุซึ่งมีความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัดและความโค้งเป็นแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) โดยใช้ตัวคูณลดกำลังเพื่อลดค่าความแข็งเกร็งต่อการดัดของวัสดุในความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของวัสดุช่วงที่สอง โดยพิจารณาทั้งกรณีที่เพิ่มแรงกระทำและกรณีที่ลดแรงกระทำ (loading และ unloading) โดยในช่วงที่เพิ่มแรงกระทำนั้นทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ และในขณะที่ลดแรงกระทำใช้การวิเคราะห์ด้วยวิธียิงเป้าและวิธีรัง-คุทฑา จากการศึกษาพบว่าการปรับค่าตัวคูณลดกำลังให้ได้ผลเฉลยที่อยู่ในช่วงที่มีเสถียรภาพนี้ทำได้ยากเพราะช่วงของค่าตัวคูณลดกำลังที่ให้ผลเฉลยอยู่ในช่วงที่มีเสถียรภาพมีช่วงที่แคบมาก

จากงานวิจัยในอดีตที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น โครงสร้างที่ทำการศึกษาส่วนใหญ่เป็นโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อนประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยเพียงชิ้นเดียวและพิจาณาเพียงแค่กรณีที่ไม่มีจุดดัดกลับภายในคานซึ่งทำให้การวิเคราะห์ทำได้ง่ายขึ้น และวัสดุแบบไร้เชิงเส้นที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ส่วนใหญ่เป็นสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดที่สามารถปรับเปลี่ยนค่าความไร้เชิงเส้นได้ ทั้งนี้เพื่อศึกษาถึงผลของความไร้เชิงเส้นของวัสดุที่มีต่อพฤติกรรมการโก่งตัวของโครงสร้างนั่นเอง โดยจากการศึกษาพบว่าผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุต่อพฤติกรรมของโครงสร้างจะปรากฏอย่างชัดเจนในขณะที่โครงสร้างเกิดการเปลี่ยนรูปมาก นอกจากนี้การศึกษาปัจจัยความไร้เชิงเส้นในการวิเคราะห์แบบความโค้งมากในงานวิจัยในอดีตยังคงจำกัดอยู่เพียงแค่วัสดุบางชนิดเท่านั้น

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและพัฒนาวิธีการวิเคราะห์แบบความโค้งมากของโครงสร้างที่รับโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงตามแนวแกนโดยพิจารณาความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุแบบทั่วไป และใช้ระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นในการศึกษาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อพฤติกรรมของโครงสร้างคานที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งและการเปลี่ยนรูปมาก

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้พิจารณาคาน 2 มิติ ซึ่งประกอบด้วยคานยื่นและคานช่วงเดียวที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีหน้าตัดและคุณสมบัติต่างๆ คงที่ตลอดทั้งโครงสร้าง ไม่พิจารณาแรงกระทำแบบแผ่ และไม่พิจารณาการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนและการยืดหดตามแนวแกน

1.5 ระเบียบวิธีวิจัย

ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้ในการศึกษานี้ประกอบด้วย

1. ระเบียบวิธีกึ่งเชิงวิเคราะห์ (semi-analytical method) สำหรับใช้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไร้เชิงเส้น โดยใช้สมการพื้นฐานทางกลศาสตร์โครงสร้างในการสร้างสมการกำกับ และใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข
2. ระเบียบวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ (Gauss quadrature) เพื่อใช้คำนวณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่ปรากฏ
3. เทคนิคการแปลงตัวแปร (variable transformation) สำหรับแก้ปัญหาความเป็นเอกฐาน (singularity) ของปริมาณปริพันธ์ที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้การคำนวณค่าปริพันธ์ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความสามารถในการวิเคราะห์โครงสร้างอย่างง่ายที่รับโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงตามแนวแกน โดยพิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิตซึ่งอ้างอิงจากสมการจลนศาสตร์แบบแม่นตรงและผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ
2. ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องสูงซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นผลเฉลยอ้างอิงสำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆได้ เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method; FEM) เป็นต้น
3. ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้เป็นพื้นฐานสำคัญที่สามารถนำไปพัฒนาระเบียบวิธีการรวมสติฟเนสแบบตรง สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างที่มีเรขาคณิตซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้

บทที่ 2

สมมติฐานและสมการพื้นฐาน

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงสมมติฐาน และการพัฒนาสมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐาน สำหรับใช้สร้างสมการกำกับสำหรับใช้จำลองปัญหาในงานวิจัยนี้

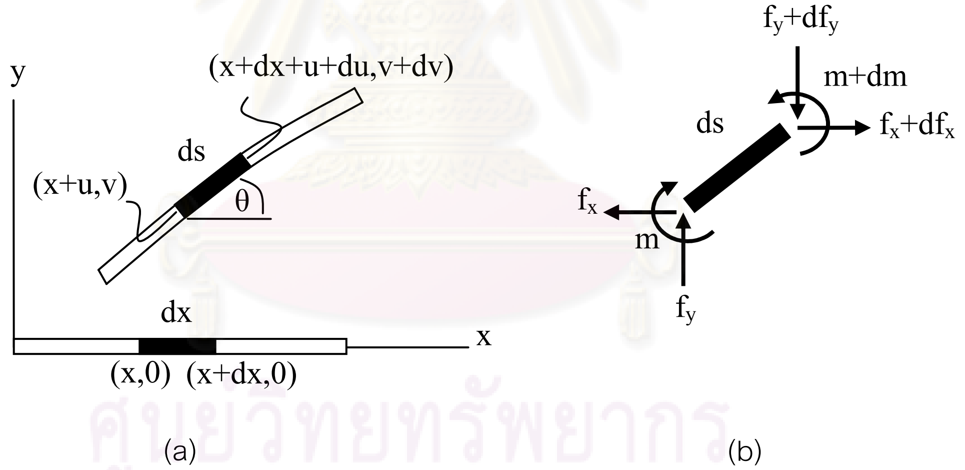
2.1 สมมติฐาน

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการพัฒนาสมการกำกับเชิงอนุพันธ์ สำหรับใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของชิ้นส่วนของโครงสร้างรับโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงตามแนวแกน อาศัยสมมติฐานดังต่อไปนี้คือ

1. ชิ้นส่วนโครงสร้างมีลักษณะตรงและมีหน้าตัดคงที่ตลอดทั้งชิ้นส่วน
2. ชิ้นส่วนโครงสร้างทำมาจากวัสดุยืดหยุ่นมีคุณสมบัติเหมือนกันทั้งชิ้นส่วน และไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง
3. ความโค้ง การขจัด และการหมุนสัมพันธ์กันโดยสมการจลนศาสตร์แบบแม่นตรง
4. สมการสมดุลสร้างโดยอ้างอิงจากเรขาคณิตของโครงสร้างหลังการเปลี่ยนรูป
5. ทราบความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตลอดทั้งชิ้นส่วน
6. ไม่พิจารณาแรงกระทำบนชิ้นส่วนโครงสร้าง
7. ชิ้นส่วนโครงสร้างไม่มีการยืดหดตัวตามแนวแกน
8. ไม่พิจารณาการเปลี่ยนรูปเนื่องจากผลของแรงเฉือน
9. ระนาบหน้าตัดของชิ้นส่วนยังคงความเป็นระนาบหลังเกิดการเปลี่ยนรูป

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐาน

พิจารณาชิ้นส่วนโครงสร้างซึ่งมีหน้าตัดคงที่และมีความยาว L ทำมาจากวัสดุยืดหยุ่น โดยที่เรขาคณิตของชิ้นส่วนก่อนการเปลี่ยนรูปและหลังการเปลี่ยนรูปแสดงดังรูปที่ 2.1(a) ชิ้นส่วนก่อนการเปลี่ยนรูปมีลักษณะตรง วางตัวในแนวราบตามแนวแกน x จากพิกัด (0, 0) ถึงพิกัด (L, 0) และหลังจากที่รับแรงกระทำภายนอกชิ้นส่วนเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งไปยังสถานะใหม่ พิกัด (x, 0) ($x \in [0, L]$) ที่สถานะก่อนการเปลี่ยนรูปเปลี่ยนตำแหน่งไปเป็นพิกัด (x + u, v) ที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูป โดยที่ u = u(x) และ v = v(x) เป็นค่าการขจัดของพิกัด (x, 0) ในแนวแกน x และ แนวแกน y ตามลำดับ กำหนดให้ $f_x = f_x(x)$, $f_y = f_y(x)$ และ m = m(x) เป็นแรงภายในตามแนวแกน x แรงภายในตามแนวแกน y และโมเมนต์ดัดที่หน้าตัดซึ่งมีพิกัด (x, 0) ที่สถานะก่อนการเปลี่ยนรูปตามลำดับ โดย f_x มีค่าเป็นบวกเมื่อแรงกระทำในแนวราบกระทำไปทางซ้าย f_y มีค่าเป็นบวกเมื่อแรงกระทำในแนวดิ่งกระทำในทิศทางขึ้นและ m มีค่าเป็นบวกเมื่อโมเมนต์ดัดมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 2.1(b)



รูปที่ 2.1 (a) ชิ้นส่วนโครงสร้างในสถานะก่อนและหลังการเปลี่ยนรูป (b) ผังวัตถุอิสระของชิ้นส่วนย่อย ds ที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูป

พิจารณาชิ้นส่วนย่อย dx ที่สถานะก่อนการเปลี่ยนรูป และกำหนดให้ ds เป็นชิ้นส่วนย่อยเดียวกันที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูปดังแสดงในรูปที่ 2.1(a) ชิ้นส่วนย่อย dx เป็นเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างพิกัด (x, 0) และ พิกัด (x + dx, 0) ส่วนชิ้นส่วนย่อย ds เป็นเส้นโค้งที่เชื่อมระหว่างพิกัด (x + u, v) และพิกัด (x + dx + u + du, v + dv) จากสมมติฐานข้อ 2.1.7 สรุปได้ว่าชิ้นส่วน

ย่อย dx และชิ้นส่วนย่อย ds มีความยาวเท่ากัน (ds = dx) และการขจัด u และ v ที่ตำแหน่งใดๆ ในชิ้นส่วนมีความสัมพันธ์กับการหมุนที่ตำแหน่งนั้น (θ) ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{dv}{dx} \tag{2.1}$$

$$\cos\theta = 1 + \frac{du}{dx} \tag{2.2}$$

เมื่อพิจารณาสภาวะสมดุลของชิ้นส่วนย่อย ds ที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูปดังแสดงในรูปที่ 2.1(b) ร่วมกับความสัมพันธ์ (2.1) และ (2.2) จะได้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ดัดดังต่อไปนี้

$$\frac{df_x}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{df_y}{dx} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{dm}{dx} = f_x \sin\theta + f_y \cos\theta \tag{2.5}$$

จากสมการสมดุล (2.3) และ (2.4) สามารถสรุปได้ว่าแรงภายใน f_x และ f_y มีค่าคงที่ตลอดทั้งชิ้นส่วน และจากสมมติฐานข้อ 2.1.2 และ 2.1.9 ร่วมกับการพิจารณาสภาวะสมดุลของหน้าตัด ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด (m) และความโค้ง (κ) ที่แต่ละหน้าตัดได้ อย่างไรก็ตามการหาความสัมพันธ์ดังกล่าวไม่อยู่ในขอบเขตของงานวิจัย (สมมติฐานข้อ 2.1.5) สำหรับในการศึกษานี้พิจารณาแบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งสองแบบจำลอง คือ

แบบจำลองที่ 1: $$\frac{m}{m_p} = \left(\frac{\kappa}{\kappa_p}\right)^n \tag{2.6}$$

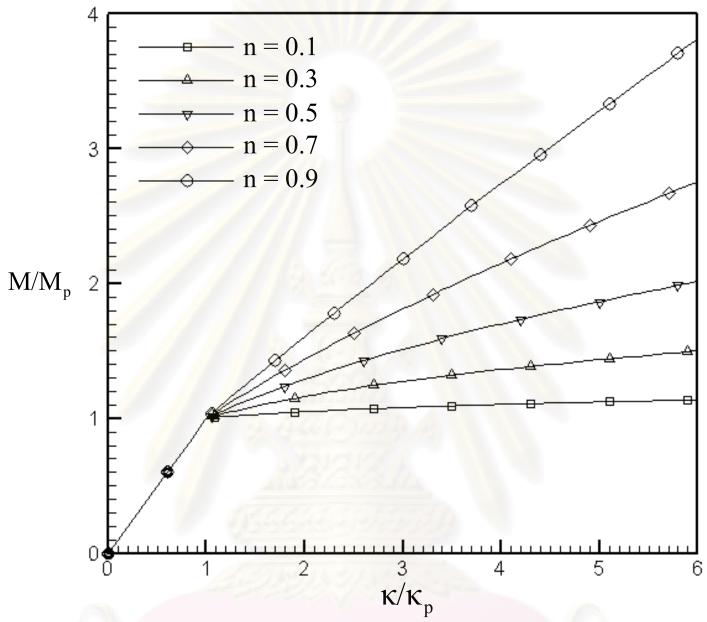
โดยที่ $n \le 1$ และ m_p และ κ_p คือค่าโมเมนต์ดัดและความโค้งอ้างอิง

แบบจำลองที่ 2: $$\frac{m}{m_p} = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{\kappa_p} & ; \quad \dfrac{\kappa}{\kappa_p} \le 1 \\ a + b\left(\dfrac{\kappa}{\kappa_p}\right)^n & ; \quad \dfrac{\kappa}{\kappa_p} \ge 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

โดยที่ $n \le 1$, m_p และ κ_p คือค่าโมเมนต์ดัดและความโค้งที่จุดพิกัดแปรผันตรงและ n, a, b เป็นค่าพารามิเตอร์สำหรับใช้ในการอธิบายแบบจำลอง

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 2 สามารถแบ่งออกเป็นกรณีย่อยๆ ตามค่าของพารามิเตอร์ n, a และ b ดังนี้

1. กรณี $a+b=1$ ให้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งที่มีความต่อเนื่องของค่าโมเมนต์ดัดที่จุด $\kappa=\kappa_p$ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งเป็นดังแสดงในรูปที่ 2.2



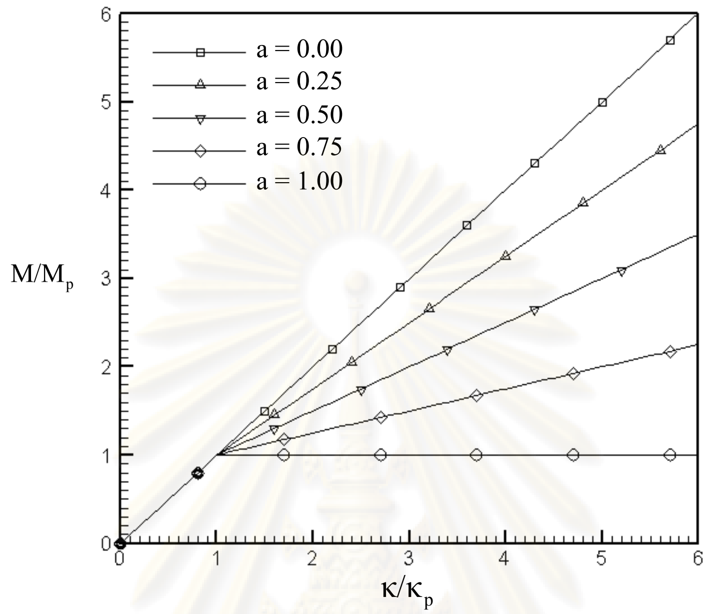
รูปที่ 2.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของแบบจำลองที่ 2 กรณีที่ 1 เมื่อค่าพารามิเตอร์ a = 0.3 และ b = 0.7

2. กรณี $a+b=1$ และ $n=1$ และ $a>0$ ให้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งแบบเชิงเส้นคู่ และมีความต่อเนื่องของค่าโมเมนต์ดัดที่จุด $\kappa=\kappa_p$ ซึ่งกราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งเป็นดังแสดงในรูปที่ 2.3

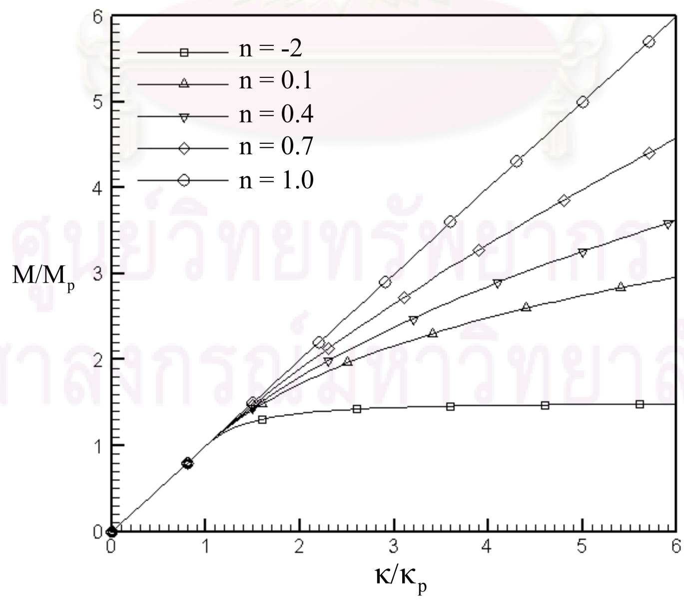
3. กรณี $a=(n-1)/n$ และ $b=1/n$ ให้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งที่มีความต่อเนื่องทั้งค่าของโมเมนต์ดัดและความชันที่จุด $\kappa=\kappa_p$

4. กรณี $n=-2$, $a=3/2$ และ $b=-1/2$ ให้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ทำมาจากวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแบบยืดหยุ่นพลาสติกสมบูรณ์ (elastic-perfectly plastic) โดยกรณีที่ 4 เกิดจาก

การแทนค่า $n = -2$ ในกรณีที่ 3 ซึ่งกราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งสำหรับกรณีที่ 3 และ 4 แสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของแบบจำลองที่ 2 กรณีที่ 2



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของแบบจำลองที่ 2
กรณีที่ 3 และ 4

ในกรณีที่ $n = 1$ (และ $a = 0$ ในกรณีแบบจำลองที่ 2) แบบจำลองทั้งสองให้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดเป็นแบบเชิงเส้น สำหรับแบบจำลองที่ 1 ค่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุดเริ่มต้นมีค่าเป็นอนันต์ สำหรับแบบจำลองที่ 2 กรณีที่ $0 < n < 1$ ความชันของกราฟมีค่าลดลงเรื่อยๆเมื่อ $m > m_p$ แต่ค่าโมเมนต์ดัดไม่ลู่เข้าเมื่อความโค้งลู่เข้าสู่ค่าอนันต์ กรณีที่ $n < 0$ ความชันของกราฟมีค่าลดลงเรื่อยๆเมื่อ $m > m_p$ และค่าโมเมนต์ดัดลู่เข้าสู่ค่า am_p เมื่อความโค้งลู่เข้าสู่ค่าอนันต์

จากสมมติฐานข้อ 2.1.3 และ 2.1.7 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนและความโค้งดังสมการ

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \tag{2.8}$$

โดยใช้สมการที่ (2.8) สมการที่ (2.5) สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของปริมาณไร้มิติได้เป็น

$$\hat{\kappa}\frac{d\hat{m}}{d\hat{\kappa}}\frac{d\hat{\kappa}}{d\theta} = \hat{f}_x \sin\theta + \hat{f}_y \cos\theta \tag{2.9}$$

โดยที่ $\hat{\kappa} = \kappa L$, $\hat{m} = m/m_p$, $\hat{f}_x = f_x L/m_p$ และ $\hat{f}_y = f_y L/m_p$ เมื่อใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 1 และ แบบจำลองที่ 2 ร่วมกับสมการที่ (2.9) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของปริมาณไร้มิติดังนี้

แบบจำลองที่ 1 : $$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^n \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = \frac{(\hat{\kappa}_p)^n}{n}\left(\hat{f}_x \sin\theta + \hat{f}_y \cos\theta\right) \tag{2.10}$$

แบบจำลองที่ 2 : $$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = \hat{\kappa}_p\left(\hat{f}_x \sin\theta + \hat{f}_y \cos\theta\right) \ ; \ \kappa < \kappa_p \tag{2.11}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^n \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = \frac{(\hat{\kappa}_p)^n}{nb}\left(\hat{f}_x \sin\theta + \hat{f}_y \cos\theta\right) \ ; \ \kappa > \kappa_p \tag{2.12}$$

โดยที่ $\xi = x/L$ และ $\hat{\kappa}_p = \kappa_p L$ สมการที่ (2.10) และสมการที่ (2.11)-(2.12) อยู่ในรูปแบบที่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้ง่ายและผลที่ได้สุดท้ายของแต่ละแบบจำลองแสดงดังสมการ

แบบจำลองที่ 1 : $$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}(\hat{\kappa}_p)^n\left(C - \hat{f}_x \cos\theta + \hat{f}_y \sin\theta\right) \tag{2.13}$$

แบบจำลองที่ 2 : $$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 = 2\hat{\kappa}_p\left(C_1 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta\right)\ ;\ \kappa < \kappa_p \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)(\hat{\kappa}_p)^n}{nb}\left(C_2 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta\right)\ ;\ \kappa > \kappa_p \tag{2.15}$$

โดยที่ C, C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ที่เกิดจากกระบวนการหาปริพันธ์ จากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง เครื่องหมายของความโค้งบรรทัดฐาน $d\theta/d\xi$ ต้องตรงกับเครื่องหมายของโมเมนต์ดัด ดังนั้นสามารถหาปริมาณ $d\xi/d\theta$ ได้โดยแก้สมการที่ (2.13) และ (2.14)-(2.15) และผลเฉลยที่ได้คือ

แบบจำลองที่ 1 : $$\frac{d\xi}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\frac{\vartheta(\hat{m})}{\sqrt[n+1]{C - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta}} \tag{2.16}$$

แบบจำลองที่ 2 : $$\frac{d\xi}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta(\hat{m})}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p\left(C_1 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta\right)}} & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \sqrt[n+1]{\dfrac{nb}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\dfrac{\vartheta(\hat{m})}{\sqrt[n+1]{C_2 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta}} & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{2.17}$$

โดยที่ $\vartheta(\hat{m})$ เป็นฟังก์ชันกำหนดเครื่องหมายซึ่งขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของโมเมนต์ดัดและนิยามโดย $\vartheta(\hat{m}) = 1$ เมื่อ $\hat{m} \geq 0$ และ $\vartheta(\hat{m}) = -1$ เมื่อ $\hat{m} < 0$ เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ที่ (2.1) และ (2.2) ร่วมกับสมการที่ (2.16) และ (2.17) จะได้สมการกำกับเชิงอนุพันธ์สำหรับการขจัดตามแนวแกน x และตามแนวแกน y ดังต่อไปนี้

แบบจำลองที่ 1 : $$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\frac{\vartheta(\hat{m})\sin\theta}{\sqrt[n+1]{C - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta}} \tag{2.18}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\frac{\vartheta(\hat{m})(\cos\theta - 1)}{\sqrt[n+1]{C - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta}} \tag{2.19}$$

แบบจำลองที่ 2 : $$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta(\hat{m})\sin\theta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p\left(C_1 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta\right)}} & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \sqrt[n+1]{\dfrac{nb}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\dfrac{\vartheta(\hat{m})\sin\theta}{\sqrt[n+1]{C_2 - \hat{f}_x\cos\theta + \hat{f}_y\sin\theta}} & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p\left(C_1-\hat{f}_x\cos\theta+\hat{f}_y\sin\theta\right)}} & ;\ \kappa<\kappa_p\\[2ex] \sqrt[n+1]{\dfrac{nb}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\,\dfrac{\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)}{\sqrt[n+1]{C_2-\hat{f}_x\cos\theta+\hat{f}_y\sin\theta}} & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases} \tag{2.21}$$

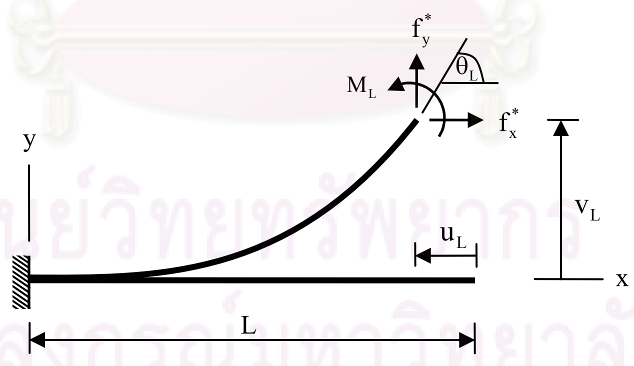
โดยที่ $\hat{u}=u/L$ และ $\hat{v}=v/L$ สมการเชิงอนุพันธ์ (2.16)-(2.21) เป็นสมการกำกับพื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์แบบความโค้งมากของชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงตามแนวแกน

บทที่ 3

การประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานกับปัญหาคานยื่น

เนื้อหาในส่วนนี้กล่าวถึงการประยุกต์สมการพื้นฐานสมการที่ (2.13)-(2.21) มาใช้วิเคราะห์ปัญหาความโค้งมากสำหรับคานยื่นที่รับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระ โดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งทั้งสองแบบจำลองที่กล่าวในบทที่ 2 พร้อมทั้งแสดงรายละเอียดการคำนวณค่าพิกัดของคานหลังการโก่งตัวและการคำนวณค่าแรงภายในที่เกิดขึ้น

พิจารณาคานยื่นที่มีความยาว L และมีคุณสมบัติดังที่กล่าวในหัวข้อ 2.1 คานยื่นดังกล่าวรับแรงกระทำในทิศทางดิ่งและทิศทางราบ โมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยทิศทางของแรงดังแสดงในรูปเป็นทิศทางที่มีค่าเป็นบวก



รูปที่ 3.1 คานยื่นรับแรงกระทำและโมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระ

เงื่อนไขขอบเขตแบบจำเป็น (Essential boundary conditions) ที่ปลายยึดแน่น $(x = 0)$ ของคานเขียนได้ดังนี้

$$\hat{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\hat{v} = 0 \tag{3.2}$$

$$\theta = 0 \tag{3.3}$$

และเงื่อนไขเพิ่มเติมที่จุดดัดกลับ $(x = x_z)$ ที่มีค่ามุมหมุน θ_Z บนคานคือ

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(\theta_Z\right) = 0 \tag{3.4}$$

3.1 สมการกำกับสำหรับ M-κ ตามแบบจำลองที่ 1

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 1 มีฟังก์ชันความสัมพันธ์เพียงฟังก์ชันเดียวจึงไม่มีความจำเป็นต้องคานออกเป็นส่วนย่อยในขั้นตอนของการวิเคราะห์ ทำให้สามารถแก้ปัญหาได้ง่ายกว่าการใช้แบบจำลองที่ 2 ที่จะกล่าวต่อไป เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระ $(x = L)$ สำหรับกรณีที่ใช้แบบจำลองที่ 1 คือ

$$\hat{f}_x = \frac{f_x^* L}{m_p} = \hat{f}_x^* \tag{3.5}$$

$$\hat{f}_y = -\frac{f_y^* L}{m_p} = -\hat{f}_y^* \tag{3.6}$$

$$\hat{m} = \frac{M_L}{m_p} = \hat{m}^* \text{ หรือ } \frac{d\theta}{d\xi} = \left(\hat{m}^*\right)^{\frac{1}{n}} \hat{\kappa}_p \tag{3.7}$$

โดยที่ $\hat{\kappa}_p = \kappa_p L$

3.1.1 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคาน

กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานสามารถเกิดขึ้นได้ในกรณีที่แรงกระทำในแนวดิ่งและโมเมนต์มีเครื่องหมายเหมือนกัน หรือในกรณีที่แรงกระทำในแนวดิ่งและโมเมนต์ดัดมีเครื่องหมายต่างกันแต่ขนาดของโมเมนต์ดัดมีค่ามากจนทำให้ค่าโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคานมีเครื่องหมายเหมือนกัน เมื่อพิจารณาสมการพื้นฐาน (2.13) ประกอบกับสมการเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระ (3.5)–(3.7) ทำให้สามารถหาค่าคงที่ C ได้ดังนี้

$$C = \hat{f}_x^* \cos\theta_L + \hat{f}_y^* \sin\theta_L + \frac{n}{n+1}\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}^*\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{3.8}$$

เมื่อแทนค่า C ที่ได้ในสมการที่ (2.16), (2.18) และ (2.19) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right) \tag{3.9}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta}=\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta\sin\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right) \tag{3.10}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta(\cos\theta-1)F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right) \tag{3.11}$$

โดยที่ ϑ เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับทิศทางของแรงกระทำในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ ดังสมการ

$$\vartheta=\begin{cases}-1 & ;\ f_y^*<0\\ 1 & ;\ f_y^*\geq 0\end{cases} \tag{3.12}$$

และ F เป็นฟังก์ชันของแรงกระทำภายนอก คุณสมบัติของวัสดุและมุมหมุนที่ปลายอิสระของดังสมการ

$$F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right)=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_L-\cos\theta\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_L-\sin\theta\right)+\frac{n}{n+1}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}^*\right)^{\frac{n+1}{n}}}} \tag{3.13}$$

จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (3.9)-(3.11) ด้วยกระบวนการหาปริพันธ์โดยตรง และใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายยึดแน่น (3.1)-(3.3) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดและการหมุนที่ปลายอิสระ ($\hat{v}_L$, $\hat{u}_L$, θ_L) ดังนี้

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta\int_0^{\theta_L}F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right)d\theta=1 \tag{3.14}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta\int_0^{\theta_L}\sin\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right)d\theta=\hat{v}_L \tag{3.15}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\;\vartheta\int_0^{\theta_L}\cos\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,n,\hat{\kappa}_p\right)d\theta=\hat{u}_L+1 \tag{3.16}$$

การหมุนที่ปลายอิสระ θ_L คำนวณได้โดยแก้สมการที่ (3.14) หลังจากนั้นการขจัด $\hat{v}_L$ และ $\hat{u}_L$ สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (3.15) และ (3.16) ตามลำดับ การขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง

อื่นๆบนคานสามารถคำนวณได้โดยการหาปริพันธ์ของสมการที่ (3.14), (3.15) และ (3.16) จากปลายยึดแน่นถึงพิกัดไร้มิติ $\xi^* = x^* / L$ ที่ต้องการหาการขจัดและการหมุน สมการสำหรับคำนวณค่าการขจัดและการหมุน ($\hat{v}^*, \hat{u}^*, \theta^*$) ที่พิกัด $x^* \in (0, L)$ เขียนได้เป็น

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_0^{\theta^*} F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \xi^* \tag{3.17}$$

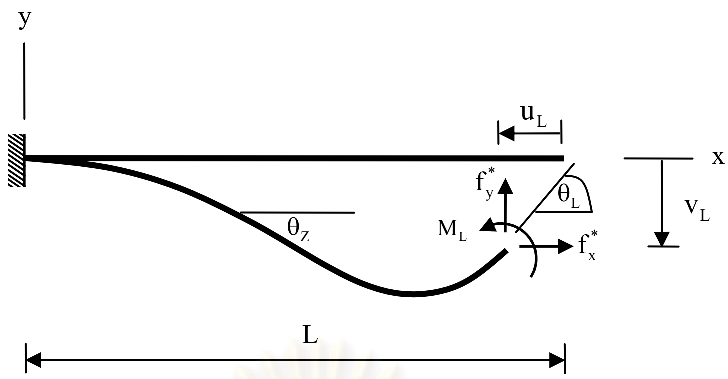
$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_0^{\theta^*} \sin\theta F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \hat{v}^* \tag{3.18}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_0^{\theta^*} \cos\theta F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \hat{u}^* + \xi^* \tag{3.19}$$

โดยจากสมการ (3.17)-(3.19) ทำให้สามารถทราบตำแหน่งหลังการเปลี่ยนรูปได้ตลอดความยาวคาน ข้อมูลดังกล่าวนี้สามารถใช้สำหรับหาค่าแรงภายในที่พิกัด $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ

3.1.2 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในช่วงคาน

กรณีที่คานมีจุดดัดกลับอยู่ภายในช่วงคานสามารถเกิดขึ้นได้ในกรณีที่แรงกระทำในแนวดิ่งและโมเมนต์มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน โดยที่สภาวะสมดุลสุดท้ายค่าของโมเมนต์กระทำที่ปลายคานมีค่าไม่เพียงพอที่จะทำให้ค่าโมเมนต์ดัดตลอดช่วงคานมีเครื่องหมายเหมือนกัน ส่งผลให้โมเมนต์ดัดตลอดช่วงคานมีทั้งส่วนที่เป็นโมเมนต์ดัดลบและโมเมนต์ดัดบวก ดังนั้นในการแก้ปัญหาจำเป็นต้องมีการกำหนดตัวแปรเพิ่มเติมคือมุมที่จุดดัดกลับ θ_Z ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ที่ตำแหน่งจุดดัดกลับนี้ความโค้งมีค่าเป็นศูนย์ ($\kappa = 0$) และความโค้งที่จุดทางซ้ายและทางขวาของจุดดัดกลับนี้จะมีเครื่องหมายต่างกัน โดยที่เครื่องหมายของความโค้งที่จุดด้านขวาของจุดดัดกลับจะเหมือนกับเครื่องหมายของโมเมนต์ที่กระทำที่ปลายคาน



รูปที่ 3.2 คานยื่นรับแรงกระทำและโมเมนต์ดัดที่ปลาย ในกรณีที่มีจุดดัดกลับภายในช่วงคาน

โดยอาศัยเงื่อนไข (3.4) ร่วมกับสมการ (2.13) ค่าคงที่ C สามารถหาได้ดังนี้คือ

$$C = \hat{f}_x^* \cos\theta_Z + \hat{f}_y^* \sin\theta_Z \tag{3.20}$$

เมื่อแทนค่า C ที่ได้ในสมการที่ (2.16), (2.18) และ (2.19) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\vartheta(\hat{m})F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_Z, n\right) \tag{3.21}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\vartheta(\hat{m})\sin\theta F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_Z, n\right) \tag{3.22}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\vartheta(\hat{m})(\cos\theta - 1)F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_Z, n\right) \tag{3.23}$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันของแรงกระทำภายนอก คุณสมบัติของวัสดุและมุมหมุนที่จุดดัดกลับดังสมการ

$$F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_Z, n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \sin\theta\right)}} \tag{3.24}$$

ทำการหาปริพันธ์โดยตรงร่วมกับการใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองทำให้สมการที่ (3.21)-(3.23) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_0^{\theta_z} F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta + \int_{\theta_z}^{\theta_L} F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right] = 1 \quad (3.25)$$

$$\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_0^{\theta_z} \sin\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta + \int_{\theta_z}^{\theta_L} \sin\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right] = \hat{v}_L \quad (3.26)$$

$$\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_0^{\theta_z} \cos\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta + \int_{\theta_z}^{\theta_L} \cos\theta F\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right] = \hat{u}_L + 1 \quad (3.27)$$

โดยที่ ψ เป็นค่าคงที่ ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงกระทำในแนวดิ่งที่ปลายอิสระดังสมการ

$$\psi = \begin{cases} 1 & ;\ f_y^* < 0 \\ -1 & ;\ f_y^* \geq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.25)-(3.27) จะพบว่าปริมาณปริพันธ์ที่เกี่ยวข้องมีความเป็นเอกฐานที่จุดดัดกลับดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานดังกล่าว เริ่มต้นโดยกำหนดให้

$$\hat{f}_s^* = \sqrt{\hat{f}_x^{*2} + \hat{f}_y^{*2}} \quad (3.29)$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\hat{f}_x^*}{\hat{f}_s^*} \quad (3.30)$$

$$\sin\theta_0 = \frac{\hat{f}_y^*}{\hat{f}_s^*} \quad (3.31)$$

เมื่อใช้สมการที่ (3.29)-(3.31) ร่วมกับสมการที่ (3.24) สามารถเขียนฟังก์ชัน F ใหม่ได้เป็น

$$F\left(\hat{f}_s^*,\theta,\theta_Z,\theta_0,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_s^*\left(\cos\left(\theta_0-\theta_Z\right)-\cos\left(\theta_0-\theta\right)\right)}} \quad (3.32)$$

โดยการนิยามตัวแปรใหม่คือ $\bar{\theta} = \pi - \left(\theta_0 - \theta\right)$ ร่วมกับการใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\cos\bar{\theta} = 1 - 2\sin^2\left(\bar{\theta}/2\right)$ ในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$F\left(\hat{f}_s^*,\bar{\theta},\bar{\theta}_Z,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s^*\left(\sin^2\left(\frac{\bar{\theta}_Z}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)\right)}} \quad (3.33)$$

โดยที่ $\bar{\theta}_Z = \pi - (\theta_0 - \theta_Z)$ จากนั้นทำการเปลี่ยนตัวแปรจาก θ เป็น ϕ ตามสมการ $p\sin\phi = \sin\left(\bar{\theta}/2\right)$ โดยที่ $p = \sin\left(\bar{\theta}_Z/2\right)$ จะได้ฟังก์ชัน F ดังนี้

$$F\left(\hat{f}_s^*, \phi, p, n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s^*\left(p^2 - p^2\sin^2\phi\right)}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s^* p^2\cos^2\phi}} \tag{3.34}$$

จากการเปลี่ยนตัวแปรจากมุมหมุน θ ไม่เป็นตัวแปร ϕ ดังที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลงเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$d\theta = d\bar{\theta} = \frac{2p\cos\phi}{\cos\left(\bar{\theta}/2\right)}d\phi = \frac{2p\cos\phi}{-\psi\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}}d\phi \tag{3.35}$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.34) และสมการที่ (3.35) ลงในสมการที่ (3.25)-(3.27) จะได้สมการเชิงปริพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p, n)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p, n)\,d\phi\right] = 1 \tag{3.36}$$

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0, n)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi, p, \theta_0, n)\,d\phi\right] = \hat{v}_L \tag{3.37}$$

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi, p, \theta_0, n)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u(\phi, p, \theta_0, n)\,d\phi\right] = \hat{u}_L + 1 \tag{3.38}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin\left((\pi - \theta_0)/2\right)$, $p\sin\phi_1 = \sin\left((\pi - \theta_0 + \theta_L)/2\right)$, $\hat{F}_s = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)2\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p^n}}$

และฟังก์ชัน F_0, F_v และ F_u นิยามโดย

$$F_0(\phi, p, n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}} \tag{3.39}$$

$$F_v(\phi, p, \theta_0, n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}}\left(2p\cos\theta_0\sin\phi\psi + \frac{\left(1 - 2p^2\sin^2\phi\right)\sin\theta_0}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}}\right) \tag{3.40}$$

$$F_u(\phi, p, \theta_0, n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}}\left(-2p\sin\theta_0\sin\phi\psi + \frac{\left(1 - 2p^2\sin^2\phi\right)\cos\theta_0}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}}\right) \tag{3.41}$$

จากสมการที่ (3.36)-(3.38) จะพบว่าในกรณีที่ $n = 1$ หรือวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติดังนั้นทำให้สามารถหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขได้ถูกต้องด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ แต่ในกรณีที่ $0 < n < 1$ ซึ่งวัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันที่มีความเป็นเอกฐานที่ $\phi = \pi / 2$ เนื่องจากพจน์ $(\cos\phi)^{1-n}$ ที่ปรากฏอยู่ใน ทำให้ไม่สามารถหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของปริมาณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวนี้จึงทำการแปลงตัวแปรเพิ่มเติมดังนี้

$$\left(\pi/2 - \phi\right)^{\alpha} = \beta \tag{3.42}$$

$$-\alpha\beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} d\phi = d\beta \tag{3.43}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (3.42) และ (3.43) ในสมการที่ (3.36)-(3.38) พร้อมทั้งกำจัดพจน์ที่มีความเป็นเอกฐานโดยการเลือกค่า $\alpha = 2n/(n+1)$ จะได้สมการสุดท้ายคือ

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0} F_0(\beta,p,n)\,d\beta + \int_0^{\bar{\beta}_1} F_0(\beta,p,n)\,d\beta\right] = 1 \tag{3.44}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0} F_v(\beta,p,\theta_0,n)\,d\beta + \int_0^{\bar{\beta}_1} F_v(\beta,p,\theta_0,n)\,d\beta\right] = \hat{v}_L \tag{3.45}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0} F_u(\beta,p,\theta_0,n)\,d\beta + \int_0^{\bar{\beta}_1} F_u(\beta,p,\theta_0,n)\,d\beta\right] = \hat{u}_L + 1 \tag{3.46}$$

โดยที่ $\bar{\beta}_0 = \left(\pi/2 - \phi_0\right)^{2n/(n+1)}$, $\bar{\beta}_1 = \left(\pi/2 - \phi_1\right)^{2n/(n+1)}$ และฟังก์ชัน F_0, F_v และ F_u นิยามโดย

$$F_0(\beta,p,n) = K\frac{p^{\frac{n-1}{n+1}}}{\sqrt{1 - p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}} \tag{3.47}$$

$$F_v(\beta,p,\theta_0,n) = K\left(2p^{\frac{2n}{n+1}}\cos\theta_0\cos\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\psi + \frac{\sin\theta_0\left(1 - 2p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)}{p^{\frac{1-n}{n+1}}\sqrt{1 - p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}}\right) \tag{3.48}$$

$$F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)=K\left(-2p^{\frac{2n}{n+1}}\sin\theta_0\cos\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\psi+\frac{\cos\theta_0\left(1-2p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)}{p^{\frac{1-n}{n+1}}\sqrt{1-p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}}\right) \qquad (3.49)$$

โดยที่ $K=\sqrt[n+1]{\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\Big/\sin\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)^{1-n}}$ เนื่องจากระบบสมการ (3.44)-(3.45) มีปริมาณไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 ปริมาณคือ θ_L,θ_Z,u_L และ v_L ทำให้ไม่สามารถแก้ระบบสมการดังกล่าวเพื่อหาปริมาณไม่ทราบค่าทั้งหมดได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องพัฒนาสมการเพิ่มเติมโดยใช้สมการที่ (3.21) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระ (3.7) จะได้สมการเพิ่มเติม 1 สมการคือ

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_L\right)+\frac{n\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}^*\right)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}=0 \qquad (3.50)$$

ทำการแก้สมการที่ (3.44) และ (3.50) จะได้ผลเฉลยของมุมหมุนที่ปลายและมุมหมุนที่ตำแหน่งจุดดัดกลับ $\left(\theta_L,\theta_Z\right)$ หลังจากนั้นสามารถคำนวณค่าการขจัดที่ปลายในแนวดิ่งและแนวราบจากสมการที่ (3.45) และ (3.46) ตามลำดับ ส่วนการขจัดและมุมหมุนที่ตำแหน่งใดๆบนคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^*=\begin{cases}\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}_0}F_0\left(\beta,p,n\right)d\beta\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\ \hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0}F_0\left(\beta,p,n\right)d\beta+\int_0^{\bar{\beta}^*}F_0\left(\beta,p,n\right)d\beta\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le1\end{cases} \qquad (3.51)$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}_0}F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\ \hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0}F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta+\int_0^{\bar{\beta}^*}F_0\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le1\end{cases} \qquad (3.52)$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\begin{cases}\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}_0}F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\ \hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\int_0^{\bar{\beta}_0}F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta+\int_0^{\bar{\beta}^*}F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le1\end{cases} \qquad (3.53)$$

โดยที่ $\bar{\beta}^* = \left(\pi/2 - \phi^*\right)^{2n/(n+1)}$, $p\sin\phi^* = \sin\left(\left(\pi - \theta_0 + \theta^*\right)/2\right)$, $\xi^* = x^*/L$ คือตำแหน่งบรรทัดฐานใดๆในคาน, θ^* คือค่ามุมหมุนที่ตำแหน่ง ξ^* และ ξ_Z คือค่าตำแหน่งบรรทัดฐานบนคานที่จุดดัดกลับ

3.1.3 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายอิสระของคาน

กรณีที่จุดดัดกลับอยู่ที่ปลายอิสระของคานจะเกิดขึ้นเมื่อค่าโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระมีค่าเท่ากับศูนย์ $\hat{m}^* = 0$ การวิเคราะห์ปัญหาในกรณีนี้จะคล้ายกับในกรณีที่ 3.1.2 ต่างกันตรงที่ในกรณีนี้ความโค้งตลอดทั้งคานมีเครื่องหมายเดียวกัน โดยใช้ผลที่ได้จากในกรณีที่ 3.1.2 ร่วมกับการพิจารณาให้ตำแหน่งของจุดดัดกลับอยู่ที่ปลายอิสระ จะได้ $\theta_Z = \theta_L$ และฟังก์ชัน F จากสมการที่ (3.24) เขียนใหม่ได้เป็น

$$F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_L, n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_L - \cos\theta\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_L - \sin\theta\right)}} \tag{3.54}$$

ในทำนองเดียวกันสมการที่ (3.36)-(3.38) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$-\psi \cdot \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_0^{\theta_L} F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_L, n\right) d\theta = 1 \tag{3.55}$$

$$-\psi \cdot \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_0^{\theta_L} \sin\theta F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_L, n\right) d\theta = \hat{v}_L \tag{3.56}$$

$$-\psi \cdot \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_0^{\theta_L} \cos\theta F\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \theta, \theta_L, n\right) d\theta = \hat{u}_L + 1 \tag{3.57}$$

แต่เนื่องจากปริมาณปริพันธ์ที่เกี่ยวข้องยังมีความเป็นเอกฐานที่ปลายอิสระจึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคการกำจัดความเป็นเอกฐานเช่นเดียวกับในกรณี 3.1.2 โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปรดังต่อไปนี้ $\sin\left(\bar{\theta}/2\right) = p\sin\phi$, $p = \sin\left(\bar{\theta}_L/2\right)$, $\bar{\theta}_L = \pi - \left(\theta_0 - \theta_L\right)$ และ $\bar{\theta} = \pi - \left(\theta_0 - \theta\right)$ สมการที่ (3.55)-(3.57) กลายเป็น

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi, p, n\right) d\phi = 1 \tag{3.58}$$

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0, n\right) d\phi = \hat{v}_L \tag{3.59}$$

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0, n\right) d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{3.60}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin\left(\left(\pi-\theta_0\right)/2\right)$ และ F_0, F_v และ F_u คือฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการที่ (3.39)-(3.41) ตามลำดับ อย่างไรก็ตามสมการที่ (3.58)-(3.60) นั้นยังคงมีความเป็นเอกฐานที่ $\phi = \pi/2$ อันเนื่องมาจากผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ ดังนั้นจึงต้องทำการเปลี่ยนตัวแปรอีกขั้นโดยเทคนิคที่ใช้ในกรณีที่ 3.1.2 โดยการเปลี่ยนตัวแปรตามสมการที่ (3.42) โดยที่ $\alpha = 2n/\left(n+1\right)$ สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว และสมการสุดท้ายที่ได้คือ

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_0^{\bar{\beta}} F_0\left(\beta, p, n\right) d\beta = 1 \tag{3.61}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_0^{\bar{\beta}} F_v\left(\beta, p, \theta_0, n\right) d\beta = \hat{v}_L \tag{3.62}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_0^{\bar{\beta}} F_u\left(\beta, p, \theta_0, n\right) d\beta = \hat{u}_L + 1 \tag{3.63}$$

โดยที่ $\bar{\beta} = \left(\pi/2-\phi_0\right)^{2n/(n+1)}$ และ F_0, F_v และ F_u คือฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการที่ (3.47)-(3.49) ตามลำดับ ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุนที่ปลายจากสมการ (3.61) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.62) และ (3.63) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการ

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}} F_0\left(\beta, p, n\right) d\beta = \xi^* \tag{3.64}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}} F_v\left(\beta, p, \theta_0, n\right) d\beta = \hat{v}^* \tag{3.65}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}^*}^{\bar{\beta}} F_u\left(\beta, p, \theta_0, n\right) d\beta = \hat{u}^* + \xi^* \tag{3.66}$$

โดยที่ $\bar{\beta}^* = \left(\pi/2-\phi^*\right)^{2n/(n+1)}$, $p\sin\phi^* = \sin\left(\left(\pi-\theta_0+\theta^*\right)/2\right)$ และ θ^* คือค่ามุมหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^* = x^*/L$ ใดๆภายในคาน

3.2 สมการกำกับสำหรับ M-κ ตามแบบจำลองที่ 2

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 2 ประกอบด้วย ส่วนที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและส่วนที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น ทำให้กระบวนการวิเคราะห์มีความซับซ้อนมากกว่ากรณีที่ใช้แบบจำลองที่ 1 ในการวิเคราะห์จำเป็นต้องตรวจสอบว่า ณ สภาวะสมดุลมีส่วนใดส่วนหนึ่งของคานที่มีค่าโมเมนต์ดัดเกินค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรงหรือไม่ และอาจจำเป็นต้องแบ่งคานออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆตามพฤติกรรมที่แตกต่างกัน ดังแสดงรายละเอียดในกรณีย่อยต่างๆด้านล่าง

เงื่อนไขเพิ่มเติมที่ตำแหน่งพิกัดแปรผันตรง $(x = x_p)$ บนคานยื่น คือ

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(\theta_p\right) = \hat{\kappa}_p \tag{3.67}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานยื่นสำหรับแบบจำลองที่ 2 คือ

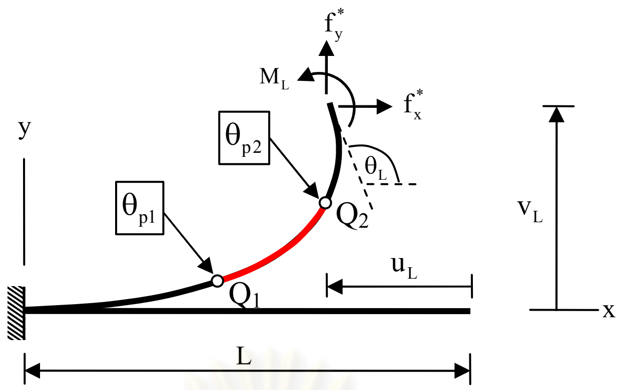
$$\hat{f}_x = \frac{f_x^* L}{m_p} = \hat{f}_x^* \tag{3.68}$$

$$\hat{f}_y = -\frac{f_y^* L}{m_p} = -\hat{f}_y^* \tag{3.69}$$

$$\hat{m} = \frac{M_L}{m_p} = \hat{m}^* \text{ หรือ } \frac{d\theta}{d\xi} = \begin{cases} \hat{m}^* \hat{\kappa}_p & ; \hat{m}^* < 1 \\ \left[\left(\hat{m}^* - a\right)/b\right]^{1/n} \hat{\kappa}_p & ; \hat{m}^* > 1 \end{cases} \tag{3.70}$$

3.2.1 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่ไม่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุบนคานเป็น 3 ส่วนดังแสดงในรูปที่ 3.3 โดยจุด Q_1 และ Q_2 เป็นจุดที่โมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรงและมีค่าการหมุน การขจัดในแนวราบและการขจัดในแนวดิ่งเป็น $\left\{\theta_{p1}, \hat{u}_{p1}, \hat{v}_{p1}\right\}$ และ $\left\{\theta_{p2}, \hat{u}_{p2}, \hat{v}_{p2}\right\}$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบคือ กรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้นเมื่อ $\left|\hat{m}^*\right| > 1$ และกรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นเมื่อ $\left|\hat{m}^*\right| < 1$ แต่การสร้างสมการกำกับทั้งสองกรณีนี้สามารถใช้กระบวนการที่ใกล้เคียงกันได้



รูปที่ 3.3 คานยื่นที่ไม่เกิดจุดดัดกลับและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

จากสมการพื้นฐาน (2.14) และ (2.15) ร่วมกับเงื่อนที่จุดพิกัดแปรผันตรง Q_1 (4.73) สามารถหาค่าคงที่ C_1 และ C_2 ได้เท่ากับ

$$C_1 = \hat{f}_x^* \cos\theta_{p1} + \hat{f}_y^* \sin\theta_{p1} + \frac{\hat{\kappa}_p}{2} \tag{3.71}$$

$$C_2 = \hat{f}_x^* \cos\theta_{p1} + \hat{f}_y^* \sin\theta_{p1} + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{(n+1)} \tag{3.72}$$

เมื่อแทนค่า C_1 และ C_2 ที่ได้ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \vartheta K_N F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{3.73}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \sin\theta F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \vartheta K_N \sin\theta F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{3.74}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} (\cos\theta - 1) F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \vartheta K_N (\cos\theta - 1) F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{3.75}$$

โดยที่ $K_N = \sqrt[n+1]{\dfrac{nb}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}$ และ F_L และ F_N คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\hat{\kappa}_p}} \tag{3.76}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p,n,b\right)=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta\right)+\frac{nb}{n+1}\hat{\kappa}_p}} \tag{3.77}$$

ทำการหาปริพันธ์สมการที่ (3.73)-(3.75) ตลอดความยาวคานร่วมกับเงื่อนไขที่จุดพิกัดแปรผันตรงทั้งสอง ในที่นี้จำเป็นต้องพิจารณว่าวัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ในกรณีใดจะได้สมการกำกับเชิงปริพันธ์ดังนี้

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}F_N d\theta\right]=1 \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1 \\ \vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}F_L d\theta\right]=1 \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1 \end{array}\right\} \tag{3.78}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}\sin\theta F_N d\theta\right]=\hat{v}_L \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1 \\ \vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}\sin\theta F_L d\theta\right]=\hat{v}_L \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1 \end{array}\right\} \tag{3.79}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}\cos\theta F_N d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1 \\ \vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_L}\cos\theta F_L d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \quad ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1 \end{array}\right\} \tag{3.80}$$

สำหรับสมการกำกับเพิ่มเติมอีก 2 สมการเพื่อใช้ในการแก้สมการหาตัวแปรไม่ทราบค่า ได้มาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระ (3.70) และเงื่อนไขที่จุด Q_2 (3.67) ดังนี้

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_L\right)+\dfrac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}^*-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 & ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1 \\ \hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_L\right)+\dfrac{\hat{\kappa}_p}{2}\left(1-\hat{m}^{*2}\right)=0 & ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\end{array}\right\}$$

(3.81)

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_{p2}\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_{p2}\right)=0 \tag{3.82}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_{p1},\theta_{p2}\right\}$ จากสมการ (3.78), (3.81) และ (3.82) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.79) และ (3.80) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

กรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น $\left(\left|\hat{m}^*\right|>1\right)$

$$\xi^*=\vartheta\begin{cases}K_N\displaystyle\int_0^{\theta^*}F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}F_N d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.83}$$

$$\hat{v}^*=\vartheta\begin{cases}K_N\displaystyle\int_0^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.84}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\vartheta\begin{cases}K_N\displaystyle\int_0^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\cos\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2}\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1\end{cases}$$

(3.85)

และในกรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้น $\left(\left|\hat{m}^*\right|<1\right)$

$$\xi^* = \vartheta\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} F_N d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{3.86}$$

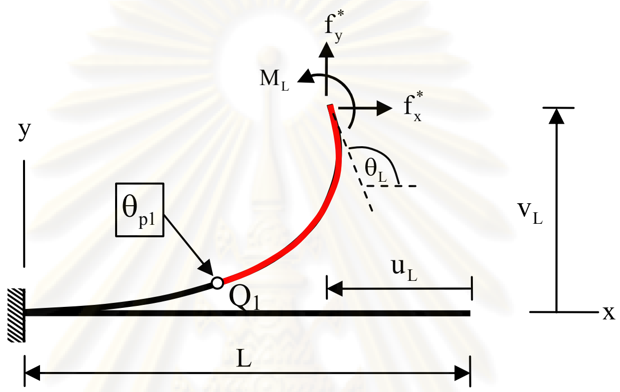
$$\hat{v}^* = \vartheta\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{3.87}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \vartheta\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{3.88}$$

โดยที่ θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคาน และ ξ_{p1},ξ_{p2} คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่จุดพิกัดแปรผันตรง Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ

3.2.2 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วน

ในกรณีนี้เป็นกรณีที่คานยื่นไม่เกิดจุดดัดกลับเช่นเดียวกับในกรณีก่อนหน้าแต่เกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วนด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 3.4 ซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบคือ กรณีที่วัสดุบริเวณปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นเมื่อ $|\hat{m}^*|>1$ และกรณีที่วัสดุบริเวณปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้นเมื่อ $|\hat{m}^*|<1$



รูปที่ 3.4 คานยื่นที่ไม่เกิดจุดดัดกลับและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วน

การสร้างสมการกำกับสำหรับกรณีนี้สามารถประยุกต์จากสมการกำกับในกรณี 3.2.1 ด้วยการกำหนดให้จุด Q_2 อยู่ที่ปลายทางขวานั่นคือ $\theta_{p2}=\theta_L$ และ $\xi_{p2}=1$ ซึ่งทำให้สมการกำกับ (3.78)-(3.80) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}F_L d\theta\right]=1 & ;\ |\hat{m}^*|<1 \\ \vartheta\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}F_N d\theta\right]=1 & ;\ |\hat{m}^*|>1 \end{array}\right\} \tag{3.89}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}\sin\theta F_L d\theta\right]=\hat{v}_L & ;\ |\hat{m}^*|<1 \\ \vartheta\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}\sin\theta F_N d\theta\right]=\hat{v}_L & ;\ |\hat{m}^*|>1 \end{array}\right\} \tag{3.90}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta\left[K_N\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}\cos\theta F_L d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \qquad ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ &\vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_L}\cos\theta F_N d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \qquad ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{aligned}\right\} \tag{3.91}$$

สำหรับสมการกำกับเพิ่มเติมอีก 1 สมการเพื่อใช้ในการแก้สมการหาตัวแปรไม่ทราบค่า ได้มาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระ (3.70) ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}&\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_L\right)+\frac{\hat{\kappa}_p}{2}\left(1-\hat{m}^{*2}\right)=0 \qquad ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_L\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}^*-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \ ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{aligned}\right\} \tag{3.92}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_{p1}\right\}$ จากสมการ (3.89) และ (3.92) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.90) และ (3.91) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

กรณีที่วัสดุบริเวณปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น $\left(\left|\hat{m}^*\right|<1\right)$

$$\xi^*=\vartheta\begin{cases}K_N\int_0^{\theta^*}F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\int_0^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.93}$$

$$\hat{v}^*=\vartheta\begin{cases}K_N\int_0^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\int_0^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.94}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\vartheta\begin{cases}K_N\int_0^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ K_N\int_0^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\cos\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.95}$$

และในกรณีที่วัสดุบริเวณปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้น $\left(|\hat{m}^*| > 1\right)$

$$\xi^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} F_N d\theta & ;\ \xi_{p1} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.96}$$

$$\hat{v}^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p1} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.97}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{p1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p1} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.98}$$

3.2.3 **กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและวัสดุตลอดคานมีพฤติกรรมเพียงชนิดเดียว**

กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับบนคานและวัสดุมีพฤติกรรมเพียงชนิดเดียวตลอดทั้งคาน สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีย่อยคือ เมื่อวัสดุตลอดคานยังคงมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น $\left(|\hat{m}| < 1\right)$ และเมื่อวัสดุตลอดคานมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น $\left(|\hat{m}| > 1\right)$ สมการกำกับทั้งสองกรณีย่อยนั้นใช้กระบวนการเช่นเดียวกัน โดยแตกต่างเพียงการเลือกใช้สมการพื้นฐานและเงื่อนไขที่ปลายทั้งสองตามพฤติกรรมของวัสดุ

เริ่มจากสมการพื้นฐาน (2.14) หรือ (2.15) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านขวา (3.70) สามารถหาค่าคงที่ C_1 หรือ C_2 ได้เท่ากับ

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \hat{f}_x \cos\theta_L + \hat{f}_y \sin\theta_L + \frac{1}{2}\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}^*\right)^2 & ;\ |\hat{m}^*| < 1 \\ C_2 &= \hat{f}_x \cos\theta_L + \hat{f}_y \sin\theta_L + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left[\left(\hat{m}^* - a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}} & ;\ |\hat{m}^*| > 1 \end{aligned}\right\} \tag{3.99}$$

เมื่อแทนค่า C_1 หรือ C_2 ที่ได้ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) เฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของวัสดุ จะได้

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ \vartheta K_N F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{cases} \tag{3.100}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ \vartheta K_N\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{cases} \tag{3.101}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\left(\cos\theta-1\right)F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ \vartheta K_N\left(\cos\theta-1\right)F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{cases} \tag{3.102}$$

โดยที่ F_L และ F_N คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_L-\cos\theta\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_L-\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}^*\right)^2}} \tag{3.103}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_L-\cos\theta\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_L-\sin\theta\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left[\left(\hat{m}^*-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}}} \tag{3.104}$$

จากการหาปริพันธ์ของสมการ (3.100)-(3.104) โดยตรงตลอดความยาวคาน จะได้สมการกับเชิงปริพันธ์ดังนี้

$$1=\vartheta\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_L}F_L\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}^*\right|<1\\ K_N\displaystyle\int_0^{\theta_L}F_N\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\hat{m}^*,\theta,\theta_L,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}^*\right|>1\end{cases} \tag{3.105}$$

$$\hat{v}_L = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_L} \sin\theta F_L\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| < 1 \\ K_N \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_L} \sin\theta F_N\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p, n, a, b\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| > 1 \end{cases} \tag{3.106}$$

$$\hat{u}_L + 1 = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{0}^{\theta_L} \cos\theta F_L\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| < 1 \\ K_N \displaystyle\int_{0}^{\theta_L} \cos\theta F_N\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p, n, a, b\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| > 1 \end{cases} \tag{3.107}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุนที่ปลาย $\{\theta_L\}$ จากสมการ (3.105) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.106) และ (3.107) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

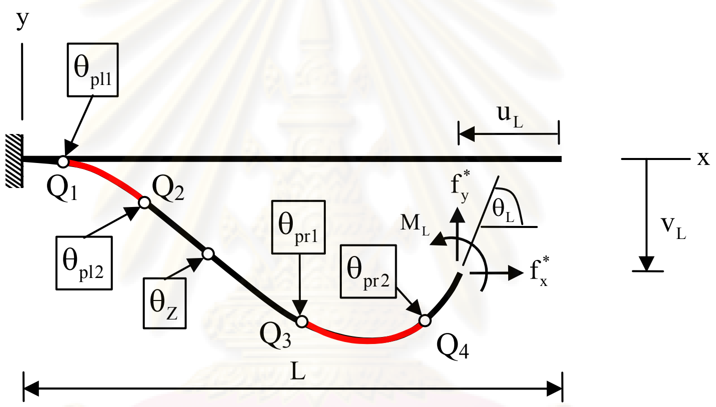
$$\xi^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{0}^{\theta^*} F_L\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| < 1 \\ K_N \displaystyle\int_{0}^{\theta^*} F_N\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p, n, a, b\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| > 1 \end{cases} \tag{3.108}$$

$$\hat{v}^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_L\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| < 1 \\ K_N \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_N\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p, n, a, b\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| > 1 \end{cases} \tag{3.109}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{0}^{\theta^*} \cos\theta F_L\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| < 1 \\ K_N \displaystyle\int_{0}^{\theta^*} \cos\theta F_N\left(\hat{f}_x^*, \hat{f}_y^*, \hat{m}^*, \theta, \theta_L, \hat{\kappa}_p, n, a, b\right) d\theta & ; \left|\hat{m}^*\right| > 1 \end{cases} \tag{3.110}$$

3.2.4 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วน

กรณีที่เกิดจุดดัดกลับบนคานและเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วนนี้เป็นดังแสดงในรูปที่ 3.5 โดยบริเวณเส้นสีดำนั้นแสดงบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและบริเวณสีแดงแสดงส่วนที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นตามลำดับ ตำแหน่งที่โมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรงมี 4 ตำแหน่งด้วยกันคือ Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 ซึ่งมุมหมุนที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งทั้งหมดนี้คือ $\{\theta_{pl1}, \theta_{pl2}, \theta_{pr1}, \theta_{pr2}\}$ และสำหรับตำแหน่งที่เกิดจุดดัดกลับนั้นจะอยู่ระหว่าง Q_2 และ Q_3 ซึ่งเป็นบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นดังแสดง



รูปที่ 3.5 คานยื่นที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วน

ในการสร้างสมการกำกับนั้นเริ่มด้วยการใช้สมการพื้นฐาน (2.14) และ (2.15) ร่วมกับเงื่อนไขของจุดดัดกลับ (4.4) และเงื่อนไขของจุดพิกัดแปรผันตรง Q_2 ตามลำดับ ทำให้สามารถหาค่าคงที่ C_1 และ C_2 ได้ดังนี้

$$C_1 = \hat{f}_x^* \cos\theta_Z + \hat{f}_y^* \sin\theta_Z \tag{3.111}$$

$$C_2 = \hat{f}_x^* \cos\theta_{pl2} + \hat{f}_y^* \sin\theta_{pl2} + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1} \tag{3.112}$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta(\hat{m})F_L\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ K_N\vartheta(\hat{m})F_N\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases}\tag{3.113}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta(\hat{m})\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ K_N\vartheta(\hat{m})\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases}\tag{3.114}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)F_L\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_Z\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ K_N\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)F_N\left(\hat{f}_x^*,\hat{f}_y^*,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases}\tag{3.115}$$

โดยที่ฟังก์ชัน F_L และ F_N นิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\sin\theta\right)}}\tag{3.116}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right)=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2}-\sin\theta\right)+\dfrac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}}}\tag{3.117}$$

ทำการหาปริพันธ์สมการที่ (3.113)-(3.115) ตลอดความยาวคานร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตและความต่อเนื่องที่จุดดัดกลับและจุดพิกัดแปรผันตรง จะได้สมการกำกับเบื้องต้นดังนี้

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}F_N d\theta\right]\right\}=1\tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}\psi\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}&\left[-\int_0^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}\sin\theta F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}\sin\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}\sin\theta F_L d\theta\right]\\&+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\sin\theta F_N d\theta\right]\Bigg\}=\hat{v}_L\end{aligned}\tag{3.119}$$

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_0^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}\cos\theta F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}\cos\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}\cos\theta F_L d\theta\right]\right.$$
$$\left.+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\cos\theta F_N d\theta\right]\right\}=\hat{u}_L+1 \qquad (3.120)$$

เนื่องจากฟังก์ชัน F_L ที่ปรากฏในสมการ (3.118)-(3.120) มีความเป็นเอกฐานที่จุดดัดกลับ ดังนั้นจึงใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานดังกล่าว โดยมีรายละเอียดดังนี้ $\hat{f}_s^*=\sqrt{\hat{f}_x^{*2}+\hat{f}_y^{*2}}$, $\cos\theta_0=\hat{f}_x^*/\hat{f}_s^*$ และ $\sin\theta_0=\hat{f}_y^*/\hat{f}_s^*$ เมื่อแทนค่าตัวแปรเหล่านี้ในสมการ (3.116) จะได้

$$F_L\left(\hat{f}_s,\theta,\theta_Z,\theta_0\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\left(\cos\left(\theta_0-\theta_Z\right)-\cos\left(\theta_0-\theta\right)\right)}} \qquad (3.121)$$

จากนั้นทำการเปลี่ยนตัวแปร $\bar{\theta}=\pi-\left(\theta_0-\theta\right)$ และ $p\sin\phi=\sin\left(\bar{\theta}/2\right)$ และใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\cos\bar{\theta}=1-2\sin^2\left(\bar{\theta}/2\right)$ ฟังก์ชัน F_L ในสมการที่ (3.121) เขียนใหม่ได้เป็น

$$F\left(\hat{f}_s,\phi,p\right)=\frac{1}{\sqrt{2\hat{f}_s^*\left(p^2-p^2\sin^2\phi\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2\hat{f}_s^* p^2\cos^2\phi}} \qquad (3.122)$$

โดยที่ $p=\sin\left(\bar{\theta}_Z/2\right)$ และ $\bar{\theta}_Z=\pi-\left(\theta_0-\theta_Z\right)$ โดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าว สมการปริพันธ์ (3.118)-(3.120) สามารถเขียนใหม่ในรูปของตัวแปร ϕ ได้ดังนี้

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}F_N d\theta\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right]=1 \qquad (3.123)$$

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_0^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}\sin\theta F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\sin\theta F_N d\theta\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{v}_L \qquad (3.124)$$

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{0}^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L\,d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L}\cos\theta F_L\,d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\cos\theta F_N d\theta\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{u}_L+1 \tag{3.125}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0=\sin\left(\overline{\theta}_{pl2}/2\right)$, $p\sin\phi_1=\sin\left(\overline{\theta}_{pr1}/2\right)$, $\overline{\theta}_{pl2}=\pi-\left(\theta_0-\theta_{pl2}\right)$ และ $\overline{\theta}_{pr1}=\pi-\left(\theta_0-\theta_{pr1}\right)$ และ F_0, F_v และ F_u คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_0\left(\phi,p\right)=\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} \tag{3.126}$$

$$F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)=2p\cos\theta_0\sin\phi\psi+\frac{\left(1-2p^2\sin^2\phi\right)\sin\theta_0}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} \tag{3.127}$$

$$F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)=-2p\sin\theta_0\sin\phi\psi+\frac{\left(1-2p^2\sin^2\phi\right)\cos\theta_0}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} \tag{3.128}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_L\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}^{*2}}{2}=0 \tag{3.129}$$

และจากเงื่อนไขที่จุดพิกัดแปรผันตรงทั้ง 4 จะได้สมการกำกับเพิ่มเติมอีก 4 สมการ คือ

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \tag{3.130}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pr1}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_{pr1}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \tag{3.131}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)=0 \tag{3.132}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pr2}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pr2}\right)=0 \tag{3.133}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_Z,\theta_{pl1},\theta_{pl2},\theta_{pr1},\theta_{pr2}\right\}$ จากสมการ (3.123) และ (3.129)-(3.133) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.124) และ (3.125) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้

จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi \right] & \\ & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right) \right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \left(\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} F_L d\theta \right) + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} F_N d\theta \right) \right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(3.134)

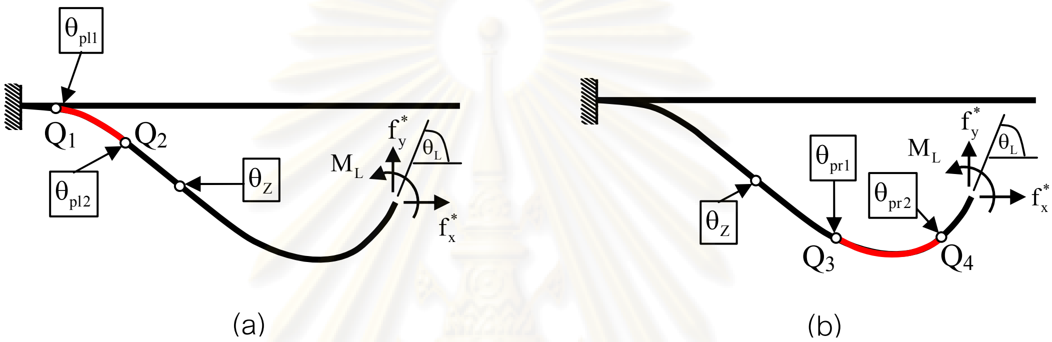
$$
\hat{v}^* = \begin{cases}
-\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\
\qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \left(\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta \right) + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \sin\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1
\end{cases}
\tag{3.145}
$$

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases}
-\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \cos\theta F_L \, d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N \, d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\
\qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N \, d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \left(\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \cos\theta F_L \, d\theta \right) + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \cos\theta F_N \, d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1
\end{cases}
\tag{3.146}
$$

โดยที่ $p \sin\phi^* = \sin\left(\left(\pi - \theta_0 + \theta^*\right)/2\right)$, θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคาน, ξ_Z คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่จุดดัดกลับ และ $\left\{\xi_{pl1}, \xi_{pl2}, \xi_{pr1}, \xi_{pr2}\right\}$ คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่พิกัดแปรผันตรง Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 ตามลำดับ

3.2.5 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุโดยที่บริเวณปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น สามารถเกิดได้ 2 กรณีคือ บริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ทางซ้ายหรือทางขวาของจุดดัดกลับ ดังแสดงในรูปที่ 3.6(a) และ 3.6(b) ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 คานยื่นที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และ
(a) บริเวณที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นอยู่ทางซ้ายของจุดดัดกลับ
(b) บริเวณที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นอยู่ทางขวาของจุดดัดกลับ

ซึ่งสมการกำกับสำหรับทั้งสองกรณีย่อยนี้สามารถพัฒนาจากสมการกำกับในกรณีที่ 3.2.4 โดยกรณีย่อย (a) พิจารณาให้จุด Q_3 อยู่ที่ปลายอิสระคือ $\theta_{pr1} = \theta_L$ และ $\xi_{pr1} = 1$ และในกรณีย่อย (b) กำหนดให้จุด Q_2 อยู่ที่ปลายยึดแน่นคือ $\theta_{pl2} = 0$ และ $\xi_{pl2} = 0$ ซึ่งทำให้สมการกำกับ (3.118)-(3.120) สามารถลดรูปได้เป็น

$$1 = \begin{cases} -\psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right\} + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ (a) \\ \psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} F_N d\theta\right\} + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ (b) \end{cases}$$

(3.147)

$$\hat{v}_L = \begin{cases} -\psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta\right\} + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. -\displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] \ ; \text{(a)} \\ \psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \sin\theta F_N d\theta\right\} + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. -\displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] \ ; \text{(b)} \end{cases} \tag{3.148}$$

$$\hat{u}_L + 1 = \begin{cases} -\psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] \ ; \ \text{(a)} \\ \psi\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_L} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \cos\theta F_N d\theta\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] \ ; \ \text{(b)} \end{cases} \tag{3.149}$$

โดยที่ฟังก์ชัน F_N สำหรับกรณีย่อย (b) นิยามโดย

$$F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{pr1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pr1} - \cos\theta\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pr1} - \sin\theta\right) + \dfrac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}}} \tag{3.150}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 3 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_L\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_L\right) - \frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}^{*2}}{2} = 0 \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned} &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pl2}\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_{pl2}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \quad ; \quad \text{(a)} \\ &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pr1}\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_{pr1}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \quad ; \quad \text{(b)} \end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned} &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)=0 \qquad ; \ (a) \\ &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pr1}-\cos\theta_{pr2}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pr1}-\cos\theta_{pr2}\right)=0 \qquad ; \ (b) \end{aligned} \tag{3.153}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_Z,\theta_{pl1},\theta_{pl2}\right\}$ สำหรับกรณีย่อย (a) และค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_Z,\theta_{pr1},\theta_{pr2}\right\}$ สำหรับกรณีย่อย (b) จากสมการ (3.147) และ (3.151)-(3.153) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.148) และ (3.149) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

เมื่อบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ทางซ้ายของจุดดัดกลับ (กรณี (a))

$$\xi^*=\begin{cases} -\psi\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl1} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}F_N d\theta\right] & ;\ \xi_{pl1}<\xi^*\le\xi_{pl2} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta\right]+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*}F_0\left(\phi,p\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le\xi_Z \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta\right]+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*}F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{3.154}$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(3.155)

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.156)

เมื่อบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ทางขวาของจุดดัดกลับ (กรณี (b))

$$\xi^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] + \psi K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N\,d\theta & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le\xi_{pr2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & \\ \qquad + \psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} F_L\,d\theta + K_N\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} F_N\,d\theta\right] & ;\ \xi_{pr2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \quad (3.157)$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] + \psi K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N\,d\theta & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le\xi_{pr2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] & \\ \qquad + \psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \sin\theta F_L\,d\theta + K_N\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \sin\theta F_N\,d\theta\right] & ;\ \xi_{pr2}<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

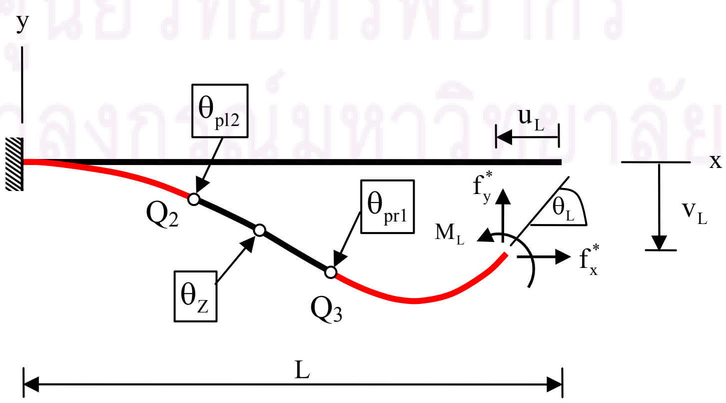
(3.158)

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_Z \\
\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\
\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & \\
\qquad + \psi K_N \displaystyle\int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\
\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & \\
\qquad + \psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \cos\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1
\end{cases}
$$

(3.159)

3.2.6 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและบริเวณปลายยึดแน่นและปลายอิสระนั้นวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 3.7 โดยบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นนั้นเป็นแสดงด้วยเส้นสีดำและสีแดงตามลำดับ



รูปที่ 3.7 คานยื่นที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ซึ่งกระบวนการในการสร้างสมการกำกับนั้นคล้ายกับในกรณีก่อนหน้าโดยการใช้สมการกำกับจากกรณีที่ 3.2.4 เป็นสมการต้นแบบ โดยกำหนดให้จุด Q_1 และ Q_4 อยู่ที่ปลายยึดแน่นและปลายอิสระของคานตามลำดับ ซึ่งทำให้สมการกำกับ (3.123)-(3.125) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\psi K_N\left[-\int_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L} F_N d\theta\right] + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] = 1 \tag{3.160}$$

$$\psi K_N\left[-\int_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L} \sin\theta F_N d\theta\right] + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] = \hat{v}_L \tag{3.161}$$

$$\begin{aligned}\psi K_N&\left[-\int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L} \cos\theta F_N d\theta\right]\\ &+ \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] = \hat{u}_L + 1\end{aligned} \tag{3.162}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 3 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2} - \cos\theta_L\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2} - \sin\theta_L\right) + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1 - \left[\left(\hat{m}^* - a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right) = 0 \tag{3.163}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pl2}\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \sin\theta_{pl2}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \tag{3.164}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pr1}\right) + \hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z - \sin\theta_{pr1}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \tag{3.165}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L, \theta_Z, \theta_{pl2}, \theta_{pr1}\right\}$ จากสมการ (3.160) และ (3.163)-(3.165) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.161) และ (3.162) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int\limits_0^{\theta^*} F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int\limits_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int\limits_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ; \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int\limits_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ; \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\ -\psi K_N \left[\int\limits_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int\limits_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ; \xi_{pr1} < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(3.166)

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi K_N \int\limits_0^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int\limits_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int\limits_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi & ; \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int\limits_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ; \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\ -\psi K_N \left[\int\limits_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int\limits_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ; \xi_{pr1} < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

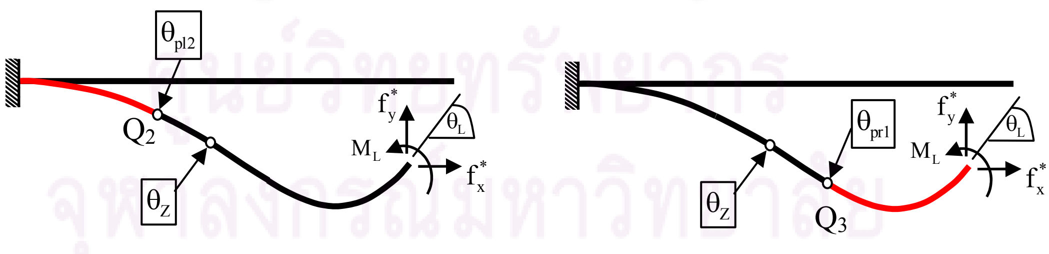
(3.167)

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases}
-\psi K_N \int_0^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\
-\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\
-\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & \\
 & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\
-\psi K_N \left[\int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & \\
\quad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le 1
\end{cases}
$$

(3.168)

3.2.7 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นที่ปลายด้านหนึ่ง

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและบริเวณปลายด้านใดด้านหนึ่งวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น ซึ่งสามารถแยกได้เป็น 2 กรณีย่อยคือ กรณีที่บริเวณปลายยึดแน่นมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นและกรณีที่บริเวณปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 3.8(a) และ 3.8(b) ตามลำดับ



(a) (b)

รูปที่ 3.8 คานยื่นที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุที่ปลายหนึ่งโดย

(a) ปลายยึดแน่นมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

(b) ปลายอิสระมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ซึ่งกระบวนการในการสร้างสมการกำกับนั้นสามารถใช้สมการกำกับจากกรณีที่ 3.2.5 เป็นสมการต้นแบบ โดยกำหนดให้จุด Q_1 อยู่ที่ปลายยึดแน่นของคาน $\left(\theta_{pl1}=0,\xi_{pl1}=0\right)$ สำหรับกรณีย่อย (a) และกำหนดให้จุด Q_4 อยู่ที่ปลายอิสระ $\left(\theta_{pr2}=\theta_L,\xi_{pr2}=1\right)$ สำหรับกรณีย่อย (b) ซึ่งทำให้สมการกำกับ (3.147)-(3.149) สามารถลดรูปได้เป็น

$$1=\begin{cases}-\psi K_N\int_0^{\theta_{pl2}}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ (a)\\ \psi K_N\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ (b)\end{cases} \tag{3.169}$$

$$\hat{v}_L=\begin{cases}-\psi K_N\int_0^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ (a)\\ \psi K_N\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L}\sin\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ (b)\end{cases} \tag{3.170}$$

$$\hat{u}_L+1=\begin{cases}-\psi K_N\int_0^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ (a)\\ \psi K_N\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_L}\cos\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ (b)\end{cases} \tag{3.171}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติมอีก 2 สมการคือ

$$\begin{aligned}&\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_L\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}^{*2}}{2}=0 && ;\ (a)\\ &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pr1}-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pr1}-\sin\theta_L\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}^*-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 && ;\ (b)\end{aligned} \tag{3.172}$$

$$\begin{aligned}&\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 && ;\ (a)\\ &\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pr1}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_{pr1}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 && ;\ (b)\end{aligned} \tag{3.173}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_Z,\theta_{pl2}\right\}$ สำหรับกรณีย่อย (a) และค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_Z,\theta_{pr1}\right\}$ สำหรับกรณีย่อย (b) จากสมการ (3.169), (3.172) และ (3.173) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.170) และ (3.171) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

เมื่อบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ที่ปลายยึดแน่น (กรณี (a))

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le\xi_Z \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1 \end{cases} \quad (3.174)$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le\xi_Z \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

(3.175)

$$\hat{u}^*+\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le\xi_Z \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

(4.176)

เมื่อบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ที่ปลายอิสระ (กรณี (b))

$$\xi^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] + \psi K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N\,d\theta & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le 1 \end{cases} \quad (3.177)$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] + \psi K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N\,d\theta & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

(3.178)

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi\right] + \psi K_N \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N\,d\theta & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

(3.179)

3.2.8 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและตลอดคานวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและโมเมนต์ที่ทุกหน้าตัดมีค่าไม่เกินค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรง ในที่นี้ใช้การสร้างสมการกำกับจากสมการกำกับในกรณีที่ 3.2.7 กรณีย่อย (a) โดยกำหนดให้จุด Q_2 $\left(\theta_{pl2}=0,\xi_{pl2}=0\right)$ อยู่ที่ปลายยึดแน่น สมการกำกับ (3.169)-(3.171) จึงสามารถลดรูปได้เป็นดังนี้

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right]=1 \tag{3.180}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{v}_L \tag{3.181}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{u}_L+1 \tag{3.182}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระของคานจะได้สมการกำกับเพิ่มเติมคือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_L\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_L\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}^{*2}}{2}=0 \tag{3.183}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\{\theta_L,\theta_Z\}$ จากสมการ (3.180) และ (3.183) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.181) และ (3.182) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

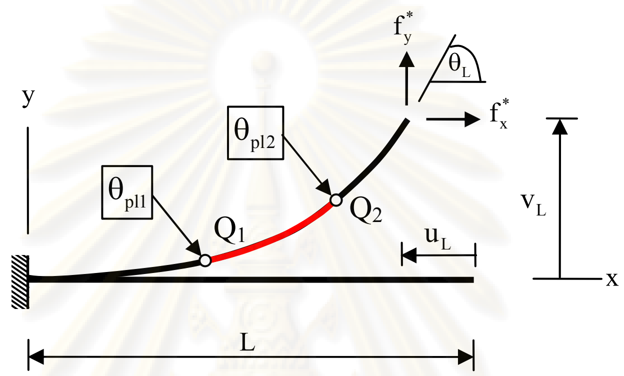
$$\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.184}$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.185}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.186}$$

3.2.9 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายอิสระและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

ในกรณีพิจารณาคานยื่นที่มีจุดดัดกลับที่ปลายอิสระและมีการแบ่งพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน ดังแสดงในรูปที่ 4.9 โดยบริเวณที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นนั้นแสดงดังเส้นสีดำ และบริเวณที่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นแสดงดังเส้นสีแดง ซึ่งกรณีที่พิจารณานี้เป็นกรณีพิเศษของกรณีที่ 3.2.4



รูปที่ 3.9 คานยื่นที่มีจุดดัดกลับอยู่ที่ปลายอิสระและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

การสร้างสมการกำกับในกรณีนี้ทำโดยการนำสมการกำกับในกรณีที่ 3.2.4 เป็นสมการต้นแบบเพื่อพัฒนา โดยให้จุดดัดกลับอยู่ที่ปลายอิสระ นั่นคือ $\theta_Z = \theta_L$ และ $\xi_Z = 1$ โดยสมการที่ (3.123)-(3.125) สามารถลดรูปได้เป็น

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right\} + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi = 1 \tag{3.187}$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta\right\} + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0)\,d\phi = \hat{v}_L \tag{3.188}$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta\right\} + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi,p,\theta_0)\,d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{3.189}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายอิสระและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_L-\cos\theta_{pl2}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_L-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \tag{3.190}$$

$$\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)=0 \tag{3.191}$$

ในการแก้ปัญหาเริ่มด้วยการหาค่ามุมหมุน $\left\{\theta_L,\theta_{pl1},\theta_{pl2}\right\}$ จากสมการ (3.187), (3.190) และ (3.191) และหาค่าการขจัดในทิศทางดิ่งและราบจากสมการ (3.188) และ (3.189) ตามลำดับ ส่วนมุมหมุนและการขจัดในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ตำแหน่งใดๆภายในคานหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^*=\begin{cases}-\psi\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl1}\\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}F_N d\theta\right] & ;\xi_{pl1}<\xi^*\le\xi_{pl2}\\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta\right]+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*}F_0\left(\phi,p\right)d\phi & ;\xi_{pl2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{3.192}$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}-\psi\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl1}\\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta\right] & ;\xi_{pl1}<\xi^*\le\xi_{pl2}\\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta\right]+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi & ;\xi_{pl2}<\xi^*\le 1\end{cases}$$

(3.193)

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_0^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi & \\ & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases}
$$

(3.194)

3.2.10 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายอิสระโดยส่วนที่อยู่ติดกับปลายยึดแน่นมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

คานในกรณีนี้เป็นกรณีพิเศษของคานกรณีที่ 3.2.9 โดยที่จุด Q_1 อยู่ที่ปลายยึดแน่นของคานพอดี $\left(\theta_{pl1} = 0, \xi_{pl1} = 0\right)$ ดังนั้นสมการต่างๆที่พัฒนาขึ้นในกรณีที่ 3.2.9 สามารถใช้กับกรณีนี้ได้ สมการที่ (3.187)-(3.189) สำหรับกรณีพิเศษนี้ลดรูปได้เป็น

$$
-\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi = 1 \quad (3.195)
$$

$$
-\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi = \hat{v}_L \quad (3.196)
$$

$$
-\psi K_N \int_0^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi = \hat{u}_L + 1 \quad (3.197)
$$

ส่วนสมการเพิ่มเติมที่ใช้ประกอบการหาค่ามุมหมุนที่ปลายอิสระและมุมหมุนที่จุดพิกัดแปรผันตรงสามารถหาได้จากเงื่อนไขของจุดพิกัดแปรผันตรงดังนี้

$$
\hat{f}_x^* \left(\cos\theta_L - \cos\theta_{pl2}\right) + \hat{f}_y^* \left(\sin\theta_L - \sin\theta_{pl2}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \quad (3.198)
$$

สมการที่ (3.195) และ (3.198) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของ $\left\{\theta_{pl2}, \theta_L\right\}$ หลังจากนั้นสามารถคำนวณค่าการขจัดที่ปลายอิสระได้จากสมการที่ (3.196) และ (3.197) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง x^* ใดๆภายในคานสามารถคำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_p \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_p} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi, p\right) d\phi & ;\ \xi_p < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.199}$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_p} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.200}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_0^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_0^{\theta_p} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{3.201}$$

3.2.11 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายอิสระโดยวัสดุทั้งโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น

คานในกรณีนี้เป็นกรณีพิเศษของคานกรณีที่ 3.2.10 โดยที่จุด Q_2 อยู่ที่ปลายยึดแน่นของคานพอดี $\left(\theta_{pl2} = 0, \xi_{pl2} = 0\right)$ ดังนั้นสมการต่างๆที่พัฒนาขึ้นในกรณีที่ 3.2.10 สามารถใช้กับกรณีนี้ได้ สมการที่ (3.195)-(3.197) สำหรับกรณีพิเศษนี้ลดรูปได้เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi, p\right) d\phi = 1 \tag{3.202}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi = \hat{v}_L \tag{3.203}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^* \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{3.204}$$

สมการที่ (3.202) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของ θ_L หลังจากนั้นสามารถคำนวณค่าการขจัดที่ปลายอิสระได้จากสมการที่ (3.203) และ (3.204) ส่วนค่าการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่งใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

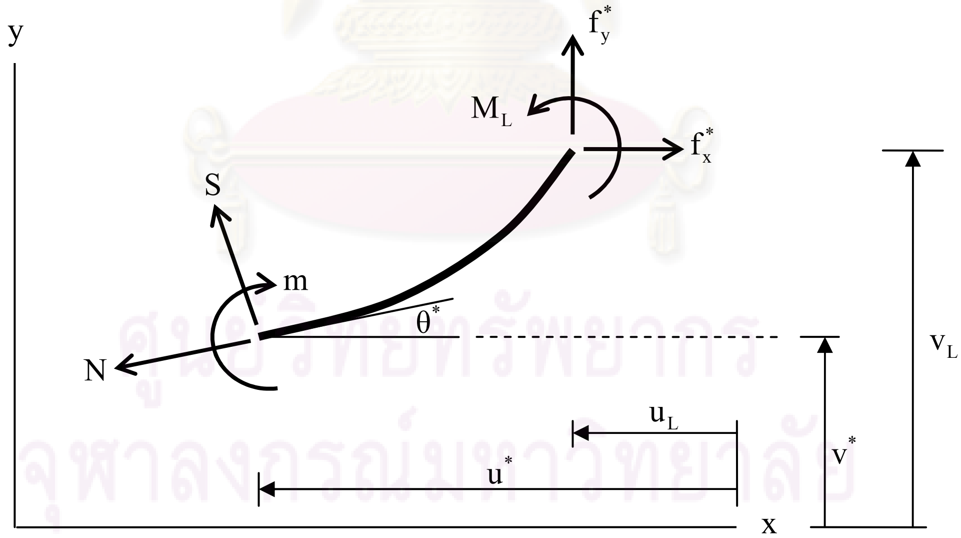
$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi, p\right) d\phi = \xi^* \tag{3.205}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi = \hat{v}^* \tag{3.206}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi = \hat{u}^* + \xi^* \tag{3.207}$$

3.3 การหาค่าแรงภายในที่ตำแหน่งใด ๆภายในคาน

จากการพิจารณาสภาวะสมดุลของชิ้นส่วนย่อยทางขวาของพิกัด $\xi^* = x^* / L$ ที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูปดังแสดงในรูปที่ 3.5 จะได้ แรงตามแนวแกน (N) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ดัด (m) ที่ตำแหน่ง ξ^* ใดๆดังนี้



รูปที่ 3.10 ผังวัสดุอิสระของส่วนย่อยทางขวาของจุด $\xi^* = x^* / L$

$$\hat{N}\left(\xi^*\right) = \hat{f}_x^* \cos\theta^* + \hat{f}_y^* \sin\theta^* \tag{3.208}$$

$$\hat{S}\left(\xi^*\right) = \hat{f}_x^* \sin\theta^* - \hat{f}_y^* \cos\theta^* \tag{3.209}$$

$$\hat{m}\left(\xi^*\right) = -\hat{f}_x^*\left(\hat{v}_L - \hat{v}\left(\xi^*\right)\right) + \hat{f}_y^*\left(\hat{u}_L - \hat{u}\left(\xi^*\right)\right) + \hat{m}^* \tag{3.210}$$

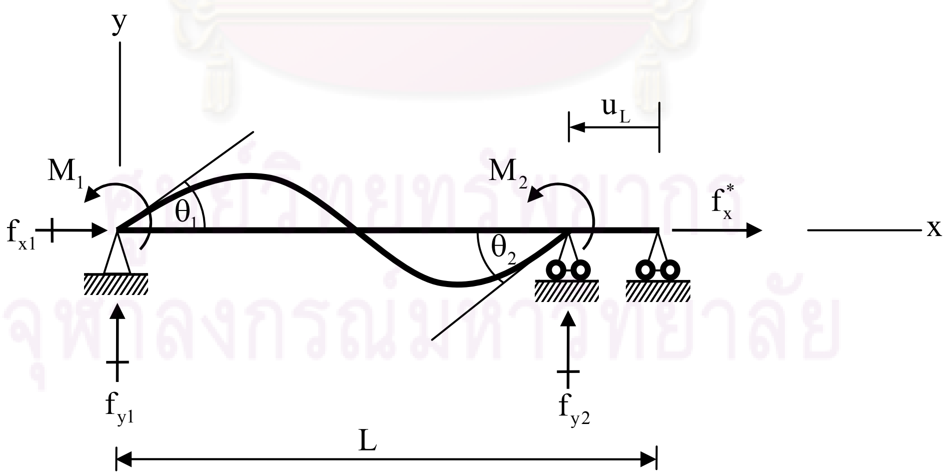
โดยที่ $\hat{N} = NL/m_p$, $\hat{S} = SL/m_p$ และ $\hat{m} = m/m_p$ เป็นแรงตามแนวแกนบรรทัดฐาน แรงเฉือนบรรทัดฐาน และโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานตามลำดับ

บทที่ 4

การประยุกต์ใช้สมการพื้นฐานกับปัญหาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย

เนื้อหาในส่วนนี้กล่าวถึงการนำสมการพื้นฐานสมการที่ (2.13)-(2.21) มาใช้วิเคราะห์ปัญหาความโค้งมากสำหรับคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายซึ่งรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองวัสดุทั้งสองแบบจำลอง โดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งทั้งสองแบบจำลองที่กล่าวในบทที่ 2 พร้อมทั้งแสดงรายละเอียดการคำนวณค่าพิกัดของคานหลังการโก่งตัวและการคำนวณค่าแรงภายในที่เกิดขึ้น

พิจารณาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายมีความยาว L และมีคุณสมบัติดังที่กล่าวในหัวข้อ 2.1 คานดังกล่าวรับโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองและรับแรงกระทำในแนวราบที่ปลายด้านขวาดังแสดงในรูปที่ 4.1 โดยทิศทางของแรงและโมเมนต์ตามที่แสดงในรูปเป็นทิศทางที่เป็นบวก



รูปที่ 4.1 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสอง

เงื่อนไขขอบเขตแบบจำเป็น (Essential boundary conditions) ที่ปลายทั้งสองของคานในรูปที่ 4.1 คือ

$$\hat{u}(\xi = 0) = 0 \tag{4.1}$$

$$\hat{v}(\xi = 0) = 0 \tag{4.2}$$

$$\hat{v}(\xi = 1) = 0 \tag{4.3}$$

และเงื่อนไขที่จุดดัดกลับบนคานเป็นดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\xi}(\theta_Z) = 0 \tag{4.4}$$

4.1 สมการกำกับสำหรับ M-κ ตามแบบจำลองที่ 1

ในกรณีนี้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดดังสมการที่ (2.6) เงื่อนไขขอบเขตเกี่ยวความโค้งและแรงกระทำที่ปลายทั้งสองเป็นดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\xi}(\xi = 0) = \hat{m}_1^{\frac{1}{n}}\hat{\kappa}_p \tag{4.5}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}(\xi = 1) = \hat{m}_2^{\frac{1}{n}}\hat{\kappa}_p \tag{4.6}$$

$$\hat{f}_x(\xi = 1) = \frac{f_x^* L}{m_p} = \hat{f}_x^* \tag{4.7}$$

โดยที่ $\hat{m}_1 = M_1/m_p$, $\hat{m}_2 = M_2/m_p$ และ $\hat{\kappa}_p = \kappa_p L$ เป็นปริมาณไร้มิติ ในการสร้างสมการกำกับสำหรับคานที่มีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 1 สามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยได้ดังนี้

4.1.1 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคาน

กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานเกิดขึ้นเมื่อโมเมนต์ที่กระทำที่ปลายทั้งสองมีทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งส่งผลให้โครงสร้างหลังโก่งตัวมีความโค้งเดี่ยว (single curvature) ตลอดความยาวคาน จากสมการพื้นฐาน (2.13) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขต (4.6) ทำให้สามารถหาค่าคงที่ C ได้ดังนี้

$$C = \hat{f}_x \cos\theta_2 - \hat{f}_y \sin\theta_2 + \frac{n}{n+1}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_2\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{4.8}$$

แทนค่าคงที่ C ที่ได้ในสมการที่ (2.16), (2.18) และ (2.19) จะได้สมการอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) \tag{4.9}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta \sin\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) \tag{4.10}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta(\cos\theta - 1) F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) \tag{4.11}$$

โดยที่ ϑ เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางของโมเมนต์กระทำที่ปลายขวาดังนี้คือ $\vartheta = 1$ เมื่อ $\hat{m}_2 \geq 0$ และ $\vartheta = -1$ เมื่อ $\hat{m}_2 < 0$ และฟังก์ชัน F นิยามโดย

$$F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_2 - \cos\theta\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_2 - \sin\theta\right) + \frac{n}{n+1}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_2\right)^{\frac{n+1}{n}}}} \tag{4.12}$$

โดยการหาปริพันธ์โดยตรงของสมการที่ (4.9)-(4.11) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสอง จะได้

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_{\theta_1}^{\theta_2} F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = 1 \tag{4.13}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = 0 \tag{4.14}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \hat{u}_L + 1 \tag{4.15}$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (4.5) ร่วมกับสมการที่ (4.9) จะได้สมการกำกับเพิ่มเติม

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) + \frac{n}{n+1}\hat{\kappa}_p\left[\left(\hat{m}_2\right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(\hat{m}_1\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] = 0 \tag{4.16}$$

กระบวนการหาผลเฉลยในปัญหาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายมีความแตกต่างจากในกรณีปัญหาคานยื่น เนื่องจากตัวแปรไม่ทราบค่าในปัญหาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายมีความแตกต่างจากกรณีคานยื่น ตัวแปรไม่ทราบค่าประกอบด้วยมุมหมุนที่ปลายทั้งสองข้าง $\{\theta_1, \theta_2\}$ แรงเฉือนไร้มิติ $\hat{f}_y$ และการขจัดในแนวแกน $\hat{u}_L$ สมการที่ (4.16) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ ส่วนสมการที่ (4.13) และ (4.14) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1, \theta_2\}$ เมื่อหาค่ามุมหมุนทั้งสองได้แล้ว ใช้สมการที่ (4.16) สำหรับหาค่า $\hat{f}_y$ และสมการที่ (4.15) สำหรับหาค่า $\hat{u}_L$ ส่วนแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับสามารถหาได้จากสมดุลของทั้งคานที่สภาวะหลังการเปลี่ยนรูปดังสมการ

$$\hat{f}_{x1} = -\hat{f}_x^* \tag{4.17}$$

$$\hat{f}_{y1} = \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{d}} \tag{4.18}$$

$$\hat{f}_{y2} = -\frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{d}} \tag{4.19}$$

โดยที่ $\hat{f}_{x1} = f_{x1}L/m_p$, $\hat{f}_{y1} = f_{y1}L/m_p$, $\hat{f}_{y2} = f_{y2}L/m_p$ และ $\hat{d} = 1 + \hat{u}_L$ ส่วนค่าการขจัดและมุมหมุนที่ตำแหน่ง x^* ใดๆภายในคาน สามารถหาได้โดยการหาปริพันธ์สมการที่ (4.9)-(4.11) จากปลายด้านซ้ายของคานถึงตำแหน่ง x^* ดังสมการ

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta \int_{\theta_1}^{\theta^*} F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \xi^* \tag{4.20}$$

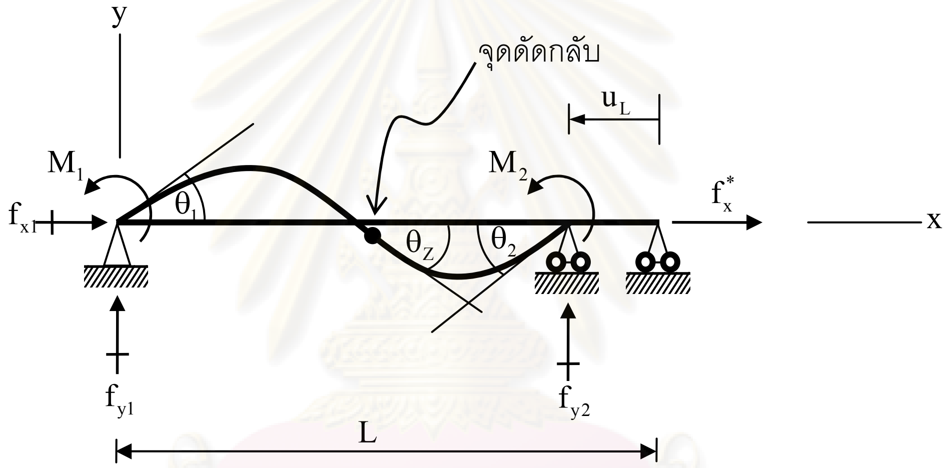
$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta \int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \hat{v}^* \tag{4.21}$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta \int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{m}_2, \theta, \theta_2, n, \hat{\kappa}_p\right) d\theta = \hat{u}^* + \xi^* \tag{4.22}$$

โดยที่ $\xi^* = x^*/L$ และตัวแปรหรือปริมาณไร้มิติอื่นๆ นิยามเช่นเดียวกับในบทที่ 3

4.1.2 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในช่วงความยาวคาน

จุดดัดกลับภายในคานสามารถเกิดขึ้นได้เมื่อค่าโมเมนต์ที่กระทำที่ปลายทั้งสองมีทิศทางเดียวกันและมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ การมีจุดดัดกลับภายในคานส่งผลให้ชิ้นส่วนทั้งสองด้านของจุดดัดกลับมีเครื่องหมายของความโค้งแตกต่างกัน ดังนั้นในการวิเคราะห์คานในกรณีนี้จำเป็นต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ส่วนย่อยตามตำแหน่งจุดดัดกลับ และผลจากการการแบ่งคานเป็น 2 ส่วนนี้ทำให้เกิดตัวแปรไม่ทราบค่าเพิ่มเติม 2 ตัวแปร คือ ตำแหน่งของจุดดัดกลับ $(\xi_Z = x_Z/L)$ และมุมหมุนที่จุดดัดกลับ(θ_Z)



รูปที่ 4.2 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายในกรณีที่มีจุดดัดกลับภายในช่วงความยาวของคาน

โดยใช้เงื่อนไข (4.4) ร่วมกับสมการพื้นฐาน (2.13) จะได้ค่าคงที่ C เท่ากับ

$$C = \hat{f}_x \cos\theta_Z - \hat{f}_y \sin\theta_Z \tag{4.23}$$

แทนค่า C ที่ได้ในสมการที่ (2.16), (2.18) และ (2.19) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta(\hat{m})F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_Z, n\right) \tag{4.24}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta(\hat{m})\sin\theta F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right) \tag{4.25}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta} = \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\ \vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right) \tag{4.26}$$

โดยที่ F คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\sin\theta\right)}} \tag{4.27}$$

หลังจากแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (4.24)-(4.26) ด้วยการหาปริพันธ์โดยตรงตลอดความยาวคาน ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายและความต่อเนื่องที่จุดดัดกลับจะได้สมการกำกับเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\psi\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_Z}F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_2}F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right]=1 \tag{4.28}$$

$$\psi\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_Z}\sin\theta F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_2}\sin\theta F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right]=0 \tag{4.29}$$

$$\psi\sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_Z}\cos\theta F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_2}\cos\theta F\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z,n\right)d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \tag{4.30}$$

โดยที่ ψ คือค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางของโมเมนต์ที่กระทำที่ปลายทั้งสองของคานดังสมการ

$$\psi = \begin{cases} -1 & ;\ \hat{m}_1,\hat{m}_2 < 0 \\ 1 & ;\ \hat{m}_1,\hat{m}_2 > 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

ความเป็นเอกฐานของฟังก์ชัน F ที่จุดดัดกลับ สามารถกำจัดได้โดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร เช่นเดียวกับกรณีจุดดัดกลับในคานยื่นดังที่กล่าวในบทที่ 3 ซึ่งเริ่มต้นด้วยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

$$\hat{f}_s = \sqrt{\hat{f}_x^2+\hat{f}_y^2} \tag{4.32}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}_s} \tag{4.33}$$

$$\sin\theta_0 = \frac{\hat{f}_y}{\hat{f}_s} \tag{4.34}$$

เมื่อแทนค่าตัวแปรใหม่ลงในสมการที่ (4.27) จะได้

$$F\left(\hat{f}_s,\theta,\theta_Z,\theta_0,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_s\left(\cos\left(\theta_0+\theta_Z\right)-\cos\left(\theta_0+\theta\right)\right)}} \tag{4.35}$$

จากนั้นใช้การเปลี่ยนตัวแปร $\overline{\theta} = \pi - \left(\theta_0 + \theta\right)$ ร่วมกับการใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\cos\overline{\theta} = 1 - 2\sin^2\left(\overline{\theta}/2\right)$ ในสมการที่ (4.35) จะได้

$$F\left(\hat{f}_s,\overline{\theta},\overline{\theta}_Z,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s\left(\sin^2\left(\frac{\overline{\theta}_Z}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\right)}} \tag{4.36}$$

โดยที่ $\overline{\theta}_Z = \pi - \left(\theta_0 + \theta_Z\right)$ จากนั้นทำการเปลี่ยนตัวแปรอีกครั้งจาก $\overline{\theta}$ เป็น ϕ ดังสมการ $p\sin\phi = \sin\left(\overline{\theta}/2\right)$ โดยที่ $p = \sin\left(\overline{\theta}_Z/2\right)$ จะได้ฟังก์ชัน F ดังนี้

$$F\left(\hat{f}_s,\phi,p,n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s\left(p^2-p^2\sin^2\phi\right)}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s p^2\cos^2\phi}} \tag{4.37}$$

จากการเปลี่ยนตัวแปรที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น จะได้ความสัมพันธ์เชิงอนุพันธ์ระหว่างตัวแปร θ และ ϕ ดังนี้

$$d\theta = -d\overline{\theta} = -\frac{2p\cos\phi}{\cos\left(\overline{\theta}/2\right)}d\phi = -\frac{2p\cos\phi}{\psi\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}}d\phi \tag{4.38}$$

โดยที่

$$\cos\left(\overline{\theta}/2\right) = \psi\sqrt{1-p^2\sin^2\phi} \tag{4.39}$$

เมื่อแทนค่า (4.37) และ (4.38) ในสมการที่ (4.28)-(4.30) จะสามารถกำกับดังต่อไปนี้

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p,n\right)d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0\left(\phi,p,n\right)d\phi\right] = 1 \tag{4.40}$$

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi,p,\theta_0,n)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi,p,\theta_0,n)\,d\phi\right] = 0 \tag{4.41}$$

$$\hat{F}_s\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi,p,\theta_0,n)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u(\phi,p,\theta_0,n)\,d\phi\right] = \hat{u}_L + 1 \tag{4.42}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin(\bar{\theta}_1/2)$, $p\sin\phi_1 = \sin(\bar{\theta}_2/2)$, $\bar{\theta}_1 = \pi - (\theta_0 + \theta_1)$, $\bar{\theta}_2 = \pi - (\theta_0 + \theta_2)$,

$\hat{F}_s = \sqrt[n+1]{\dfrac{n}{(n+1)2\hat{f}_s^*\hat{\kappa}_p^n}}$ และฟังก์ชัน F_0, F_v และ F_u นิยามโดย

$$F_0(\phi,p,n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}\,\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} \tag{4.43}$$

$$F_v(\phi,p,\theta_0,n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}}\left(-2p\cos\theta_0\sin\phi\psi + \frac{(1-2p^2\sin^2\phi)\sin\theta_0}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}}\right) \tag{4.44}$$

$$F_u(\phi,p,\theta_0,n) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{(p\cos\phi)^{1-n}}}\left(2p\sin\theta_0\sin\phi\psi + \frac{(1-2p^2\sin^2\phi)\cos\theta_0}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}}\right) \tag{4.45}$$

สำหรับกรณีที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (n=1) ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติ (regular function) แต่สำหรับกรณีที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น $(0<n<1)$ ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันที่มีความเป็นเอกฐานที่ $\phi = \pi/2$ เนื่องจากพจน์ $(\cos\phi)^{1-n}$ ที่ยังคงปรากฏอยู่ในสมการ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ทำการเปลี่ยนตัวแปรเพิ่มเติมดังนี้

$$\left(\pi/2 - \phi\right)^{\alpha} = \beta \tag{4.46}$$

$$-\alpha\beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\,d\phi = d\beta \tag{4.47}$$

เมื่อแทนค่า (4.46) และ (4.47) ในสมการที่ (4.40)-(4.42) พร้อมทั้งกำจัดพจน์ที่มีความเป็นเอกฐานโดยการเลือกค่า $\alpha = 2n/(n+1)$ จะได้สมการกำกับสุดท้ายสามสมการดังนี้คือ

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[-\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_0(\beta,p,n)\,d\beta + \int_{0}^{\bar{\beta}_1} F_0(\beta,p,n)\,d\beta\right] = 1 \tag{4.48}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[-\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta+\int_{0}^{\bar{\beta}_1} F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right]=0 \tag{4.49}$$

$$\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[-\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta+\int_{0}^{\bar{\beta}_1} F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta\right]=\hat{u}_L+1 \tag{4.50}$$

โดยที่ $\bar{\beta}_0=\left(\pi/2-\phi_0\right)^{2n/(n+1)}$, $\bar{\beta}_1=\left(\pi/2-\phi_1\right)^{2n/(n+1)}$ และฟังก์ชัน F_0, F_v และ F_u กลายเป็น

$$F_0\left(\beta,p,n\right)=K\frac{p^{\frac{n-1}{n+1}}}{\sqrt{1-p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}} \tag{4.51}$$

$$F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)=K\left(-2p^{\frac{2n}{n+1}}\cos\theta_0\cos\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\psi+\frac{\sin\theta_0\left(1-2p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)}{p^{\frac{1-n}{n+1}}\sqrt{1-p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}}\right) \tag{4.52}$$

$$F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)=K\left(2p^{\frac{2n}{n+1}}\sin\theta_0\cos\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\psi+\frac{\cos\theta_0\left(1-2p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)}{p^{\frac{1-n}{n+1}}\sqrt{1-p^2\cos^2\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)}}\right) \tag{4.53}$$

โดยที่ $K=\sqrt[n+1]{\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\Big/\sin\left(\beta^{\frac{n+1}{2n}}\right)\right)^{1-n}}$

จากสมการที่ (4.24) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสอง จะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการ คือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_1\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_1\right)-\frac{n\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_1\right)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}=0 \tag{4.54}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_2\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_2\right)-\frac{n\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_2\right)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}=0 \tag{4.55}$$

สมการที่ (4.55) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.48), (4.49) และ (4.54) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1, \theta_2, \theta_Z\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.50) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{\bar{\beta}^*} F_0(\beta, p, n)\, d\beta\right] & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_Z \\ \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_0(\beta, p, n)\, d\beta + \displaystyle\int_{0}^{\bar{\beta}^*} F_0(\beta, p, n)\, d\beta\right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.56}$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{\bar{\beta}^*} F_v(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta\right] & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_Z \\ \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_v(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta + \displaystyle\int_{0}^{\bar{\beta}^*} F_0(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta\right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.57}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{\bar{\beta}^*} F_u(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta\right] & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_Z \\ \hat{F}_s\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left[-\displaystyle\int_{\bar{\beta}_0}^{0} F_u(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta + \displaystyle\int_{0}^{\bar{\beta}^*} F_u(\beta, p, \theta_0, n)\, d\beta\right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.58}$$

โดยที่ $\bar{\beta}^* = \left(\pi/2 - \phi^*\right)^{2n/(n+1)}$, $p \sin\phi^* = \sin\left(\left(\pi - \theta_0 - \theta^*\right)/2\right)$, θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน ξ^* และ ξ_Z คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่จุดดัดกลับ

4.1.3 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายของคาน

การเกิดจุดดัดกลับที่ปลายคานพบได้ในกรณีที่ไม่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายนั้น โดยค่าความโค้งหรือค่าโมเมนต์ดัดจะมีเครื่องหมายเหมือนกันตลอดทั้งคาน เนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์ในกรณีที่ไม่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายหรือไม่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านขวามีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นจะแสดงเพียงรายละเอียดการวิเคราะห์เฉพาะกรณีที่ไม่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านขวาเท่านั้น และในกรณีดังกล่าวนี้สามารถพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของกรณีที่ 4.1.2 ได้โดยการพิจารณาให้จุดดัดกลับอยู่ที่ปลายด้านขวานั่นคือ $\theta_Z = \theta_2$ และ $\xi_Z = 1$ ดังนั้นฟังก์ชัน F จากสมการ (4.27) จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$$F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_2, n\right) = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_2 - \cos\theta\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_2 - \sin\theta\right)}} \tag{4.59}$$

โดยอาศัยสมการ (4.28)-(4.30) และฟังก์ชัน F จากสมการที่ (4.59) จะได้สมการกำกับสำหรับกรณีจุดดัดกลับอยู่ที่ปลายด้านขวาดังนี้

$$-\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_2, n\right) d\theta = 1 \tag{4.60}$$

$$-\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_2, n\right) d\theta = 0 \tag{4.61}$$

$$-\psi \sqrt[n+1]{\frac{n}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta F\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_2, n\right) d\theta = \hat{u}_L + 1 \tag{4.62}$$

โดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเช่นเดียวกับกรณีที่ 4.1.2 นั่นคือใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ $\sin\left(\bar{\theta}/2\right) = p\sin\phi$, $p = \sin\left(\bar{\theta}_2/2\right)$, $\bar{\theta}_2 = \pi - \left(\theta_0 + \theta_2\right)$ และ $\bar{\theta} = \pi - \left(\theta_0 + \theta\right)$ สมการที่ (4.60)-(4.62) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi, p, n\right) d\phi = 1 \tag{4.63}$$

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0, n\right) d\phi = 0 \tag{4.64}$$

$$\hat{F}_s \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0, n\right) d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{4.65}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin\left(\left(\pi - \theta_0 + \theta_1\right)/2\right)$ และ F_0, F_v และ F_u คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยสมการที่ (4.43)-(4.45) ตามลำดับ ในกรณีที่ $0 < n < 1$ สามารถกำจัดความเป็นเอกฐานของฟังก์ชัน F_0, F_v, F_u ได้โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปร (4.46) โดยเลือกค่า $\alpha = 2n/(n+1)$ ซึ่งหลังจากทำการเปลี่ยนตัวดังกล่าวจะได้สมการกำกับดังนี้

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right) \int_{\bar{\beta}}^{0} F_0\left(\beta, p, n\right) d\beta = 1 \tag{4.66}$$

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}}^{0}F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta=0 \tag{4.67}$$

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}}^{0}F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta=\hat{u}_L+1 \tag{4.68}$$

โดยที่ $\bar{\beta}=\left(\pi/2-\phi_0\right)^{2n/(n+1)}$ และ F_0 , F_v และ F_u คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยสมการที่ (4.51)-(4.53) ตามลำดับ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านซ้ายจะได้สมการกำกับเพิ่มเติมอีก 1 สมการคือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\cos\theta_1\right)-\frac{n\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_1\right)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}=0 \tag{4.69}$$

สมการที่ (4.69) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.66) และ (4.67) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.68) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}}^{\bar{\beta}^*}F_0\left(\beta,p,n\right)d\beta=\xi^* \tag{4.70}$$

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}}^{\bar{\beta}^*}F_v\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta=\hat{v}^* \tag{4.71}$$

$$-\hat{F}_s\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_{\bar{\beta}}^{\bar{\beta}^*}F_u\left(\beta,p,\theta_0,n\right)d\beta=\hat{u}^*+\xi^* \tag{4.72}$$

โดยที่ $\bar{\beta}^*=\left(\pi/2-\phi^*\right)^{2n/(n+1)}$, $p\sin\phi^*=\sin\left(\left(\pi-\theta_0+\theta^*\right)/2\right)$ และ θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน ξ^* ใดๆภายในคาน

4.2 สมการกำกับสำหรับ M-κ ตามแบบจำลองที่ 2

ในกรณีนี้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งดังสมการที่ (2.6) และเงื่อนไขเพิ่มเติมที่ตำแหน่งพิกัดแปรผันตรง $(x=x_p)$ บนคาน คือ

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(\theta_p\right)=\hat{\kappa}_p \tag{4.73}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตเกี่ยวกับความโค้งและแรงกระทำที่ปลายทั้งสองเป็นดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0)=\begin{cases}\hat{m}_1\hat{\kappa}_p & ;\ \hat{m}_1<1\\ \left[(\hat{m}_1-a)/b\right]^{1/n}\ \hat{\kappa}_p & ;\ \hat{m}_1>1\end{cases} \tag{4.74}$$

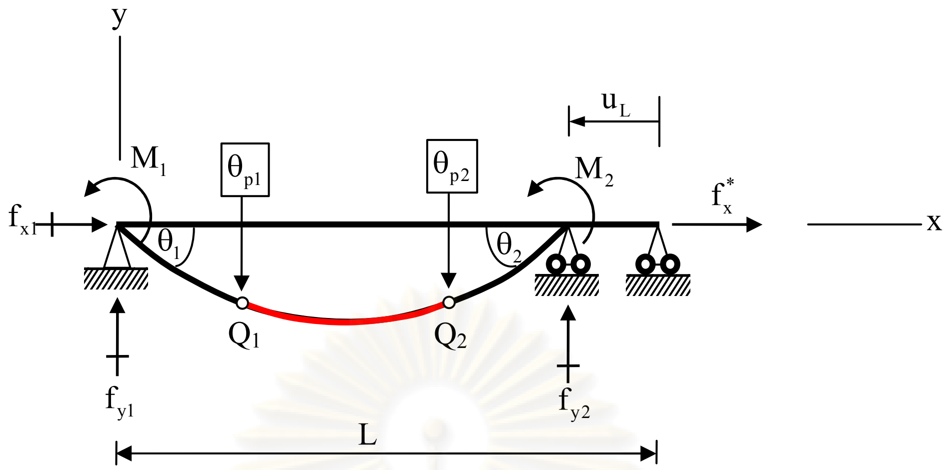
$$\frac{d\theta}{d\xi}(\xi=1)=\begin{cases}\hat{m}_2\hat{\kappa}_p & ;\ \hat{m}_2<1\\ \left[(\hat{m}_2-a)/b\right]^{1/n}\ \hat{\kappa}_p & ;\ \hat{m}_2>1\end{cases} \tag{4.75}$$

$$\hat{f}_x\,(\xi=1)=\frac{f_x^*L}{m_p}=\hat{f}_x^* \tag{4.76}$$

โดยที่ $\hat{m}_1=M_1/m_p$, $\hat{m}_2=M_2/m_p$ และ $\hat{\kappa}_p=\kappa_p L$ ในการพัฒนาสมการกำกับสำหรับคานที่มีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 2 สามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

4.2.1 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่ไม่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุบนคานเป็น 3 ส่วนดังแสดงในรูปที่ 4.3 โดยจุด Q_1 และ Q_2 เป็นจุดที่โมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรงและมีค่าการหมุน การขจัดในแนวราบและการขจัดในแนวดิ่งเป็น $\{\theta_{p1},\hat{u}_{p1},\hat{v}_{p1}\}$ และ $\{\theta_{p2},\hat{u}_{p2},\hat{v}_{p2}\}$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบคือ กรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น $(|\hat{m}_1,\hat{m}_2|>1)$ และกรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้น $(|\hat{m}_1,\hat{m}_2|<1)$ แต่การสร้างสมการกำกับทั้งสองกรณีนี้สามารถใช้กระบวนการที่ใกล้เคียงกันได้



รูปที่ 4.3 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ไม่เกิดจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

จากสมการพื้นฐาน (2.14) และ (2.15) ร่วมกับเงื่อนที่จุดพิกัดแปรผันตรง Q_1 (4.73) สามารถหาค่าคงที่ C_1 และ C_2 ได้เท่ากับ

$$C_1 = \hat{f}_x \cos\theta_{p1} - \hat{f}_y \sin\theta_{p1} + \frac{\hat{\kappa}_p}{2} \tag{4.77}$$

$$C_2 = \hat{f}_x \cos\theta_{p1} - \hat{f}_y \sin\theta_{p1} + \frac{\hat{\kappa}_p}{(n+1)} \tag{4.78}$$

เมื่อแทนค่า C_1 และ C_2 ที่ได้ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \vartheta K_N F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{4.79}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \sin\theta F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa < \kappa_p \\ \vartheta K_N \sin\theta F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{p1}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ;\ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{4.80}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{\vartheta}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left(\cos\theta-1\right)F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ \vartheta K_N\left(\cos\theta-1\right)F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases} \tag{4.81}$$

โดยที่ $K_N=\sqrt[n+1]{\dfrac{nb}{(n+1)\hat{\kappa}_p^n}}$ และ F_L และ F_N คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta\right)+\dfrac{1}{2}\hat{\kappa}_p}} \tag{4.82}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{p1},\hat{\kappa}_p,n,b\right)=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta\right)+\dfrac{nb}{n+1}\hat{\kappa}_p}} \tag{4.83}$$

ทำการหาปริพันธ์สมการที่ (4.79)-(4.81) ตลอดความยาวคานร่วมกับเงื่อนไขที่จุดพิกัดแปรผันตรงทั้งสอง ในที่นี้จำเป็นต้องพิจารณาว่าวัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นอยู่ในกรณีใดจะได้สมการกำกับเชิงปริพันธ์ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}F_N d\theta\right]=1 \quad ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\\ &\vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}F_L d\theta\right]=1 \quad ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\end{aligned}\right\} \tag{4.84}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}\sin\theta F_N d\theta\right]=0 \quad ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\\ &\vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}\sin\theta F_L d\theta\right]=0\ ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\end{aligned}\right\} \tag{4.85}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}\cos\theta F_N d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \quad ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\\ &\vartheta\left[\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta_2}\cos\theta F_L d\theta\right]=\hat{u}_L+1\ ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{aligned}\right\}$$

(4.86)

สำหรับสมการกำกับเพิ่มเติมอีก 3 สมการเพื่อใช้ในการแก้สมการหาตัวแปรไม่ทราบค่า ได้มาจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสอง (4.74) และ (4.75) และเงื่อนไขที่จุด Q_2 (4.73) ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} &\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_1\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}_1-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \;;\; \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1 \\ &\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_1\right)+\frac{\hat{\kappa}_p}{2}\left(1-\hat{m}_1^2\right)=0 \qquad\qquad ;\; \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1 \end{aligned}\right\} \tag{4.87}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_2\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_2\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}_2-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \;;\; \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1 \\ &\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_2\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_2\right)+\frac{\hat{\kappa}_p}{2}\left(1-\hat{m}_2^2\right)=0 \qquad\qquad ;\; \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1 \end{aligned}\right\} \tag{4.88}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{p1}-\cos\theta_{p2}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{p1}-\sin\theta_{p2}\right)=0 \tag{4.89}$$

สมการที่ (4.87) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.84), (4.85), (4.88) และ (4.89) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\left\{\theta_1,\theta_2,\theta_{p1},\theta_{p2}\right\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.86) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ บนคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

กรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น $\left(\left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\right)$

$$\xi^*=\vartheta\begin{cases} K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}F_N d\theta & ;\; 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}F_L d\theta & ;\; \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}F_N d\theta & ;\; \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{4.90}$$

$$\hat{v}^* = \vartheta\begin{cases} K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{4.91}$$

$$\hat{u}^*+\xi^* = \vartheta\begin{cases} K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\cos\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{4.92}$$

และในกรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้น $\left(|\hat{m}_1,\hat{m}_2|<1\right)$

$$\xi^* = \vartheta\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}F_N d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}F_L d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{4.93}$$

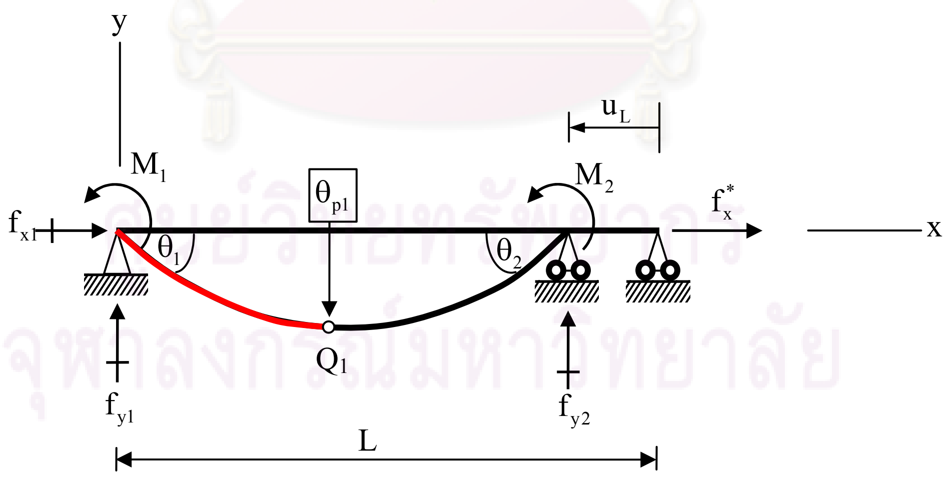
$$\hat{v}^* = \vartheta\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1} \\ \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le\xi_{p2} \\ \frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p2}}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta & ;\ \xi_{p2}<\xi^*\le 1 \end{cases} \tag{4.94}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \vartheta \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{p1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{p1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ; \xi_{p1} < \xi^* \le \xi_{p2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{p1}}^{\theta_{p2}} \cos\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \int_{\theta_{p2}}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ; \xi_{p2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.95}$$

โดยที่ θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคาน และ ξ_{p1}, ξ_{p2} คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่จุดพิกัดแปรผันตรง Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ

4.2.2 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วน

ในกรณีนี้เป็นกรณีย่อยของกรณีที่ 4.2.1 ซึ่งสมการกำกับในกรณีนี้สามารถสร้างจากการประยุกต์สมการกำกับในกรณีที่ 4.2.1 และเนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์ที่คล้ายกันจะแสดงรายละเอียดการพัฒนาสมการกำกับเฉพาะกรณีที่ส่วนของคานที่อยู่ติดกับปลายด้านซ้ายมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นเท่านั้น



รูปที่ 4.4 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ไม่เกิดจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วน

จากสมการกำกับในกรณีก่อนหน้า (4.84)-(4.86) ในกรณีที่วัสดุบริเวณกลางคานมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น ด้วยการกำหนดให้จุด Q_2 อยู่ที่ปลายทางขวาจะได้สมการกำกับเชิงปริพันธ์ในกรณีนี้คือ

$$\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_2}F_L d\theta\right]=1 \tag{4.96}$$

$$\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_2}\sin\theta F_L d\theta\right]=0 \tag{4.97}$$

$$\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta_2}\cos\theta F_L d\theta\right]=\hat{u}_L+1 \tag{4.98}$$

สำหรับสมการกำกับเพิ่มเติมอีก 2 สมการเพื่อใช้ในการแก้สมการหาตัวแปรไม่ทราบค่า ได้มาจากเงื่อนไขขอบเขต (4.74) และ (4.75) ดังนี้

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_p-\cos\theta_2\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_p-\sin\theta_2\right)+\frac{\hat{\kappa}_p}{2}\left(1-\hat{m}_2^2\right)=0 \tag{4.99}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_p-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_p-\sin\theta_1\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}_1-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \tag{4.100}$$

สมการที่ (4.99) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.96), (4.97) และ (4.100) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2,\theta_{p1}\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.98) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^*=\begin{cases}\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}F_N d\theta\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ \vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}F_L d\theta\right] & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.101}$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{p1}\\ \vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\sin\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\sin\theta F_L d\theta\right] & ;\ \xi_{p1}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.102}$$

$$\hat{u}^{*}+\xi^{*}=\begin{cases}\vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta\right] & ;\ 0<\xi^{*}\le\xi_{p1}\\ \vartheta\left[K_N\int_{\theta_1}^{\theta_{p1}}\cos\theta F_N d\theta+\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_{p1}}^{\theta^*}\cos\theta F_L d\theta\right] & ;\ \xi_{p1}<\xi^{*}\le 1\end{cases} \tag{4.103}$$

4.2.3 กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและวัสดุตลอดคานมีพฤติกรรมเพียงชนิดเดียว

กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับบนคานและวัสดุมีพฤติกรรมเพียงชนิดเดียวตลอดทั้งคานสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีย่อยคือ เมื่อวัสดุตลอดคานยังคงมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น $\left(|\hat{m}|<1\right)$ และเมื่อวัสดุตลอดคานมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น $\left(|\hat{m}|>1\right)$ สมการกำกับทั้งสองกรณีย่อยนั้นใช้กระบวนการเช่นเดียวกัน โดยแตกต่างเพียงการเลือกใช้สมการพื้นฐานและเงื่อนไขที่ปลายทั้งสองตามพฤติกรรมของวัสดุ

เริ่มจากสมการพื้นฐาน (2.14) หรือ (2.15) ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านขวา (4.74) สามารถหาค่าคงที่ C_1 หรือ C_2 ได้เท่ากับ

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \hat{f}_x\cos\theta_2-\hat{f}_y\sin\theta_2+\frac{1}{2}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_2\right)^2 && ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|<1\\ C_2 &= \hat{f}_x\cos\theta_2-\hat{f}_y\sin\theta_2+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left[\left(\hat{m}_2-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}} && ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|>1\end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

เมื่อแทนค่า C_1 หรือ C_2 ที่ได้ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) เฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของวัสดุ จะได้

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|<1\\ \vartheta K_N F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|>1\end{cases} \tag{4.105}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|<1\\ \vartheta K_N\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ |\hat{m}_1,\hat{m}_2|>1\end{cases} \tag{4.106}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\left(\cos\theta-1\right)F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right) & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\left(\cos\theta-1\right)F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right) & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.107}$$

โดยที่ F_L และ F_N คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\sin\theta\right)+\dfrac{1}{2}\hat{\kappa}_p\left(\hat{m}_2\right)^2}} \tag{4.108}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\sin\theta\right)+\dfrac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left[\left(\hat{m}_2-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}}} \tag{4.109}$$

จากการหาปริพันธ์ของสมการ (4.105)-(4.107) โดยตรงตลอดความยาวคาน จะได้สมการกับเชิงปริพันธ์ดังนี้

$$1=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.110}$$

$$0=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.111}$$

$$\hat{u}_L+1=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.112}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านซ้ายของคานและสมการที่ (4.105) จะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 1 สมการ คือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)+\frac{1}{2}\hat{\kappa}_p\left[\left(\hat{m}_2\right)^2-\left(\hat{m}_1\right)^2\right]=0 \tag{4.113}$$

หรือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(\left[\left(\hat{m}_2-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}-\left[\left(\hat{m}_1-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \tag{4.114}$$

สมการที่ (4.113) หรือ (4.114) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.110) และ (4.111) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.112) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\ \vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.115}$$

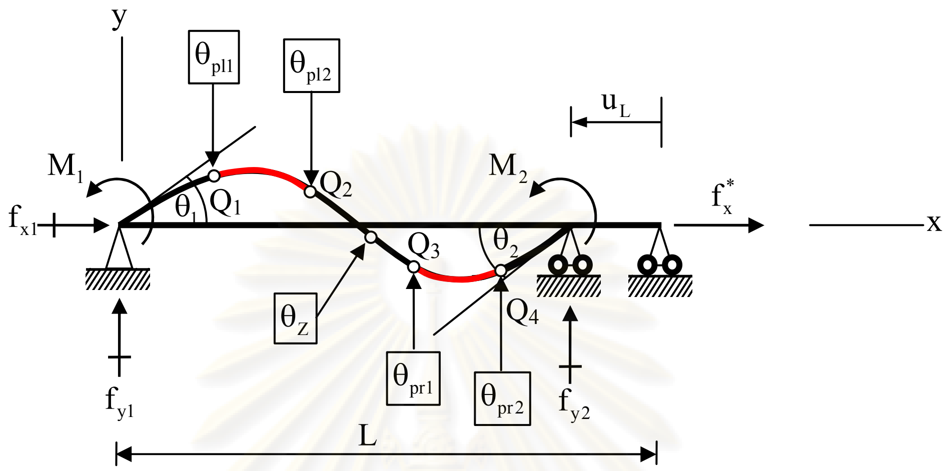
$$\hat{v}^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\ \vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.116}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\ \vartheta\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}\cos\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|<1\\ \vartheta K_N\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*}\cos\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\hat{m}_2,\theta,\theta_2,\hat{\kappa}_p,n,a,b\right)d\theta & ;\ \left|\hat{m}_1,\hat{m}_2\right|>1\end{cases} \tag{4.117}$$

4.2.4 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วน

กรณีที่เกิดจุดดัดกลับบนคานและเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วนนี้เป็นดังแสดงในรูปที่ 4.5 โดยบริเวณเส้นสีดำนั้นแสดงบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและบริเวณสีแดงแสดงส่วนที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นตามลำดับ ตำแหน่งที่โมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรงมี 4 ตำแหน่งด้วยกันคือ Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 ซึ่งมุมหมุนที่

เกิดขึ้นที่ตำแหน่งทั้งหมดนี้คือ $\{\theta_{pl1}, \theta_{pl2}, \theta_{pr1}, \theta_{pr2}\}$ และสำหรับตำแหน่งที่เกิดจุดดัดกลับนั้นจะอยู่ระหว่าง Q_2 และ Q_3 ซึ่งเป็นบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นดังแสดง



รูปที่ 4.5 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 5 ส่วน

ในการสร้างสมการกำกับนั้นเริ่มด้วยการใช้สมการพื้นฐาน (2.14) และ (2.15) ร่วมกับเงื่อนไขของจุดดัดกลับ (4.4) และเงื่อนไขของจุดพิกัดแปรผันตรง Q_2 ตามลำดับ ทำให้สามารถหาค่าคงที่ C_1 และ C_2 ได้ดังนี้

$$C_1 = \hat{f}_x \cos\theta_Z - \hat{f}_y \sin\theta_Z \tag{4.118}$$

$$C_2 = \hat{f}_x \cos\theta_{pl2} - \hat{f}_y \sin\theta_{pl2} + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1} \tag{4.119}$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ในสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.21) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \vartheta(\hat{m}) F_L\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_Z\right) & ; \ \kappa < \kappa_p \\ K_N \vartheta(\hat{m}) F_N\left(\hat{f}_x, \hat{f}_y, \theta, \theta_{pl2}, \hat{\kappa}_p, n, b\right) & ; \ \kappa > \kappa_p \end{cases} \tag{4.120}$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\theta}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta(\hat{m})\sin\theta F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ K_N\vartheta(\hat{m})\sin\theta F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases} \tag{4.121}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\theta}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z\right) & ;\ \kappa<\kappa_p\\ K_N\vartheta(\hat{m})(\cos\theta-1)F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right) & ;\ \kappa>\kappa_p\end{cases} \tag{4.122}$$

โดยที่ฟังก์ชัน F_L และ F_N นิยามโดย

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_Z\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\sin\theta\right)}} \tag{4.123}$$

$$F_N\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_{pl2},\hat{\kappa}_p,n,b\right)=\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2}-\sin\theta\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}}} \tag{4.124}$$

ทำการหาปริพันธ์สมการที่ (4.117)-(4.120) ตลอดความยาวคานร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตและความต่อเนื่องที่จุดดัดกลับและจุดพิกัดแปรผันตรง จะได้สมการกำกับเบื้องต้นดังนี้

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2}F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}F_N d\theta\right]\right\}=1 \tag{4.125}$$

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}\sin\theta F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}\sin\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2}\sin\theta F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\sin\theta F_N d\theta\right]\right\}=0 \tag{4.126}$$

$$\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L d\theta-\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_Z}\cos\theta F_L d\theta+\int_{\theta_Z}^{\theta_{pr1}}\cos\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2}\cos\theta F_L d\theta\right]+K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}}\cos\theta F_N d\theta\right]\right\}=\hat{u}_L+1 \tag{4.127}$$

เนื่องจากฟังก์ชัน F_L ที่ปรากฏในสมการ (4.125)-(4.127) มีความเป็นเอกฐานที่จุดดัดกลับ ดังนั้นจึงใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานดังกล่าว โดยมีรายละเอียดดังนี้ $\hat{f}_s = \sqrt{\hat{f}_x^2 + \hat{f}_y^2}$, $\cos\theta_0 = \hat{f}_x / \hat{f}_s$ และ $\sin\theta_0 = \hat{f}_y / \hat{f}_s$ เมื่อแทนค่าตัวแปรเหล่านี้ในสมการ (4.123) จะได้

$$F_L\left(\hat{f}_s, \theta, \theta_Z, \theta_0\right) = \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\left(\cos\left(\theta_0 + \theta_Z\right) - \cos\left(\theta_0 + \theta\right)\right)}} \tag{4.128}$$

จากนั้นทำการเปลี่ยนตัวแปร $\bar{\theta} = \pi - \left(\theta_0 + \theta\right)$ และ $p\sin\phi = \sin\left(\bar{\theta}/2\right)$ และใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\cos\bar{\theta} = 1 - 2\sin^2\left(\bar{\theta}/2\right)$ ฟังก์ชัน F_L ในสมการที่ (4.128) เขียนใหม่ได้เป็น

$$F\left(\hat{f}_s, \phi, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\hat{f}_s\left(p^2 - p^2\sin^2\phi\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\hat{f}_s p^2\cos^2\phi}} \tag{4.129}$$

โดยที่ $p = \sin\left(\bar{\theta}_Z/2\right)$ และ $\bar{\theta}_Z = \pi - \left(\theta_0 + \theta_Z\right)$ โดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าว สมการปริพันธ์ (4.125)-(4.127) สามารถเขียนใหม่ในรูปของตัวแปร ϕ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + \int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2} F_L d\theta\right] + K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} F_N d\theta\right]\right\} \\ + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi, p\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0\left(\phi, p\right) d\phi\right] = 1\end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + \int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2} \sin\theta F_L d\theta\right] + K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \sin\theta F_N d\theta\right]\right\} \\ + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi\right] = 0\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + \int_{\theta_{pr2}}^{\theta_2} \cos\theta F_L d\theta\right] + K_N\left[-\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \cos\theta F_N d\theta\right]\right\} \\ + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi\right] = \hat{u}_L + 1\end{aligned} \tag{4.132}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin\left(\bar{\theta}_{pl2}/2\right)$, $p\sin\phi_1 = \sin\left(\bar{\theta}_{pr1}/2\right)$, $\bar{\theta}_{pl2} = \pi - \left(\theta_0 + \theta_{pl2}\right)$ และ $\bar{\theta}_{pr1} = \pi - \left(\theta_0 + \theta_{pr1}\right)$ และ F_0, F_v และ F_u คือฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F_0\left(\phi, p\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}} \tag{4.133}$$

$$F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) = -2p\cos\theta_0\sin\phi\psi + \frac{\left(1 - 2p^2\sin^2\phi\right)\sin\theta_0}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}} \tag{4.134}$$

$$F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) = 2p\sin\theta_0\sin\phi\psi + \frac{\left(1 - 2p^2\sin^2\phi\right)\cos\theta_0}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}} \tag{4.135}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_1\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_1\right) - \frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_1^2}{2} = 0 \tag{4.136}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_2\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_2\right) - \frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_2^2}{2} = 0 \tag{4.137}$$

และจากเงื่อนไขที่จุดพิกัดแปรผันตรงทั้ง 4 จะได้สมการกำกับเพิ่มเติมอีก 4 สมการ คือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pl2}\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_{pl2}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \tag{4.138}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z - \cos\theta_{pr1}\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_Z - \cos\theta_{pr1}\right) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \tag{4.139}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2} - \cos\theta_{pl1}\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2} - \cos\theta_{pl1}\right) = 0 \tag{4.140}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2} - \cos\theta_{pr2}\right) - \hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2} - \cos\theta_{pr2}\right) = 0 \tag{4.141}$$

สมการที่ (4.136) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.130), (4.131) และ (4.137)-(4.141) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\left\{\theta_1, \theta_2, \theta_Z, \theta_{pl1}, \theta_{pl2}, \theta_{pr1}, \theta_{pr2}\right\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.132) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl1} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} F_N d\theta\right] & ;\ \xi_{pl1}<\xi^*\le\xi_{pl2} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le\xi_Z \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & \\ & ;\ \xi_Z<\xi^*\le\xi_{pr1} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N\left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N d\theta\right)\right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ \xi_{pr1}<\xi^*\le\xi_{pr2} \\ -\psi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left(\displaystyle\int_{\theta_l}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} F_L d\theta\right) + K_N\left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} F_N d\theta\right)\right] & \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] & ;\ \xi_{pr2}<\xi^*\le 1 \end{cases}$$

(4.142)

$$
\hat{v}^* = \begin{cases}
-\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\
\qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \left(\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta \right) + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \sin\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1
\end{cases}
$$

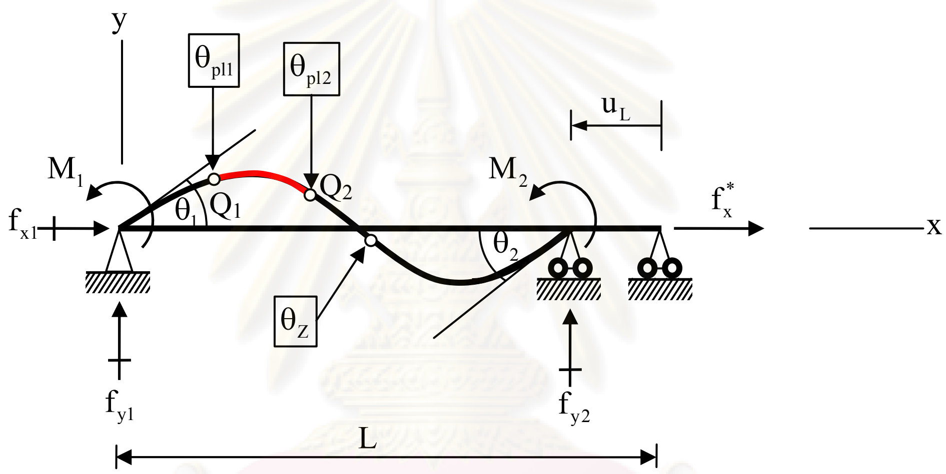
(4.143)

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases}
-\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\
\qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le \xi_{pr2} \\
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \left(\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta - \int_{\theta_{pr2}}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta \right) + K_N \left(\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta_{pr2}} \cos\theta F_N d\theta \right) \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr2} < \xi^* \le 1
\end{cases}
\tag{4.144}
$$

โดยที่ $p\sin\phi^* = \sin\left(\left(\pi - \theta_0 - \theta^*\right)/2\right)$, θ^* คือค่ามุมหมุนที่พิกัดบรรทัดฐาน $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคาน, ξ_Z คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่จุดดัดกลับ และ $\left\{\xi_{pl1}, \xi_{pl2}, \xi_{pr1}, \xi_{pr2}\right\}$ คือค่าพิกัดบรรทัดฐานที่พิกัดแปรผันตรง Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 ตามลำดับ

4.2.5 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและบริเวณปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น โดยบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นจะอยู่ทางซ้ายหรือขวาของจุดดัดกลับขึ้นอยู่กับค่าโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านใดมีค่ามากกว่า และเนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์ที่คล้ายกันในที่นี้จะแสดงรายละเอียดสมการกำกับเฉพาะกรณีที่บริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นอยู่ทางซ้ายของจุดดัดกลับเท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

สมการกำกับสำหรับกรณีนี้สามารถพัฒนาจากสมการกำกับในกรณีที่ 4.2.4 ได้ โดยการกำหนดให้จุด Q_3 อยู่ที่ปลายทางด้านขวา ซึ่งทำให้สมการกำกับ (4.130)-(4.132) สามารถลดรูปได้เป็น

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right\} + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi,p)\,d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi,p)\,d\phi\right] = 1 \quad (4.145)$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta\right\}+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_v(\phi,p,\theta_0)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_v(\phi,p,\theta_0)d\phi\right]=0 \tag{4.146}$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta\right\}+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_u(\phi,p,\theta_0)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1}F_u(\phi,p,\theta_0)d\phi\right]=\hat{u}_L+1 \tag{4.147}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0=\sin\left(\overline{\theta}_{pl2}/2\right)$, $p\sin\phi_1=\sin\left(\overline{\theta}_2/2\right)$ และ $\overline{\theta}_2=\pi-(\theta_0+\theta_2)$ และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 4 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x(\cos\theta_Z-\cos\theta_1)-\hat{f}_y(\sin\theta_Z-\cos\theta_1)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_1^2}{2}=0 \tag{4.148}$$

$$\hat{f}_x(\cos\theta_Z-\cos\theta_2)-\hat{f}_y(\sin\theta_Z-\cos\theta_2)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_2^2}{2}=0 \tag{4.149}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \tag{4.150}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)=0 \tag{4.151}$$

สมการที่ (4.148) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.145), (4.146) และ (4.149)-(4.151) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2,\theta_Z,\theta_{pl1},\theta_{pl2}\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.147) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi \right] & \\ & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.152)

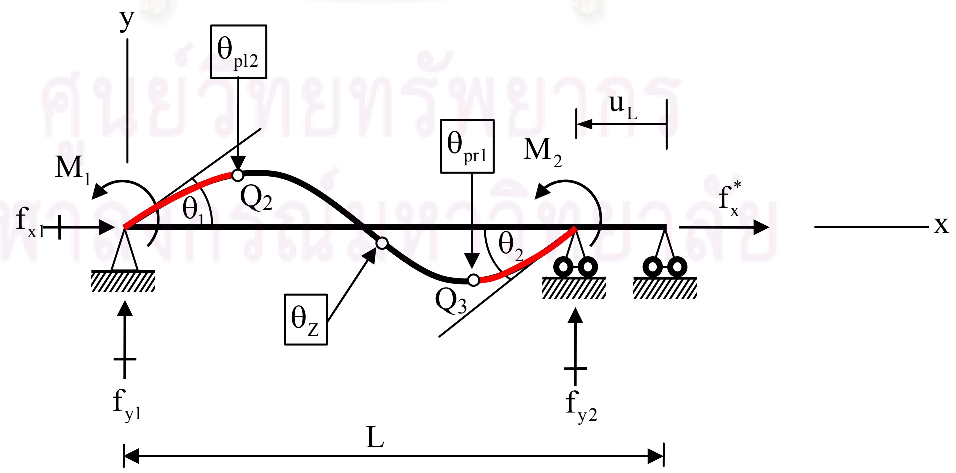
$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right. & \\ \qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.153)

$$
\hat{u}^* + \xi^* =
\begin{cases}
-\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_L \, d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N \, d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta \right] & \\
\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\[2ex]
-\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L \, d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N \, d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right. & \\
\qquad \left. - \displaystyle\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le 1
\end{cases}
\tag{4.154}
$$

4.2.6 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและบริเวณปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 4.7 โดยบริเวณที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นและยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นนั้นเป็นแสดงด้วยเส้นสีดำและสีแดงตามลำดับ



รูปที่ 4.7 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน และปลายทั้งสองวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ซึ่งกระบวนการในการสร้างสมการกำกับนั้นคล้ายกับในกรณีก่อนหน้าโดยการใช้สมการกำกับจากกรณีที่ 4.2.4 เป็นสมการต้นแบบ โดยกำหนดให้จุด Q_1 และ Q_4 อยู่ที่ปลายทางซ้ายและทางขวาของคานตามลำดับ ซึ่งทำให้สมการกำกับ (4.130)-(4.132) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\psi K_N\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_2} F_N d\theta\right]+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right]=1 \qquad (4.155)$$

$$\psi K_N\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_2} \sin\theta F_N d\theta\right]+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=0 \qquad (4.156)$$

$$\begin{aligned}\psi K_N&\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta+\int_{\theta_{pr1}}^{\theta_2} \cos\theta F_N d\theta\right]\\&+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{u}_L+1\end{aligned} \qquad (4.157)$$

โดยที่ $p\sin\phi_0=\sin\left(\bar{\theta}_{pl2}/2\right)$, $p\sin\phi_1=\sin\left(\bar{\theta}_{pr1}/2\right)$ และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 4 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2}-\sin\theta_1\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}_1-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \qquad (4.158)$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_2\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2}-\sin\theta_2\right)+\frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1-\left[\left(\hat{m}_2-a\right)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right)=0 \qquad (4.159)$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pl2}\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\sin\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \qquad (4.160)$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_{pr1}\right)+\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\sin\theta_{pr1}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \qquad (4.161)$$

สมการที่ (4.158) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.155), (4.156) และ (4.159)-(4.161) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2,\theta_Z,\theta_{pl2},\theta_{pr1}\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.157) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta^*} F_N d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int\limits_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\ -\psi K_N \left[\int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta - \int\limits_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.162)

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int\limits_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\ -\psi K_N \left[\int\limits_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta - \int\limits_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int\limits_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int\limits_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & \\ & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

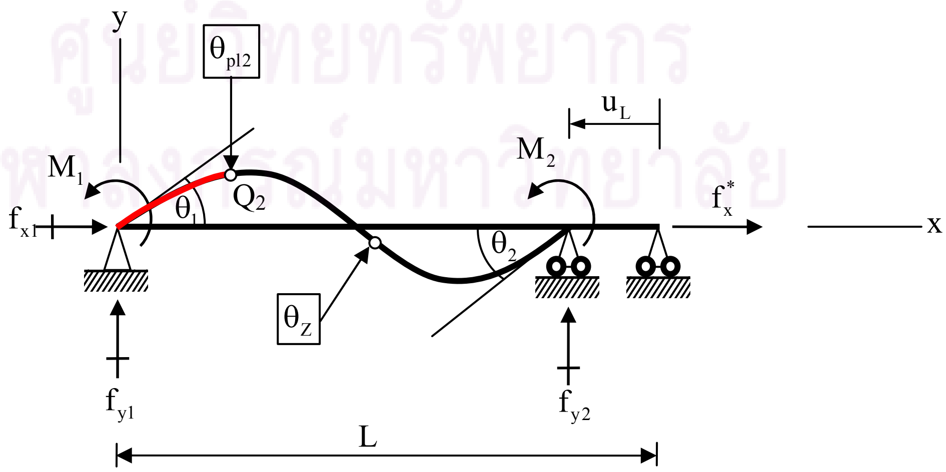
(4.163)

$$
\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases}
-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\
-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\
-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & \\
 & ;\ \xi_Z < \xi^* \le \xi_{pr1} \\
-\psi K_N \left[\int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta - \int_{\theta_{pr1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & \\
\qquad + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi, p, \theta_0\right) d\phi \right] & ;\ \xi_{pr1} < \xi^* \le 1
\end{cases}
$$

(4.164)

4.2.7 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นที่ปลายด้านหนึ่ง

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับภายในและบริเวณปลายด้านหนึ่งวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น โดยบริเวณปลายที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นจะอยู่ด้านที่โมเมนต์กระทำที่มีค่ามากกว่า m_p และเนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์ที่คล้ายกันในที่นี้จะแสดงรายละเอียดสมการกำกับเฉพาะกรณีที่บริเวณปลายทางซ้ายเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นเท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่นไร้เชิงเส้นที่ปลายทางซ้าย

ซึ่งกระบวนการในการสร้างสมการกำกับนั้นสามารถใช้สมการกำกับจากกรณีที่ 4.2.6 เป็นสมการต้นแบบ โดยกำหนดให้จุด Q_3 อยู่ที่ปลายทางขวาของคาน ซึ่งทำให้สมการกำกับ (4.155)-(4.157) สามารถลดรูปได้เป็น

$$-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] = 1 \tag{4.165}$$

$$-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] = 0 \tag{4.166}$$

$$-\psi K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] = \hat{u}_L + 1 \tag{4.167}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin(\bar{\theta}_{pl2}/2)$, $p\sin\phi_1 = \sin(\bar{\theta}_2/2)$ และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 3 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x (\cos\theta_{pl2} - \cos\theta_1) - \hat{f}_y (\sin\theta_{pl2} - \sin\theta_1) + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1} \left(1 - \left[(\hat{m}_1 - a)/b \right]^{\frac{n+1}{n}} \right) = 0 \tag{4.168}$$

$$\hat{f}_x (\cos\theta_Z - \cos\theta_2) - \hat{f}_y (\sin\theta_Z - \sin\theta_2) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} \hat{m}_2^2 = 0 \tag{4.169}$$

$$\hat{f}_x (\cos\theta_Z - \cos\theta_{pl2}) - \hat{f}_y (\sin\theta_Z - \sin\theta_{pl2}) - \frac{\hat{\kappa}_p}{2} = 0 \tag{4.170}$$

สมการที่ (4.168) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.165), (4.166), (4.169) และ (4.170) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1, \theta_2, \theta_Z, \theta_{pl2}\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.167) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta^*} F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ; \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi \right] & ; \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases} \quad (4.171)$$

$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi & ; \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ; \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.172)

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta & ; 0 < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi & ; \xi_{pl2} < \xi^* \le \xi_Z \\ -\psi K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi \right] & ; \xi_Z < \xi^* \le 1 \end{cases}$$

(4.173)

4.2.8 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและตลอดคานวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีนี้พิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและโมเมนต์ที่ทุกหน้าตัดมีค่าไม่เกินค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรง ด้วยกระบวนการเช่นเดียวกับในกรณีที่ 4.2.7 โดยกำหนดให้จุด Q_2 อยู่ที่ปลายทางด้านซ้าย สมการกำกับ (4.165)-(4.167) สามารถลดรูปได้

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi - \int_{\pi/2}^{\phi_1} F_0(\phi, p) d\phi \right] = 1 \quad (4.174)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=0 \tag{4.175}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi_1} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right]=\hat{u}_L+1 \tag{4.176}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0=\sin\left(\overline{\theta}_1/2\right)$, $p\sin\phi_1=\sin\left(\overline{\theta}_2/2\right)$, $\overline{\theta}_1=\pi-\left(\theta_0+\theta_1\right)$ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองและเงื่อนไขของคานจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_1\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_1^2}{2}=0 \tag{4.177}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_Z-\cos\theta_2\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_Z-\cos\theta_2\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_2^2}{2}=0 \tag{4.178}$$

สมการที่ (4.177) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.174), (4.175) และ (4.178) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2,\theta_Z\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.176) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

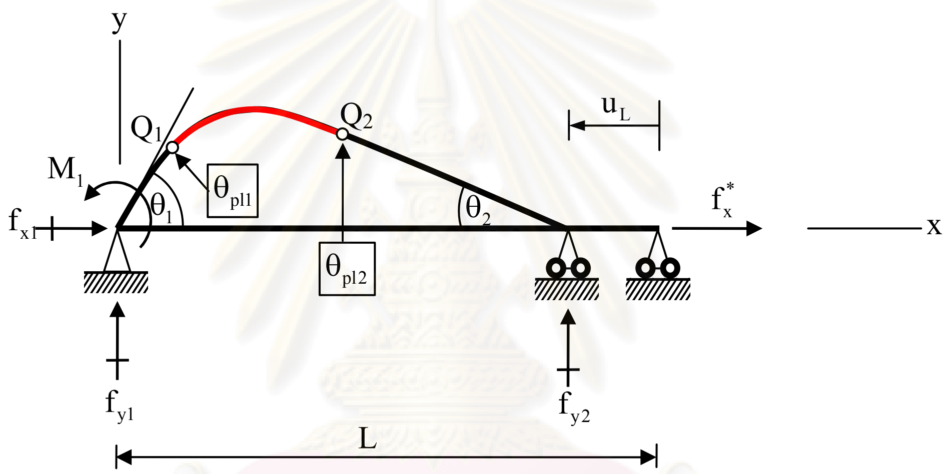
$$\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.179}$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.180}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ 0<\xi^*\le\xi_Z\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\left[\displaystyle\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi-\int_{\pi/2}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi\right] & ;\ \xi_Z<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.181}$$

4.2.9 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

ในกรณีพิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับที่ปลายคานและมีการแบ่งพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วนนั้นเกิดขึ้นเมื่อโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านใดด้านหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ และที่ปลายอีกด้านมีโมเมนต์กระทำซึ่งมีค่าน้อยกว่า m_p ดังแสดงในรูปที่ 4.9 และเนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์คานกรณีที่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายหรือปลายด้านขวามีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นในที่นี้จะแสดงรายละเอียดสมการกำกับในกรณีที่มีโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายด้านซ้ายเท่านั้น



รูปที่ 4.9 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ที่ปลายทางขวา และมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 3 ส่วน

และในกรณีดังกล่าวนี้สามารถพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของกรณี 4.2.4 ได้โดยให้จุดดัดกลับอยู่ที่ปลายขวา นั่นคือ $\theta_Z = \theta_2$ และ $\xi_Z = 1$ โดยสมการที่ (4.125)-(4.127) สามารถลดรูปได้เป็น

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + \int_{\theta_{pl2}}^{\theta_2} F_L d\theta\right] + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta\right\} = 1 \tag{4.182}$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + \int_{\theta_{pl2}}^{\theta_2} \sin\theta F_L d\theta\right] + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta\right\} = 0 \tag{4.183}$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L d\theta+\int_{\theta_{pl2}}^{\theta_2}\cos\theta F_L d\theta\right]+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta\right\}=\hat{u}_L+1 \qquad (4.184)$$

ฟังก์ชัน F_L ในสมการที่ (4.182)-(4.184) นิยามใหม่เป็น

$$F_L\left(\hat{f}_x,\hat{f}_y,\theta,\theta_2\right)=\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\sin\theta\right)}} \qquad (4.185)$$

จากนั้นใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเช่นเดียวกับกรณีที่ 4.2.4 เพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานของฟังก์ชัน F_L สมการกำกับสุดท้ายเป็นดังนี้

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta\right\}+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_0\left(\phi,p\right)d\phi=1 \qquad (4.186)$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\sin\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta\right\}+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi=0 \qquad (4.187)$$

$$-\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}}\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}}\cos\theta F_L d\theta+K_N\int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta\right\}+\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi=\hat{u}_L+1 \qquad (4.188)$$

โดยที่ $p\sin\phi_0=\sin\left(\overline{\theta}_{pl2}/2\right)$ และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 3 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\cos\theta_1\right)-\frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_1^2}{2}=0 \qquad (4.189)$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_{pl2}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \qquad (4.190)$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_{pl2}-\cos\theta_{pl1}\right)=0 \qquad (4.191)$$

สมการที่ (4.189) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.186), (4.187), (4.190) และ (4.191) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\left\{\theta_1,\theta_2,\theta_{pl1},\theta_{pl2}\right\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.188) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0(\phi, p) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.192}$$

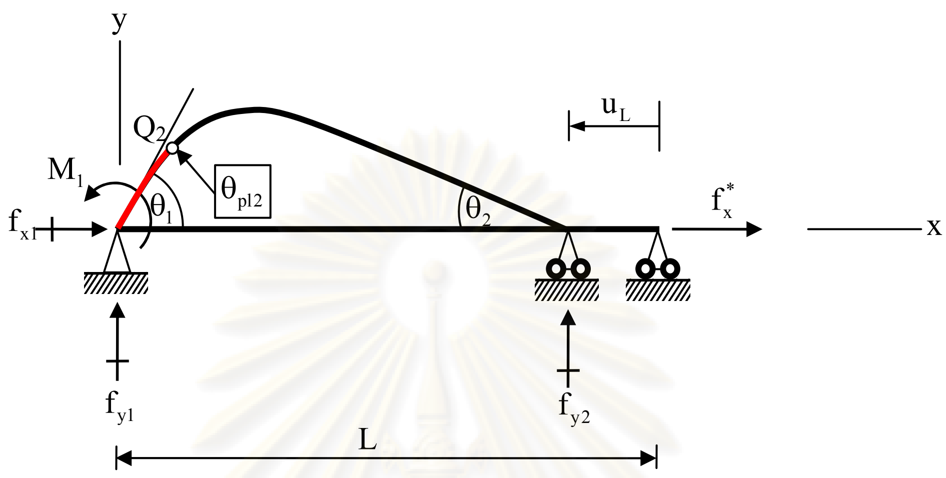
$$\hat{v}^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \sin\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \sin\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \sin\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.193}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \begin{cases} -\psi \dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^*} \cos\theta F_L d\theta & ;\ 0 < \xi^* \le \xi_{pl1} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta^*} \cos\theta F_N d\theta \right] & ;\ \xi_{pl1} < \xi^* \le \xi_{pl2} \\ -\psi \left[\dfrac{1}{\sqrt{2\hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_{pl1}} \cos\theta F_L d\theta + K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta \right] + \dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi & ;\ \xi_{pl2} < \xi^* \le 1 \end{cases} \tag{4.194}$$

4.2.10 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายคานและมีการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วน

ในกรณีพิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับที่ปลายคานและมีการแบ่งพฤติกรรมของวัสดุเป็น 2 ส่วนนั้นเกิดขึ้นเมื่อโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านใดด้านหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ และที่ปลายอีกด้านมีโมเมนต์กระทำซึ่งมีค่ามากกว่า m_p ดังแสดงในรูปที่ 4.10 และเนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์

คานกรณีที่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายหรือปลายด้านขวามีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นในที่นี้จะแสดงรายละเอียดสมการกำกับในกรณีที่มีโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายด้านซ้ายเท่านั้น



รูปที่ 4.10 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในและส่วนที่อยู่ติดกับปลายด้านซ้ายมีพฤติกรรมยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น

ในกรณีดังกล่าวนี้สามารถพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของกรณี 4.2.9 โดยให้จุด Q_1 อยู่ที่ปลายซ้ายของคาน นั่นคือ $\theta_{pl1} = \theta_1$ และ $\xi_{pl1} = 0$ โดยสมการที่ (4.186)-(4.188) สามารถลดรูปได้เป็นดังนี้

$$-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0(\phi, p) d\phi = 1 \tag{4.195}$$

$$-\psi K_N \int_{\theta_1}^{\theta_{pl2}} \sin\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v(\phi, p, \theta_0) d\phi = 0 \tag{4.196}$$

$$-\psi K_N \int_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}} \cos\theta F_N d\theta + \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s \hat{\kappa}_p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u(\phi, p, \theta_0) d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{4.197}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองของคานและที่พิกัดแปรผันตรงจะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\hat{f}_x(\cos\theta_{pl2} - \cos\theta_1) - \hat{f}_y(\sin\theta_{pl2} - \cos\theta_1) + \frac{nb\hat{\kappa}_p}{n+1}\left(1 - \left[(\hat{m}_1 - a)/b\right]^{\frac{n+1}{n}}\right) = 0 \tag{4.198}$$

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2-\cos\theta_{pl2}\right)-\hat{f}_y\left(\sin\theta_2-\cos\theta_{pl2}\right)-\frac{\hat{\kappa}_p}{2}=0 \tag{4.199}$$

สมการที่ (4.198) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.195), (4.196) และ (4.199) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1,\theta_2,\theta_{pl2}\}$ การขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.197) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^*=x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\xi^*=\begin{cases}-\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2}\\ -\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int\limits_{\phi_0}^{\phi^*}F_0\left(\phi,p\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.200}$$

$$\hat{v}^*=\begin{cases}-\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}\sin\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2}\\ -\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\sin\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int\limits_{\phi_0}^{\phi^*}F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.201}$$

$$\hat{u}^*+\xi^*=\begin{cases}-\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta^*}\cos\theta F_N d\theta & ;\ 0<\xi^*\le\xi_{pl2}\\ -\psi K_N\int\limits_{\theta_{pl1}}^{\theta_{pl2}}\cos\theta F_N d\theta+\dfrac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int\limits_{\phi_0}^{\phi^*}F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi & ;\ \xi_{pl2}<\xi^*\le 1\end{cases} \tag{4.202}$$

4.2.11 กรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายคานและตลอดทั้งคานมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีพิจารณาคานที่มีจุดดัดกลับที่ปลายคานและโมเมนต์ดัดที่ทุกหน้าตัดมีค่าไม่เกินค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรง m_p ซึ่งกรณีดังกล่าวนี้เกิดขึ้นเมื่อโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านใดด้านหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งในที่นี้จะแสดงรายละเอียดสมการกำกับในกรณีที่มีโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายเท่านั้น สมการกำกับสำหรับกรณีนี้สามารถพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของกรณี 4.2.10 ได้ โดยกำหนดให้จุด Q_2 อยู่ที่ปลายซ้ายของคานนั่นคือ $\theta_{pl2}=\theta_2$ และ $\xi_{pl2}=0$ ซึ่งทำให้สมการกำกับ (4.195)-(4.197) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_0\left(\phi,p\right)d\phi = 1 \tag{4.203}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi = 0 \tag{4.204}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\pi/2} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi = \hat{u}_L + 1 \tag{4.205}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \sin\left(\overline{\theta}_1/2\right)$, $\overline{\theta}_1 = \pi - \left(\theta_0 + \theta_1\right)$ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายด้านซ้ายของคาน (4.73) จะได้สมการกำกับเพิ่มเติม 1 สมการ คือ

$$\hat{f}_x\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) + \hat{f}_y\left(\sin\theta_2 - \cos\theta_1\right) - \frac{\hat{\kappa}_p\hat{m}_1^2}{2} = 0 \tag{4.206}$$

สมการที่ (4.206) ใช้สำหรับเขียนตัวแปร $\hat{f}_y$ ในรูปของตัวแปรอื่นๆ สมการที่ (4.203) และ (4.204) ใช้เป็นสมการกำกับสำหรับหาผลเฉลยของมุมหมุน $\{\theta_1, \theta_2\}$ ส่วนการขจัดในทิศทางราบที่ปลายด้านขวาสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.205) ส่วนการขจัดและการหมุนที่ตำแหน่ง $\xi^* = x^*/L$ ใดๆ ภายในคานสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

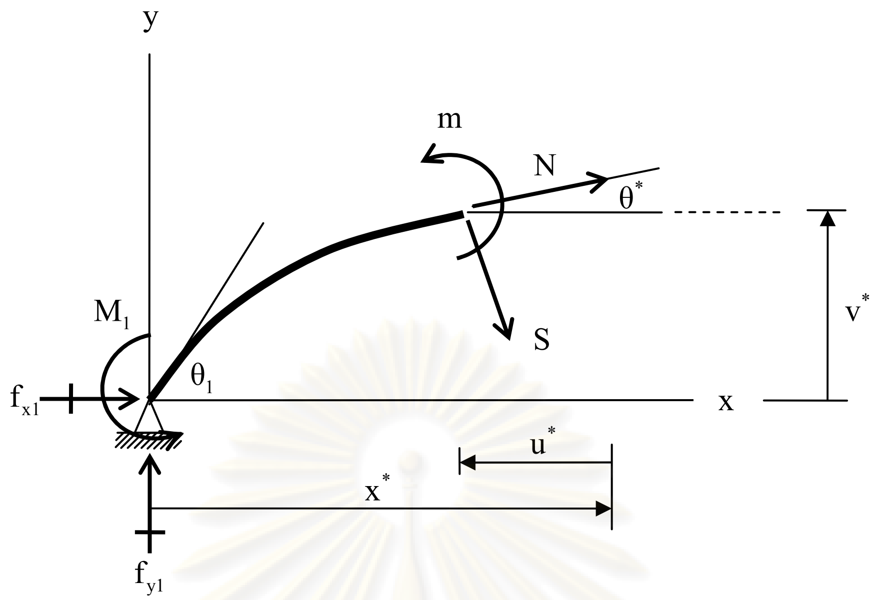
$$\xi^* = \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_0\left(\phi,p\right)d\phi \tag{4.207}$$

$$\hat{v}^* = \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_v\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi \tag{4.208}$$

$$\hat{u}^* + \xi^* = \frac{1}{\sqrt{\hat{f}_s\hat{\kappa}_p}}\int_{\phi_0}^{\phi^*} F_u\left(\phi,p,\theta_0\right)d\phi \tag{4.209}$$

4.3 การหาค่าแรงภายในที่ตำแหน่งใดๆ

จากการพิจารณาสภาวะสมดุลของชิ้นส่วนย่อยทางซ้ายของจุด $\xi^* = x^*/L$ ที่สถานะหลังการเปลี่ยนรูปดังแสดงในรูปที่ 4.4 จะได้ แรงตามแนวแกน (N) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ดัด (m) ที่ตำแหน่ง ξ^* ใดๆดังนี้



รูปที่ 4.11 ผังวัสดุอิสระของส่วนย่อยทางซ้ายของจุด $\xi^* = x^* / L$

$$\hat{N}\left(\xi^*\right) = -\hat{f}_{x1}\cos\theta^* - \hat{f}_{y1}\sin\theta^* \tag{4.210}$$

$$\hat{S}\left(\xi^*\right) = -\hat{f}_{x1}\sin\theta^* + \hat{f}_{y1}\cos\theta^* \tag{4.211}$$

$$\hat{m}\left(\xi^*\right) = -\hat{f}_{x1}\hat{v}^* + \hat{f}_{y1}\left(\xi^* + \hat{u}^*\right) - \hat{m}_1 \tag{4.212}$$

โดยที่ $\hat{N} = NL/m_p$, $\hat{S} = SL/m_p$ และ $\hat{m} = m/m_p$ เป็นแรงตามแนวแกนบรรทัดฐาน แรงเฉือนบรรทัดฐาน และโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานตามลำดับ

บทที่ 5

กระบวนการและระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

เนื้อหาในบทนี้นำเสนอกระบวนการและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในงานวิจัย อาทิเช่น การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการไร้เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ และเทคนิคการแปลงตัวไม่ทราบค่าสำหรับแก้ปัญหาปริพันธ์เชิงเอกฐาน

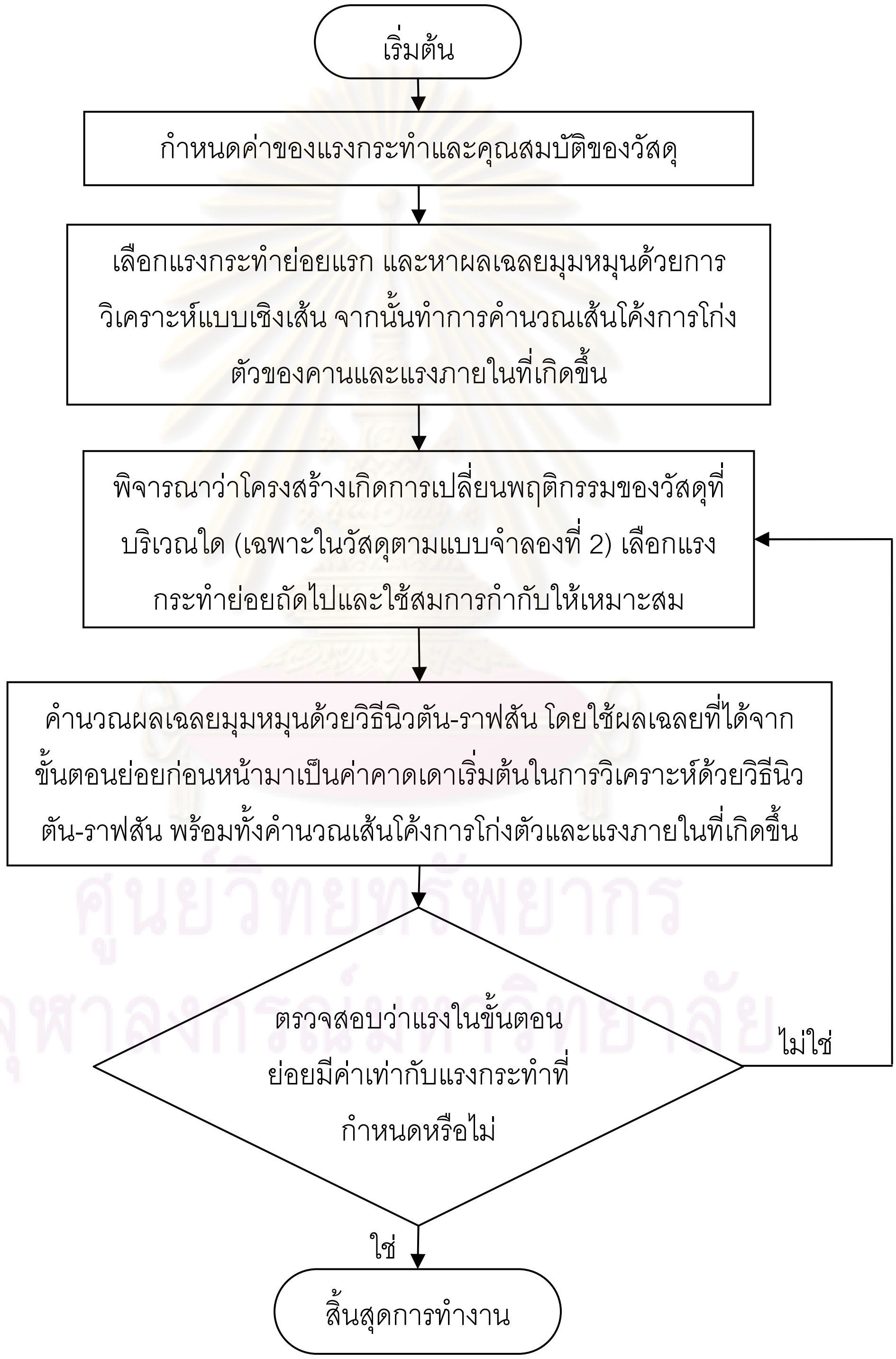
5.1 กระบวนการในการแก้ปัญหา

เนื่องจากสมการกำกับที่พัฒนาขึ้นในบทที่ 3 และบทที่ 4 สำหรับปัญหาคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย มีความซับซ้อนและไม่สามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้ร่วมกับการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยกึ่งเชิงวิเคราะห์ของปัญหาดังกล่าว โดยขั้นตอนในกระบวนการวิเคราะห์แบ่งย่อยได้ดังนี้

1. กำหนดค่าแรงกระทำและโมเมนต์ดัดกระทำและคุณสมบัติของวัสดุ
2. แบ่งย่อยแรงกระทำและทำการคำนวณมุมหมุนที่เกิดจากแรงกระทำย่อยแรกด้วยการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น จากนั้นคำนวณหาเส้นโค้งการโก่งตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้น
3. พิจารณาว่าคานเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมที่บริเวณใด (หากใช้วัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1 ไม่จำเป็นต้องพิจารณา) เลือกใช้สมการกำกับในกรณีที่เหมาะสมเพื่อคำนวณผลเฉลยจากแรงกระทำย่อยถัดไป โดยนำผลเฉลยมุมหมุนที่ได้จากแรงกระทำย่อยก่อนหน้ามาเป็นค่าคาดเดาเริ่มต้นในการคำนวณด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน พร้อมทั้งหาเส้นโค้งการโก่งตัวของคานและแรงภายในที่เกิดขึ้น
4. พิจารณาว่าแรงกระทำย่อยที่คำนวณนั้นมีค่าเท่ากับแรงกระทำที่กำหนดในขั้นตอนที่ 1 หรือไม่ หากตรงกันผลเฉลยที่ได้จากแรงกระทำย่อยสุดท้ายคือ

ผลเฉลยของปัญหาที่วิเคราะห์ แต่หากแรงกระทำย่อยมีค่าไม่ตรงกับแรงกระทำที่กำหนดในขั้นตอนที่ 1 จะทำตามขั้นตอนที่ 3 และ 4 ต่อไปจนค่าแรงกระทำย่อยมีค่าตรงกับแรงกระทำที่กำหนด

โดยแผนภูมิสายงานของกระบวนการที่กล่าวทั้งหมดเป็นดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 แผนภูมิสายงานแสดงขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาที่ใช้ในงานวิจัย

5.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหา

กระบวนการแก้ปัญหาในงานวิจัยนี้ดังที่แสดงในหัวข้อ 5.1 ใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการแก้ปัญหาระบบสมการไร้เชิงเส้นหลายตัวแปร สมการกำกับที่พัฒนาขึ้นยังคงอยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีหรือในรูปปริพันธ์ที่ใกล้เคียงกันทำให้ไม่สามารถหาค่าปริพันธ์โดยตรงได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้การหาปริพันธ์เชิงตัวเลขด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ถูกนำมาใช้เพื่อหาค่าปริพันธ์เหล่านั้น อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่คานมีจุดดัดกลับอยู่ภายในปริมาณที่ทำการหาปริพันธ์ส่วนใหญ่มีความเป็นเอกฐาน ณ จุดดัดกลับและจำเป็นต้องใช้เทคนิคในการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานเหล่านั้นเสียก่อนที่จะใช้ระเบียบวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ในการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขอย่างถูกต้องและประหยัดเวลาในการคำนวณ การทดลองเชิงตัวเลขเกี่ยวกับความมีประสิทธิภาพของวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ก่อนและหลังการกำจัดความเป็นเอกฐานแสดงในหัวข้อถัดไป

5.2.1 การแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ในงานวิจัยนี้จำเป็นต้องหาผลเฉลยของระบบสมการไร้เชิงเส้นหลายตัวแปร และผลเฉลยแม่นตรง (exact solutions) ของสมการกำกับเหล่านี้ไม่สามารถหาได้ ดังนั้นจึงเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยโดยประมาณ วิธีนิวตัน-ราฟสันเป็นวิธีการที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายในการหาผลเฉลยของระบบสมการไร้เชิงเส้น เนื่องจากเป็นวิธีที่มีอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยเชิงตัวเลขสูง ในที่นี้จะกล่าวรายละเอียดของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในการแก้ระบบสมการไร้เชิงเส้นหลายตัวแปรโดยย่อดังนี้

สมมติให้ระบบสมการไร้เชิงเส้นที่ต้องการหาผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{aligned} \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

โดยที่ n คือจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าและจำนวนสมการกำกับ $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ คือฟังก์ชันไร้เชิงเส้น และ $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ คือตัวแปรไม่ทราบค่า โดยใช้อนุกรมการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) สำหรับฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ รอบจุด $\mathbf{x}_0$ ใดๆ จะได้

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \text{ เทอมที่มีกำลังสูงกว่า} \tag{5.2}$$

โดยที่ $\mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)$ คือเมทริกซ์เกรเดียนท์ (gradient matrix) ของฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ ที่จุด $\mathbf{x}_0$ นิยามดังสมการ

$$\mathbf{D_f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

จากความสัมพันธ์ที่ (5.2) ฟังก์ชันเชิงเส้น $\mathbf{F}$ ที่ดีที่สุดสำหรับประมาณค่าของฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ ที่จุด $\mathbf{x}$ รอบๆจุด $\mathbf{x}_0$ คือ

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{5.4}$$

โดยที่ฟังก์ชันเชิงเส้นดังกล่าวมีค่าของฟังก์ชันและเมทริกซ์เกรเดียนท์เท่ากับค่าของฟังก์ชันและเมทริกซ์เกรเดียนท์ของฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ ที่จุด $\mathbf{x}_0$ เมื่อใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น $\mathbf{F}$ ประมาณค่าฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ ในสมการที่ (5.1) จะได้ระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$\mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \tag{5.5}$$

เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น (5.5) จะได้ผลเฉลย $\mathbf{x}_{\text{approx}}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยโดยประมาณของระบบสมการไร้เชิงเส้น (5.1) และผลเฉลยดังกล่าวนี้อาจมีค่าใกล้เคียงกับคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ก็ได้ขึ้นอยู่กับค่าคาดเดาเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ และระดับความไร้เชิงเส้นของฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ อย่างไรก็ตามผลเฉลยโดยประมาณที่ได้สามารถทำการปรับปรุงให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นด้วยการทำซ้ำ (iteration) ดังต่อไปนี้คือ หลังจากคำนวณผลเฉลยโดยประมาณ $\mathbf{x}_{\text{approx}}$ ได้จากสมการที่ (5.5) แล้ว ทำการสร้างฟังก์ชันเชิงเส้น $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ใหม่โดยแทนค่าคาดเดาเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ ด้วย $\mathbf{x}_{\text{approx}}$ จากนั้นแก้สมการ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ หรือ สมการที่ (5.5) ที่ได้จากการแทนค่า $\mathbf{x}_0$ ด้วย $\mathbf{x}_{\text{approx}}$ เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณใหม่ ดำเนินการซ้ำแบบนี้จนกระทั่งผลเฉลยโดยประมาณลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ต้องการ โดยเงื่อนไขที่ใช้ในการตรวจสอบการลู่เข้าของผลเฉลยคือ

$$\left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{approx}}) \right\| \le \varepsilon \tag{5.6}$$

โดยที่ $\|\cdot\|$ คือค่าขนาดของฟังก์ชันแบบแอลทู (L_2-norm) และ ε คือค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ รายละเอียดของวิธีนิวตัน-ราฟสันสามารถหาข้อมูลเพิ่มได้ในหนังสือของ Chapra และ Canale (2006)

5.2.2 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration)

ในขั้นตอนการแก้ระบบสมการไร้เชิงเส้นโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน จำเป็นต้องคำนวณค่าของฟังก์ชัน $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ และเมทริกซ์เกรเดียนท์ $\mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)$ ในขั้นตอนการทำซ้ำ และฟังก์ชัน $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ และ $\mathbf{D_f}(\mathbf{x}_0)$ ที่เกี่ยวข้องอยู่ในรูปของปริมาณเชิงปริพันธ์ที่ไม่สามารถหาค่าเชิงวิเคราะห์ได้โดยตรง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้วิธีการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ สามารถประมาณจากผลบวกจำกัดดังสมการ

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \tag{5.7}$$

โดยที่ n คือจำนวนตำแหน่งปริพันธ์ (integration points) ξ_i คือค่าพิกัดของตำแหน่งปริพันธ์ และ w_i คือค่าน้ำหนักของตำแหน่งปริพันธ์ ค่าพิกัดและค่าน้ำหนักของตำแหน่งปริพันธ์ขึ้นอยู่กับจำนวนตำแหน่งปริพันธ์ที่ใช้และสามารถหาได้ทั่วไปจากวรรณกรรมในอดีต (Chapra และ Canale, 2006) ความผิดพลาดที่เกิดจากสมการประมาณ (5.7) ขึ้นอยู่กับลักษณะและความซับซ้อนของฟังก์ชัน f และจำนวนตำแหน่งปริพันธ์ที่ใช้ สำหรับฟังก์ชันที่มีความเรียบเพียงพอ (sufficiently smooth functions) การประมาณดังกล่าวจะมีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนตำแหน่งปริพันธ์ นอกจากนี้หาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามสมการที่ (5.7) ให้ค่าปริพันธ์ที่ถูกต้องหากใช้จำนวนตำแหน่งปริพันธ์มากพอ (หากใช้จำนวนตำแหน่งปริพันธ์เท่ากับ n จะสามารถหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามได้ถูกต้องถึงดีกรีที่ 2n-1)

สำหรับปริมาณเชิงปริพันธ์ที่มีขอบเขตของการหาปริพันธ์ไม่เป็นไปตามสมการที่ (5.7) สามารถใช้วิธีการแปลงตัวแปรแบบเชิงเส้น (linear variable transformation) ให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x(u))\,du \tag{5.8}$$

โดยที่

$$x(u)=\frac{b+a}{2}+\left(\frac{b-a}{2}\right)u \tag{5.9}$$

อย่างไรก็ตามการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์อาจให้ค่าที่มีความผิดพลาดสูง หากฟังก์ชัน f ที่ต้องการหาค่าปริพันธ์มีความเรียบต่ำหรือมีความไม่ต่อเนื่องหรือมีความเป็นเอกฐานที่บางตำแหน่งในช่วงขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ ถึงแม้ว่ามีการเพิ่มจำนวนตำแหน่งปริพันธ์มากขึ้นแล้วก็ตาม ยกตัวอย่างการหาปริมาณปริพันธ์ดังต่อไปนี้

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta \tag{5.10}$$

โดยฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์มีความเป็นเอกฐานอย่างอ่อน (weakly singular) ที่ $\theta=\pi/2$ และค่าของปริพันธ์ที่ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 15 คือ $I=2.622057554292120$ เมื่อทำการประมาณค่าปริมาณปริพันธ์นี้เด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์โดยใช้จำนวนตำแหน่งปริพันธ์ที่แตกต่างกัน ได้ผลดังแสดงในตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ค่าปริพันธ์และความคลาดเคลื่อนจากการประมาณปริมาณปริพันธ์ตามสมการที่ (5.10) ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์

จำนวนตำแหน่งปริพันธ์ (n)	ค่าปริพันธ์ I ที่ได้จากวิธีเกาส์ควอดราเจอร์	ความคลาดเคลื่อน (%)
2	2.183561872128296	16.723
4	2.379330843218034	9.2571
8	2.493643684963872	4.8974
10	2.518112450834718	3.9643
20	2.568823712598441	2.0302
50	2.600448530003217	0.8241
100	2.611199343957245	0.4141

ถึงแม้ว่าจะทำการเพิ่มจำนวนตำแหน่งปริพันธ์มากขึ้น ความคลาดเคลื่อนของค่าปริพันธ์ยังคงมีค่ามาก ในกรณีนี้ต้องใช้จำนวนตำแหน่งปริพันธ์สูงถึง 100 ตำแหน่งเพื่อให้ความเคลื่อนมีค่าน้อยกว่า 0.5 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งจะพบว่าการประมาณค่าปริมาณปริพันธ์ของฟังก์ชันลักษณะดังกล่าวนี้ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์โดยตรงไม่เหมาะสมในแง่ของการคำนวณ เพื่อปรับปรุงให้สามารถใช้วิธีเกาส์ควอดราเจอร์ในการหาค่าปริพันธ์ดังกล่าวนี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพจำเป็นต้องใช้เทคนิคการแปลงตัวแปร เพื่อให้ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ไม่มีความเป็นเอกฐานภายในขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ดังแสดงในหัวข้อถัดไป

5.2.3 เทคนิคการแก้ปัญหาปริพันธ์เชิงเอกฐาน

ปริมาณปริพันธ์ส่วนใหญ่ที่ปรากฏในสมการกำกับที่พัฒนาขึ้นในบทที่ 3 และบทที่ 4 เป็นปริมาณปริพันธ์เอกฐานอย่างอ่อน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องปรับปรุงวิธีเกาส์ควอดราเจอร์เพื่อให้สามารถคำนวณปริมาณปริพันธ์ดังกล่าวได้อย่างถูกต้องและประหยัดเวลาในการคำนวณ โดยเทคนิคที่ใช้คือ การแปลงตัวแปรที่เหมาะสมเพื่อเปลี่ยนฟังก์ชันเชิงเอกฐานให้กลายเป็นฟังก์ชันปกติ (regular functions) โดยอาศัยจาโคเบียนของการแปลง (Jacobean of transformation) ในการกำจัดส่วนของฟังก์ชันที่มีความเป็นเอกฐาน เพื่อให้เข้าใจหลักการดังกล่าวได้ง่ายขึ้น พิจารณาปริมาณปริพันธ์เชิงเอกฐานในสมการที่ (5.10) โดยเลือกใช้การแปลงตัวแปรดังต่อไปนี้

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta^2 \tag{5.11}$$

จาโคเบียนของการแปลงดังกล่าวคือ

$$\frac{d\theta}{d\beta} = -2\beta \tag{5.12}$$

โดยใช้การแปลงตัวแปรตามสมการที่ (5.11) ปริมาณปริพันธ์ในสมการที่ (5.10) เขียนใหม่ได้เป็น

$$I = \int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{2\beta}{\sqrt{\sin(\beta^2)}} d\beta \tag{5.13}$$

จากสมการที่ (5.13) จะพบว่าฟังก์ชันที่ต้องการหาอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติในช่วงขอบเขตของการหาปริพันธ์ ตารางที่ 5.2 แสดงค่าปริพันธ์และความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์จากสมการที่ (5.13) ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้เทคนิคการแปลงตัวแปรเพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานของฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ก่อนค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี

เกาส์ควอดราเจอร์มีความถูกต้องกว่ากรณีที่ใช้วิธีเกาส์ควอดราเจอร์โดยตรงโดยไม่ใช้เทคนิคการแปลงตัวแปร

ตารางที่ 5.2 ค่าปริพันธ์และความคลาดเคลื่อนจากการประมาณปริมาณปริพันธ์ตามสมการที่ (5.13) ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์

จำนวนตำแหน่งปริพันธ์ (n)	ค่าปริพันธ์ I ที่ได้จากวิธีเกาส์ควอดราเจอร์	ความคลาดเคลื่อน (%)
2	2.614583830114627	0.2850
4	2.622016613548586	0.001561
8	2.622057552479986	6.911×10^{-8}
10	2.622057554279322	4.881×10^{-10}
20	2.622057554292030	3.421×10^{-12}

การแก้ปัญหาปริพันธ์เชิงเอกฐานที่ปรากฏในของสมการกำกับที่ใช้ในงานวิจัยนี้อาศัยหลักการคล้ายกัน คือใช้เทคนิคการแปลงตัวแปรจนกระทั่งฟังก์ชันสุดท้ายที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติ ยกตัวอย่างเช่น ปริมาณปริพันธ์เชิงเอกฐานที่ปรากฏในสมการที่ (3.25) ดังต่อไปนี้

$$I=\int_0^{\theta_Z}\frac{1}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_x^*\left(\cos\theta_Z-\cos\theta\right)+\hat{f}_y^*\left(\sin\theta_Z-\sin\theta\right)}}d\theta \tag{5.14}$$

ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์มีความเป็นเอกฐานที่ตำแหน่ง $\theta=\theta_Z$ เพื่อกำจัดความเป็นเอกฐานดังกล่าว ทำการแปลงตัวแปรดังแสดงในหัวข้อที่ 3.1.2 โดยกำหนดให้ $\hat{f}_s^*=\sqrt{\hat{f}_x^{*2}+\hat{f}_y^{*2}}$, $\cos\theta_0=\hat{f}_x^*/\hat{f}_s^*$, $\sin\theta_0=\hat{f}_y^*/\hat{f}_s^*$, $\cos\theta_0=\hat{f}_x^*/\hat{f}_s^*$ และ $\overline{\theta}=\pi-\left(\theta_0-\theta\right)$, $\sin\left(\overline{\theta}/2\right)=p\sin\phi$ โดยที่ $p=\sin(\overline{\theta}_Z/2)$ และ $\overline{\theta}_Z=\pi-\left(\theta_0-\theta_Z\right)$ สมการที่ (5.14) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$I=\int_{\phi_0}^{\pi/2}\frac{\sqrt[n+1]{2^n}}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_s^*\left(p\cos\phi\right)^{1-n}}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}}d\phi \tag{5.15}$$

โดยที่ $p\sin\phi_0 = \left(\left(\pi-\theta_0\right)/2\right)$ จากสมการที่ (5.15) พบว่าในกรณีวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น $(n=1)$ ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติและปริมาณปริพันธ์ I สามารถหาค่าได้ถูกต้องด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ แต่ในกรณีวัสดุยืดหยุ่นไร้เชิงเส้น $(0<n<1)$ ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ยังคงมีความเป็นเอกฐานที่ $\phi=\pi/2$ เนื่องจากพจน์ $(\cos\phi)^{1-n}$ ที่ยังคงปรากฏอยู่ในสมการ ทำให้ปริมาณปริพันธ์ I ดังกล่าวยังไม่สามารถหาค่าเชิงตัวเลขได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ทำการแปลงตัวแปรเพิ่มเติมโดยกำหนดให้ $\left(\pi/2-\phi\right)^{\alpha}=\beta$ โดยที่ α คือค่าคงที่ โดยอาศัยการแปลงนี้ สมการที่ (5.15) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$I = \frac{\sqrt[n+1]{2^n}}{\alpha}\int_0^{\bar{\beta}} \frac{\sqrt[\alpha]{\beta^{1-\alpha}}}{\sqrt[n+1]{\hat{f}_s^*\left(p\sin\sqrt[\alpha]{\beta}\right)^{1-n}}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\cos^2\sqrt[\alpha]{\beta}}}d\beta \tag{5.16}$$

โดยที่ $\bar{\beta}=\left(\pi/2-\phi_0\right)^{\alpha}$ เพื่อกำจัดพจน์ที่เป็นเอกฐาน เลือกค่าคงที่ α ดังนี้คือ $\alpha=2n/(n+1)$ เมื่อแทนค่า α ดังกล่าวลงในสมการที่ (5.16) จะได้

$$I = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2\hat{f}_s^* p^{1-n}}}\frac{(n+1)}{n}\int_0^{\bar{\beta}} \sqrt[n+1]{\left(\frac{\sqrt[2n]{\beta^{n+1}}}{\sin\sqrt[2n]{\beta^{n+1}}}\right)^{1-n}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\cos^2\left(\sqrt[2n]{\beta^{n+1}}\right)}}d\beta \tag{5.17}$$

จากสมการที่ (5.17) จะพบว่า ฟังก์ชันสุดท้ายที่ทำการหาปริพันธ์เป็นฟังก์ชันปกติ ตารางที่ 3.3 แสดงค่าและความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์ I จากสมการที่ (5.14) และ สมการที่ (5.17) ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์โดยใช้จำนวนตำแหน่งปริพันธ์ต่างๆกัน จากผลการทดลองเชิงตัวเลขดังกล่าวจะพบว่า การนำเทคนิคการแปลงตัวแปรที่เหมาะสมมาใช้ทำให้สามารถหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขของปริพันธ์เอกฐานแบบอ่อนได้อย่างถูกต้องและประหยัดเวลาในการคำนวณ

ตารางที่ 5.3 ค่าปริพันธ์และความคลาดเคลื่อนจากการประมาณปริมาณปริพันธ์ ตามสมการที่ (5.14) และสมการที่ (5.17) ด้วยวิธีเกาส์ควอดราเจอร์โดยที่ความคลาดเคลื่อนคำนวณเทียบกับค่าปริพันธ์ที่ได้จากสมการ (5.17) ที่จำนวนตำแหน่งปริพันธ์เท่ากับ 100 โดยที่ $\hat{f}_y^* = 1, \hat{f}_x^* = 0$, $\theta_Z = 1.5$ และ n = 0.4

จำนวนตำแหน่งปริพันธ์ (n)	ค่าปริพันธ์ I จากสมการ (5.14)	ความคลาดเคลื่อน (%)	ค่าปริพันธ์ I จากสมการ (3.20)	ความคลาดเคลื่อน (%)
2	5.906269491887838	63.838	16.751426693082063	2.5621
4	8.808178114483901	46.071	16.213625385733899	0.73064
8	11.159732497767576	31.674	16.333978115452563	6.2272×10^{-3}
10	11.756318134490320	28.021	16.332262222792156	4.2784×10^{-3}
20	13.217592880547475	19.074	16.332962040440794	6.2096×10^{-6}
50	14.473041244917939	11.387	16.332961026229981	2.0664×10^{-11}
100	15.077890759954402	7.6843	16.332961026226606	-

เทคนิคการแปลงตัวแปรดังกล่าวสามารถนำไปใช้ในการหาค่าปริพันธ์เชิงเอกฐานที่ปรากฏในสมการที่ (3.26) และสมการที่ (3.27) ได้เช่นเดียวกัน

บทที่ 6

การทวนสอบและผลเฉลยเชิงตัวเลข

เนื้อหาส่วนแรกของบทนี้กล่าวถึงการทวนสอบผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์ โดยการทวนสอบที่แสดงประกอบด้วยการทวนสอบกับผลเฉลยแม่นตรงในกรณีที่ปัญหามีผลเฉลยแม่นตรง และการทวนสอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นที่เชื่อถือได้ในกรณีปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นและไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ เพื่อยืนยันความถูกต้องของระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้น และส่วนท้ายของบทกล่าวถึงผลที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายในกรณีต่างๆเพื่อศึกษาอิทธิพลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ

6.1 การทวนสอบ

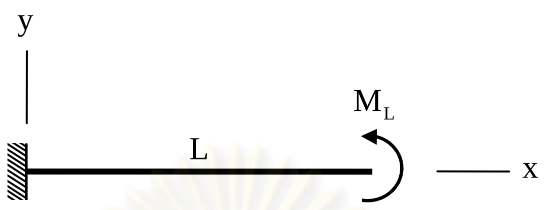
การตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ การทวนสอบด้วยผลเฉลยแม่นตรง และการทวนสอบด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธิเชิงตัวเลขที่น่าเชื่อถือ โดยการทวนสอบทั้งหมดเป็นการทวนสอบเฉพาะผลเฉลยของการเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างเท่านั้น

6.1.1 การทวนสอบด้วยผลเฉลยแม่นตรง

ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาความโค้งมากมีอยู่ค่อนข้างน้อยเนื่องจากความซับซ้อนของปัญหาที่เกิดจากความไร้เชิงเส้นเชิงเรขาคณิต ผลเฉลยส่วนใหญ่มักเขียนอยู่ในรูปของปริพันธ์เชิงวงรีหรือในรูปปริพันธ์ที่ใกล้เคียงกันซึ่งไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ได้โดยตรง ผลเฉลยแม่นตรงที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันอย่างง่ายสามารถพบได้ในกรณีที่ค่าโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคานมีค่าคงที่เท่านั้น กล่าวคือไม่มีแรงในแนวราบและแนวดิ่งกระทำต่อคาน ตัวอย่างเช่น ในคานยื่นรับโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลาย หรือในกรณีคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์ดัดขนาดเท่ากันกระทำในทิศทางตรงข้ามที่ปลายคานทั้งสองโดยไม่มีแรงกระทำในแนวราบ เป็นต้น

6.1.1.1 คานยื่นรับโมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระ

พิจารณาคานยื่นรับโมเมนต์ดัด M_L ที่ปลายอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 คานยื่นความยาว L รับโมเมนต์ดัด M_L ที่ปลายอิสระ

ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหานี้สามารถหาได้โดยพิจารณาสมการที่ (3.17)-(3.19) สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1 และสมการที่ (3.108)-(3.110) สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 (โดยพิจารณาค่าโมเมนต์ดัดที่กระทำมีค่ามากกว่าค่าโมเมนต์ดัดที่พิกัดแปรผันตรง)

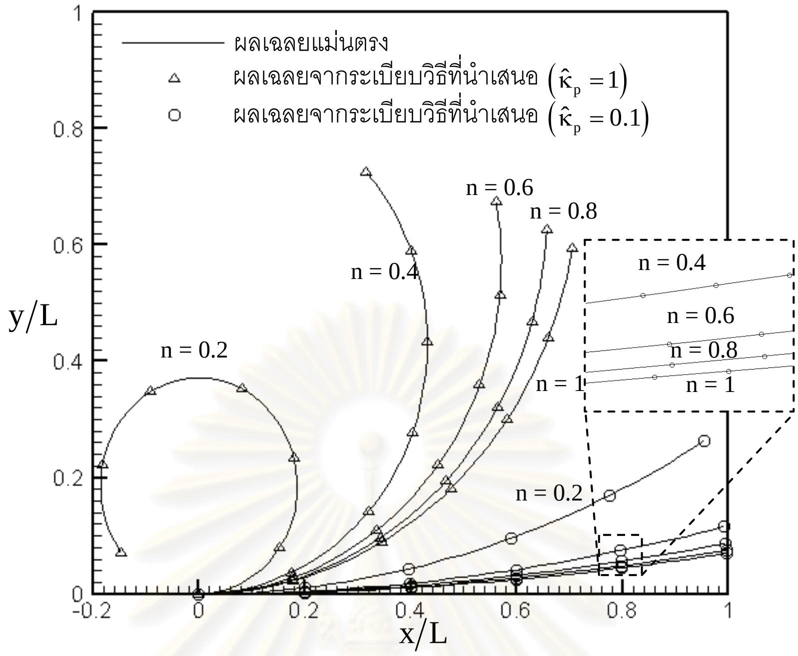
ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับค่ามุมหมุน θ^* ค่าการขจัดในทิศทางดิ่ง $\hat{v}^*$ และค่าการขจัดในทิศทางราบ $\hat{u}^*$ ที่ตำแหน่ง ξ^* ใดๆภายในคาน

$$\theta^* = \hat{\kappa}_p \left(\hat{m}^*\right)^{1/n} \xi^* \tag{6.1}$$

$$\hat{v}^* = \frac{1-\cos\theta^*}{\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}^*\right)^{1/n}} \tag{6.2}$$

$$\hat{u}^* = \frac{\sin\theta^*}{\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}^*\right)^{1/n}} - \xi^* \tag{6.3}$$

รูปที่ 6.2 แสดงเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐาน $\hat{m}^* = 1.4$ และค่า n และ $\hat{\kappa}_p$ ต่างๆกัน โดยที่ $\hat{\kappa}_p = 0.1$ แทนคานยื่นที่มีความแข็งเกร็งสูง ส่วน $\hat{\kappa}_p = 1$ แทนคานยื่นที่มีความอ่อนตัวสูง จากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง พบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีพัฒนาขึ้นมีความถูกต้องสูงสำหรับทุกค่า n และ $\hat{\kappa}_p$ นอกจากนี้ยังพบว่าความโค้งของคานมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลงเมื่อพิจารณาที่ค่า $\hat{\kappa}_p$ เดียวกัน



รูปที่ 6.2 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นรับโมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระ สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1

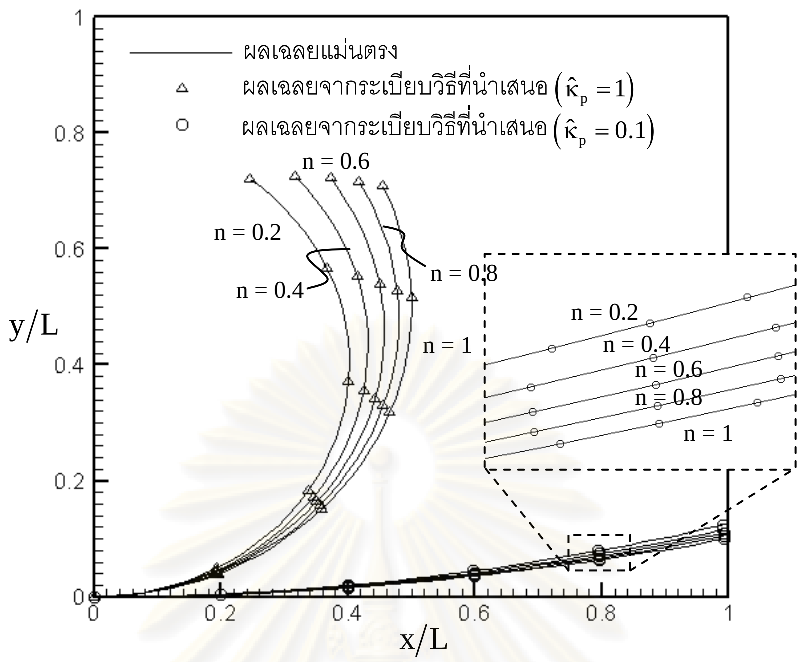
สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 สามารถหาค่าผลเฉลยแม่นตรงสำหรับค่ามุมหมุน θ^* ค่าการขจัดในทิศทางดิ่ง $\hat{v}^*$ และค่าการขจัดในทิศทางราบ $\hat{u}^*$ ที่ตำแหน่ง ξ^* ใดๆภายในคานได้ดังนี้

$$\theta^* = \hat{\kappa}_p \left(\frac{\hat{m}^* - a}{b} \right)^{1/n} \xi^* \tag{6.4}$$

$$\hat{v}^* = \left(\frac{b}{\hat{m}^* - a} \right)^{1/n} \frac{1 - \cos\theta^*}{\hat{\kappa}_p} \tag{6.5}$$

$$\hat{u}^* = \left(\frac{b}{\hat{m}^* - a} \right)^{1/n} \frac{\sin\theta^*}{\hat{\kappa}_p} - \xi^* \tag{6.6}$$

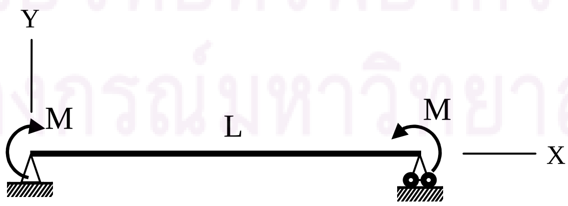
รูปที่ 6.3 แสดงเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐาน $\hat{m}^* = 2$ และค่า n และ $\hat{\kappa}_p$ ต่างๆกัน จากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีพัฒนาขึ้นมีความถูกต้องสูงสำหรับทุกค่า n และ $\hat{\kappa}_p$ นอกจากนี้ยังพบว่าความโค้งของคานมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลงเมื่อพิจารณาที่ค่า $\hat{\kappa}_p$ เดียวกัน



รูปที่ 6.3 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นรับโมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระ สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

6.1.1.2 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสอง

พิจารณาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์ดัดขนาดเท่ากันทั้งสองปลายมีทิศทางตรงข้าม ดังแสดงในรูปที่ 6.4 ในกรณีพิเศษนี้ $\hat{m}_1 = -M/m_p$ และ $\hat{m}_2 = M/m_p$



รูปที่ 6.4 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์ดัดขนาดเท่ากันทั้งสองปลายและมีทิศทางตรงกันข้าม

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับทั้งสองของคานสามารถหาได้จากสมการที่ (4.17)-(4.19) คือ

$$\hat{f}_{x1} = -\hat{f}_x^* = 0 \quad (6.7)$$

$$\hat{f}_{y1} = \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{d}} = 0 \quad (6.8)$$

$$\hat{f}_{y2} = -\frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{d}} = 0 \quad (6.9)$$

จากสมการที่ (6.7)-(6.9) จะได้ว่าแรงภายในในทิศทางดิ่งและทิศทางราบที่ทุกหน้าตัดคานมีค่าเท่ากับศูนย์ $\left(\hat{f}_x = 0,\ \hat{f}_y = 0\right)$

สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1 เมื่อแทนค่า $\hat{f}_x = 0$ และ $\hat{f}_y = 0$ ลงในสมการที่ (4.13)-(4.14) และทำการหาปริพันธ์โดยตรงตลอดความยาวคาน จะได้สมการกำกับดังนี้

$$\theta_2 - \theta_1 = \hat{\kappa}_p \left(\hat{m}_2\right)^{1/n} \quad (6.10)$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0 \quad (6.11)$$

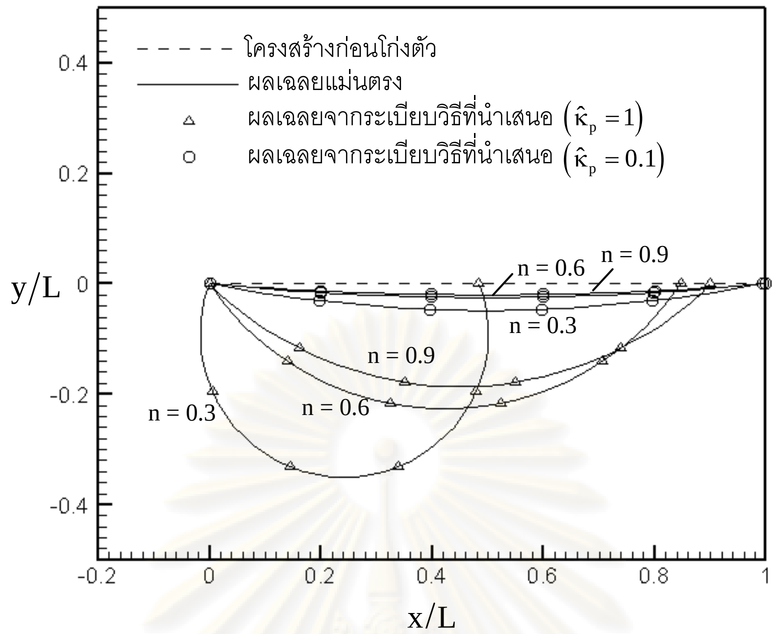
จากนั้นทำการหาค่ามุมหมุนที่ปลายทั้งสองของคานจากสมการที่ (6.10) และ (6.11) ส่วนการขจัดที่ตำแหน่งใดๆบนคานสามารถหาได้จากสมการที่ (4.20)-(4.22) ซึ่งเมื่อทำการหาปริพันธ์โดยตรงจากปลายด้านซ้ายจนถึงจุดใดๆ $\left(\xi^* = x^*/L\right)$ จะได้ค่ามุมหมุน θ^* การขจัดในทิศทางดิ่ง $\hat{v}^*$ และการขจัดในทิศทางราบ $\hat{u}^*$ ดังนี้

$$\theta^* = \hat{\kappa}_p \left(\hat{m}_2\right)^{1/n} \xi^* + \theta_1 \quad (6.12)$$

$$\hat{v}^* = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta^*}{\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}_2\right)^{1/n}} \quad (6.13)$$

$$\hat{u}^* = \frac{\sin\theta^* - \sin\theta_1}{\hat{\kappa}_p \left(\hat{m}_2\right)^{1/n}} - \xi^* \quad (6.14)$$

เส้นโค้งการโก่งตัวที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงในกรณีนี้แสดงดังในรูปที่ 6.5 โดยพิจารณาค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานที่ปลายทั้งสองมีค่าเท่ากับ $\hat{m}_1 = -\hat{m}_2 = -1.5$ และ $n \in \{0.3, 0.6, 0.9\}$ และ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$ จากรูปที่ 6.5 พบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรงในทุกกรณี



รูปที่ 6.5 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่รับโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสอง สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1

สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 เมื่อแทนค่า $\hat{f}_x = 0$ และ $\hat{f}_y = 0$ ลงในสมการที่ (4.110)-(4.111) จะได้สมการกำกับเป็นดังนี้

$$\theta_2 - \theta_1 = \hat{\kappa}_p \left[(\hat{m}_2 - a)/b \right]^{\frac{1}{n}} \tag{6.15}$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0 \tag{6.16}$$

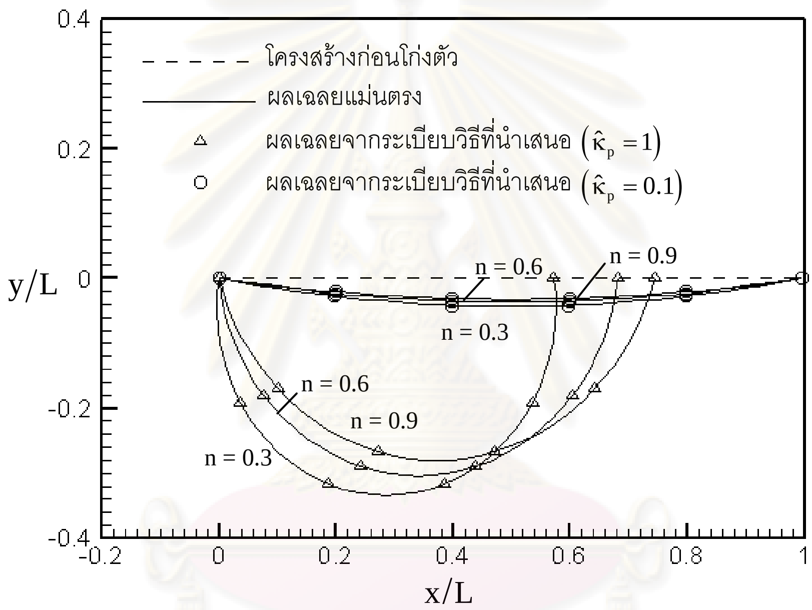
ค่ามุมหมุนที่ปลายทั้งสองของคานหาได้จากสมการ (6.15) และ (6.16) ส่วนค่ามุมหมุน θ^* การขจัดในทิศทางดิ่ง $\hat{v}^*$ การขจัดในทิศทางราบ $\hat{u}^*$ ที่จุด $\xi^* = x^*/L$ ใดๆภายในคาน หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\theta^* = \hat{\kappa}_p \left[(\hat{m}_2 - a)/b \right]^{\frac{1}{n}} \xi^* + \theta_1 \tag{6.17}$$

$$\hat{v}^* = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta^*}{\hat{\kappa}_p \left[(\hat{m}_2 - a)/b \right]^{\frac{1}{n}}} \tag{6.18}$$

$$\hat{u}^* = \frac{\sin\theta^* - \sin\theta_1}{\hat{\kappa}_p\left[\left(\hat{m}_2 - a\right)/b\right]^{\frac{1}{n}}} - \xi^* \tag{6.19}$$

เส้นโค้งการโก่งตัวจากผลเฉลยแม่นตรงในกรณีนี้แสดงดังรูปที่ 6.6 โดยพิจารณาค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานที่ปลายทั้งสองเท่ากับ $\hat{m}_1 = -\hat{m}_2 = -2$ และ $n \in \{0.3, 0.6, 0.9\}$ และ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$ จากรูปที่ 6.6 พบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีค่าตรงกับผลเฉลยแม่นตรงเช่นเดียวกับกรณีแบบจำลองที่ 1



รูปที่ 6.6 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่รับโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสองสำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

จากตัวอย่างที่นำเสนอข้างต้นพบว่าระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นให้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง แต่เนื่องจากกรณีที่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้มีอยู่ค่อนข้างจำกัด ดังนั้นการทวนสอบในกรณีอื่นๆที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้จึงจำเป็นต้องทวนสอบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆที่เชื่อถือได้

6.1.2 การทวนสอบด้วยผลเฉลยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การทวนสอบในกรณีอื่นนอกจากที่กล่าวในหัวข้อที่ 6.1.1 ใช้ผลเฉลยเชิงตัวเลขอ้างอิงที่ได้จากงานวิจัยที่ผ่านมาหรือจากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ดังแสดงในกรณีต่างๆ ต่อไปนี้

6.1.2.1 ปัญหาคานยื่นที่ทำมาจากวัสดุชนิดลัดวิครับแรงกระทำในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งที่หน้าตัดตามแบบจำลองที่ 1 เกิดจากวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแบบกำลังหรือเป็นวัสดุชนิดลัดวิค ซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (σ) และความเครียด (ε) ดังนี้

$$\sigma = E\varepsilon^{n} \tag{6.20}$$

โดยที่ E และ n เป็นค่าคงที่ของวัสดุ เมื่อพิจารณาหน้าตัดคานที่มีความกว้าง b และความลึก h จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัด ได้ดังนี้

$$M = \frac{2Eb\left(h/2\right)^{n+2}}{\left(n+2\right)}\kappa^{n} \tag{6.21}$$

โดยการเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 1 พบว่า κ_p และ m_p มีความสัมพันธ์กับ E, b, n และ h ดังนี้

$$\kappa_p = 2/h \tag{6.22}$$

$$M_p = \frac{2Eb\left(h/2\right)^{2}}{\left(n+2\right)} \tag{6.23}$$

Lewist และ Monasa (1980) ได้ทำการศึกษาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ โดยที่คานทำมาจากทองแดงซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็น $\sigma = 66500\varepsilon^{0.463}$ ผลเฉลยเชิงตัวเลขของมุมหมุน การขจัดในทิศทางดิ่งและราบที่ปลายอิสระที่นำเสนอโดย Lewist และ Monasa (1980) ได้ถูกนำมาใช้เป็นผลเฉลยอ้างอิงและเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นดังแสดงในตารางที่ 6.1-6.3 โดยทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่สัดส่วน $L^{(n+1)/n}/K_n$ ต่างๆกัน โดยที่ $K_n = \left(2bE\left(h/2\right)^{n+2}/\left(\left(n+2\right)f_y^*\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ และ f_y^* คือแรงกระทำในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ และผลต่างของผลเฉลยคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

ผลต่าง (%) $=\left|R_c - R_o\right| \times 100 / \left|R_o\right|$ (6.24)

โดยที่ R_c คือผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและ R_o คือผลเฉลยจากงานวิจัยของ Lewist และ Monasa (1980)

ตารางที่ 6.1 ผลเฉลยของมุมหมุนที่ปลายคานยื่นที่ทำมาจากทองแดง โดยเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและผลเฉลยของ Lewist และ Monasa (1980)

$\frac{L^{(n+1)/n}}{K_n}$	$\theta_L/(\pi/2)$		
	ผลเฉลยจากงานวิจัยของ Lewist และ Monasa (1980)	ผลเฉลยจากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้น	ผลต่าง (%)
0.25	0.05009	0.05011	3.69×10^{-2}
0.50	0.09864	0.09866	2.38×10^{-2}
0.75	0.14443	0.14446	1.92×10^{-2}
1.00	0.18675	0.18678	1.61×10^{-2}
2.00	0.32039	0.32042	9.24×10^{-3}
3.00	0.41049	0.41052	7.89×10^{-3}
4.00	0.47437	0.47440	5.91×10^{-3}
5.00	0.52222	0.52225	4.80×10^{-3}
6.00	0.55967	0.55969	2.68×10^{-3}
7.00	0.58995	0.58998	4.33×10^{-3}
8.00	0.61511	0.61512	2.02×10^{-3}
9.00	0.63642	0.63643	1.38×10^{-3}
10.00	0.65477	0.65478	1.54×10^{-3}

จากผลการเปรียบเทียบตามตารางที่ 6.1 พบว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยจากงานวิจัยของ Lewist และ Monasa (1980) โดย มีความแตกต่างไม่เกินร้อยละ 0.04 นอกจากนี้ยังพบว่าผลต่างของผลเฉลยมีค่าลดลงเมื่อค่าของสัดส่วน $L^{(n+1)/n}/K_n$ มี

ค่ามากขึ้น การลดลงของผลต่างของผลเฉลยสามารถพบได้เช่นเดียวกับในกรณีของการขจัดในทิศทางดิ่งที่ปลายคาน ดังแสดงในตารางที่ 6.2 สำหรับในกรณีนี้ผลต่างของผลเฉลยมีค่าไม่เกินร้อยละ 0.035

ตารางที่ 6.2 ผลเฉลยของการขจัดในแนวดิ่งที่ปลายคานยื่นที่ทำมาจากทองแดง โดยเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและผลเฉลยของ Leswist และ Monasa (1980)

$\frac{L^{(n+1)/n}}{K_n}$	v_L/L		
	ผลเฉลยจากงานวิจัยของ Lewist และ Monasa (1980)	ผลเฉลยจากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้น	ผลต่าง (%)
0.25	0.05973	0.05975	3.38×10^{-2}
0.50	0.11741	0.11743	1.69×10^{-2}
0.75	0.17142	0.17144	1.38×10^{-2}
1.00	0.22085	0.22088	1.17×10^{-2}
2.00	0.37235	0.37238	7.84×10^{-3}
3.00	0.46910	0.46912	3.82×10^{-3}
4.00	0.53433	0.53435	3.44×10^{-3}
5.00	0.58115	0.58116	8.54×10^{-4}
6.00	0.61646	0.61647	8.33×10^{-4}
7.00	0.64414	0.64415	1.75×10^{-3}
8.00	0.66652	0.66652	2.50×10^{-4}
9.00	0.68503	0.68503	4.00×10^{-4}
10.00	0.70065	0.70065	2.52×10^{-4}

สำหรับผลเฉลยของการขจัดในแนวราบที่ปลายอิสระดังแสดงในตารางที่ 6.3 พบว่าผลต่างระหว่างผลเฉลยทั้งสองมีค่าไม่เกินร้อยละ 0.06 ยกเว้นในกรณีที่ $L^{(n+1)/n}/K_n = 0.50$ ผลต่างระหว่างผลเฉลยทั้งสองมีค่าประมาณร้อยละ 2.67

ตารางที่ 6.3 ผลเฉลยของการขจัดในแนวราบที่ปลายคานยื่นที่ทำมาจากทองแดง โดยเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและผลเฉลยของ Lewist และ Monasa (1980)

$\frac{L^{(n+1)/n}}{K_n}$	u_L/L		
	ผลเฉลยจากงานวิจัยของ Lewist และ Monasa (1980)	ผลเฉลยจากเทคนิคที่นำเสนอ	ผลต่าง (%)
0.25	0.00203	0.00203	5.52×10^{-2}
0.50	0.00766	0.00787	2.67
0.75	0.01685	0.01686	3.72×10^{-2}
1.00	0.02814	0.02815	3.27×10^{-2}
2.00	0.08241	0.08242	1.76×10^{-2}
3.00	0.13468	0.13470	1.30×10^{-2}
4.00	0.17925	0.17926	6.76×10^{-3}
5.00	0.21668	0.21669	6.11×10^{-3}
6.00	0.24839	0.24841	6.49×10^{-3}
7.00	0.27562	0.27563	5.22×10^{-3}
8.00	0.29931	0.29932	3.99×10^{-3}
9.00	0.32017	0.32017	1.47×10^{-3}
10.00	0.33871	0.33872	3.86×10^{-3}

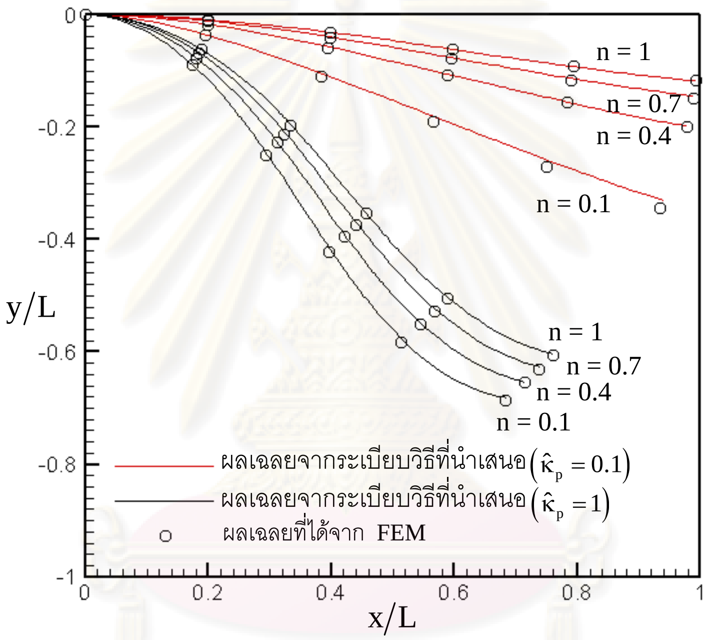
จากผลการเปรียบเทียบในตารางที่ 6.1-6.3 พบว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องสูงเมื่อทวนสอบกับผลเฉลยอ้างอิงจากงานวิจัยในอดีตในกรณีคานยื่นที่มีแรงกระทำที่ปลายอิสระ

6.1.2.2 คานยื่นที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

จากการทวนสอบงานวิจัยในอดีตไม่พบงานวิจัยใดที่ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 2 ในการวิเคราะห์แบบความโค้งมากของคานยื่น ดังนั้นในการทวนสอบผลเฉลยสำหรับปัญหาคานยื่นที่ทำมาจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 จึง

จำเป็นต้องใช้ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนท์เป็นผลเฉลยอ้างอิง โดยทำการทวนสอบทั้งในกรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานและในกรณีที่เกิดจุดดัดกลับที่ปลายอิสระ

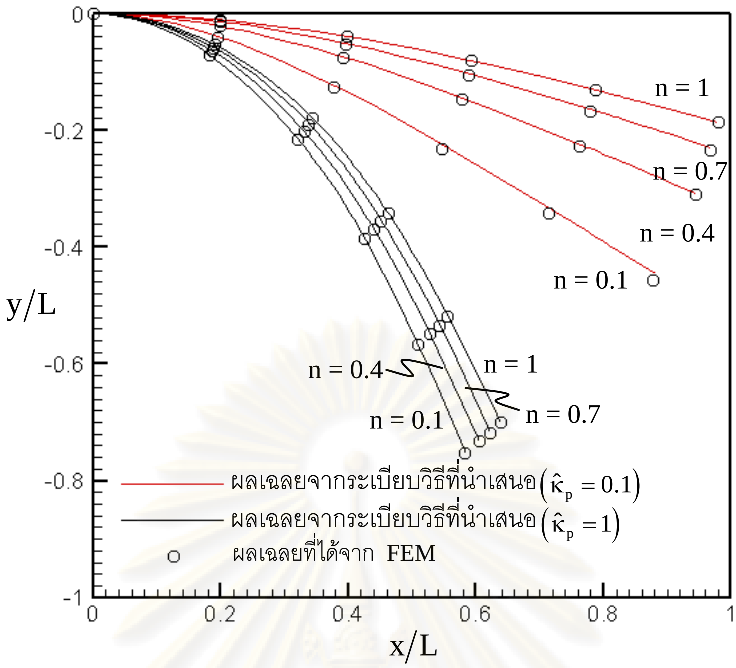
สำหรับกรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคาน พิจารณาคานยื่นรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระเท่ากับ $\hat{f}_x^* = -1, \hat{f}_y^* = -8$ และ $\hat{m}^* = 3$ เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่ได้จากการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและจากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แสดงดังรูปที่ 6.7 สำหรับ $n \in \{0.1, 0.4, 0.7, 1\}$ และ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$



รูปที่ 6.7 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นในกรณีที่จุดดัดกลับเกิดขึ้นภายในคาน

จากผลที่ได้พบว่าเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนท์นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน ความแตกต่างระหว่างผลเฉลยทั้งสองมีค่ามากที่สุดในกรณีที่ $n = 0.1$ และ $\hat{\kappa}_p = 0.1$

สำหรับกรณีที่คานมีจุดดัดกลับที่ปลายอิสระ พิจารณาคานรับแรงกระทำที่ปลายเท่ากับ $\hat{f}_x^* = 1$ และ $\hat{f}_y^* = -6$ เส้นโค้งการโก่งตัวที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ แสดงในรูปที่ 6.8 สำหรับ $n \in \{0.1, 0.4, 0.7, 1\}$ และ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$

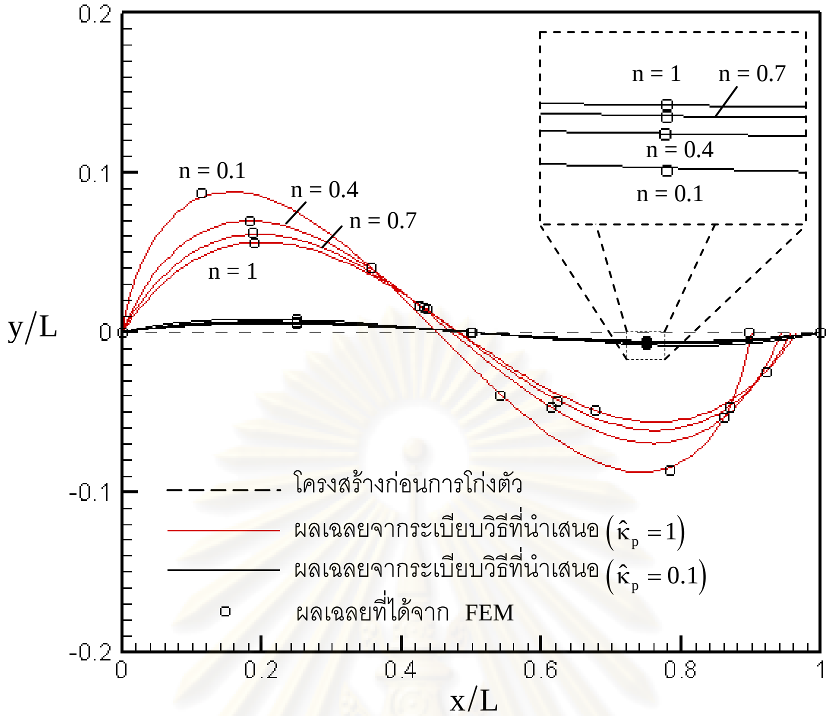


รูปที่ 6.8 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นในกรณีที่จุดดัดกลับเกิดขึ้นที่ปลายอิสระ

จากผลที่นำเสนอในรูปที่ 6.8 พบว่าเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมากโดยที่ความแตกต่างระหว่างผลเฉลยทั้งสองไม่มีนัยสำคัญ จากการทวนสอบนี้แสดงให้เห็นว่าในกรณีคานยื่นที่ทำมาจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 ระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นให้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยอ้างอิงที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนท์ที่เชื่อถือได้

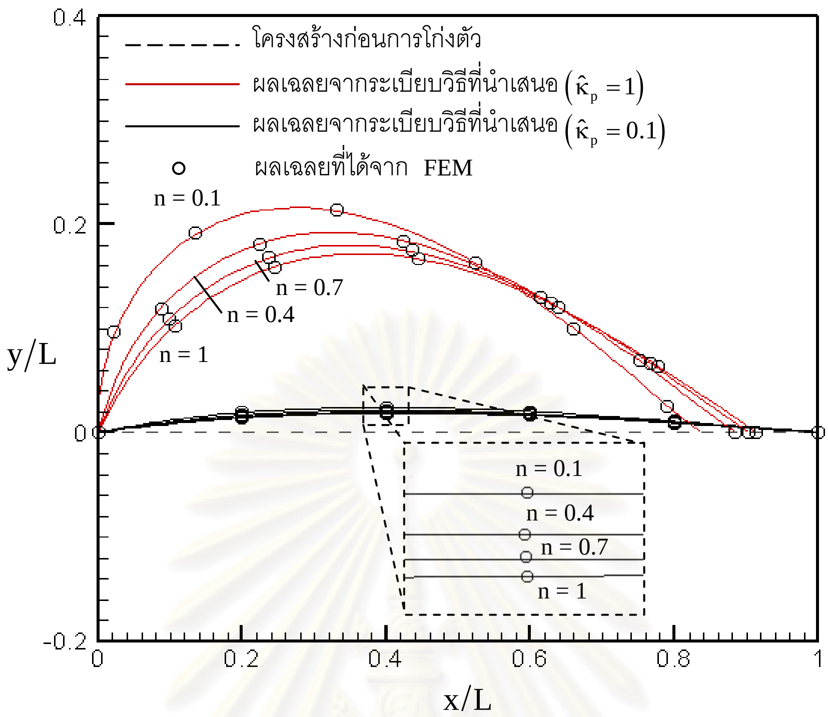
6.1.2.3 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

พิจารณาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 และรับแรงกระทำและโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายทั้งสองเท่ากับ $\hat{m}_1 = 3.5$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = -0.5$ สำหรับแรงและโมเมนต์กระทำดังกล่าวส่งผลให้เกิดจุดดัดกลับเกิดขึ้นภายในคาน เส้นโค้งการโก่งตัวสำหรับกรณีนี้ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แสดงในรูปที่ 6.9 สำหรับ $n \in \{0.1, 0.4, 0.7, 1\}$ และ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$



รูปที่ 6.9 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายในกรณีที่มีจุดดัดกลับเกิดขึ้นภายในคาน

ส่วนกรณีที่จุดดัดกลับเกิดขึ้นที่ปลายคานพิจารณาโดยให้แรงกระทำและโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายทั้งสองของคานมีค่าเท่ากับ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 0$ และ $\hat{f}_x^* = 1$ เส้นโค้งการโก่งตัวที่ได้จากระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นและระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แสดงในรูปที่ 6.10 จากผลที่ได้ในรูปที่ 6.9 และ 6.10 พบว่าเส้นโค้งการโก่งตัวที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีที่พัฒาขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนท์ทั้งในกรณีที่มีจุดดัดกลับอยู่ภายในคานและอยู่ที่ปลายคาน



รูปที่ 6.10 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายในกรณีที่มีจุดดัดกลับที่ปลายคาน

จากผลการทวนสอบทั้งหมดที่นำเสนอข้างต้นแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องทั้งในกรณีคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย รวมทั้งสามารถใช้วิเคราะห์คานที่ทำมาจากวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 ได้อย่างถูกต้อง

6.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาอื่น ๆ

ในหัวข้อนี้นำเสนอผลการวิเคราะห์ปัญหาคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับแรงกระทำและโมเมนต์ดัดที่ปลายแบบต่างๆกันโดยใช้ระเบียบวิธีที่พัฒนาขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอิทธิพลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อการโก่งตัวและแรงภายในที่เกิดขึ้นภายในคานที่มีการโก่งตัวหรือความโค้งมาก

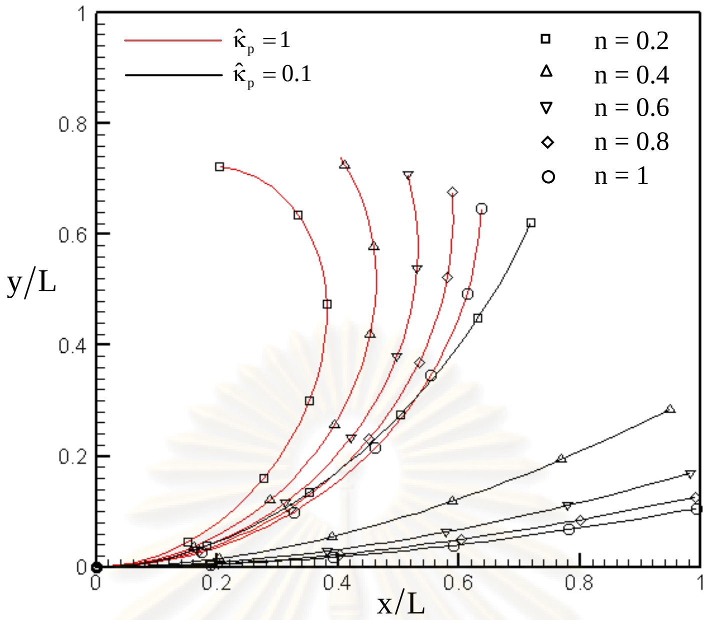
6.2.1 คานยื่น

ผลเฉลยของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระแยกนำเสนอเป็น 2 ส่วนตามชนิดของแบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัด ดังต่อไปนี้

6.2.1.1 ปัญหาคานยื่นและใช้วัสดุแบบจำลองที่ 1

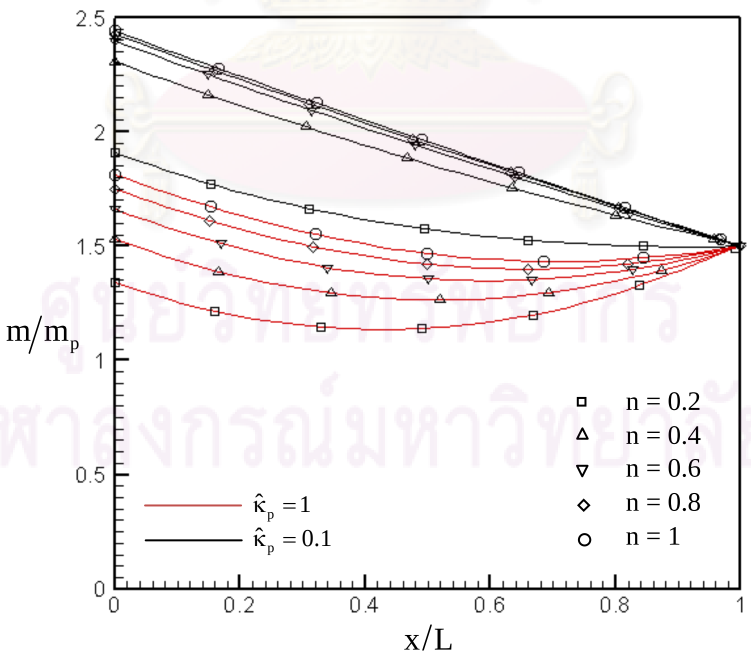
สำหรับกรณีคานยื่นที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1 สามารถพิจารณาเป็นกรณีย่อยดังต่อไปนี้

กรณีที่ไม่เกิดจุดดัดกลับภายในคาน กำหนดให้แรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบ แรงกระทำบรรทัดฐานในแนวดิ่ง และโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานที่ปลายคานมีค่าเท่ากับ $\hat{f}_x^* = 0.5$, $\hat{f}_y^* = 1$ และ $\hat{m}^* = 1.5$ ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ประกอบด้วย เส้นโค้งการโก่งตัวของคาน แผนภาพโมเมนต์ดัด แผนภาพแรงเฉือน และแผนภาพแรงตามแนวแกนสำหรับ $\hat{\kappa}_p \in \{0.1, 1\}$ และ $n \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ ดังแสดงในรูปที่ 6.11-6.14 เมื่อพิจารณาเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นจากรูปที่ 6.11 พบว่าลักษณะการโก่งตัวของคานมีความแตกต่างกันอย่างชัดเจนเมื่อตัวแปรกำหนดความชะลูด $(\hat{\kappa}_p)$ มีค่าต่างกัน โดยคานที่มีความชะลูดต่ำมีความโค้งและการโก่งตัวน้อยกว่าคานที่มีความชะลูดสูงเมื่อพิจารณาที่ค่า n เท่ากัน สำหรับอิทธิพลของตัวแปรกำหนดความไร้เชิงเส้น (n) พบว่าเมื่อวัสดุมีความไร้เชิงเส้นมากขึ้น n มีค่าน้อยลง ส่งผลให้ความโค้งของคานเพิ่มขึ้น และความแตกต่างจากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในคานที่มีความชะลูดต่ำ สำหรับค่าโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคานดังแสดงในรูปที่ 6.12 พบว่าเมื่อตัวแปรความชะลูดมีค่าน้อย กราฟที่ได้จะมีลักษณะใกล้กับกราฟที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้โมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นมีค่าลดลงและมีการกระจายเป็นแบบไร้เชิงเส้นมากขึ้น สำหรับคานยื่นที่ทำจากวัสดุที่มีความไร้เชิงเส้นสูงและมีความชะลูดต่ำนั้นโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นอาจมีค่าน้อยกว่าค่าโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระ เช่นในเมื่อ $n = 0.2$ และ $\hat{\kappa}_p = 0.1$



รูปที่ 6.11 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

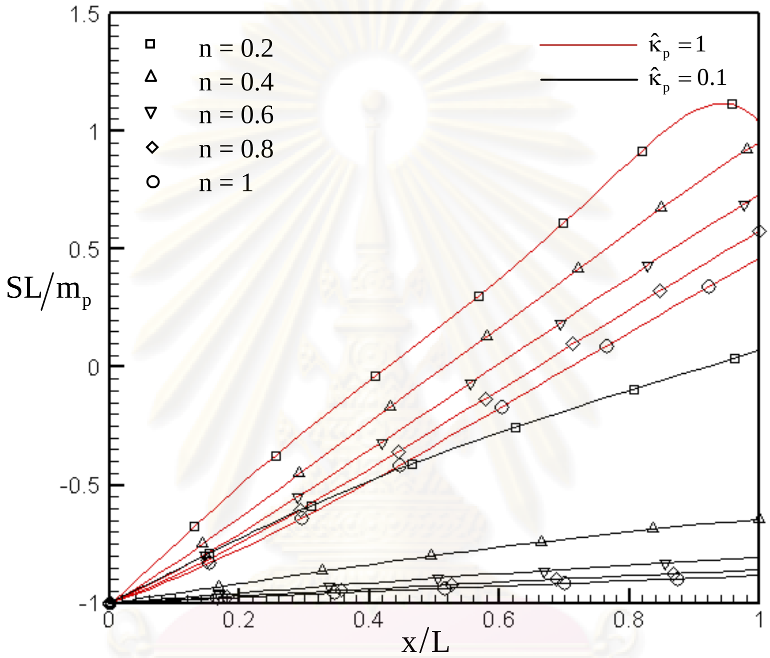
โดยที่ $\hat{f}_x^* = 0.5, \hat{f}_y^* = 1$ และ $\hat{m}^* = 1.5$



รูปที่ 6.12 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

โดยที่ $\hat{f}_x^* = 0.5, \hat{f}_y^* = 1$ และ $\hat{m}^* = 1.5$

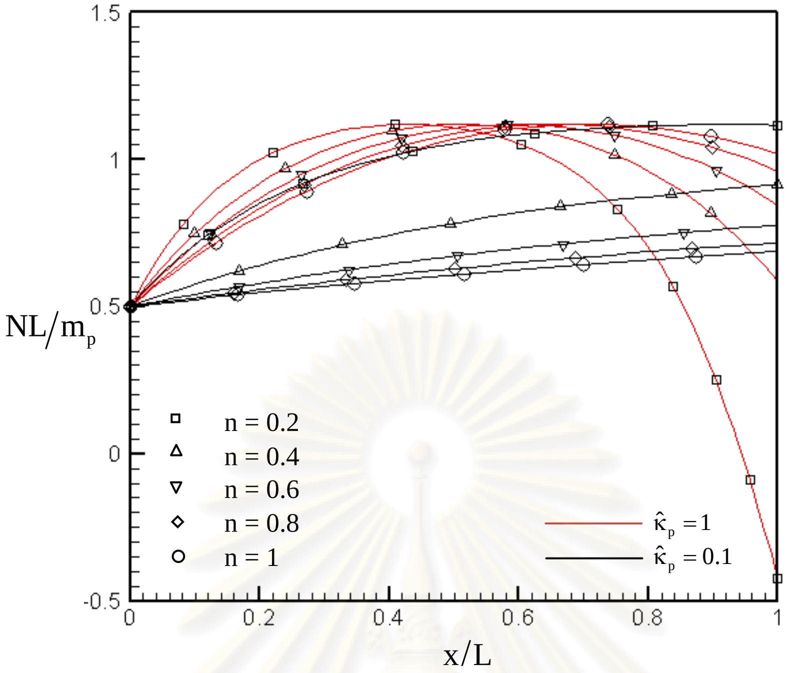
จากแผนภาพแรงเฉือนรูปที่ 6.13 พบว่าเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น (n มีค่าน้อยลง) จะส่งผลให้ค่าแรงเฉือนที่ปลายอิสระมีค่าน้อยลง ซึ่งการกระจายของแรงเฉือนตลอดความยาวนั้นเป็นแบบเชิงเส้น และในกรณีที่ $\hat{\kappa}_p = 1$ และ $n = 0.2$ นั้นเกิดการลดลงของแรงเฉือนที่บริเวณปลายอิสระ นอกจากนั้นหากคานยื่นมีความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุสูงและความชะลูดต่ำพบว่าการกระจายของแรงเฉือนที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกับผลจากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นมาก



รูปที่ 6.13 แผนภาพแรงเฉือนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

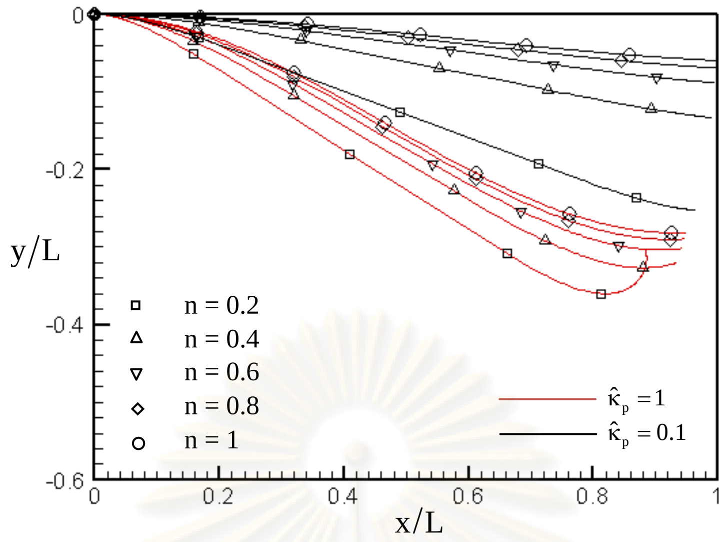
โดยที่ $\hat{f}_x^* = 0.5, \hat{f}_y^* = 1$ และ $\hat{m}^* = 1.5$

และจากแผนภาพแรงตามแนวแกนรูปที่ 6.14 พบว่าเมื่อวัสดุมีความไร้เชิงเส้นมากขึ้นจะส่งผลให้การกระจายของแรงตามแนวแกนของคานนั้นมีลักษณะโค้งมากขึ้น และแรงตามแนวแกนจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากปลายยึดแน่นจนถึงค่าสูงสุดและลดลงตามลำดับ โดยค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นนั้นมีค่าเท่ากับ $\sqrt{f_x^{*2} + f_y^{*2}} = 1.12$ ในกรณีที่คานมีความชะลูดสูงและวัสดุมีความไร้เชิงเส้นสูงจะส่งผลให้แรงตามแนวแกนที่ปลายเปลี่ยนจากแรงดึงเป็นแรงอัด

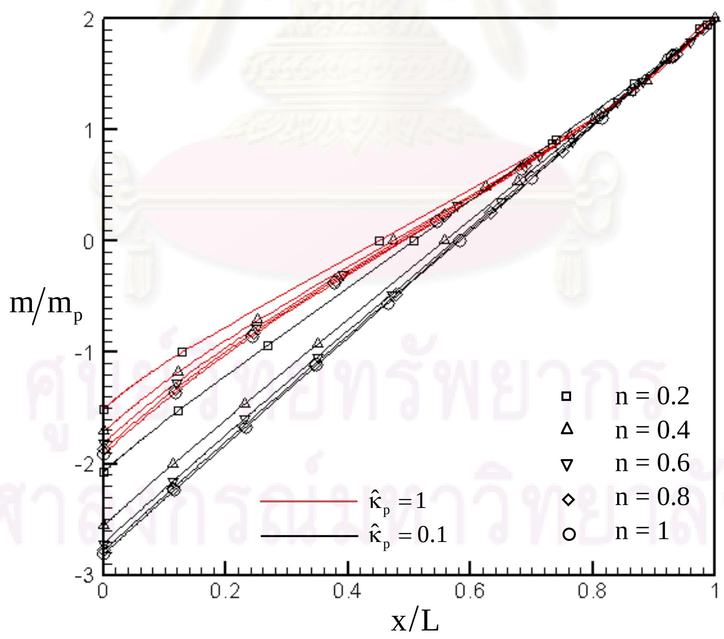


รูปที่ 6.14 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1
โดยที่ $\hat{f}_x^* = 0.5, \hat{f}_y^* = 1$ และ $\hat{m}^* = 1.5$

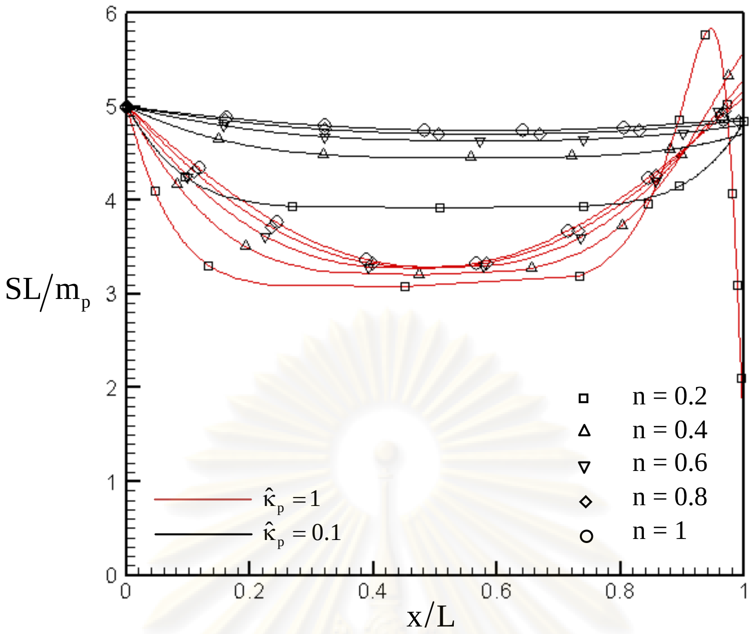
กรณีที่เกิดจุดดัดกลับภายในคานกำหนดให้แรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบ แรงกระทำบรรทัดฐานในแนวดิ่ง และโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานมีค่าเท่ากับ $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$ ผลจากการวิเคราะห์ประกอบด้วย เส้นโค้งการโก่งตัว แผนภาพโมเมนต์ดัด แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพแรงตามแนวแกน ดังแสดงในรูปที่ 6.15-6.18 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาเส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นในรูปที่ 6.15 พบว่าการโก่งตัวของส่วนใหญ่ของคานมีลักษณะค่อนข้างเป็นเส้นตรงโดยเฉพาะเมื่อคานมีความชะลูดต่ำ $\left(\hat{\kappa}_p = 0.1\right)$ เส้นการโก่งตัวมีลักษณะเกือบเป็นเส้นตรงตลอดความยาวคาน แต่ในกรณีคานที่มีความชะลูดสูง $\left(\hat{\kappa}_p = 1\right)$ เส้นการโก่งตัวมีความโค้งมากบริเวณปลายทั้งสอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $n = 0.2$ พบว่าบริเวณปลายอิสระมีมุมหมุนค่อนข้างมากซึ่งแตกต่างจากบริเวณส่วนกลางของคานที่ยังคงมีลักษณะคล้ายเส้นตรง นอกจากนี้เมื่อค่า n มีค่าลดลง (ดีกรีความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุสูงขึ้น) คานมีแนวโน้มเกิดการโก่งตัวและการหมุนมากขึ้น เส้นโค้งการโก่งตัวที่แต่ละค่า n ของกรณีคานที่มีความชะลูดต่ำ $\left(\hat{\kappa}_p = 0.1\right)$ มีความแตกต่างกันมากกว่ากรณีคานที่มีความชะลูดสูง $\left(\hat{\kappa}_p = 1.0\right)$ แต่มุมหมุนที่ปลายของคานที่มีความชะลูดสูงมีความแตกต่างกันค่อนข้างชัดเจนที่ค่า n ต่างๆกัน



รูปที่ 6.15 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$



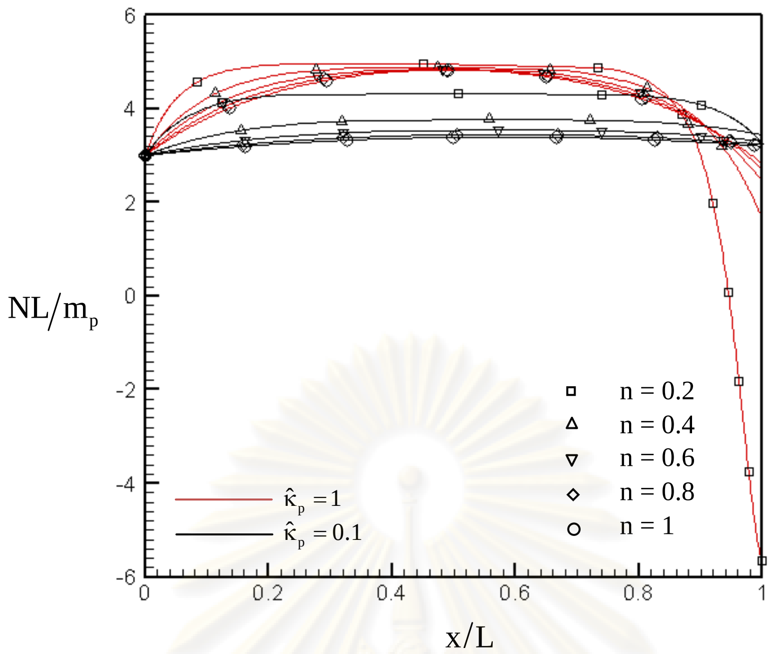
รูปที่ 6.16 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$



รูปที่ 6.17 แผนภาพแรงเฉือนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

โดยที่ $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$

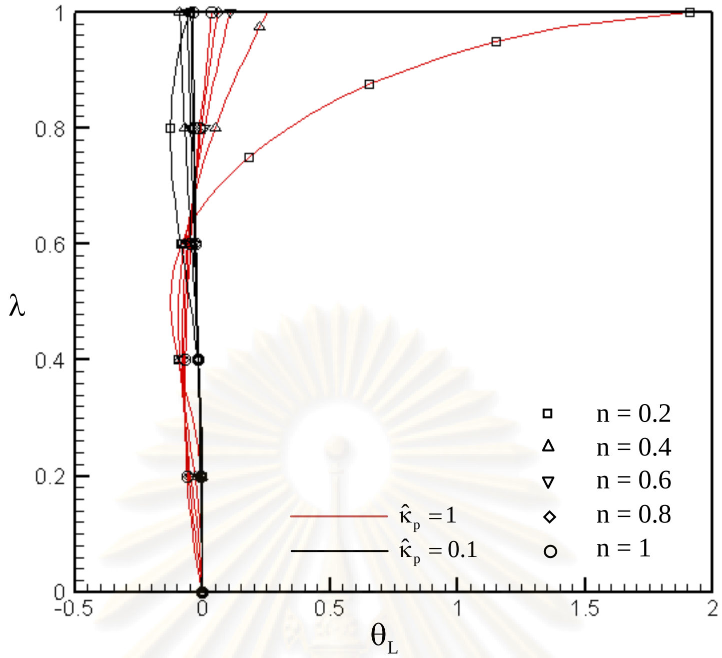
จากแผนภาพโมเมนต์ดัดของคานยื่นในรูปที่ 6.16 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำ $\left(\hat{\kappa}_p = 0.1\right)$ กราฟของโมเมนต์ดัดมีลักษณะเป็นเส้นตรงและใกล้เคียงกับกราฟโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น แต่ในกรณีคานที่มีความชะลูดสูง $\left(\hat{\kappa}_p = 1\right)$ กราฟของโมเมนต์ดัดที่ได้มีความแตกต่างไปจากกราฟของโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น โดยค่าโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นมีค่าลดลงเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น (n มีค่าลดลง) ทั้งกรณีคานที่มีความชะลูดสูงและความชะลูดต่ำ ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อ n มีค่าลดลงการขจัดในทิศทางราบของปลายอิสระของคานมีค่ามากขึ้น ทำให้แขนของโมเมนต์ดัดมีค่าลดลง อย่างไรก็ตามจากผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อโมเมนต์ดัดมีความชัดเจนน้อยกว่าผลที่มีต่อแรงเฉือนในรูปที่ 6.17 เมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้นแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบริเวณกลางคานมีค่าลดลง โดยบริเวณที่แรงเฉือนมีค่าน้อยที่สุดจะมีบริเวณกว้างมากขึ้นเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น นอกจากนี้ในกรณีที่คานยื่นมีความชะลูดสูงและวัสดุมีความไร้เชิงเส้นสูงอาจส่งผลให้แรงเฉือนบริเวณปลายอิสระมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วดังเช่นในกรณีที่ $\hat{\kappa}_p = 1$ และ n = 0.2 ซึ่งแรงเฉือนมีค่าสูงสุดเท่ากับ $\sqrt{f_x^{*2} + f_y^{*2}} = 5.83$ ที่บริเวณใกล้ปลายอิสระและแรงเฉือนมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วทำให้แรงเฉือนที่ปลายอิสระมีค่าน้อยกว่าแรงเฉือนบริเวณส่วนกลางของคาน



รูปที่ 6.18 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$

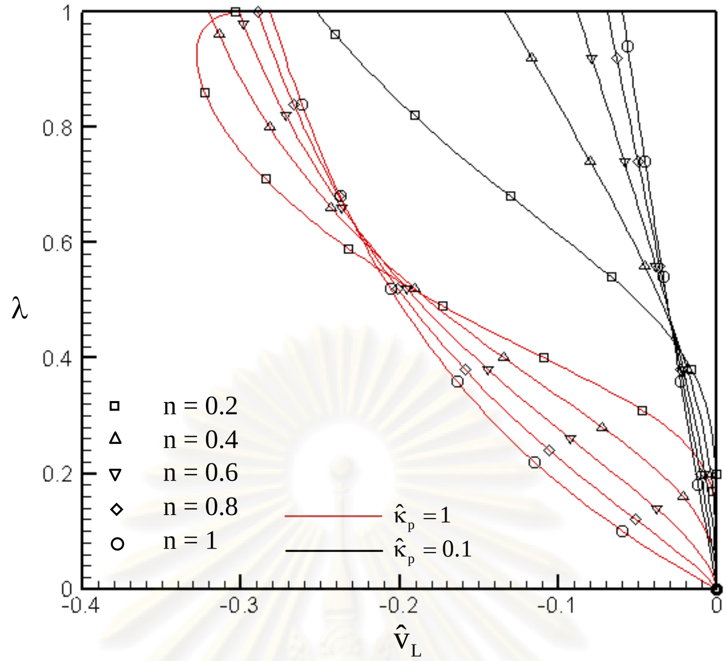
จากแผนภาพแรงตามแนวแกนในรูปที่ 6.18 พบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้แรงตามแนวแกนมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าคงที่บริเวณส่วนกลางของคาน โดยความกว้างของบริเวณที่แรงตามแนวแกนมีค่าคงที่นี้เพิ่มขึ้นตามความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ นอกจากนี้ในกรณีคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าแรงตามแนวแกนที่ปลายอิสระมีค่าลดลงเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าสูงขึ้น และเมื่อ n มีค่าน้อย เช่น n = 0.2 แรงตามแนวแกนที่บริเวณปลายอิสระจะเปลี่ยนจากแรงดึงเป็นแรงอัด

เพื่อศึกษาพฤติกรรมของคานยื่นเมื่อเพิ่มขนาดของแรงกระทำและโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายอิสระ พิจารณาแรงและโมเมนต์ดัดกระทำที่เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนจากศูนย์จนถึงค่าสุดท้าย $\hat{f}_x^* = 3, \hat{f}_y^* = -5$ และ $\hat{m}^* = 2$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda \in [0,1]$ เป็นค่าตัวประกอบของแรง จะได้แรงและโมเมนต์กระทำที่สถานะใดๆเป็น $\hat{f}_x^* = 3\lambda, \hat{f}_y^* = -5\lambda$ และ $\hat{m}^* = 2\lambda$ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายอิสระ การขจัดในแนวดิ่ง และการขจัดในแนวราบที่ปลายอิสระของคานและค่าตัวประกอบของแรง λ แสดงในรูปที่ 6.19-6.21 ตามลำดับ จากรูปที่ 6.19 พบว่าเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าน้อย มุมหมุนที่ปลายอิสระมีค่าน้อยมากจนความชันของกราฟที่จุดเริ่มต้นเป็นอนันต์ในทุกๆค่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ และบริเวณที่กราฟมีความชันเป็นอนันต์จะเพิ่มขึ้นเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้น



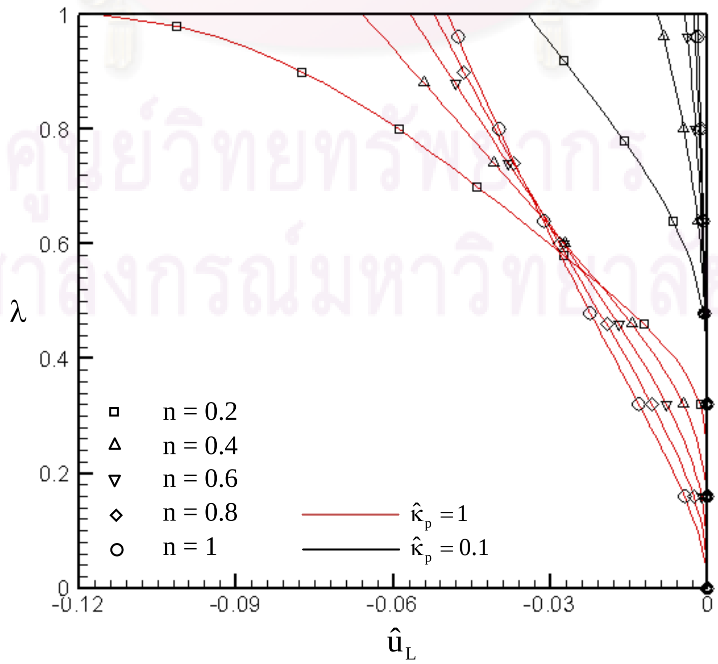
รูปที่ 6.19 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรง λ และมุมหมุนที่ปลายอิสระ

สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำลักษณะกราฟมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่มีความชันสูง โดยมุมหมุนจะมีค่าน้อยลงจนค่าตัวประกอบของแรงมีค่าเท่ากับ 1 แต่เมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้น (n มีค่าน้อยลง) อาจส่งผลให้การหมุนที่ปลายมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าใกล้ 1 นอกจากนี้คานที่มีความชะลูดสูง $\left(\hat{\kappa}_p = 1\right)$ มุมหมุนที่ปลายอิสระมีการเปลี่ยนทิศทางเมื่อ λ มีค่าใกล้ 1 สำหรับทุกค่า n สำหรับการขจัดในแนวดิ่งที่ปลายอิสระดังแสดงในรูปที่ 6.20 พบว่าการขจัดในแนวดิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นแบบไร้เชิงเส้นเมื่อ λ มีค่าเพิ่มมากขึ้นยกเว้นในกรณีที่ $n = 0.2$ และคานมีความชะลูดสูงการขจัดในแนวดิ่งเริ่มมีค่าลดลงเมื่อ λ มีค่าเข้าใกล้ 1 นอกจากนี้ยังพบว่าในช่วงที่ λ มีค่าน้อย ค่าการขจัดในแนวดิ่งเพิ่มขึ้นตามค่าของ n แต่เมื่อ λ มีค่ามากขึ้น การขจัดในแนวดิ่งมีค่ามากขึ้นเมื่อ n ลดลง



รูปที่ 6.20 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ

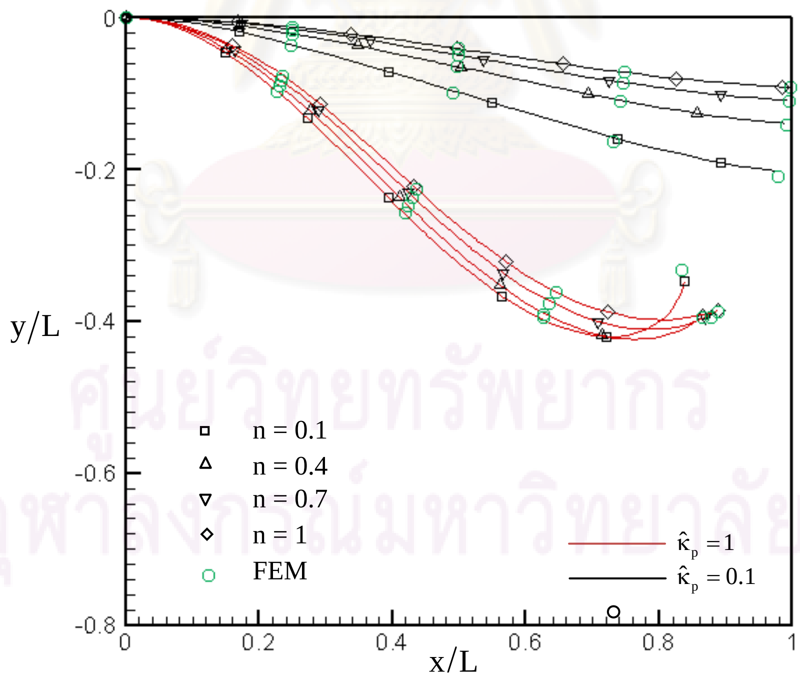
ส่วนของการขจัดในแนวราบดังแสดงในรูปที่ 6.21 พบว่ามีพฤติกรรมเช่นเดียวกับในการขจัดในแนวดิ่งดังที่ได้กล่าวมาแล้ว แต่ในกรณีที่ $n = 0.2$ และคานยื่นมีความชะลูดสูงนั้นการขจัดในแนวราบไม่มีการลดลงเมื่อ λ มีค่าใกล้ 1



รูปที่ 6.21 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายอิสระ

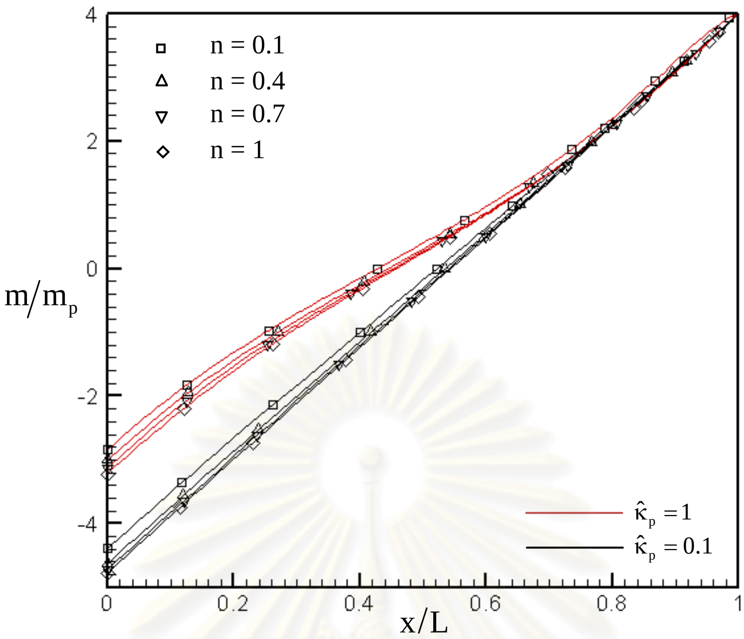
6.2.1.2 คานยื่นที่ทำมาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

พิจารณาคานยื่นที่ทำมาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 และรับแรงกระทำบรรทัดฐานและโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานเท่ากับ $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$ จากผลการวิเคราะห์พบว่าที่ส่วนปลายทั้งสองของคานยื่นมีพฤติกรรมเป็นแบบไร้เชิงเส้น จากเส้นโค้งการโก่งตัวของคานแสดงดังรูปที่ 6.22 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้คานเกิดการโก่งตัวมากขึ้น ในคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการโก่งตัวที่เกิดขึ้นมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยสำหรับแต่ละค่า n แต่ความโค้งของคานโดยเฉพาะบริเวณปลายอิสระมีความแตกต่างอย่างชัดเจนสำหรับค่า n ต่างๆกัน และจากแผนภาพโมเมนต์ดัดในรูปที่ 6.23 พบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อค่าโมเมนต์ดัดน้อยมากเมื่อเทียบกับผลของความชะลูดของคาน คานที่มีความชะลูดสูงการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวมีความแตกต่างจากโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น ส่วนคานที่มีความชะลูดต่ำการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดความยาวคานไม่แตกต่างจากโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญ

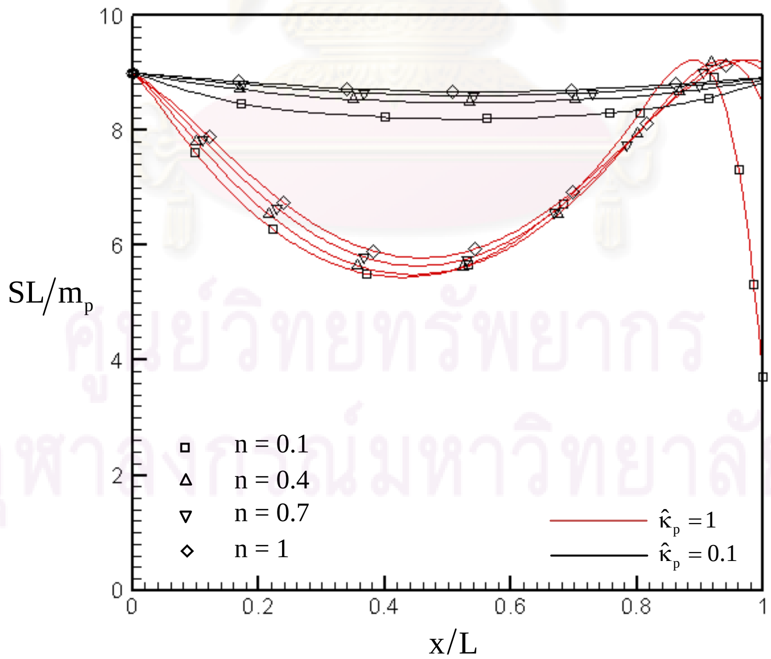


รูปที่ 6.22 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2

โดยที่ $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$

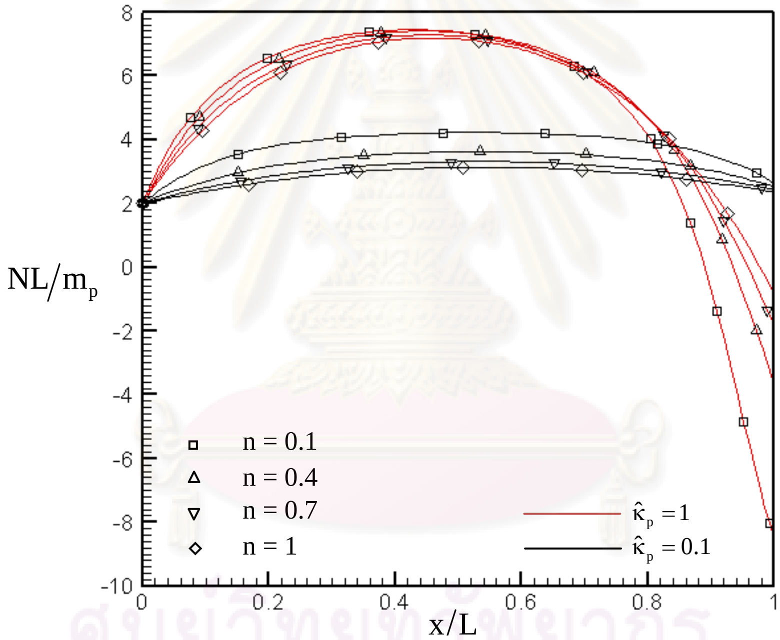


รูปที่ 6.23 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2
โดยที่ $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$



รูปที่ 6.24 แผนภาพแรงเฉือนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2
โดยที่ $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$

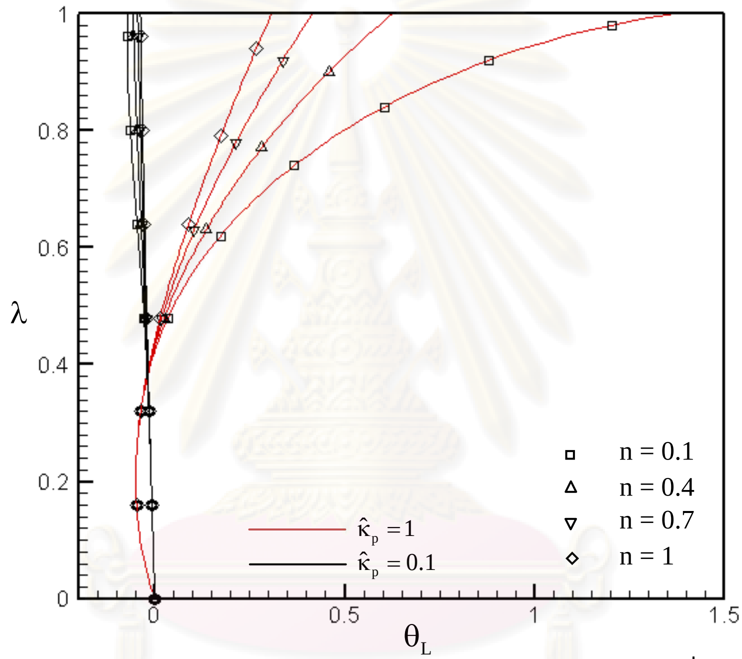
จากแผนภาพแรงเฉือนในรูปที่ 6.24 ความแตกต่างดังกล่าวยังไม่เด่นชัดเมื่อเทียบกับความแตกต่างที่เป็นผลเนื่องจากความชะลูดของคาน กล่าวคือคานที่มีความชะลูดสูงมีการกระจายของแรงเฉือนตลอดช่วงคานที่มีความแปรปรวนมาก แรงเฉือนมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บริเวณกลางคานและมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์บริเวณปลายอิสระของคาน ในบางกรณีเมื่อ n มีค่าน้อยๆ แรงเฉือนมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วบริเวณปลายอิสระของคานหลังจากแรงเฉือนมีค่าสูงสุด และจากแผนภาพแรงตามแนวแกนในรูปที่ 6.25 พบว่าเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้น (n มีค่าลดลง) ค่าแรงตามแนวแกนมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเห็นได้ชัดเจนในกรณีของคานที่มีความชะลูดต่ำ ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการกระจายของแรงตามแนวแกนมีค่าใกล้เคียงกันสำหรับค่า n ต่างๆกันแต่แรงตามแนวแกนเปลี่ยนจากแรงดึงเป็นแรงอัดบริเวณปลายอิสระของคาน



รูปที่ 6.25 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานยื่นที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$

จากนั้นทำการศึกษาผลของขนาดของแรงกระทำที่ปลายที่มีต่อการขจัดและการหมุนที่ปลายอิสระ โดยการเพิ่มแรงกระทำอย่างเป็นสัดส่วนจากศูนย์จนถึงค่า $\hat{f}_x^* = 2, \hat{f}_y^* = -9$ และ $\hat{m}^* = 4$ โดยใช้ตัวประกอบของแรง $\lambda \in [0,1]$ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายอิสระ การขจัดในแนวดิ่ง และการขจัดในแนวราบและตัวประกอบของแรงแสดงในรูปที่ 6.26-6.28 ตามลำดับ จากรูปที่ 6.28 พบว่าในช่วงเริ่มต้นขณะที่แรงกระทำและโมเมนต์ดัดกระทำยังมีค่าน้อยวัสดุตลอดความยาวคาน

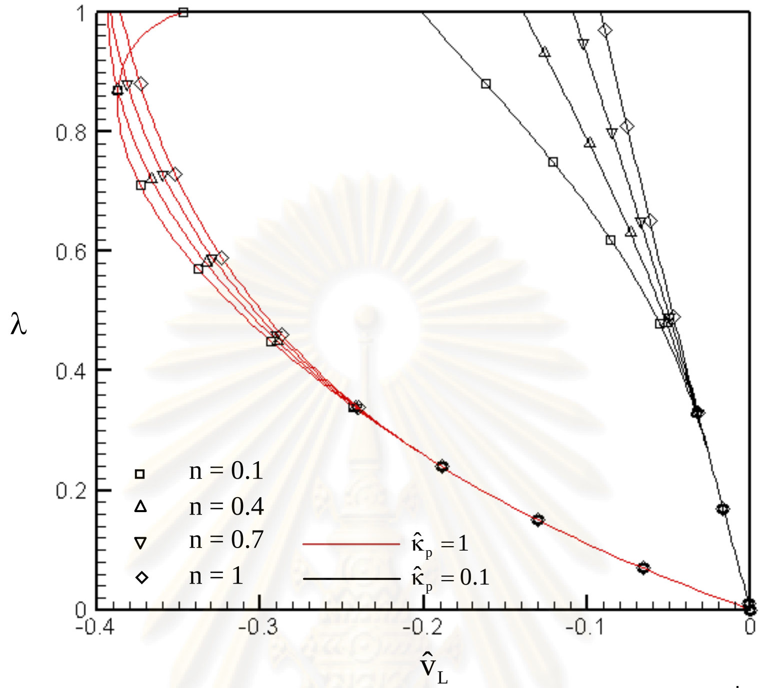
ยังคงมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น ดังจะเห็นได้จากเส้นกราฟที่ยังคงเป็นเส้นเดียวกันจนกระทั่งค่าตัวประกอบของแรงมีค่าประมาณ 0.4 หลังจากนั้นผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเริ่มปรากฏชัดเจนทั้งกรณีคานที่มีความชะลูดสูงและคานที่มีความชะลูดต่ำ สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและมุมหมุนที่ปลายอิสระมีลักษณะใกล้เคียงเส้นตรง โดยที่ขนาดของมุมหมุนมีค่ามากขึ้น เมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงมุมหมุนที่ปลายอิสระมีการเปลี่ยนทิศทางเมื่อตัวประกอบของแรงมีค่าประมาณ 0.45 โดยมุมหมุนที่ปลายอิสระมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น



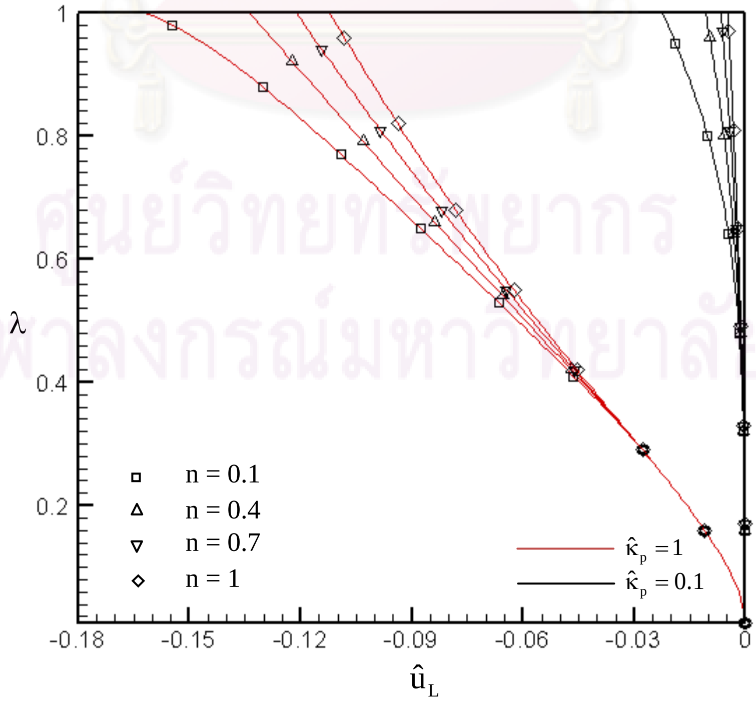
รูปที่ 6.26 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและมุมหมุนที่ปลายอิสระ

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดในแนวดิ่งและตัวประกอบของแรงดังรูปที่ 6.27 พบว่าความสัมพันธ์ที่ได้มีลักษณะเป็นแบบเชิงเส้นในช่วงแรก (เมื่อ λ มีค่าน้อยกว่า 0.25 โดยประมาณ) และผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเริ่มปรากฏชัดเจนเมื่อตัวประกอบของแรงมีค่ามากกว่า 0.3 โดยประมาณ สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำลักษณะของเส้นกราฟมีลักษณะค่อนข้างเป็นเส้นตรง ยกเว้นในกรณีที่ n มีค่าน้อยๆความสัมพันธ์เริ่มมีลักษณะเป็นแบบไร้เชิงเส้นเมื่อ λ มีค่ามากขึ้น นอกจากนี้ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุยังส่งผลให้การขจัดในแนวดิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่ามากขึ้น ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้การ

ขจัดมีค่าเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกันยกเว้นในกรณีที่ $n = 0.1$ ที่การขจัดในแนวดิ่งที่ปลายอิสระมีค่าลดลงเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าใกล้ 1



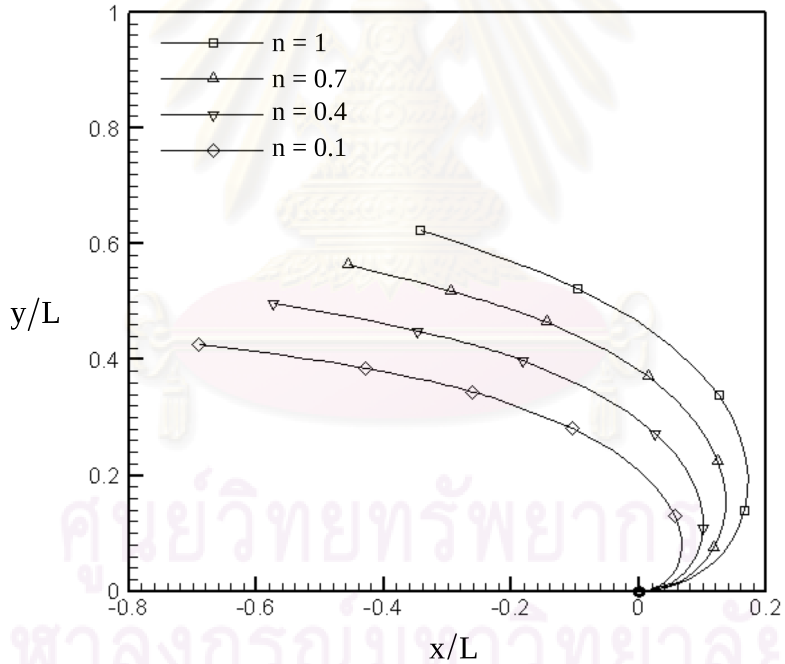
รูปที่ 6.27 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ



รูปที่ 6.28 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายอิสระ

ส่วนการขจัดในแนวราบในรูปที่ 6.28 พบว่ากราฟที่ได้มีลักษณะคล้ายกันทั้งในกรณีคานที่มีความชะลูดสูงและคานที่มีความชะลูดต่ำ ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้การขจัดในแนวราบมีค่ามากขึ้น และผลของความไร้เชิงเส้น (ค่า n) ที่มีต่อการขจัดในแนวราบเห็นได้ชัดเจนมากขึ้นเมื่อตัวประกอบของแรงมีค่าสูงขึ้น นอกจากนี้การขจัดในแนวราบของปลายคานที่มีความชะลูดสูงมีค่ามากกว่าการขจัดในแนวราบของปลายคานที่มีความชะลูดต่ำกว่ามาก

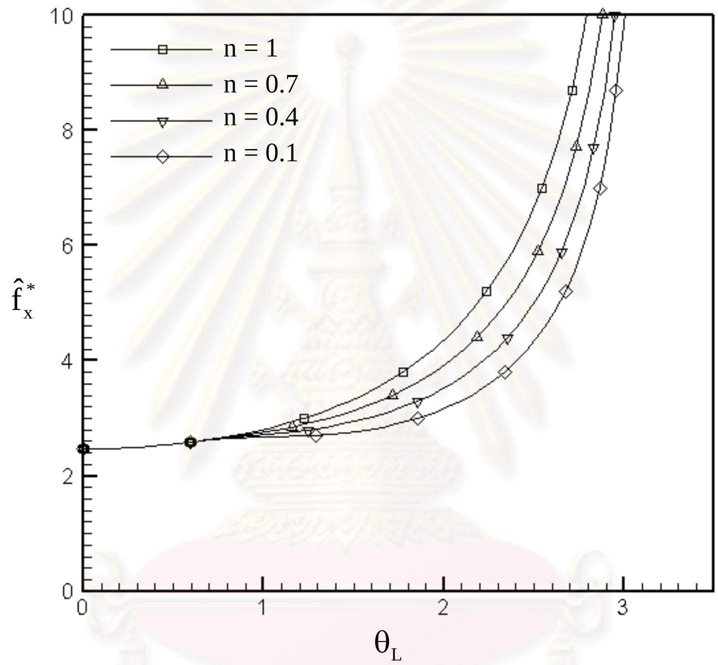
พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานยื่นอันเนื่องมาจากแรงกระทำในแนวราบที่เกินกว่าค่าแรงอัดวิกฤติของคาน พิจารณาโดยให้แรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบมีค่าเท่ากับ 10 และค่าความโค้งที่พิกัดยืดหยุ่นมีค่าเท่ากับ 1 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานหลังการโก่งเดาะที่ค่า n ต่างๆกันแสดงในรูปที่ 6.29 จากผลที่ได้พบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้โครงสร้างมีการโก่งตัวมากขึ้นทั้งในแนวราบและแนวดิ่ง รวมถึงการหมุนที่ปลายอิสระด้วย



รูปที่ 6.29 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานหลังการโก่งเดาะที่ค่า n ต่างๆกัน

รูปที่ 6.30-6.33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการหมุนที่ปลายอิสระ การขจัดในแนวราบ การขจัดในแนวดิ่ง และโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่ปลายยึดแน่นและแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบ $\hat{f}_x^*$ ที่เกินค่าแรงอัดบรรทัดฐานวิกฤติตามลำดับ จากรูปที่ 6.30 พบว่าคานเริ่มเกิดการโก่งเดาะเมื่อแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบมีค่าประมาณ 2.47 และวัสดุในคานเริ่มมีพฤติกรรมเป็นแบบไร้เชิงเส้นเมื่อ

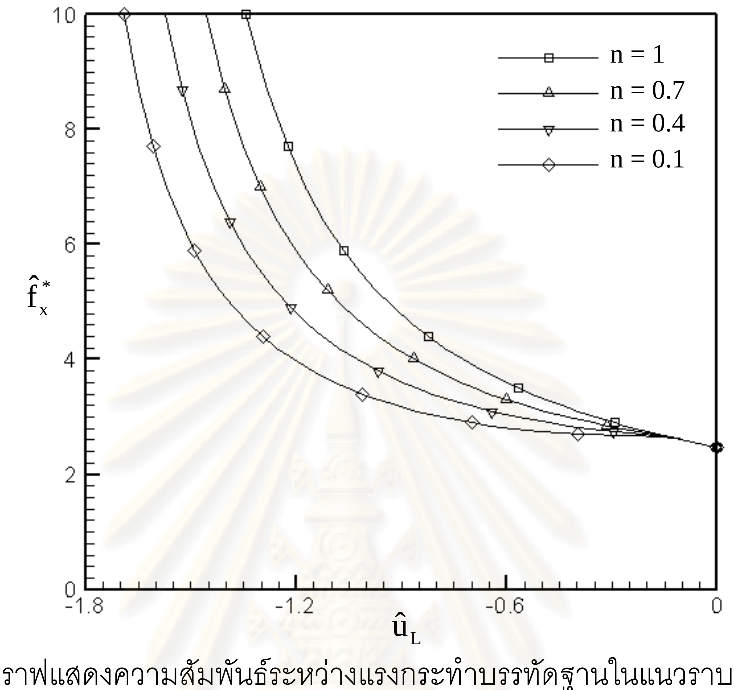
ค่าแรงกระทำบรรทัดฐานมีค่าประมาณ 2.6 ในช่วงแรกพบว่ามุมหมุนที่ปลายมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วแม้ว่าเพิ่มแรงกระทำเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่เมื่อแรงกระทำบรรทัดฐานมีค่าเกิน 5 มุมหมุนมีอัตราการเพิ่มขึ้นลดลงเมื่อแรงกระทำมีค่าเพิ่มขึ้น และที่แรงกระทำบรรทัดฐานเท่ากับ 10 ความชันของกราฟมีค่าสูงมาก โดยความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้เกิดมุมหมุนที่ปลายมากขึ้นเมื่อแรงกระทำยังมีค่าน้อยแต่เมื่อแรงกระทำมีค่ามากขึ้นอิทธิพลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อมุมหมุนที่ปลายมีค่าน้อยลง



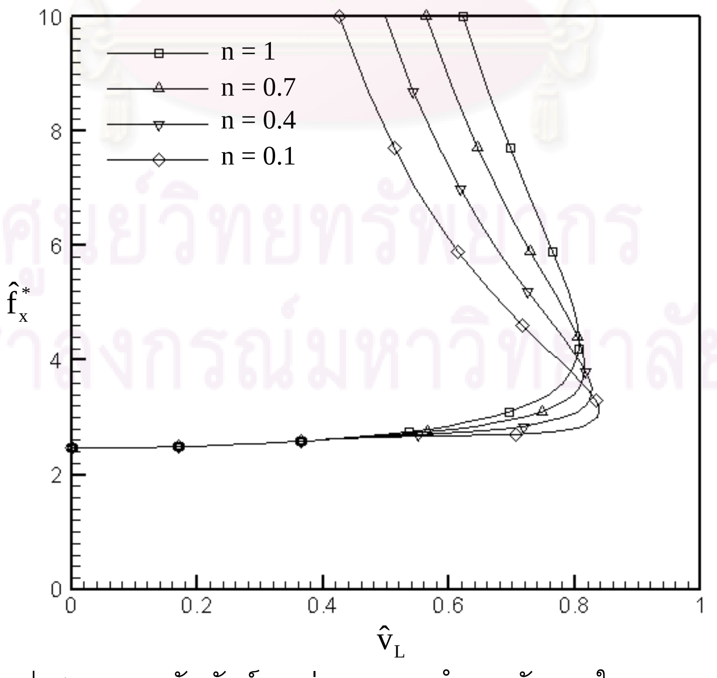
รูปที่ 6.30 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบและมุมหมุนที่ปลายอิสระ

เมื่อพิจารณาการขจัดในแนวราบดังรูปที่ 6.31 พบว่าในช่วงแรกหลังจากที่คานเกิดการโก่งเดาะอัตราการเพิ่มของการขจัดในแนวราบมีค่ามากเมื่อแรงบรรทัดฐาน $\hat{f}_x^*$ เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย แต่หลังจาก $\hat{f}_x^*$ มีค่าเกิน 4 อัตราการเพิ่มขึ้นของการขจัดในแนวราบเริ่มมีค่าลดลง ส่วนความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ (ค่า n) ส่งผลให้การขจัดในแนวราบมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง สำหรับการขจัดในแนวดิ่งดังรูปที่ 6.32 พบว่าการขจัดในแนวดิ่งมีอัตราการเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรกหลังการโก่งเดาะ และเมื่อผ่านจุดที่มีการขจัดสูงสุดแล้วการขจัดจะมีค่าลดลงอย่างช้าๆเมื่อเทียบกับการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำ ส่วนผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุพบว่าเมื่อ n มีค่าลดลงการขจัดใน

แนวดิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อการขจัดยังไม่ถึงจุดสูงสุด แต่หลังจากการขจัดในแนวดิ่งถึงค่าสูงสุดการขจัดจะมีค่าลดลงมากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง

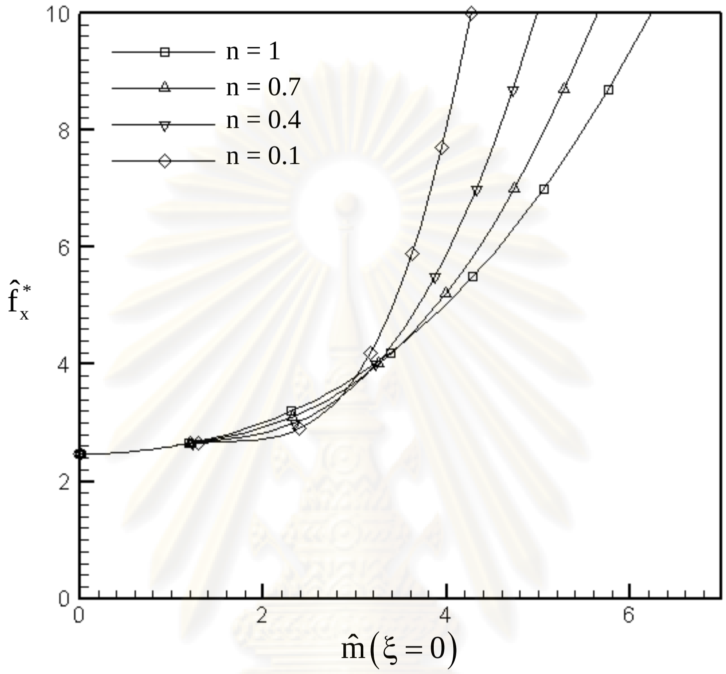


รูปที่ 6.31 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบและการขจัดในแนวราบที่ปลายอิสระ



รูปที่ 6.32 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบและการขจัดในแนวดิ่งที่ปลายอิสระ

สำหรับค่าโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นหลังคานโก่งเดาะดังแสดงในรูปที่ 6.33 พบว่าในช่วงที่วัสดุยังคงมีพฤติกรรมแบบเชิงเส้นโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว แม้แรงกระทำมีค่าเพิ่มขึ้นจากแรงอัดวิกฤติเพียงเล็กน้อย เมื่อแรงกระทำบรรทัดฐานมีค่ามากกว่า 4 การเพิ่มขึ้นของโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่นมีค่าลดลงเมื่อ n มีค่าลดลง



รูปที่ 6.33 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำบรรทัดฐานในแนวราบและโมเมนต์ดัดที่ปลายยึดแน่น

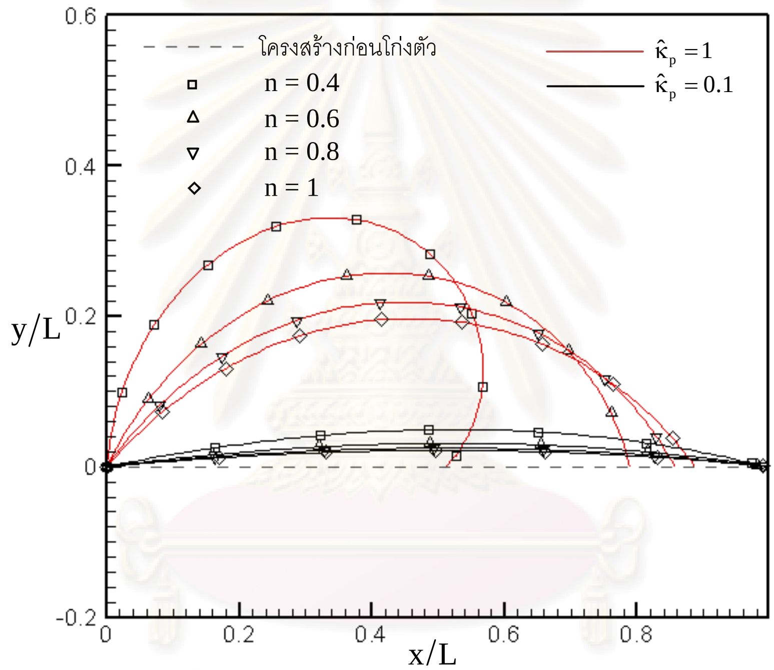
6.2.2 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย

ผลเฉลยของปัญหาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสอง แยกนำเสนอเป็น 2 ส่วนตามชนิดของแบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดดังต่อไปนี้

6.2.2.1 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำมาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1

เริ่มต้นพิจารณากรณีที่คานไม่มีจุดดัดกลับเกิดขึ้นภายใน โดยกำหนดให้แรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายมีค่าเท่ากับ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$ เส้นโค้งการ

โก่งตัว แผนภาพโมเมนต์ดัด แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพแรงตามแนวแกนที่ได้จากการวิเคราะห์ แสดงในรูปที่ 6.34-6.37 ตามลำดับ นอกจากนี้ค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับแสดงในตารางที่ 6.4 จากเส้นโค้งการโก่งตัวของคานในรูปที่ 6.34 พบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้คานมีการโก่งตัวมากขึ้น และผลต่างของมุมหมุนที่ปลายทั้งสองมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าน้อย ยกตัวอย่างเช่นในกรณีที่ $n = 0.4$ มุมหมุนที่ปลายขวาของคานมีค่ามากกว่ามุมหมุนที่ปลายซ้ายอย่างชัดเจน แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำอิทธิพลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการโก่งตัวของคานน้อยมาก

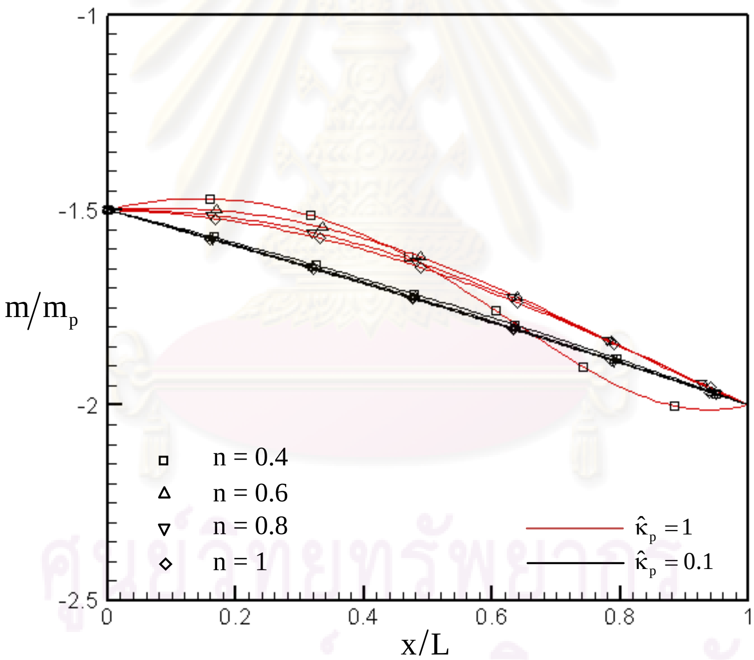


รูปที่ 6.34 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

เมื่อพิจารณาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับด้านซ้ายจากตารางที่ 6.4 พบว่าเมื่อ $\hat{\kappa}_p = 0.1$ แรงปฏิกิริยาสำหรับ n ค่าต่างๆกันมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก และใกล้เคียงกับผลการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นคือ $\hat{f}_{y1} = -0.5$ แต่ในกรณีของคานที่มีความชะลูดสูง $(\hat{\kappa}_p = 1)$ พบว่าแรงปฏิกิริยาสำหรับแต่ละค่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าแตกต่างกันอย่างชัดเจนโดยเฉพาะที่ค่า $n = 0.4$ แรงปฏิกิริยามีค่ามากกว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นเกือบถึงสองเท่า

ตารางที่ 6.4 แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับด้านซ้ายของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย ที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 และรับแรงกระทำ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

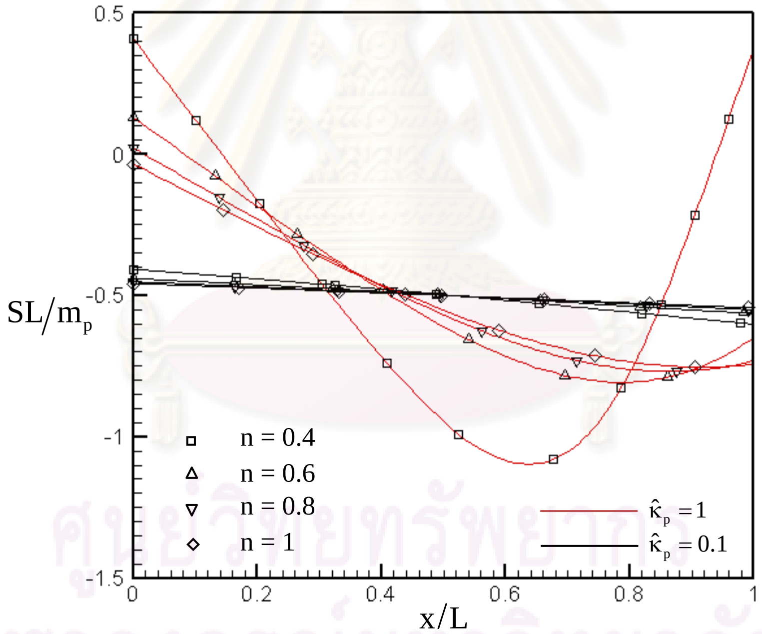
ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ (n)	แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้าย $\left(\hat{f}_{y1}\right)$	
	$\hat{\kappa}_p = 1$	$\hat{\kappa}_p = 0.1$
0.4	-0.976131280	-0.503326536
0.6	-0.633484619	-0.501327217
0.8	-0.583561148	-0.500835890
1.0	-0.563564806	-0.500633129



รูปที่ 6.35 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

จากแผนภาพโมเมนต์ดัดในรูปที่ 6.35 พบว่าการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดช่วงคานสำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำมีลักษณะเหมือนกับการกระจายของโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น นอกจากนี้ยังพบว่าในคานที่มีความชะลูดต่ำความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดคานน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการกระจายของโมเมนต์ดัดมี

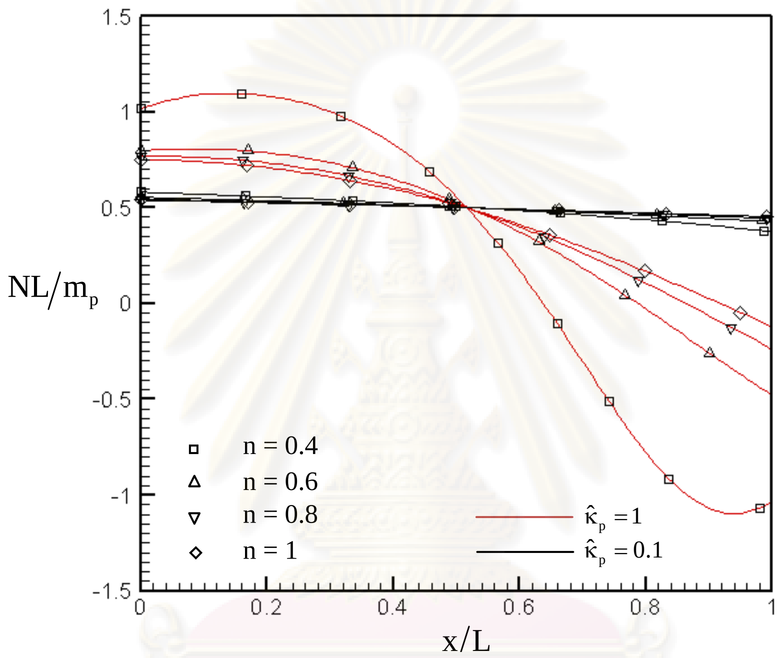
ความแตกต่างจากโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นอย่างชัดเจน ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดช่วงคานมากกว่าในกรณีที่คานที่มีความชะลูดต่ำ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ n มีค่าน้อยๆ สำหรับแผนภาพแรงเฉือนของคานในรูปที่ 6.36 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำมีการกระจายของแรงเฉือนตลอดช่วงคานเหมือนกับแรงเฉือนที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นโดยที่แรงเฉือนมีค่าค่อนข้างคงที่ตลอดความยาวคาน ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของแรงเฉือนน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการกระจายแรงเฉือนที่เกิดขึ้นมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง โดยแรงเฉือนมีค่าลดลงและมีค่าต่ำสุดที่บริเวณกลางค่อนไปทางขวาของคาน นอกจากนี้ยังพบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของแรงเฉือนตลอดช่วงคานอย่างชัดเจน เมื่อ n มีค่าน้อยๆแรงเฉือนมีการเปลี่ยนทิศทางที่บริเวณปลายทั้งสองของคาน (ยกตัวอย่างเช่น n = 0.4)



รูปที่ 6.36 แผนภาพแรงเฉือนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

สำหรับการกระจายของแรงตามแนวแกนในรูปที่ 6.37 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำมีการกระจายของแรงตามแนวแกนเกือบเป็นแบบเชิงเส้น และใกล้เคียงกับแรงตามแนวแกนที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น ส่วนความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของแรงตามแนวแกน

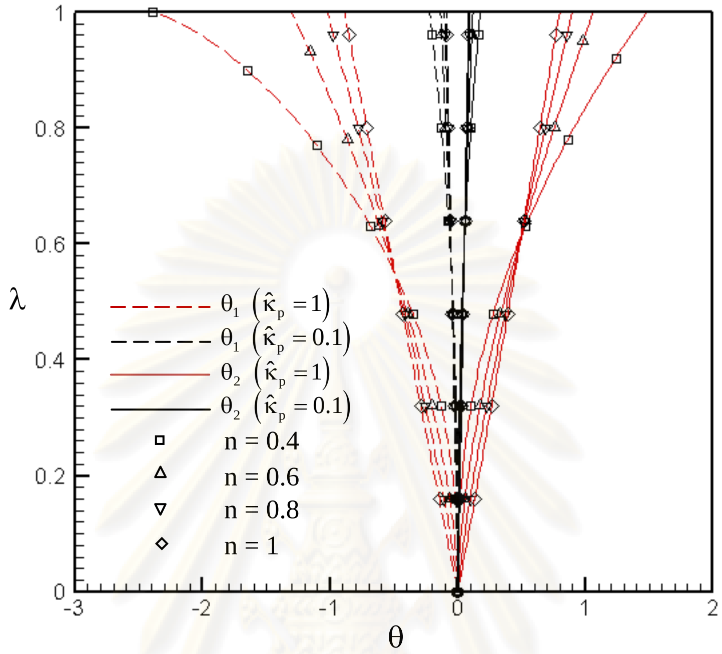
น้อยมาก ส่วนกรณีคานที่มีความชะลูดสูงแรงตามแนวแกนที่บริเวณปลายด้านซ้ายมีค่ามากกว่า $\hat{f}_x^*$ และมีค่าลดลงเรื่อยๆจนมีค่าเท่ากับ $\hat{f}_x^*$ ที่บริเวณกึ่งกลางคาน และมีค่าน้อยกว่า $\hat{f}_x^*$ ที่บริเวณส่วนด้านขวาของคาน นอกจากนี้ ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของแรงตามแนวแกนอย่างชัดเจน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ n มีค่าน้อยๆ แรงตามแนวแกนมีการเปลี่ยนแปลงมากจากปลายด้านซ้ายถึงปลายด้านขวาของคาน



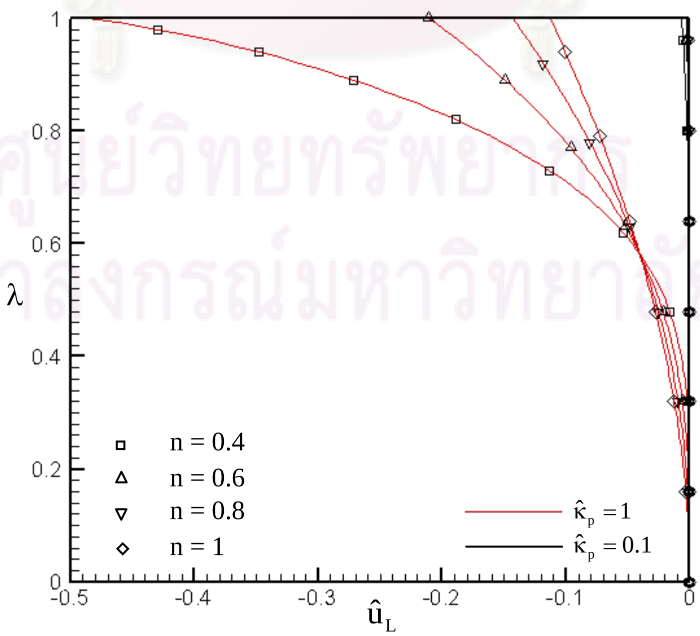
รูปที่ 6.37 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 1.5, \hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

โดยพิจารณาแรงและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองเป็นสัดส่วนโดยตรงจากศูนย์จนถึง $\hat{m}_1 = 1.5$, $\hat{m}_2 = -2$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$ โดยใช้ตัวประกอบของแรง $\lambda \in [0,1]$ ได้ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายทั้งสองและตัวประกอบของแรงดังแสดงในรูปที่ 6.38 จากผลที่ได้พบว่าในคานที่มีความชะลูดต่ำมุมหมุนที่ปลายด้านซ้ายและด้านขวาของคานเพิ่มขึ้นน้อยมากเมื่อ λ มีค่ามากขึ้น และความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลน้อยมาก แต่คานที่มีความชะลูดสูงพบว่ามุมหมุนที่ปลายทั้งสองมีค่ามากกว่าคานที่มีความชะลูดต่ำเมื่อพิจารณาที่ λ เดียวกัน นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายทั้งสองและ λ มีลักษณะไร้เชิงเส้นมากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง สำหรับช่วงที่ตัวประกอบ

ของแรงมีค่าน้อยขนาดของมุมหมุนที่ปลายทั้งสองมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น แต่เมื่อ λ มีค่ามากขึ้นแนวโน้มดังกล่าวมีลักษณะตรงกันข้าม



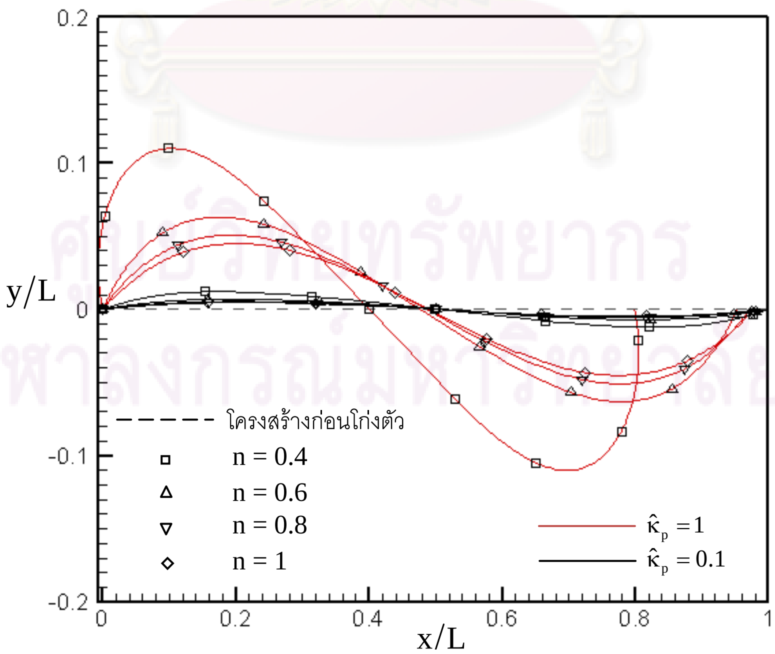
รูปที่ 6.38 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการหมุนที่ปลายทั้งสองของคาน



รูปที่ 6.39 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวา

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคาน แสดงในรูปที่ 6.39 จากผลที่ได้ดังกล่าวพบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำเกิดการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาน้อยมากและอิทธิพลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุไม่มีนัยสำคัญ แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าน้อยกว่า 0.58 โดยประมาณ ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้การขจัดที่เกิดขึ้นในแนวราบมีค่าน้อยลง และเมื่อค่ามีค่ามากกว่า 0.58 การขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวามีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง นอกจากนี้ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลอย่างชัดเจนต่อความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบในกรณีที่คานมีความชะลูดสูง

กรณีต่อไปพิจารณาแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองดังนี้ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$ ในกรณีนี้คานเกิดจุดดัดกลับที่จุดกึ่งกลางคาน เมื่อพิจารณาเส้นโค้งการโก่งตัวดังแสดงในรูปที่ 6.40 พบว่าการขจัดในทิศทางดิ่งที่จุดดัดกลับมีค่าเป็นศูนย์และเส้นโค้งการโก่งตัวทางด้านขวาและด้านซ้ายของจุดดัดกลับมีลักษณะปฏิสมมาตร เมื่อวัสดุมีความไร้เชิงเส้นสูงขึ้นคานเกิดการโก่งตัวมากขึ้นทั้งในกรณีคานที่มีความชะลูดต่ำและคานที่มีความชะลูดสูง แต่ผลของความไร้เชิงเส้นปรากฏชัดเจนมากกว่าในกรณีคานที่มีความชะลูดสูง



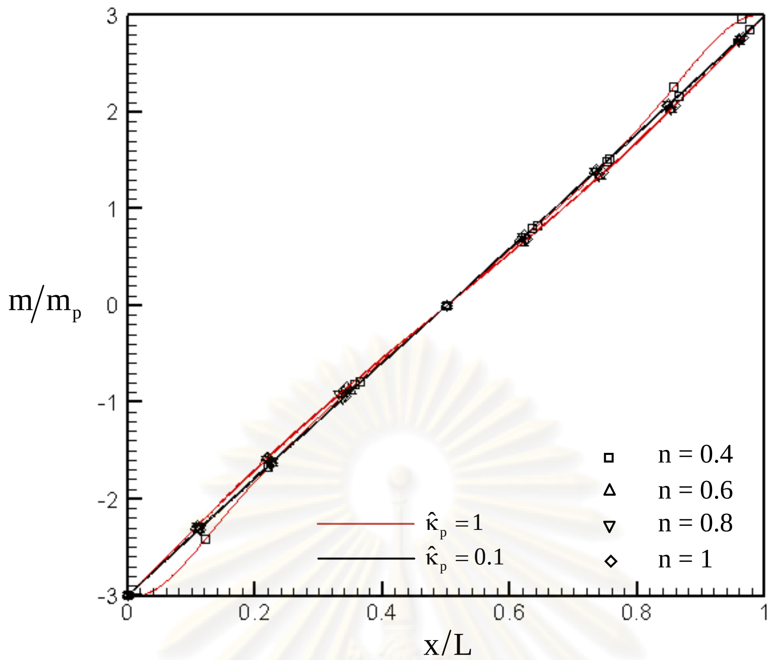
รูปที่ 6.40 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้ายสำหรับค่า n ต่างๆกันแสดงในตารางที่ 6.5 จากผลที่ได้พบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีค่าเพิ่มขึ้น โดยการเพิ่มขึ้นของแรงปฏิกิริยานี้สามารถเห็นได้ชัดเจนในคานที่มีความชะลูดสูง แต่ในคานที่มีความชะลูดต่ำพบว่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นซึ่งมีค่าเท่ากับ 6 และมีค่าเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยเมื่อวัสดุมีความไร้เชิงเส้นมีมากขึ้น

ตารางที่ 6.5 แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับด้านซ้ายของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย ที่ทำมาจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$

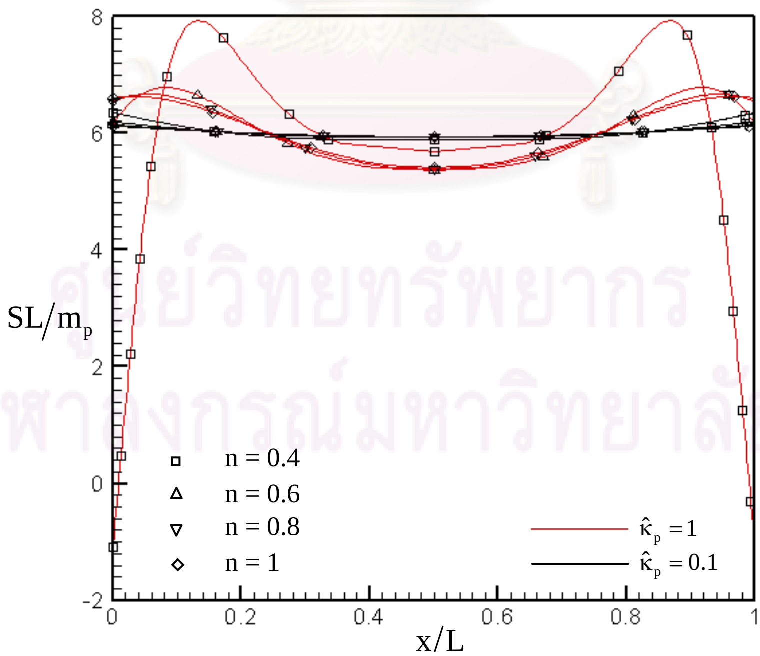
ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ (n)	แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้าย $\left(\hat{f}_{y1}\right)$	
	$\hat{\kappa}_p = 1$	$\hat{\kappa}_p = 0.1$
0.4	7.5153292203	6.0106413291
0.6	6.3002103715	6.0033456980
0.8	6.1808524804	6.0019810675
1.0	6.1377470495	6.0014827615

จากแผนภาพโมเมนต์ดัดของคานดังกล่าวดังแสดงในรูปที่ 6.41 พบว่าการกระจายของโมเมนต์ดัดทั้งกรณีคานที่มีความชะลูดต่ำและคานที่มีความชะลูดสูงและทุกค่า n มีความใกล้เคียงกันมากและใกล้เคียงกับผลการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น ส่วนแผนภาพแรงเฉือนในรูปที่ 6.42 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำแรงเฉือนสำหรับ n ค่าต่างๆมีลักษณะใกล้เคียงกันมากและมีค่าใกล้เคียงกับแรงเฉือนที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงนั้นผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุทำให้แรงเฉือนที่บริเวณใกล้ปลายคานมีค่าสูงสุด และมีค่าลดลงที่ปลายคานทั้งสองและบริเวณกึ่งกลางคาน นอกจากนี้แรงเฉือนที่ปลายทั้งสองอาจมีการเปลี่ยนทิศทางด้วยเมื่อ n มีค่าน้อยๆ



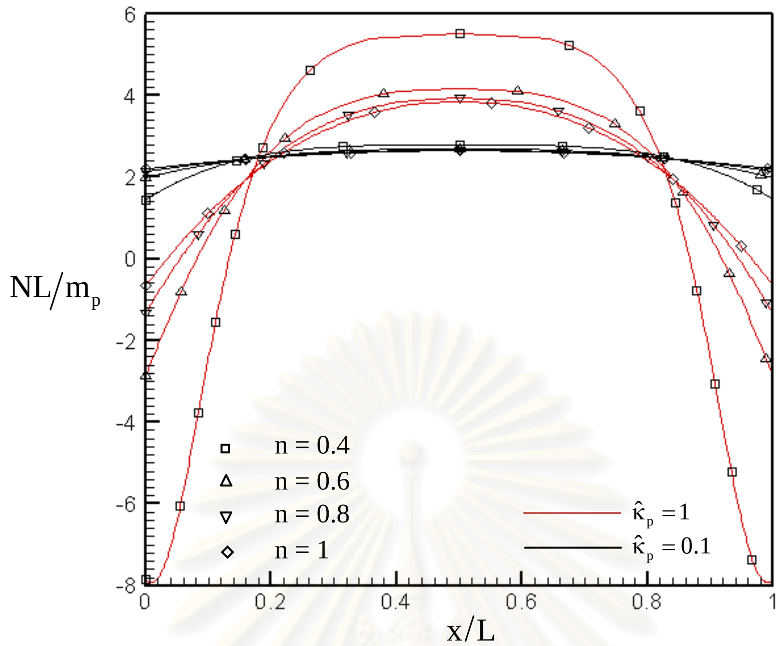
รูปที่ 6.41 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$



รูปที่ 6.42 แผนภาพแรงเฉือนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1

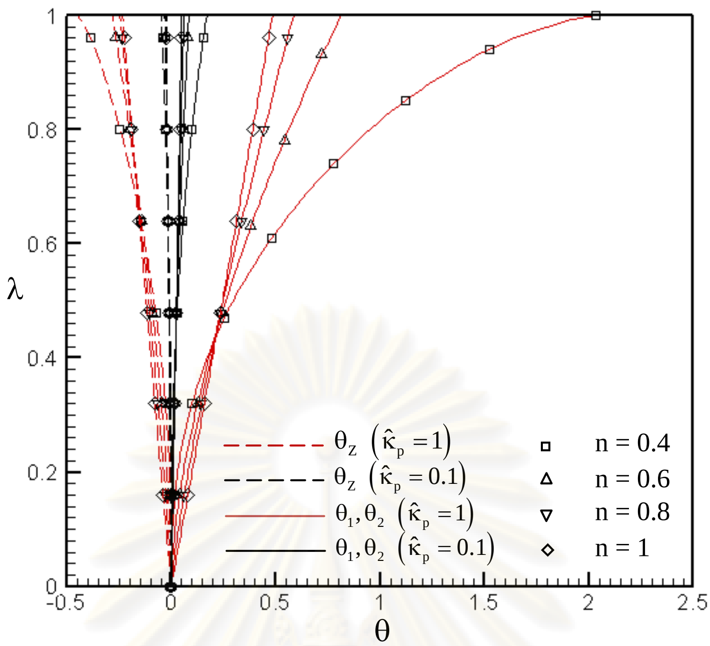
โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$



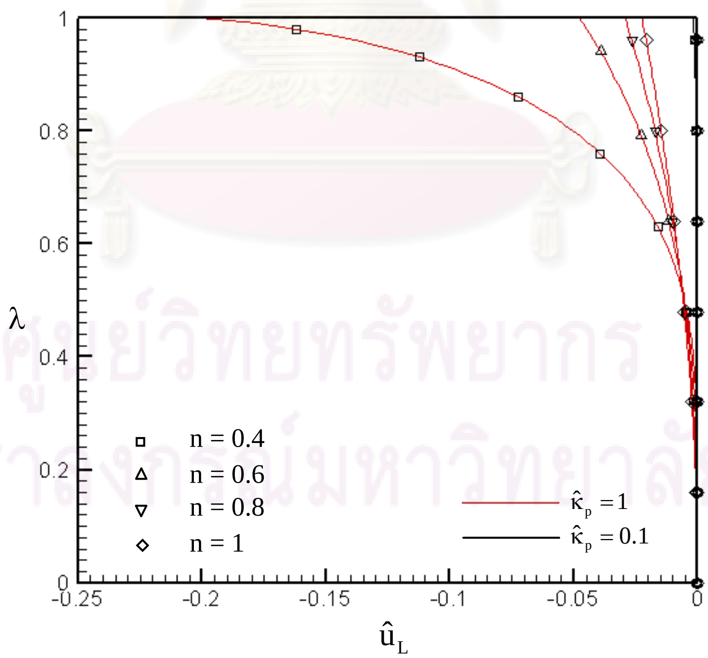
รูปที่ 6.43 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5$

เมื่อพิจารณาแผนภาพแรงตามแนวแกนดังรูปที่ 6.43 พบว่าในคานที่มีความชะลูดต่ำลักษณะของแรงตามแนวแกนที่เกิดขึ้นตลอดช่วงคานมีค่าใกล้เคียงกับ $\hat{f}_x^*$ สำหรับทุกค่า n ที่พิจารณา ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลอย่างชัดเจนต่อการกระจายของแรงตามแนวแกนตลอดช่วงคาน โดยแรงตามแนวแกนบริเวณกึ่งกลางมีค่าค่อนข้างคงที่และมีช่วงคงที่กว้างขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง นอกจากนี้แรงตามแนวแกนมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วที่บริเวณปลายทั้งสองของคานจนเกิดการเปลี่ยนทิศทางของแรงจากแรงดึงเป็นแรงอัดที่ปลายทั้งสองของคาน

เมื่อพิจารณาแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองของคานดังนี้ $\hat{m}_1 = 3\lambda,\ \hat{m}_2 = 3\lambda$ และ $\hat{f}_x^* = 2.5\lambda$ โดยที่ $\lambda \in [0,1]$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรง λ และมุมหมุนที่ปลายทั้งสองและมุมหมุนที่จุดดัดกลับดังแสดงในรูปที่ 6.44 เนื่องจากโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสองมีค่าเท่ากันดังนั้นมุมหมุนที่ปลายทั้งสองจึงมีค่าเท่ากัน สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำพบว่าการหมุนที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยมากจนความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลน้อยมาก แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการเพิ่มขึ้นของมุมหมุนที่ปลายทั้งสองของคานและที่จุดดัดกลับมีพฤติกรรมใกล้เคียงกัน คือ ในช่วงแรกที่ค่า λ มีค่าน้อยๆความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้มุมหมุนมีค่าน้อยลง แต่เมื่อ λ มีค่ามากขึ้นแนวโน้มดังกล่าวเปลี่ยนไปในลักษณะตรงกันข้าม



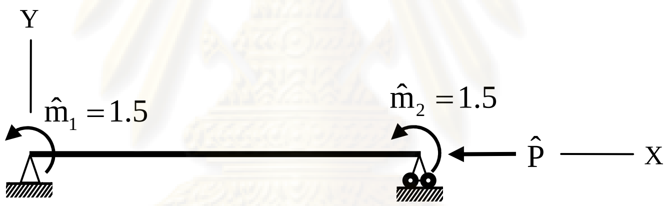
รูปที่ 6.44 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและมุมหมุนที่ปลายทั้งสองและที่จุดดัดกลับ



รูปที่ 6.45 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวา

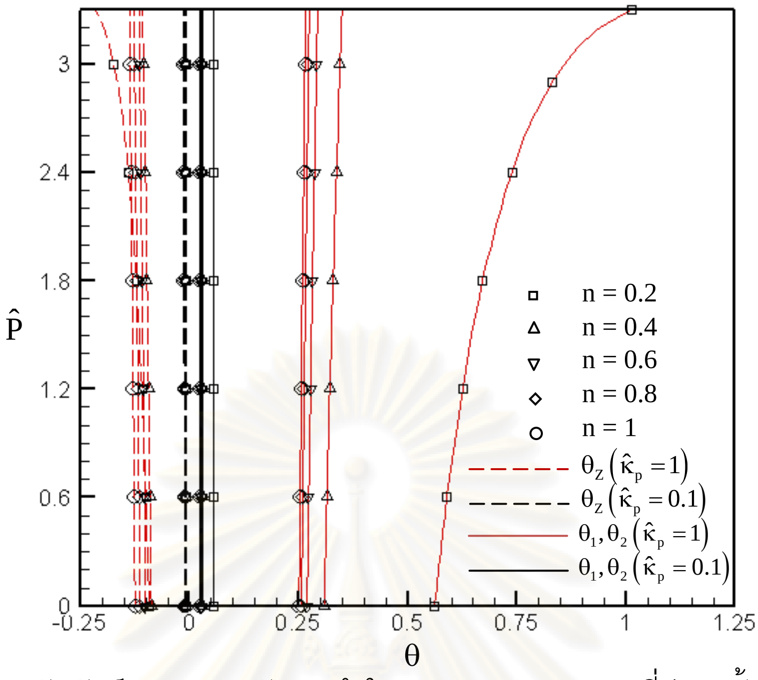
ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบแสดงในรูปที่ 6.45 จากผลที่ได้ดังกล่าวพบว่าการขจัดที่เกิดขึ้นในคานที่มีความชะลูดต่ำมีค่าน้อยมากและความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุไม่ส่งผลต่อค่าการขจัด สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงในช่วงเริ่มต้นซึ่ง λ มีค่าน้อยการขจัดในแนวราบมีค่าน้อยมาก แต่เมื่อตัวประกอบของแรงมีค่าเกินกว่า 0.48 โดยประมาณ ผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุปรากฏอย่างชัดเจนและค่าการขจัดในแนวราบมีค่ามากขึ้น เมื่อ n มีค่าลดลงเมื่อพิจารณามีค่า λ เดียวกัน

กรณีสุดท้ายพิจารณาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่รับโมเมนต์บรรทัดฐานกระทำคงที่ทั้งสองปลายมีค่าเท่ากับ 1.5 ดังแสดงในรูปที่ 6.46 โดยทำการศึกษาพฤติกรรมของคานเมื่อเปลี่ยนค่าแรงอัดบรรทัดฐานในแนวราบ $\hat{P} = PL/M_p$ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายทั้งสอง มุมหมุนที่จุดดัดกลับ การขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวา และแรงตามแนวแกนและแรงอัดบรรทัดฐานแสดงในรูปที่ 6.47-6.49 ตามลำดับ

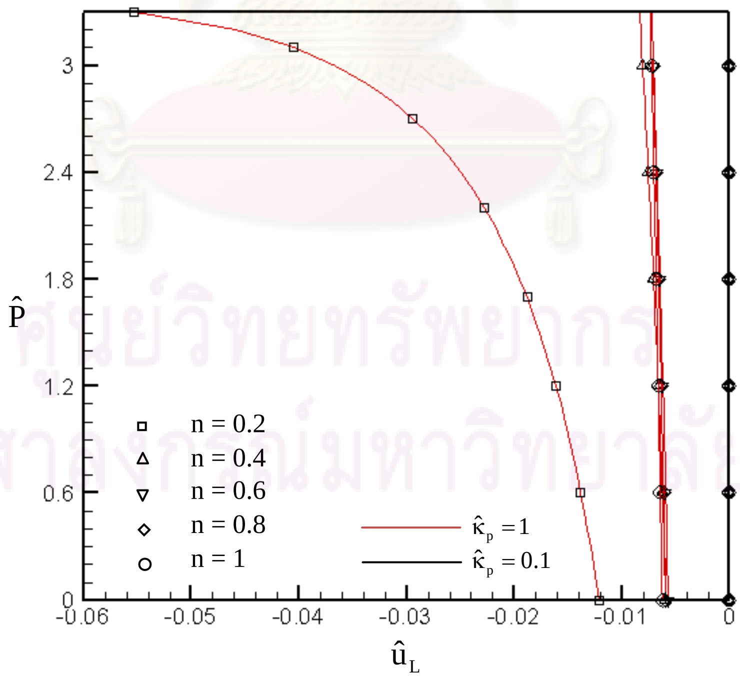


รูปที่ 6.46 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่มีโมเมนต์กระทำคงที่ที่ปลายทั้งสองของคาน และรับแรงอัดที่ปลายด้านขวา

เมื่อพิจารณาการหมุนที่ปลายและที่จุดดัดกลับจากรูปที่ 6.47 พบว่ากราฟที่ได้ส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวดิ่ง ซึ่งบ่งชี้ว่าแรงกระทำในแนวราบนั้นส่งผลต่อการหมุนที่ปลายและที่จุดดัดกลับน้อยมาก สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงสามารถเห็นผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุได้ชัดเจนมากขึ้น โดยส่งผลให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\hat{P}$ และการหมุนที่เกิดขึ้นมีลักษณะไร้เชิงเส้นมากขึ้นเมื่อ n มีค่าน้อยๆ และการเพิ่มขึ้นของแรงอัดในแนวราบส่งผลให้มุมหมุนที่ปลายทั้งสองและที่จุดดัดกลับมีค่ามากขึ้น

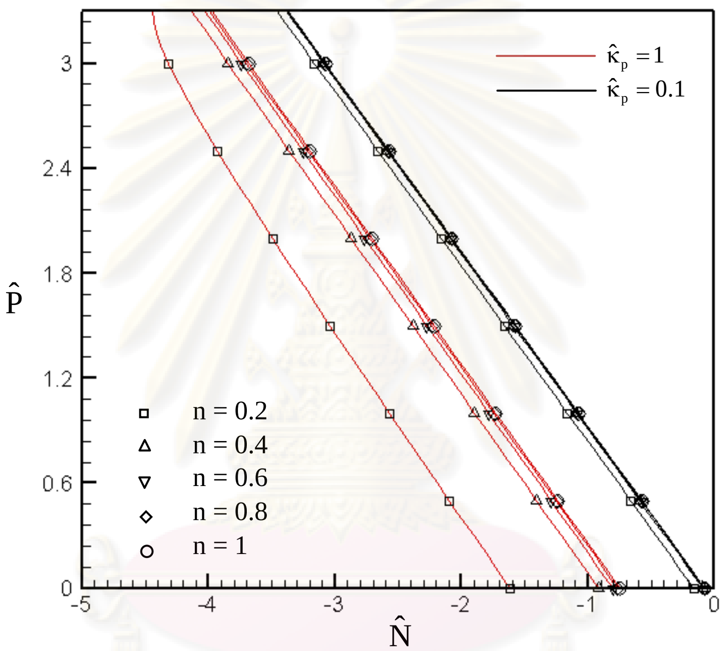


รูปที่ 6.47 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดกระทำในแนวราบและการหมุนที่ปลายทั้งสองของคานและที่จุดดัดกลับ



รูปที่ 6.48 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดกระทำในแนวราบและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวา

เมื่อพิจารณาการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคานดังรูปที่ 6.48 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำเกิดการขจัดในแนวราบที่น้อยมากและช่วงของแรงอัดที่พิจารณาไม่ส่งผลต่อการขจัดในแนวราบที่ทุกค่า n ที่พิจารณา ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงนั้นหากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุยังมีค่าไม่มากพอ (n มีค่าใกล้เคียง 1) แรงอัดตามแนวแกนส่งผลต่อการขจัดในแนวราบน้อยมาก แต่หากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากเพียงพอดังเช่นในกรณีที่ $n = 0.2$ แรงกระทำในแนวราบทำให้การขจัดในแนวราบมีค่าสูง

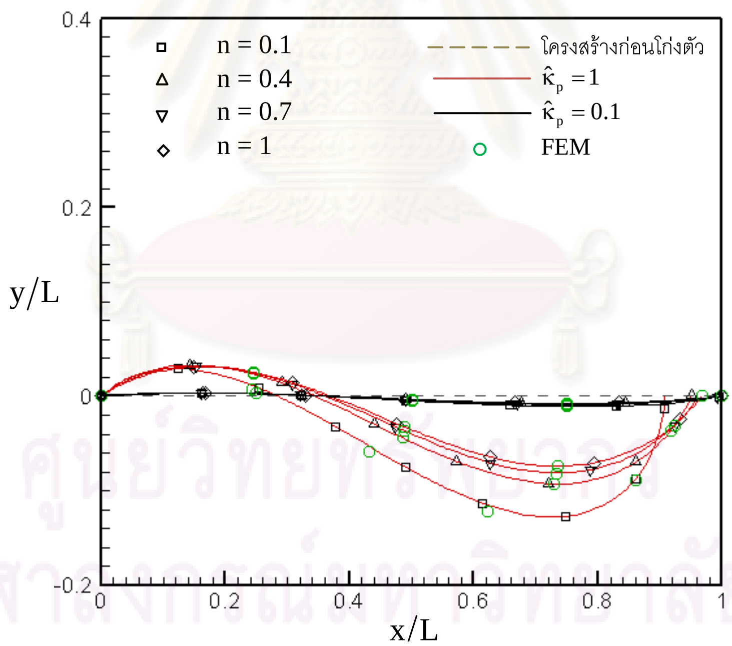


รูปที่ 6.49 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงอัดกระทำในแนวราบและแรงตามแนวแกนที่ปลายด้านขวา

ผลของแรงอัดกระทำในแนวราบที่มีต่อแรงตามแนวแกนที่ปลายด้านขวาของคานแสดงดังรูปที่ 6.49 ซึ่งพบว่าเมื่อแรงอัดมีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้แรงตามแนวแกนที่ปลายด้านขวามีค่ามากขึ้นและกราฟความสัมพันธ์มีลักษณะเป็นเส้นตรงยกเว้นกรณี $\hat{\kappa}_p = 1$ และ $n = 0.2$ โดยความชันของกราฟที่ได้เกือบทั้งหมดมีค่าใกล้เคียงกันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของการหมุนมีค่าน้อยมาก ทำให้การเพิ่มขึ้นของแรงตามแนวแกนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงกระทำในแนวราบ แต่ในกรณีที่คานเกิดการหมุนที่ปลายมากเช่นกรณี $n = 0.2$ และ $\hat{\kappa}_p = 1$ พบว่าในช่วงเริ่มต้นที่ $\hat{P}$ มีค่าน้อยความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{P}$ และ $\hat{N}$ มีลักษณะเป็นเส้นตรง แต่เมื่อ $\hat{P}$ มีค่ามากขึ้นส่งผลให้เกิดการหมุนมากขึ้นซึ่งทำให้การเพิ่มขึ้นของแรงตามแนวแกนที่ปลายคานมีค่าลดลง

6.2.2.2 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำมาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2

สำหรับปัญหาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำมาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 เริ่มต้นด้วยการพิจารณาแรงกระทำและโมเมนต์กระทำที่ปลายดังนี้ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$ สำหรับแรงกระทำดังกล่าวนี้ทำให้เกิดจุดดัดกลับภายในคาน โดยเส้นโค้งการโก่งตัว แผนภาพโมเมนต์ดัด แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพแรงตามแนวแกน แสดงในรูปที่ 6.50-6.53 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาเส้นโค้งการโก่งตัวของคานพบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำเกิดการโก่งตัวเพียงเล็กน้อยเท่านั้นและความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุนั้นมีผลน้อยมาก แต่คานที่มีความชะลูดสูงเกิดการโก่งตัวมากขึ้นและผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุปรากฏชัดเจนขึ้น โดยพบว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้เกิดการโก่งตัวมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ปลายด้านที่โมเมนต์กระทำมีค่ามาก

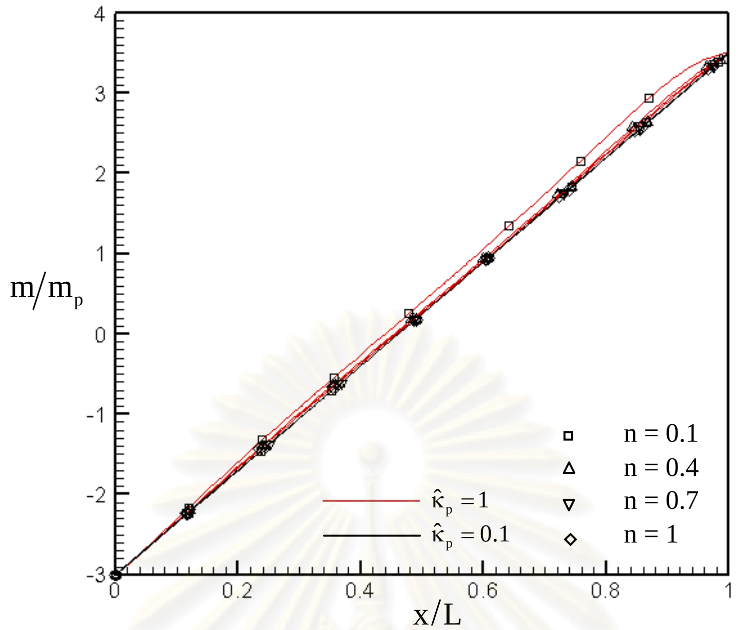


รูปที่ 6.50 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดย $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

ตารางที่ 6.6 แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับด้านซ้ายของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย ที่ทำมาจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 และรับแรงกระทำ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

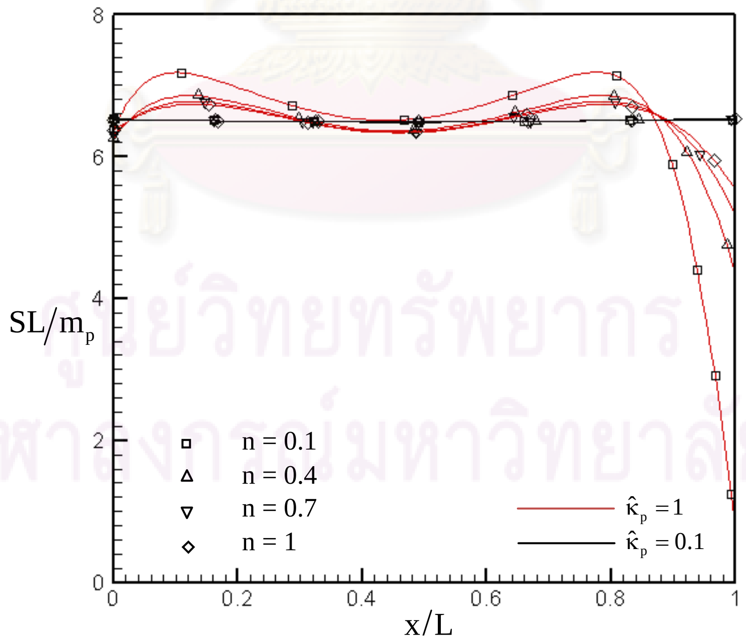
ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ (n)	แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้าย $\left(\hat{f}_{y1}\right)$	
	$\hat{\kappa}_p = 1$	$\hat{\kappa}_p = 0.1$
0.1	7.1642672234	6.5044773614
0.4	6.8381022845	6.5030537758
0.7	6.7558441110	6.5024269939
1.0	6.7142377178	6.5020713555

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับที่ปลายด้านซ้ายของคานที่ได้จากการวิเคราะห์แสดงในตารางที่ 6.6 เนื่องจากคานที่มีความชะลูดต่ำมีความแตกต่างของการโก่งตัวของคานที่ค่า n ต่างๆกันน้อยดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจึงมีความแตกต่างกันน้อยเช่นกัน และแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นดังกล่าวมีค่าใกล้เคียงมากกับแรงปฏิกิริยาที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น (แรงปฏิกิริยาที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นมีค่าเท่ากับ 6.5) แต่ในคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าแรงปฏิกิริยาที่ได้มีค่ามากกว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นและมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากขึ้น สำหรับแผนภาพโมเมนต์ดัดในรูปที่ 6.51 พบว่าการกระจายตัวของโมเมนต์ดัดสำหรับคานที่มีความชะลูดสูงและคานที่มีความชะลูดต่ำที่ค่า n ต่างๆกันมีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยโมเมนต์ดัดมีลักษณะการกระจายตัวแบบเชิงเส้นตลอดความยาวคาน และผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อค่าโมเมนต์ดัดในกรณีคานที่มีความชะลูดสูงและ n มีค่าน้อยๆเท่านั้น



รูปที่ 6.51 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2

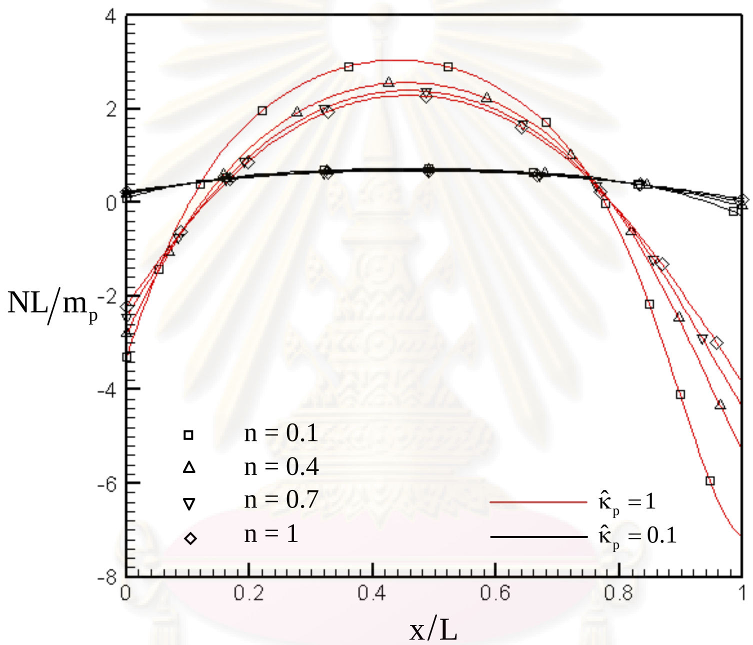
โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$



รูปที่ 6.52 แผนภาพแรงเฉือนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2

โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

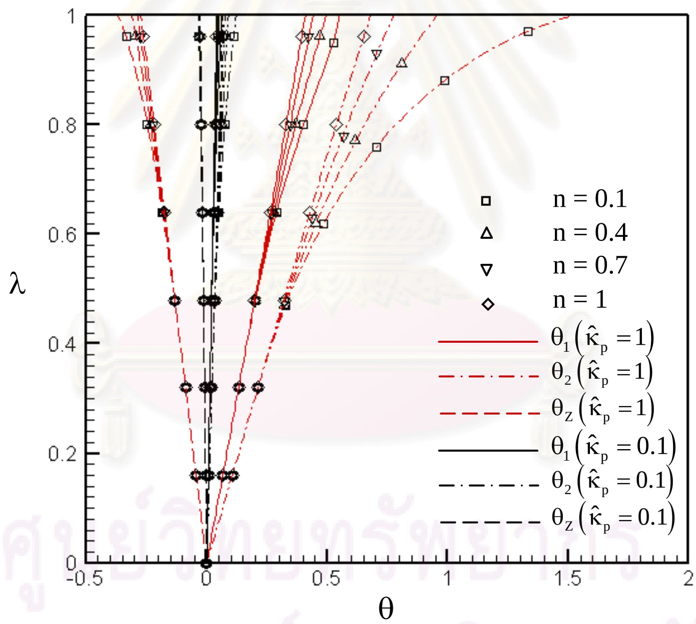
จากการกระจายของแรงเฉือนตลอดช่วงคานดังแสดงในรูปที่ 6.52 แสดงให้เห็นว่าแรงเฉือนภายในคานที่มีความชะลูดต่ำมีค่าคงที่ตลอดความยาวคานและความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของแรงเฉือนน้อยมาก แต่ในกรณีคานที่มีความชะลูดสูงนั้นการกระจายของแรงเฉือนตลอดช่วงคานมีความแปรปรวนสูงกว่ามาก โดยที่แรงเฉือนมีค่าลดลงบริเวณกึ่งกลางคานและที่บริเวณส่วนปลายคานด้านที่รับโมเมนต์กระทำมาก ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อลักษณะการกระจายของแรงเฉือนตลอดคานอย่างชัดเจนโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ n มีค่าน้อยๆ



รูปที่ 6.53 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 3, \hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5$

จากแผนภาพแรงตามแนวแกนในรูปที่ 6.53 พบว่าในคานที่มีความชะลูดต่ำนั้นแรงตามแนวแกนมีค่าใกล้ศูนย์ที่ปลายทั้งสอง และที่บริเวณกึ่งกลางคานแรงตามแนวแกนมีค่าใกล้เคียงกับแรงดึงที่กระทำ เช่นเดียวกับกรณีของแรงเฉือนความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อค่าแรงตามแนวแกนน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงแรงตามแนวแกนมีความแปรปรวนสูงตลอดช่วงคาน โดยที่แรงตามแนวแกนมีค่าสูงสุดบริเวณกลางคานและที่บริเวณปลายทั้งสองมีการเปลี่ยนทิศทางของแรงตามแนวแกน และผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อการกระจายของแรงตามแนวแกนปรากฏชัดเจนมากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง

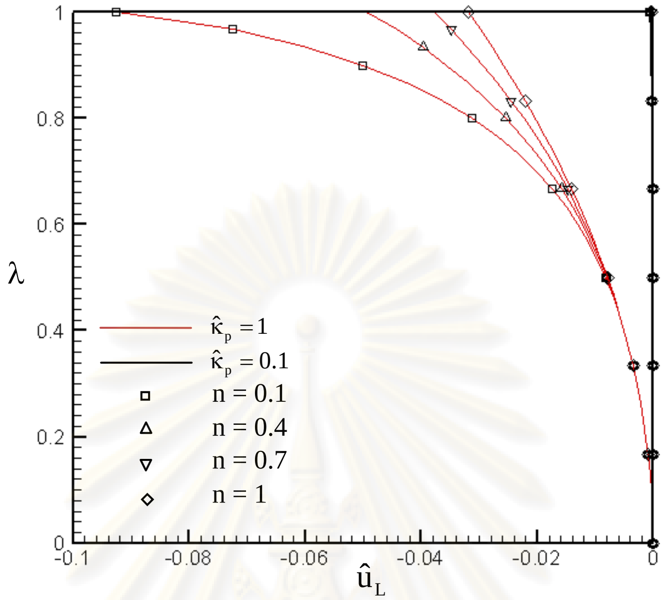
นอกจากนี้ยังพิจารณาผลของขนาดของแรงกระทำที่มีต่อค่ามุมหมุนและการขจัดในแนวราบที่ปลายคาน โดยพิจารณาแรงกระทำและโมเมนต์กระทำเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนโดยตรงจากศูนย์ดังนี้คือ $\hat{m}_1 = 3\lambda,\ \hat{m}_2 = 3.5\lambda$ และ $\hat{f}_x^* = 0.5\lambda$ โดยที่ $\lambda \in [0,1]$ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายที่ปลายทั้งสองและมุมหมุนที่จุดดัดกลับและการขจัดในแนวราบและตัวประกอบของแรง λ แสดงในรูปที่ 6.54 และ 6.55 ตามลำดับ จากรูปที่ 6.54 พบว่ามุมหมุนที่ทั้งสามตำแหน่งของคานที่มีความชะลูดต่ำมีค่าเพิ่มขึ้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับคานที่มีความชะลูดสูงและความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อมุมหมุนน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่ามุมหมุนที่ตำแหน่งทั้งสามมีค่ามากขึ้นเมื่อ λ มีค่ามากขึ้น และที่ค่า λ เดียวกันมุมหมุนมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าน้อยลง โดยผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเริ่มปรากฏชัดเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าเกินกว่า 0.5 โดยประมาณ



รูปที่ 6.54 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการหมุนที่ปลายทั้งสองของคานและที่จุดดัดกลับ

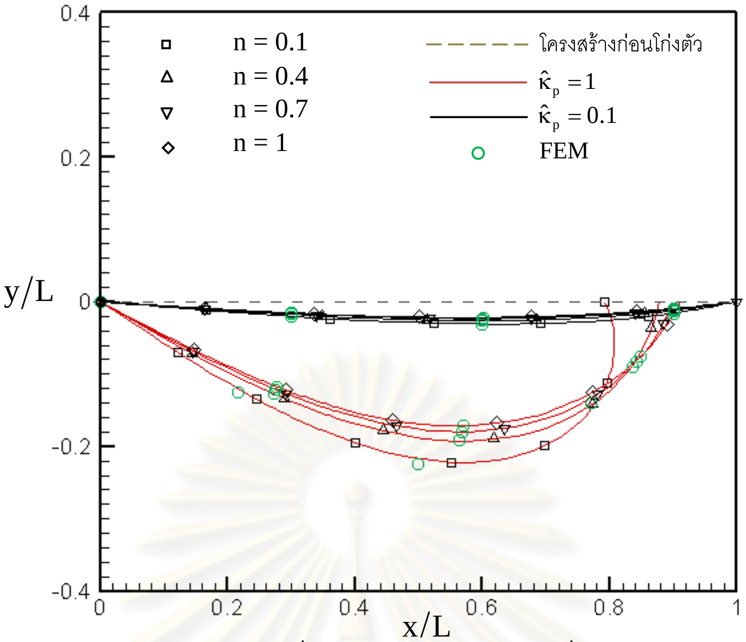
จากรูปที่ 6.55 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำมีการขจัดในแนวราบน้อยมากจนกราฟที่ได้มีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวดิ่ง และไม่สามารถสังเกตเห็นผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุได้ แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดในแนวราบและตัวประกอบของแรงเป็นแบบ

ไร้เชิงเส้น โดยที่การขจัดในแนวราบมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลงสำหรับช่วงที่ตัวประกอบของแรงมีค่ามาก



รูปที่ 6.55 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคาน

สุดท้ายพิจารณาคานรับแรงกระทำและโมเมนต์กระทำดังนี้ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$ ในกรณีนี้คานเกิดจุดดัดกลับที่ปลายด้านซ้าย เส้นโค้งการโก่งตัว แผนภาพโมเมนต์ดัด แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพแรงตามแนวแกนแสดงในรูปที่ 6.56-6.59 ตามลำดับ และแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้ายแสดงในตารางที่ 6.7 จากเส้นโค้งการโก่งตัวของคานในรูปที่ 6.56 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำเกิดการโก่งตัวน้อยมาก เช่นเดียวกับระยะการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคาน และความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการโก่งตัวและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงเส้นโค้งการโก่งตัวบริเวณปลายที่มีโมเมนต์กระทำมีความโค้งของคานมากกว่าคานที่มีความชะลูดต่ำ และการขจัดในแนวราบที่ทางปลายด้านขวาของคานมีค่ามากกว่าคานที่มีความชะลูดต่ำมาก เมื่อพิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุพบว่าการโก่งตัวและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวามีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง ซึ่งผลของความไร้เชิงเส้นเห็นได้ชัดเจนในกรณีของคานที่มีความชะลูดสูง



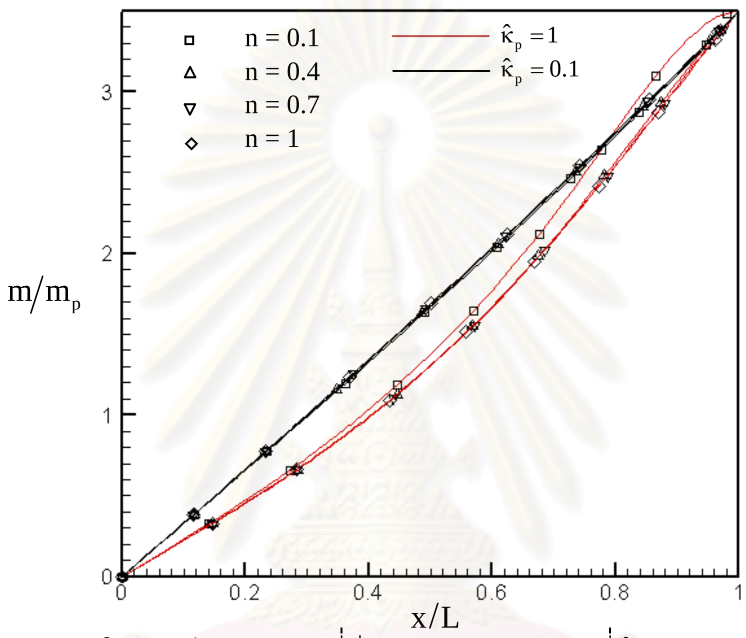
รูปที่ 6.56 เส้นโค้งการโก่งตัวของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$

สำหรับผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุที่มีต่อแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้ายของคานที่แสดงในตารางที่ 6.7 แสดงให้เห็นว่าคานที่มีความชะลูดต่ำแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น $(\hat{f}_{y1} = 3.5)$ ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุทำให้ค่าแรงปฏิกิริยามีค่าเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีค่าสูงกว่าแรงปฏิกิริยาที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นและมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง

ตารางที่ 6.7 แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับด้านซ้ายของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$

ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ (n)	แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับด้านซ้าย $(\hat{f}_{y1})$	
	$\hat{\kappa}_p = 1$	$\hat{\kappa}_p = 0.1$
0.1	4.4248049176	3.5098280518
0.4	3.9918776481	3.5067011305
0.7	3.8910352861	3.5053052354
1.0	3.8386096918	3.5045107504

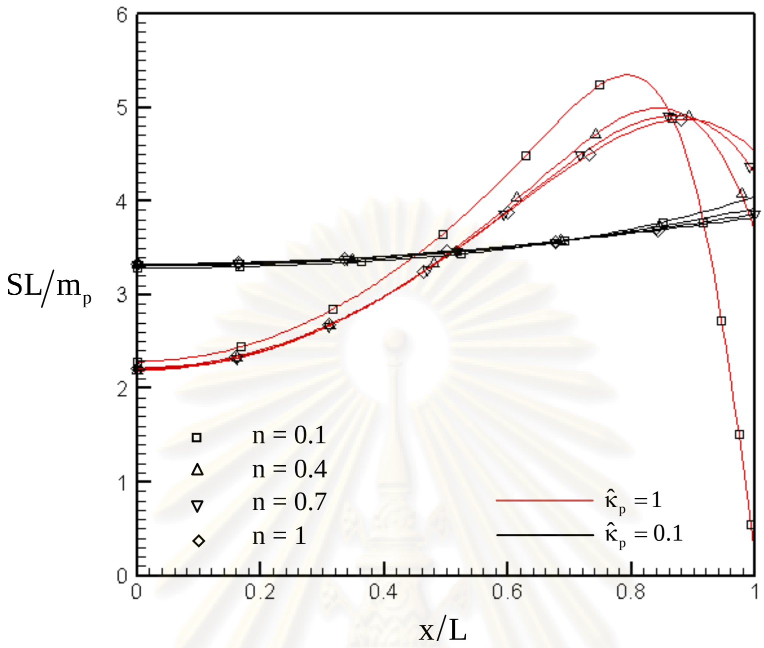
เมื่อพิจารณาแผนภาพโมเมนต์ดัดที่แสดงในรูปที่ 6.57 พบว่าคานที่มีความชะลูดต่ำมีการกระจายของโมเมนต์ดัดเป็นแบบเชิงเส้นเช่นเดียวกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบเชิงเส้น โดยความแตกต่างของแผนภาพโมเมนต์ดัดสำหรับค่า n ต่างๆกันไม่มีนัยสำคัญ คานที่มีความชะลูดสูงนั้นการกระจายของโมเมนต์ดัดตลอดคานมีลักษณะเป็นเส้นโค้งมากขึ้น โดยความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้ค่าโมเมนต์ดัดมีค่ามากขึ้นตลอดความยาวของคาน



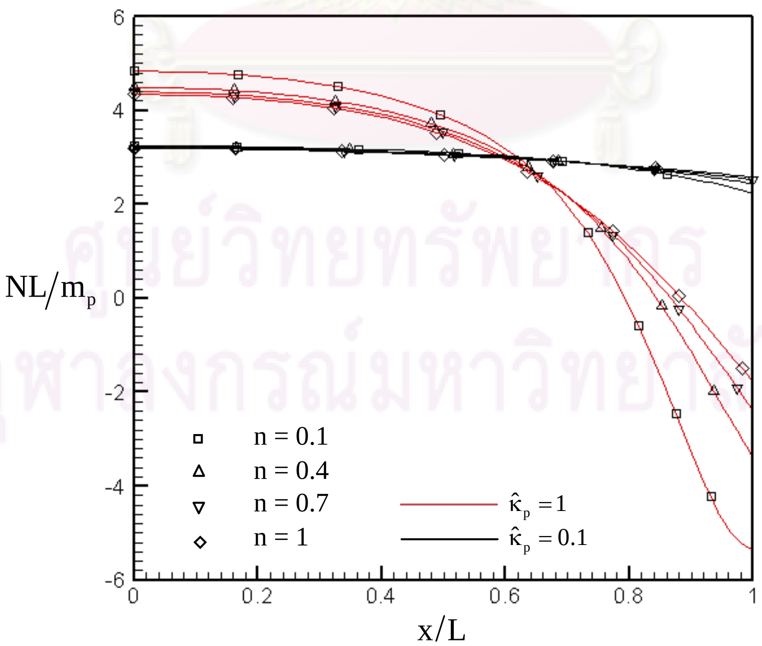
รูปที่ 6.57 แผนภาพโมเมนต์ดัดของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$

สำหรับแรงเฉือนภายนคานดังแสดงในรูปที่ 6.58 พบว่าแรงเฉือนในความชะลูดต่ำมีค่าเพิ่มขึ้นจากปลายด้านซ้ายและมีค่าสูงสุดที่ปลายด้านขวา ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อการกระจายของแรงเฉือนมาก แต่สำหรับคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าแรงเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นจากปลายด้านซ้ายและค่าสู่งสุดบริเวณใกล้ปลายด้านขวา หลังจากนั้นแรงเฉือนมีค่าลดลงเรื่อยๆจนถึงปลายด้านขวา ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อค่าสูงสุดของแรงเฉือนและตำแหน่งที่เกิดค่าสูงสุด นอกจากนี้ยังมีผลต่อการลดลงของแรงเฉือนที่ปลายด้านขวาด้วย ส่วนการกระจายของแรงตามแนวแกนดังแสดงในรูปที่ 6.55 พบว่าแรงตามแนวแกนมีค่าค่อนข้างคงที่ในคานที่มีความชะลูดต่ำ โดยแรงตามแนวแกนมีค่าลดลงเพียงเล็กน้อยที่บริเวณปลายด้านขวาของคาน นอกจากนี้ผลที่ได้ยังชี้ให้เห็นว่าความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุแทบจะไม่มีผลต่อการกระจายของแรงตามแนวแกนเมื่อคานมีความชะลูดต่ำ ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงแรงเฉือนมีค่าลดลงอย่างชัดเจนจากปลายด้านซ้ายถึงปลาย

ด้านขวาของคาน และแรงตามแนวแกนเปลี่ยนจากแรงดึงเป็นแรงอัดที่บริเวณปลายด้านขวาของคาน

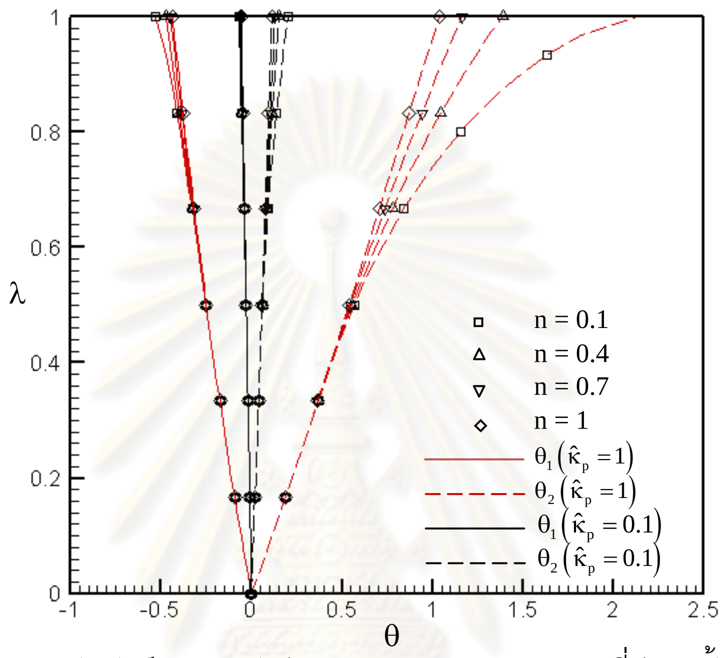


รูปที่ 6.58 แผนภาพแรงเฉือนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$

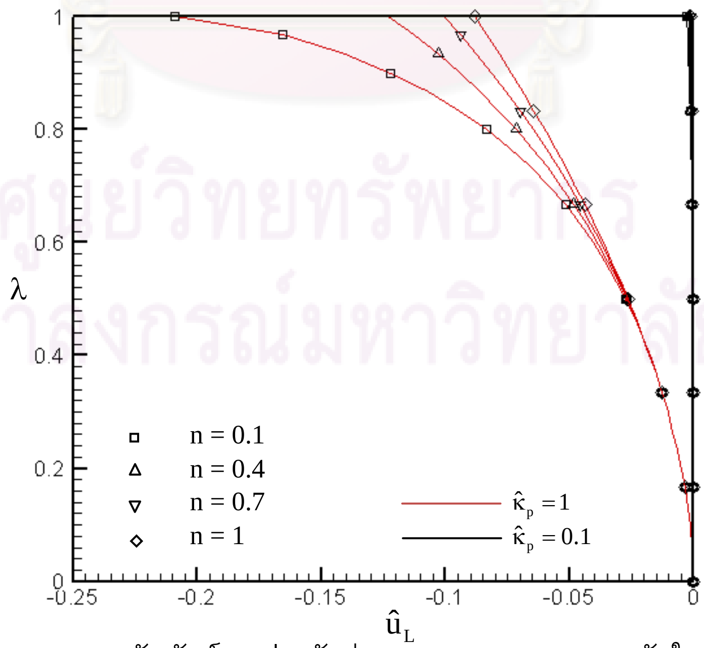


รูปที่ 6.59 แผนภาพแรงตามแนวแกนของคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่ทำจากวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 โดยที่ $\hat{m}_1 = 0$, $\hat{m}_2 = 3.5$ และ $\hat{f}_x^* = 3$

นอกจากนี้ยังพิจารณาผลของขนาดของแรงกระทำที่มีต่อค่ามุมหมุนและการขจัดในแนวราบที่ปลายคาน โดยพิจารณาแรงกระทำและโมเมนต์กระทำเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนโดยตรงจากศูนย์ดังนี้คือ $\hat{m}_2 = 3.5\lambda$ และ $\hat{f}_x^* = 3\lambda$ โดยที่ $\lambda \in [0,1]$ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายที่ปลายทั้งสองและการขจัดในแนวราบและตัวประกอบของแรง λ แสดงในรูปที่ 6.60 และ 6.61 ตามลำดับ



รูปที่ 6.60 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการหมุนที่ปลายทั้งสองของคาน



รูปที่ 6.61 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบของแรงและการขจัดในแนวราบ

ที่ปลายด้านขวาของคาน

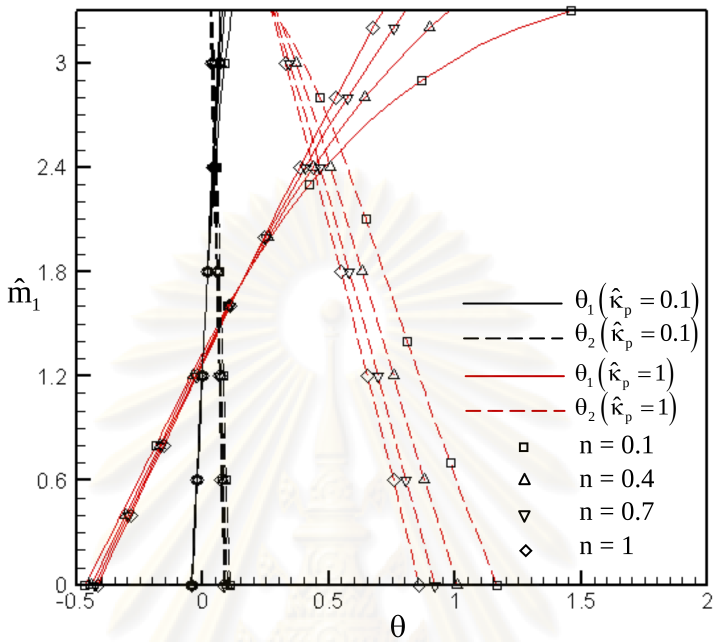
จากรูปที่ 6.60 พบว่ามุมหมุนที่ทั้งสองปลายของคานที่มีความชะลูดต่ำมีค่าเพิ่มขึ้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับคานที่มีความชะลูดสูงและความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อมุมหมุนน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่ามุมหมุนที่ปลายทั้งสองมีค่ามากขึ้นเมื่อ λ มีค่ามากขึ้น และที่ค่า λ เดียวกันมุมหมุนมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าน้อยลง โดยผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเริ่มปรากฏชัดเมื่อค่าตัวประกอบของแรงมีค่าเกินกว่า 0.5 โดยประมาณ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปลายคานด้านที่มีโมเมนต์กระทำ

สำหรับปัญหาสุดท้ายที่พิจารณาคือคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์บรรทัดฐานกระทำคงที่ที่ปลายด้านด้านขวาเท่ากับ 2.5 และรับโมเมนต์กระทำค่าใดๆที่ปลายด้านซ้ายดังแสดงในรูปที่ 6.62

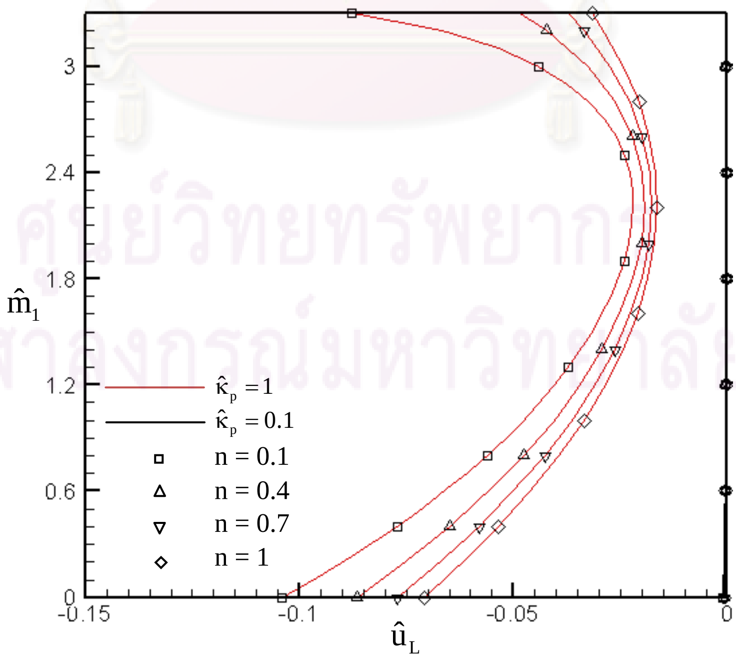
รูปที่ 6.62 คานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายรับโมเมนต์กระทำคงที่ที่ปลายด้านขวา และรับโมเมนต์กระทำใดๆที่ที่ปลายด้านซ้าย

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมหมุนที่ปลายทั้งสองของคานและโมเมนต์กระทำบรรทัดฐานที่ปลายด้านซ้ายแสดงในรูปที่ 6.63 ผลที่ได้พบว่ามุมที่ปลายด้านซ้ายมีค่าเพิ่มขึ้นจากค่าลบและกลายเป็นค่าบวกเมื่อ $\hat{m}_1$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น ส่วนมุมที่ปลายด้านขวาจะมีค่าลดลงเมื่อ $\hat{m}_1$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น และมุมที่ปลายทั้งสองนี้มีค่าเท่ากันเมื่อค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานที่ปลายด้านซ้ายมีค่าเท่ากับ 2.5 ซึ่งเท่ากับค่าโมเมนต์ดัดบรรทัดฐานที่กระทำที่ปลายด้านขวา สำหรับคานที่มีความชะลูดต่ำพบว่ากราฟของมุมหมุนที่ปลายด้านซ้ายและปลายด้านขวามีลักษณะเป็นเส้นตรง และความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีผลต่อมุมหมุนที่ปลายทั้งสองน้อยมาก ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงนั้นพบว่ากราฟส่วนใหญ่จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงจนกระทั่งค่าโมเมนต์กระทำบรรทัดฐานที่ปลายซ้ายมีค่าประมาณ 2 มุมหมุนที่ปลายด้านซ้ายมีค่าเพิ่มมากขึ้นและมีความสัมพันธ์กับโมเมนต์กระทำแบบไร้เชิงเส้นมากขึ้น และมุมหมุนที่ปลายด้านขวามีค่าลดลงและความสัมพันธ์กับโมเมนต์กระทำ

เป็นแบบไร้เชิงเส้นมากขึ้นเมื่อ $\hat{m}_1$ มีค่าสูงขึ้น สำหรับการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคาน เมื่อโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายมีค่าเพิ่มขึ้นแสดงในรูปที่ 6.64



รูปที่ 6.63 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายและการหมุนที่ปลายทั้งสองของคาน



รูปที่ 6.64 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กระทำที่ปลายด้านซ้ายและการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวา

และจากรูปที่ 6.64 ผลจากการวิเคราะห์พบว่าการขจัดในแนวราบของคานที่มีความชะลูดต่ำมีค่าน้อยมากทำให้ผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุไม่มีนัยสำคัญ ส่วนคานที่มีความชะลูดสูงพบว่าการขจัดในแนวราบที่ปลายด้านขวามีค่าลดลงเมื่อค่าโมเมนต์บรรทัดฐานกระทำที่ปลายด้านซ้ายมีค่าน้อยกว่า 2.4 โดยประมาณและมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อโมเมนต์บรรทัดฐานกระทำมีค่าเกิน 2.4 นอกจากนี้ความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้การขจัดในแนวราบมีค่ามากขึ้นเมื่อ n มีค่าลดลง

บทที่ 7

สรุปผลการวิจัยและข้อจำกัดของงานวิจัย

7.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอระเบียบวิธีกึ่งเชิงวิเคราะห์เพื่อใช้วิเคราะห์แบบความโค้งมากโดยพิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ สมการกำกับพัฒนาขึ้นโดยพิจารณาสมการสมดุลของโครงสร้างหลังการเปลี่ยนรูปความสัมพันธ์จนลศาสตร์แบบแม่นตรงและความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งแบบไร้เชิงเส้น การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการกำกับที่พัฒนาขึ้นใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันในการแก้ระบบสมการไร้เชิงเส้น ใช้วิธีเกาส์ควอดราเจอร์ในการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข และใช้เทคนิคการแปลงตัวแปรในการแก้ปัญหาปริพันธ์เชิงเอกฐาน เนื่องจากในขั้นตอนการพัฒนาสมการกำกับไม่มีการประมาณรูปแบบผลเฉลย ดังนั้นผลเฉลยที่ได้จึงมีความถูกต้องแม่นยำสูงเทียบเท่าผลเฉลยแม่นตรง ปัญหาที่พิจารณาในงานวิจัยนี้ประกอบด้วยคานยื่นที่รับแรงกระทำในแนวดิ่ง แรงกระทำในแนวราบและโมเมนต์กระทำที่ปลายอิสระ และคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายที่รับโมเมนต์กระทำที่ปลายทั้งสองและรับแรงกระทำในแนวราบที่ปลายด้านขวาของคาน ความสัมพันธ์แบบไร้เชิงเส้นของโมเมนต์ดัดและความโค้งของหน้าตัดที่พิจารณาในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย 2 แบบจำลอง แบบจำลองแรกมีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งที่อธิบายได้ด้วยสมการเดียวและเป็นความสัมพันธ์แบบกำลัง ส่วนแบบจำลองที่สองมีความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งซึ่งประกอบด้วยสองส่วน คือ ส่วนที่มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นและส่วนที่มีความสัมพันธ์แบบไร้เชิงเส้น

เนื่องจากสมการกำกับส่วนใหญ่ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นสมการไร้เชิงเส้นและอยู่ในรูปของปริพันธ์เชิงวงรีหรือในรูปปริพันธ์ที่ใกล้เคียงกันซึ่งไม่สามารถหาค่าปริพันธ์โดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขดังที่ได้กล่าวมาแล้วในขั้นตอนการแก้ปัญหา ความแตกต่างในการแก้ปัญหาความโค้งมากของวัสดุทั้งสองแบบจำลองนั้นวัสดุตามแบบจำลองที่ 1 ส่งผลให้สมการกำกับเกิดความเป็นเอกฐานขึ้นจึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคในการแก้ปัญหาปริพันธ์เชิงเอกฐานเพิ่มเติม แต่ในวัสดุแบบจำลองที่ 2 ซึ่งมีพฤติกรรมสองส่วนประกอบกันมีความจำเป็นต้องแบ่งย่อย

แรงกระทำ เพื่อพิจารณาว่าในแต่ละขั้นตอนย่อยเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุที่บริเวณใดบนคานจากนั้นจึงเลือกใช้สมการกำกับให้ตรงกับกรณีที่เกิดขึ้น ซึ่งจากบทที่ 3 และบทที่ 4 จะเห็นว่าสมการกำกับสำหรับวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 มีจำนวนกรณีมากกว่าสมการกำกับสำหรับวัสดุแบบจำลองที่ 1 มาก

จากผลการวิจัยที่ได้ในบทที่ 6 สามารถสรุปผลได้พอสังเขป คือ ในคานยื่นผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุทั้งสองแบบจำลองส่งผลให้โครงสร้างเกิดการโก่งตัวและการหมุนมากขึ้นและความแตกต่างจากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุด้านการโก่งตัวและแรงภายในปรากฏชัดในคานยื่นมีความชะลูดต่ำ แต่สำหรับความแตกต่างด้านมุมหมุนปรากฏชัดในคานที่มีความชะลูดสูง และความแตกต่างจากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุปรากฏชัดในคานยื่นที่มีความชะลูดต่ำ เนื่องจากโครงสร้างมีการโก่งตัวน้อยกว่าจึงทำให้ระยะแขนของโมเมนต์มีค่ามากกว่าเช่นเดียวกับค่าโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น เมื่อค่าโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นมีค่ามากส่งผลให้เห็นความแตกต่างจากความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุได้ชัดเจน โดยหากวัสดุมีความไร้เชิงเส้นสูงและความชะลูดสูงพบว่าแรงภายในที่เกิดขึ้นมีความแปรปรวนเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมที่ปลายอิสระของคานและตัวประกอบของแรงพบว่าพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจากวัสดุทั้งสองชนิดมีความแตกต่างกันมากในช่วงต้น กล่าวคือในวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 1 เมื่อตัวประกอบของแรงยังคงมีค่าน้อยการหมุนหรือการขจัดที่เกิดขึ้นจะมีค่าน้อยมากจนกราฟที่ได้มีความชันเป็นอนันต์ แต่ในวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 การขจัดและการหมุนที่เกิดขึ้นยังคงมีค่าเท่ากับคานที่ทำจากวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นจนกระทั่งเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมของวัสดุ สำหรับคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายนั้นความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลให้คานมีการหมุนและการขจัดมากขึ้น นอกจากนี้แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับมีค่าเพิ่มขึ้นตามความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุเช่นกัน สำหรับการกระจายของแรงภายในมีความแปรปรวนมากขึ้นเมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้น และความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดและการหมุนที่เกิดขึ้นต่อตัวประกอบของแรงพบว่ามีลักษณะเช่นเดียวกับในคานยื่น

จากที่กล่าวมาพบว่าอิทธิพลของตัวแปรทั้งสองมีความแตกต่างกัน คือ ตัวแปรกำหนดความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุส่งผลในด้านความอ่อนตัวของโครงสร้าง เมื่อความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุมีค่ามากคานมีความอ่อนตัวมากขึ้นและส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างมากขึ้น สำหรับตัวแปรกำหนดความชะลูดของคานซึ่งแปรผกผันกับความลึกของคานที่พิจารณา โดยหากคานที่พิจารณานั้นมีความลึกมากคานจะมีความชะลูดต่ำ การโก่งตัวของคานที่มีความชะลูดต่ำจะมีค่าน้อยกว่าในคานที่มีความชะลูดสูงและความชะลูดนั้นส่งผลต่อแรงภายใน โดยคานที่มีความชะลูดสูงการกระจายของแรงภายในที่เกิดขึ้นมีความแปรปรวนมากกว่า

7.2 ข้อจำกัดของงานวิจัย

เนื่องจากผลเฉลยเชิงตัวเลขกรณีที่คานทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมตามแบบจำลองที่ 2 ในงานวิจัยนี้แสดงผลเพียงกรณีที่ค่าตัวแปรของแบบจำลองเป็นดังกรณีที่ 3 เท่านั้น ซึ่งวัสดุตามแบบจำลองที่ 2 นี้ยังสามารถแสดงพฤติกรรมของคานที่พิจารณาใช้วัสดุในอีก 3 กรณีที่ได้กล่าวในบทที่ 2 ได้เช่นกัน

และจากสมมติฐานที่ว่าคานไม่ยืดหดตัวตามแนวแกน จึงไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่คานเกิดการโก่งตัวและการยืดหดตามแนวแกนประกอบกันได้ ซึ่งอาจเกิดในกรณีที่พื้นที่หน้าตัดของคานมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับแรงกระทำตามแนวแกน ส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้มีความคลาดเคลื่อนหรืออาจให้ผลเฉลยที่ผิดพลาดได้หากการยืดหดตัวตามแนวแกนมีค่าสูงมาก

สุดท้ายคืองานวิจัยนี้ยังคงพิจารณาเฉพาะโครงสร้างที่เป็นคานยื่นและคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายซึ่งเป็นโครงสร้างที่มีชิ้นส่วนย่อยเพียงชิ้นเดียว จึงไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาความโค้งมากสำหรับโครงสร้างที่มีหลายชิ้นส่วนย่อยได้ หากนำสมการกำกับนี้ประยุกต์สร้างเมตริกซ์สติฟเนสและใช้วิธีการรวมสติฟเนสแบบตรงจะสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่โครงสร้างประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยหลายชิ้นได้

รายการอ้างอิง

ภาษาอังกฤษ

Banerjee, A., Bhattacharaya, B. and Mallik, A.K. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity : Analytical and numerical approaches. International Journal of Non-Linear Mechanics Vol. 43 (2008) : 366-376.

Chapra, S.C. and Canale, R.P. Numerical Methods for Engineers. 5th Edition. New York : McGraw-Hill, 2006.

Dado, M. and Al-Sadder, S. A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams. Mechanics Research Communications Vol. 32 (2005) : 692-703.

Den Hartog, J.P. Advanced Strength of Materials. New York : McGraw-Hill, 1952.

Gallagher, R.H., Ziemian, R.D., and McGuire, W. Matrix Structural Analysis. New Jersey : Courier Dover, 2000.

Klubjaidai, W. and Chucheepsakul, S. Postbuckling of a circular arch elastic subjected to end forces. The 13th National Convention on Civil Engineering, STR 164-169. Pattaya beach, Thailand, 2008.

Kounadis, A.N. and Mallis, J.G. Elastica type buckling analysis of bars from non-linearly elastic material. International Journal of Non-Linear Mechanics Vol. 22 (1984) : 99-107.

Lee, K. Large deflection of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading. International Journal of Non-Linear Mechanics Vol. 37 (2002) : 439-443.

Lewis, G. and Monasa, F. Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials. Computers & Structures Vol. 14, No. 5-6 (1980) : 357-360.

Lewis, G. and Monasa, F. Large deflections of point loaded cantilevers with nonlinear behavior. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) Vol. 34 (1983) : 124-130.

Nageswara Rao, B. and Venkateswara Rao, G. Large deflections of a cantilever beam subjected to a rotational distributed loading. Forschung im ingenieurwesen 1989

Prathap, G. and Varadan, T.K. Inelastic post-buckling of columns. Journal of Applied Mechanics, Brief Notes, 1984.

Shavartman, B.S. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. Journal of sound and vibration Vol. 304 (2007) : 969-973.

Timoshenko, S.P. History of Strength of Materials. New York : McGraw-Hill, 1953.

Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. Theory of Elastic Stability. 2nd Edition. New York : McGraw-Hill, 1972.

Tungnovarad, P. and Rungamornrat, J. Large curvature analysis of linear elastic, inextensible, structures by a direct stiffness method. The 13th National Convention on Civil Engineering, STR 61-66. Pattaya beach, Thailand, 2008.

Vaz, M.A. and Patel, M.H. Post-buckling behavior of slender structures with a bi-linear bending moment-curvature relationship. International Journal of Non-Linear Mechanic Vol. 42 (2006) : 470-483.

Wang, J., Chen, J.K. and Liao, S. An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip. Journal of Computational and Applied Mathematics Vol. 212 (2006) : 320-330.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายประจักษ์ ด่านมงคลทิพย์ เกิดเมื่อวันที่ 27 กันยายน พ.ศ. 2527 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนสตรีสมุทรปราการ จังหวัดสมุทรปราการ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2549 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโครงสร้าง ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2550 โดยทำการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับพฤติกรรมของโครงสร้างด้วยการใช้กลศาสตร์วัสดุประกอบกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหา ซึ่งในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อพิจารณาผลของความไร้เชิงเส้นเชิงวัสดุ