บทที่ 3

ทฤษฎีการปรับแก้

3.1 กล่าวนำ

การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ในส่วนที่สัมพันธ์กับงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์ เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าพิกัดที่น่าเชื่อถือของหมุดหลักฐานต่าง ๆ ในสนามทดสอบ โดยอาศัยข้อมูลหรือค่าสังเกตที่ได้จากการรังวัดในสนามดทสอบ ซึ่งการคำนวณปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ดังกล่าวมีทฤษฎีที่สำคัญที่พอสรุปได้จาก วิชา (2524) ดังนี้

ในการรังวัดปริมาณใด ๆ ที่มีจำนวนข้อมูลมากเกินกว่าจำนวนค่าสุดที่จำเป็น การปรับแก้ที่จะให้ได้คำตอบที่เป็นเอกภาพ (Unique) นั้น จะต้องมีมาตรการบางอย่างเพิ่มเข้าไป ซึ่งในกระบวนการปรับแก้เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นเอกภาพนั้น วิธีการที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ "วิธีลีสท์-สแควร์"

ถ้า n_o เป็นจำนวนค่าสุดที่จำเป็นในการแก้ปัญหา จำนวนข้อมูลหรือค่าสังเกตที่เป็นอิสระแก่กันในเชิงฟังก์ชันมีจำนวน n ซึ่งมีจำนวนมากกว่า n_o จึงต้องปรับแก้เพื่อให้ได้ค่าคาดคะเนที่ดีที่สุดสำหรับข้อมูลที่มีอยู่ ให้ r แทนข้อมูลส่วนที่เกินมา ดังนั้น

$$r = n - n_o$$

ซึ่งเท่ากับลำดับชั้นของความเป็นอิสระ (Degree of Freedom)

3.2 หลักการของลีสท์สแควร์ (The Least Squares Principle)

หลักการของลีสท์สแควร์คือ

$$\phi = V'PV \rightarrow \text{minimum} \quad (\text{วิชา, 2524})$$

โดยที่ $V = L_a - L_b$

L_b คือเวคเตอร์ของเซ็ทค่าสังเกต

L_a คือเวคเตอร์ของเซ็ทค่าคาดคะเนที่สอดคล้องกับแบบจำลอง

V คือความต่างระหว่างเซ็ททั้งสองเรียกว่า "เศษคงเหลือ"

หลักการของลีสท์สแควร์จะพยายามทำให้ค่าคาดคะเน L_a ใกล้เคียงกับ L_b มากที่สุด โดยคำนึงถึงคุณสมบัติทางสถิติด้วย โดยที่

หลักการของลีสท์สแควร์นั้น ไม่จำเป็นต้องทราบรูปแบบของการแจกแจง สิ่งที่จำเป็นต้องทราบคือ แมทริกซ์น้ำหนัก (P) ของค่าสังเกต

3.3 <u>เทคนิคของลีสท์สแควร์</u>

วิชา (2524) ได้กล่าวถึงเทคนิคของลีสท์สแควร์ พอสรุปได้ดังนี้

เทคนิคของลีสท์สแควร์ จะต้องสร้างแบบจำลองเชิงคณิตขึ้นมาก่อน เพื่อจะได้เลือกเทคนิคของลีสท์สแควร์ในรูปแบบใดแบบหนึ่งให้เหมาะสมกับการคำนวณและปฏิบัติ ซึ่งการคำนวณของลีสท์สแควร์จะให้ค่าคาดคะเนใหม่ของตัวแปรทั้งหมดในแบบจำลองพร้อมกับแมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของค่าใหม่หรือพารามิเตอร์ แล้ววิเคราะห์ผลการปรับแก้ในแง่สถิติ ถ้าการวิเคราะห์ผลทางสถิติไม่ผ่านตามเป้าหมาย อาจต้องมีการแก้ไขแบบจำลองใหม่ ทั้งนี้ขึ้นกับสาเหตุหลายประการที่ต้องพิจารณาอย่างรอบคอบ

การปรับแก้โครงข่ายสามารถกระทำได้หลายวิธี แต่ในที่นี้ได้ใช้การปรับแก้โครงข่ายสนามทดสอบด้วยลีสท์สแควร์วิธีสมการค่าสังเกต ซึ่งมีลักษณะสำคัญพอสรุปจาก วิชา (2524) ได้ดังนี้

แบบจำลองเชิงคณิต $L_a = F(X_a)$

สมการเชิงเส้น $V = AX + L$

สมการปกติ $NX + U = 0 \quad (N = A'PA,\ U = A'PL)$

$X = -N^{-1}U$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

ความหมายของสัญญลักษณ์ใช้ตาม วิชา (2524) ดังรายการสัญญลักษณ์และความหมายในหน้า

สาเหตุที่เลือกใช้การปรับแก้ด้วยวิธีนี้ เนื่องจาก

ก) ความยากง่ายของการเขียนแบบจำลองเชิงคณิตไม่ขึ้นกับลักษณะเรขาคณิตของปัญหา

ข) เป็นวิธีที่ยืดหยุ่น (Flexible) ง่ายต่อการลดหรือเพิ่มข้อมูลและการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ

ค) ผลลัพธ์จะให้ค่าตรวจแก้ของพารามิเตอร์ เมื่อนำค่านี้ไปบวกกับค่าประมาณของพารามิเตอร์ (X_0) จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้ทันที

ง) ง่ายในการจัดสมการ เพราะจะทำเป็นขั้นตอนซ้ำ ๆ จึงสะดวกต่อการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์

3.4 <u>ทฤษฎีการทดสอบทางสถิติ</u>

การทดสอบทางสถิติ เป็นการทดสอบเพื่อหาการตัดสินใจเกี่ยวกับสมมุติฐานที่ตั้งขึ้น ซึ่งสมมุติฐานดังกล่าวอาจเป็นจริงหรือไม่ก็ได้ โดยอาศัยข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างจากประชากรทั้งหมด หรือจากหลักฐานเท่าที่มีอยู่ เป็นตัวบ่งชี้สมมุติฐานที่ตั้งขึ้นนั้นว่า เป็นจริงหรือไม่ ถ้าสอดคล้องกับสมมุติฐานก็จะทำให้สรุปได้ว่า ยอมรับสมมุติฐานนั้น เพราะไม่มีหลักฐานพอที่จะเชื่อเป็นอย่างอื่น

สำหรับการทดสอบทางสถิติในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์อยู่ 2 ประการคือ

1. เพื่อใช้ตรวจสอบผลการปรับแก้โครงข่ายของสนามทดสอบ
2. เพื่อใช้ตรวจสอบผลการรังวัดในสนามทดสอบ

ในข้อที่ 1 การตรวจสอบผลการปรับแก้โครงข่ายด้วยลีสท์สแควร์จะเป็นการทดสอบสมมุติฐาน เพื่อเปรียบเทียบค่าของผลลัพธ์ที่ได้กับค่าที่มีอยู่เดิม และกำหนดให้เป็นมาตรฐานก่อนการปรับแก้ โดยใช้สถิติช่วยในการตัดสินใจ เกี่ยวกับฟังก์ชันของตัวประมาณค่า ซึ่งได้จากการสุ่มตัวอย่างของประชากรว่า จะสามารถเป็นตัวบ่งชี้ค่าของพารามิเตอร์ได้หรือไม่ โดยอาศัยการพิจารณาข้อมูลหรือหลักฐานที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างที่มีอยู่ หรือเป็นการทดสอบระหว่าง σ_0^2 กับ $\hat{\sigma}_0^2$ นั่นเอง รายละเอียดและผลในการทดสอบจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 5

ส่วนข้อที่ 2 ในการตรวจสอบผลการรังวัดในสนามทดสอบนั้นจะเป็นการตรวจสอบ

ก) ความละเอียดและความถูกต้องในการวัดมุมและการวัดระยะระหว่างผลที่ได้จากการรังวัดของผู้ทดสอบกับค่าปรับแก้หรือค่าที่ถือว่าเป็นค่ามาตรฐาน ซึ่งเป็นการทดสอบผลในลักษณะของ dispersion และ location statistics ว่าผลการรังวัดของผู้ทดสอบมีความละเอียดและความถูกต้องในการรังวัดแตกต่างกันหรือแตกต่างจากค่าปรับแก้หรือไม่

ข) ความถูกต้องในการรังวัดด้วยวิธีการรังวัดแบบต่าง ๆ ที่นิยมใช้ในกิจการสำรวจและงานวิศวกรรมโดยทั่วไป (ในระดับงานชั้นที่ 3 หรือต่ำกว่า) ซึ่งเป็นการทดสอบผลการรังวัดของผู้ทดสอบกับค่าปรับแก้ในลักษณะของ location statistics ว่าผลการรังวัดดังกล่าวที่ความถูก-ต้องอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้หรือไม่

รายละเอียดของผลการทดสอบในข้อ ก และ ข้อ ข จะได้กล่าวในบทที่ 6 ต่อไป

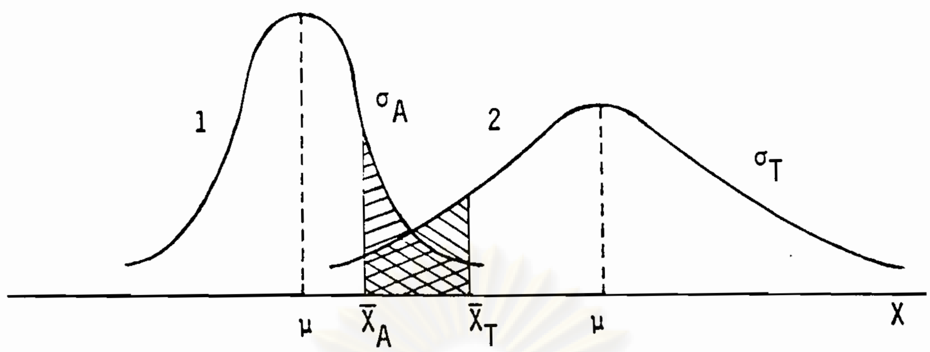
โดยปกติในการวัดมุมและระยะจำนวนหลาย ๆ ชุด จะสามารถแสดงฟังก์ชันการกระ-จายเหล่านั้น (X) ด้วย $n(X; \mu, \sigma)$ เมื่อ μ และ σ^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรในการรังวัด และเมื่อทราบค่า μ และ σ หรือ $\bar{X}$ และ $\sigma_{\bar{X}}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าในการรังวัดที่ไม่ลำเอียงของ μ และ σ (ที่ได้จากการรังวัดหลาย ๆ ชุด) จะทำให้สามารถพล็อตโค้งการกระจายของฟังก์ชันนั้นได้จาก Wapole & Myers (1972) โดย

$$n(X; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(1/2)(X-\mu)/\sigma^2}, \quad -\infty<X<\infty$$

เมื่อ $\pi = 3.14159$ และ $e = 2.71828$

ซึ่งจะได้ลักษณะการกระจายในรูปของโค้งแบบปกติ (Normal distribution)

ในการทดสอบความละเอียดและความถูกต้องของการวัดมุมและระยะในข้อ ก และการทดสอบความถูกต้องของการรังวัดด้วยวิธีต่าง ๆ ในข้อ ข จึงมีสมมุติฐานว่า ฟังก์ชันที่ได้จากผลการรังวัดเหล่านั้นและค่าปรับแก้ (ผลการรังวัดของผู้ทดสอบและผลการปรับแก้จะทำให้สามารถหาค่าพิกัดและค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจุดที่ต้องการในสนามทดสอบได้) ต่างก็มีการกระจายในลักษณะของโค้งปกติ ทั้งนี้เพื่อจะได้สามารถทดสอบผลการรังวัดเปรียบเทียบระหว่างผลการรังวัดของผู้ทดสอบกับค่าปรับแก้ในแง่สถิติได้ (Wapole & Myers, 1972)



รูปที่ 3.1 การกระจายของโค้งปกติที่ต่างกัน

จากรูปที่ 3.1 แสดงการกระจายโค้งปกติที่ต่างกัน 2 รูป รูปที่ 1 แสดงโค้งปกติของค่าปรับแก้ที่มีพารามิเตอร์ μ_A และการกระจาย σ_A $\overline{X}_A$ เป็นเสมือนค่ามุมหรือค่าระยะหรือค่าพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่ได้จากผลการปรับแก้ รูปที่ 2 เป็นโค้งปกติที่เกิดจากผลการรังวัดของผู้ทดสอบมีพารามิเตอร์ μ_T และการกระจาย σ_T โดยมี $\overline{X}_T$ เป็นเสมือนค่ามุมหรือระยะหรือค่าพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่ต้องการรังวัดเพื่อตรวจสอบผล

โค้งปกติรูป 1 จะให้ความน่าเชื่อถือดีกว่าโค้งรูปที่ 2 เพราะ X_A ใกล้ค่า μ_A และ $\sigma_A < \sigma_T$

ในการทดสอบความละเอียดในการรังวัดมุมและระยะ จะเป็นการตรวจสอบ dispersion statistic ระหว่าง σ_T และ σ_A โดยอาจตั้งสมมุติฐานได้คือ

$$\left.\begin{array}{lll} \text{กรณีที่ 1} & H_o : \sigma_T^2 = \sigma_A^2 & H_A : \sigma_T^2 < \sigma_A^2 \\ \text{กรณีที่ 2} & H_o : \sigma_T^2 = \sigma_A^2 & H_A : \sigma_T^2 > \sigma_A^2 \\ \text{กรณีที่ 3} & H_o : \sigma_T^2 = \sigma_A^2 & H_A : \sigma_T^2 \neq \sigma_A^2 \end{array}\right\} \text{(คณาจารย์จุฬาฯ, 2523)}$$

ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าต้องการทดสอบในกรณีใด เป็นการทดสอบข้างเดียวหรือสองข้าง และสถิติอะไรที่เหมาะสมที่สุดในการทดสอบแต่ละกรณี เช่น กรณีนี้สถิติที่เหมาะสมในการทดสอบคือ

$F = \sigma_T^2/\sigma_A^2$

$df_1(\nu_1) = n_1 - 1$ และ

$df_2(\nu_1) = n_2 - 1$

σ_T คือค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากการรังวัดของผู้ทดสอบ

σ_A คือค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากผลการปรับแก้

n_1 คือจำนวนชุดในการรังวัดของผู้ทดสอบ

n_2 คือจำนวนชุดในการรังวัดที่ใช้เป็นค่ามาตรฐาน

$df(\nu)$ คือลำดับชั้นความเป็นอิสระ (degree of freedom)

บริเวณวิกฤตสำหรับแต่ละกรณีคือ

กรณีที่ 1 $F < f_{1-\alpha(\nu_1, \nu_2)}$

กรณีที่ 2 $F > f_{\alpha(\nu_1, \nu_2)}$

กรณีที่ 3 $F < f_{1-\alpha/2(\nu_1, \nu_2)}$ และ $f_{\alpha/2(\nu_1, \nu_2)}$

ส่วนการทดสอบความถูกต้องในการรังวัด ไม่ว่าจะเป็นการวัดมุมหรือการวัดระยะ หรือการตรวจสอบผลการรังวัดด้วยวิธีรังวัดแบบต่าง ๆ ล้วนเป็นการทดสอบในลักษณะของ location statistics ทั้งสิ้น โดยจะเป็นการทดสอบระหว่าง ค่าพิกัดจากผลการรังวัดของผู้ทดสอบ (X_T) และ ค่าพิกัดที่ได้จากผลการปรับแก้ (X_A) ซึ่งสามารถตั้งสมมุติฐานได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1

กรณีที่ 1 $H_o : \theta_T = \theta_A$ $H_A : \theta_T < \theta_A$

กรณีที่ 2 $H_o : \theta_T = \theta_A$ $H_A : \theta_T > \theta_A$

กรณีที่ 3 $H_o : \theta_T = \theta_A$ $H_A : \theta_T \neq \theta_A$

แบบที่ 2

กรณีที่ 1 $H_o : \theta_T \leq \theta_A$ $H_A : \theta_T > \theta_A$

กรณีที่ 2 $H_o : \theta_T \geq \theta_A$ $H_A : \theta_T < \theta_A$

θ_T แทนตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ (μ_T) ที่ได้จากผลการรังวัดของผู้ทดสอบ

θ_A แทนตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ (μ_A) ที่ได้จากผลการปรับแก้

การเลือกใช้กรณีใดขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ว่า ต้องการทดสอบอะไรและสนใจในแง่ไหน สถิติที่เหมาะสมในการทดสอบในที่นี้ใช้ Student t distribution (T) ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการทดสอบสมมุติฐาน เพื่อเปรียบเทียบระหว่างพารามิเตอร์ 2 ตัว จำนวนข้อมูลของ Sample น้อยกว่า 30 และเนื่องจากไม่ทราบ σ_T และ σ_A ที่แท้จริง จาก Population ซึ่งมีสูตรที่เหมาะสมอยู่ 2 สูตร (คณาจารย์จุฬาฯ, 2523) คือ

ก) เมื่อ $\sigma_T \neq \sigma_A$

$$T = \frac{(X_T - X_A) - (\mu_T - \mu_A)}{\sqrt{\frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{\sigma_A^2}{n_A}}}$$

$$df = \frac{\left[\sigma_T^2/n_T + \sigma_A^2/n_A\right]^2}{\frac{\left[\sigma_T^2/n_T\right]^2}{n_T - 1} + \frac{\left[\sigma_A^2/n_A\right]^2}{n_A - 1}}$$

ข) เมื่อ $\sigma_T = \sigma_A$

$$T = \frac{(X_T - X_A) - (\mu_T - \mu_A)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_T} - \frac{1}{n_A}}}$$

$$df = n_T + n_A - 2$$

X_T คือค่าพิกัดจากผลการรังวัดของผู้ทดสอบ

X_A คือค่าพิกัดจากผลการปรับแก้ ณ จุดเดียวกัน

σ_T คือค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าพิกัดจากผลการรังวัดของผู้ทดสอบ

σ_A คือค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าพิกัดจากผลการปรับแก้ ณ จุดเดียวกัน

n_T คือจำนวนสมการที่ใช้ในการหาค่าพิกัดจากการรังวัดของผู้ทดสอบ ณ จุดที่ต้องการตรวจสอบ

n_A คือจำนวนสมการค่าสังเกตที่ได้ใช้ในการปรับแก้

S_p คือการใช้ความแปรปรวนร่วมกัน (Pooled Variance)

บริเวณวิกฤตสำหรับแต่ละกรณีคือ

แบบที่ 1

กรณีที่ 1 $T < -t_{\alpha,\nu}$

กรณีที่ 2 $T > t_{\alpha,\nu}$

กรณีที่ 3 $T < -t_{\alpha/2,\nu}$ และ $T > t_{\alpha/2,\nu}$

แบบที่ 2

กรณีที่ 1 $T \geq t_{\alpha,\nu}$

กรณีที่ 2 $T \leq -t_{\alpha,\nu}$

บริเวณวิกฤตที่นิยมใช้กันทั่วไปคือ $\alpha = 0.05$ หรือ 0.10 ซึ่งค่า α นี้ เป็นความน่าจะเป็นของการทำความผิดพลาดประเภท 1 หรือเป็นการปฏิเสธ H_0 เมื่อสมมุติฐานนั้นเป็นจริง ส่วนความน่าจะเป็นของการประทำความผิดพลาดประเภท 2 คือ β หรือเป็นการยอมรับ H_0 เมื่อสมมุติฐานนั้นไม่เป็นจริง ในงานสำรวจต้องพยายามลดความผิดพลาดประเภทที่ 1 ให้เหลือน้อยที่สุด เพราะจะมีผลกระทบต่องานโดยตรง

3.5 <u>ทฤษฎีวงรีความคลาดเคลื่อน</u>

โดยปกติเมื่อการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์แล้วเสร็จ ทฤษฎีของวงรีความคลาดเคลื่อน จะมีประโยชน์มากในการวิเคราะห์ค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ในระบบสองมิติ (XY-Plane) โดยพิจารณาจากรูปวงรีความคลาดเคลื่อนตามค่าที่คำนวณได้ เพราะขนาดและรูปร่างของวงรีความคลาดเคลื่อนแต่ละจุดจะขึ้นอยู่กับ σ_x^2, σ_y^2 และ σ_{xy} ซึ่งได้จาก Σ_X นั่นเอง แต่ถ้าจะพิจารณาเฉพาะค่า σ_x^2 และ σ_y^2 จะยังให้ข้อมูลเกี่ยวกับความแน่นอนของพารามิเตอร์ไม่เพียงพอ ยังต้องพิจารณาถึง σ_{xy} ด้วย ซึ่ง extreme values (σ_u) ที่จะแสดงถึงความแน่นอนของพารามิเตอร์นั้นขึ้นกับระบบพิกัดที่เปลี่ยนไปจากเดิมและสามารถหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ของ σ_x, σ_y และ σ_{xy} ดังต่อไปนี้

จากทฤษฎีวงรีความคลาดเคลื่อน (Mikhail, 1976 และ วิชา 2524)

$$k^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{X^2}{\sigma_x^2} \quad 2\rho\left(\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}\right) + \frac{Y^2}{\sigma_y^2}\right] \qquad \text{.........(3-1)}$$

โดยที่ σ_x = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานตามแนวแกน X

σ_y = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานตามแนวแกน Y

ρ = สัมประสิทธิ์ของค่าสหสัมพันธ์ (Correlation) ระหว่าง σ_x และ σ_y

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad \text{........(3-2)}$$

ดูรูปวงรีของความคลาดเคลื่อน รูปที่ 3.2

ถ้ากำหนดให้จุดกำเนิดของ XY-Plane ทับกับจุดร่วมของวงรีที่จุด X = 0 และ Y = 0 จะได้ k = 1 เรียกว่า "วงรีมาตรฐาน"

จากทฤษฎีของ Orthogonal transformation และทฤษฎีของกฎการแพร่ (Propagation of error) Mikhail (1976) และ วิชา (2524)

$$\tan 2t = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \qquad \text{........(3-3)}$$

โดย t = ขนาดของมุมที่เปลี่ยนไปจากแกน XY-Plane ไปเป็นแกน UV-Plane

σ_x^2 = ความแปรปรวนของพารามิเตอร์ตามแนวแกน X

σ_y^2 = ความแปรปรวนของพารามิเตอร์ตามแนวแกน Y

σ_{xy} = ความแปรปรวนร่วมระหว่าง σ_x^2 และ σ_y^2

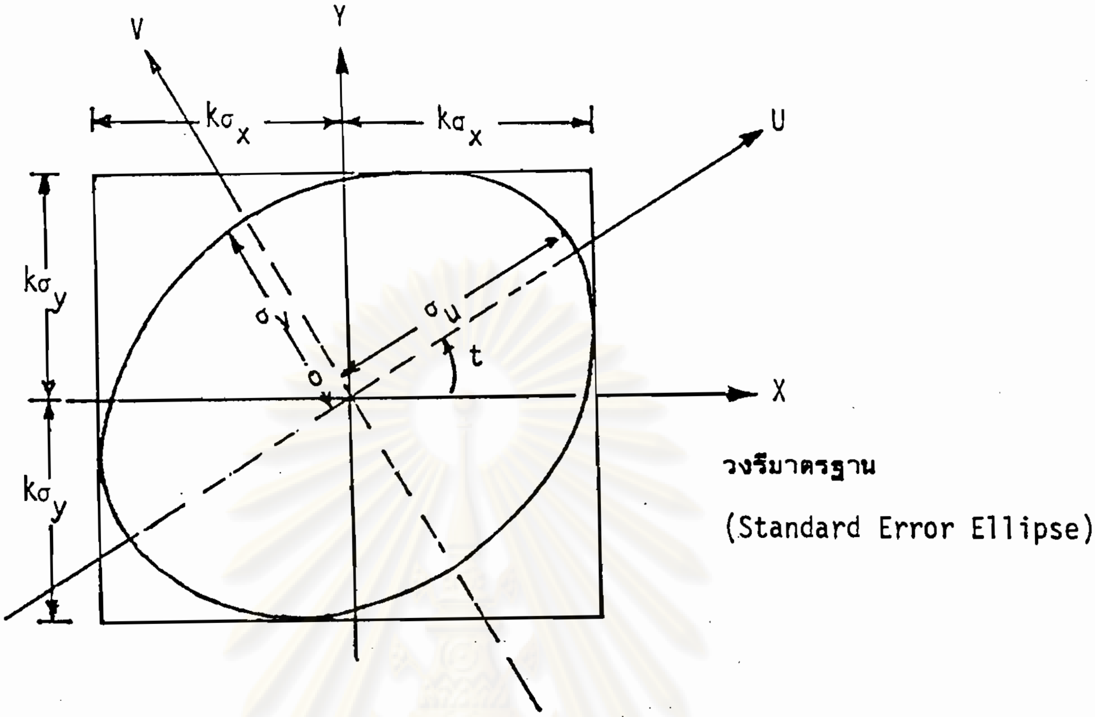
ให้ $W = \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$

ซึ่งก็คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก เมื่อด้านตรงข้ามมุม t เป็น $2\sigma_{xy}$ และด้านประชิดมุม t เป็น $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$

และ

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2}\,(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + W) \qquad \text{........(3-4)}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2}\,(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - W) \qquad \text{........(3-5)}$$



รูปที่ 3.2 วงรีความคลาดเคลื่อน

ค่า σ_u และ σ_v หาได้โดยถอดกรณฑ์ที่สองของสมการ (3-4) และ (3-5) ตามลำดับ

σ_u = ความยาวของกึ่งแกนหลัก (Semi-major axis) และเป็น Extreme values ซึ่งจะได้ใช้เป็นเกณฑ์ในขั้นการออกแบบโครงข่ายต่อไป

σ_v = ความยาวของกึ่งแกนรอง (Semi-minor axis)

ถ้าหาก $\sigma_{xy} = 0$ กล่าวคือไม่มีสหสัมพันธ์กันระหว่าง X และ Y จะได้ $\sigma_u^2 = \sigma_x^2$ และ $\sigma_v^2 = \sigma_y^2$ แต่ถ้า W = 0 ซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ และ $\sigma_{xy} = 0$ ซึ่งก็คือวงกลมแทนที่จะเป็นวงรี

ดังนั้นวงรีความคลาดเคลื่อนสามารถพล็อต (Plot) ได้ตามขนาดของ t, σ_u และ σ_v เมื่อทราบค่า σ_x^2, σ_y^2 และ σ_{xy} แล้ว

3.6 <u>ความคลาดเคลื่อนในการรังวัด</u>

ในกระบวนการการรังวัดปริมาณใด ๆ องค์ประกอบสำคัญที่ทำให้ค่าที่รังวัดได้ไม่ตรงกับค่าจริง (True Value) ได้แก่

- ผู้รังวัด
- เครื่องมือรังวัด (สภาพของเครื่องมือ)
- วิธีการรังวัด และสภาพดินฟ้าอากาศ

ไม่ว่าจะพยายามระมัดระวังเท่าใดก็ตาม องค์ประกอบเหล่านี้จะทำให้ค่าที่วัดได้มีความคลาดเคลื่อน (Errors) ไม่มากก็น้อย

Mikhail (1976) ได้กล่าวถึงชนิดของความคลาดเคลื่อนสรุปได้ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนมีระบบ (Systematic Errors) เป็นความคลาดเคลื่อนในการวัดที่เป็นไปตามกฎทางคณิตศาสตร์หรือทางฟิสิกส์ ผลของความคลาดเคลื่อนมีระบบต่อการคำนวณหาค่าของตัวแปรสุ่ม (Random Variables) นั้น จะมีผลโดยตรงต่อ Location Parameters ซึ่งในทางสถิติคือ ความลำเอียง (Biases)

ความคลาดเคลื่อนมีระบบ มีหลายรูปแบบขึ้นอยู่กับค่าและเครื่องหมายของมัน ถ้าค่าและเครื่องหมายคงที่ตลอดกระบวนการของการรังวัดเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนคงที่ (Constant error) ความคลาดเคลื่อนมีระบบสามารถขจัดออกไปหรือทำให้ลดลงเหลือน้อยที่สุดโดยอาศัยการวัดสอบเครื่องมือและการกำหนดระเบียบ หรือกรรมวิธีการรังวัดในการเตรียมข้อมูลก่อนการปรับแก้ (วิชา, 2524 หน้า 3-6)

2. ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random Errors) หลังจากขจัดความคลาดเคลื่อนมีระบบออกไปแล้ว ความคลาดเคลื่อนที่เหลืออยู่เรียกว่า "ความคลาดเคลื่อนสุ่ม" (Random or Accidental Errors) ซึ่งมีขนาดเล็ก ขาดความเป็นระเบียบและไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอนที่จะควบคุมไม่ให้เกิดขึ้นได้ ความคลาดเคลื่อนชนิดนี้จะเป็นไปตามทฤษฎีของความน่าจะเป็น (Theory of Probability) ในโอกาสที่จะเกิดขึ้นในทางบวกมีเท่า ๆ กับที่จะเกิดขึ้นในทางลบ ความคลาดเคลื่อนสุ่มขนาดเล็ก ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นมากกว่าขนาดใหญ่ ๆ

3. ความผิด (Mistake or Blunder) ในทางสถิติไม่ถือเป็นค่าตัวอย่าง (Samples) ของการแจกแจงจะต้องหาทางตรวจสอบและกำจัดออกไปจากค่ารังวัดด้วยกรรมวิธีที่เหมาะสม

3.6.1 การแพร่ของความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Propagation of random errors)

การแพร่ (Propagation) เป็นการหาคุณลักษณะทางสโตคาสติค (สถิติ) ของชุดตัวแปรตาม (Functionally dependent variables) โดยกำหนดคุณลักษณะของชุดตัวแปรอิสระ

และความสัมพันธ์ทางฟังก์ชันระหว่างตัวแปรทั้งสองชุดให้ (วิชา, 2524)

การแพร่ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ เป็นการแพร่ของความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random errors) หรือก็คือ การแพร่ของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ซึ่งจะต้องนำไปประยุกต์ใช้หาความคลาดเคลื่อนจากการรังวัด โดยมีเครื่องมือรังวัดและผู้รังวัดเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ ดังจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 6

วิชา (2524) ได้กล่าวถึงหลักการแพร่ของความคลาดเคลื่อนสุ่ม พอสรุปได้ดังนี้

ถ้าให้ $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าคาดคะเนเป็น μ_1, μ_2 และฟังก์ชันการแจกแจง $f(X_1, X_2)$

$\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในรูปของ

$$\tilde{Y}_1 = a_o + a_1\tilde{X}_1 + a_2\tilde{X}_2$$

$$\tilde{Y}_2 = b_o + b_1\tilde{X}_1 + b_2\tilde{X}_2 \qquad \text{...........(3-6)}$$

ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของ $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ สามารถหาได้จากนิยามของค่าคาดคะเนคือ

$$\sigma^2_{Y_1} = a_1^2\sigma^2_{x_1} + a_2^2\sigma^2_{x_2} + 2a_1a_2\sigma_{x_1x_2} \qquad \text{...........(3-7)}$$

$$\sigma^2_{Y_2} = b_1^2\sigma^2_{x_1} + b_2^2\sigma^2_{x_2} + 2b_1b_2\sigma_{x_1x_2} \qquad \text{...........(3-8)}$$

$$\sigma_{Y_1Y_2} = a_1b_1\sigma^2_{x_1} + a_2b_2\sigma^2_{x_2} + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\sigma_{x_1x_2} \qquad \text{....(3-9)}$$

ซึ่งสามารถใช้ได้กับทุกรูปแบบของการแจกแจง เพราะการแพร่ดังกล่าว ไม่ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของการแจกแจง และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{vmatrix} \sigma^2_{Y_1} & \sigma_{Y_1Y_2} \\ \sigma_{Y_1Y_2} & \sigma^2_{Y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma^2_{X_1} & \sigma_{X_1X_2} \\ \sigma_{X_1X_2} & \sigma^2_{X_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{....(3-10)}$$

หรือ $$\Sigma_{yy} = C\Sigma_{xx}C' \qquad \text{...........(3-11)}$$

แมทริกซ์ C แทนจาโคเบียน (Jacobian) ของ $\tilde{Y}$ เทียบกับ $\tilde{X}$ ดังนั้นสมการ (3-11) สามารถเขียนในรูปสัญญลักษณ์ที่นิยมใช้กันได้เป็น

$$\Sigma_{yy} = J_{yx}\Sigma_{xx}J'_{yx} \qquad (3\text{-}12)$$

หรือ $Q_{yy} = J_{yx}Q_{xx}J'_{yx}$

โดยที่ $J_{yx} = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{X}}$, Q คือโคแฟกเตอร์แมทริกซ์ $= \frac{1}{\sigma_o^2}\Sigma$

สำหรับกรณีการแพร่ของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมที่ฟังก์ชันไม่ใช่เชิงเส้น สามารถทำให้เป็นเชิงเส้นก่อน โดยใช้การกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series expansion) แล้วตัดเทอมกำลังสองและสูงกว่าทิ้งไป

ถ้าให้ $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าคาดคะเนเป็น μ_1, μ_2 และฟังก์ชันการแจกแจง $f(X_1, X_2)$

$\tilde{Y}_1$ และ $\tilde{Y}_2$ เป็นฟังก์ชันของ $\tilde{X}_1$ และ $\tilde{X}_2$ เขียนในรูปฟังก์ชันเป็น

$$\tilde{Y}_1 = G_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \text{ และ } \tilde{Y}_2 = G_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \qquad \text{........}(3\text{-}13)$$

เมื่อกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ที่จุด X_1^o, X_2^o จะได้ผลลัพธ์ซึ่งอยู่ในรูปแมทริกซ์คือ

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1^o \\ Y_2^o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{vmatrix} \qquad \text{........}(3\text{-}14)$$

โดยที่ $Y_1^o = G_1(X_1^o, X_2^o)$ ....(3-15)

$J_{11} = \frac{\partial G_1}{\partial X_1}\Big|_{X_1^o, X_2^o}$ = partial derivative ของฟังก์ชัน $G_1(X_1, X_2)$ เทียบกับ X_1 แทนค่าที่จุด X_1^o, X_2^o

$J_{12} = \frac{\partial G_1}{\partial X_2}\Big|_{X_1^o, X_2^o}$ = partial derivative ของฟังก์ชัน $G_1(X_1, X_2)$ เทียบกับ X_2 แทนค่าที่จุด X_1^o, X_2^o

ทำนองเดียวกัน

$Y_2^o = G_2(X_1^o, X_2^o)$ ....(3-16)

$J_{21} = \frac{\partial G_2}{\partial X_1}\ X_1^o, X_2^o$

$$J_{22} = \frac{\partial G_2}{\partial X_2} \quad X_1^o,\ X_2^o$$

จาก (3-14)

$$Y = Y^o + J_{yx}\Delta X \qquad \text{........(3-17)}$$

จาก (3-15) และ (3-16)

$$Y^o = \begin{vmatrix} Y_1^o \\ Y_2^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_1(X_1^o,\ X_2^o) \\ G_2(X_1^o,\ X_2^o) \end{vmatrix} \qquad \text{........(3-18)}$$

และ $$J_{yx} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} \quad \text{หาค่าที่จุด } X_1^o,\ X_2^o$$

ซึ่งสมการ (3-14) จะอยู่ในรูปของสมการ (3-6) เพียงตัวสัมประสิทธิ์และตัวแปรสุ่มเปลี่ยนไป ดังนั้นถ้าทำฟังก์ชันที่ไม่ใช่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นได้และจะสามารถใช้สมการ (3-12) สำหรับการแพร่ของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมได้เช่นเดียวกัน และการหาค่าความแปรปรวนจากการรังวัดในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ก็ได้อาศัยสูตรและหลักการแพร่ของความคลาดเคลื่อน ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น