บรรณานุกรม

หนังสือ

นิพนธ์ ศุขปรีดี. นวกรรมเทคโนโลยีการศึกษา. พระนคร: โรงพิมพ์พิมเนศ, 2519.

บูเกลสกี้, บีอาร์. จิตวิทยาการเรียนรู้กับการสอน. แปลโดย สมควร อภัยพันธ์. พระนคร: โรงพิมพ์ของสภาสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย, 2513.

ประคอง กรรณสูต. สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู. พระนคร: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2515.

เปรื่อง กุมุท. "การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป." คู่มือการเรียนวิชา Multi-Media Approach for Programmed Instruction. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร.

ยุพิน พิพิธกุล. การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: กรุงเทพการพิมพ์, 2519.

วิจิตร ศรีสอ้าน. "เทคนิควิทยาทางการศึกษา." ประมวลบทความเกี่ยวกับนวกรรมและเทคโนโลยีการศึกษา. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2517.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมอาชีวศึกษา. คู่มือสำหรับผู้ใช้หนังสือฝึกเรียนด้วยตนเอง (กรกฎาคม 2515) : 5.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. บทคัดย่องานวิจัยทางการศึกษา. พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2513.

เอกสารอื่น ๆ

ครรชิต หอมแพน. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาสถิติ เรื่อง "การวัดความโน้มเอียงเข้าสู่ส่วนกลางและการกระจาย" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

จิตรา โอภาสทิพากร. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "เมตริกซ์" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2518.

นิคม สยังกุล. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ฟังค์ชั่นตรีโกณมิติ" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2520.

ปราโมทย์ เงียบประเสริฐ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "การจัดลำดับและการเลือกหมู่" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

ปรีปดี ฉิมแจ่ม. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์ สัญญลักษณ์เบื้องต้น ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2518.

พลรัตน์ สักษณียนาวิน. "การทดลองสอนพีชคณิตโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2514.

เพ็ญจันทร์ เพื่องฟู. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "เวคเตอร์" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

ภิญโญ เงียบประเสริฐ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ระบบจำนวนจริง" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

วรรณี พร้อมมูล. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ฟังก์ชั่นเอกซ์โปเนนท์ และฟังก์ชั่นลอการิทึม" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2519.

วาณี ตรีศิริพิศาล. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2518.

วิยดา ศิริเสรีวรรณ. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น(Probability) ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2518.

สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ. "การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซท ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนปกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2518.

สุสัดดา ไชยบุตร. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ความสัมพันธ์และฟังก์ชั่น" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

BIBLIOGRAPHY

Books

Brown, Robert O. Jr. "A Comparison Test of Test Scores of Students Using Programmed Instructional Materials with those of Students Not Using Programmed Instructional Materials." In The Research on Programmed Instruction. Washington: U.S. Government Printing Office, 1962.

Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. Princeton New Jersey: Education Testing Service, 1962.

Fine, Benjamine. Teaching Machine. New York : Sterling Publishing Co., 1962.

Fry, Edward B. Teaching Machine and Programmed Instruction: an Introduction. New York: McGraw-Hill Book Co., 1963.

Glaser, Robert. Teaching Machines and Programmed Learning II. Washington: Association for Educational Communication and Technology, 1975.

Glassman, Jerrold. Programmed Reading Teacher's Guide. New York: Globe Book Co., 1966.

Homme, Lloyd E. "Relation Between the Programmed Textbook and Teaching Machines." Automatic Teaching. New York: John Wiley & Sons, 1959.

Miles, Mathew B. Innovation in Education. New York: Teacher College Press, 1973.

Schramm, Wilbur, Programmed Instruction : Today and Tomorrow. New York: The Fund for the Advancement of Education, 1962.

Wallis, W. Allen and Robert, Harry V. Statistics : A New Approach. Illinois: The Free Press, 1956.

Articles

Dobyn, Roe A. "An Experiment in the teaching of College Algebra." Mathematics Teacher 52 (September 1964) 319-352.

Espich, James E. and William, Bill. Developing Programmed Instructional Materials : A Handbook for Program Writing. Belmont Calif: Fearson Publishers, 1967.

Greatsinger, Cavin. "An Experimental Study of Programmed Instruction in Division of Fraction." A.V. Communication Review 16 (Spring 1968): 87 - 90.

Greenberg, Herbert J. "The Objectives of Mathematics Education." Mathematic Teacher 67 (November 1974): 639 - 643.

Meadscroft, B.A. "A Comparison of Two Methods of Using Programmed Learning." A.V. Communication Review 15 (Summer 1967) : 186.

Randolph, Paul H. "An Experiment in Programmed Instruction in Junior High School." A.V. Communication Review 13 (Winter 1965): 449.

Roe, Arnold. "A Comparison of Branching Methods for Programmed Learning." Journal of Educational Research 55(1962) : 407 - 416.

Weber, Walter Irving. "A Comparative Study the Effectiveness of Two Methods of Instruction Utilizing Programmed Materials in a College Remedial Mathematics Course." Dissertation Abstracts 31 (February 1971): 3911-A.

White, Charles Colven. "The Use of Programmed Text for Remedial Mathematics Instruction in College." Dissertation Abstracts 30(February 1970) : 3373-A.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง

" อันดับและอนุกรม "

สำหรับ

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำแนะนำในการเรียน

บทเรียนเล่มนี้สร้างขึ้นสำหรับนักเรียนเรียนด้วยตนเอง นักเรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้านักเรียนทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. หากระดาษแข็งเท่าไม้โปรแทรกเตอร์ ปิดข้อความทางซ้ายมือของกรอบที่ 2

2. เริ่มอ่านกรอบที่ 1 แล้วตอบคำถามหรือเติมข้อความที่ขาดหายไป

3. ตรวจคำตอบของนักเรียนด้วยการเลื่อนกระดาษแข็งลงไปปิดข้อความทางซ้ายมือของกรอบที่ 3 นักเรียนจะพบคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1 อยู่ทางซ้ายมือของกรอบที่ 2

3.1 ถ้าปรากฏว่านักเรียนตอบถูก ให้นักเรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไป และดำเนินเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ

3.2 ถ้าปรากฏว่านักเรียนตอบผิด ให้นักเรียนอ่านกรอบเดิมซ้ำอีก แล้วเขียนคำตอบที่ถูกลงข้างล่างคำตอบที่ผิดนั้น

4. นักเรียนจะต้องซื่อสัตย์ คือ เรียนจากการอ่านและพยายามทำความเข้าใจในแต่ละขั้นให้ดี ถ้ายังเขียนคำตอบไม่เสร็จ นักเรียนไม่ควรแอบดูคำตอบก่อน เพราะจะทำให้นักเรียนขาดความรู้ ความเข้าใจ และจะไม่ได้ผลอะไร

5. ทำทุก ๆ กรอบจากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด พึงระลึกไว้เสมอว่า คำถามในแต่ละกรอบไม่ใช่แบบทดสอบ แต่เป็นคำถามที่ต้องการให้นักเรียนคิดและเรียนรู้ ซึ่งเหมือนกับครูถามนักเรียนในขณะที่ครูอธิบายในห้องเรียนนั่นเอง

6. เมื่อจบบทเรียนแล้ว จะมีแบบทดสอบให้นักเรียนทำ เพื่อวัดดูว่านักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเพียงใด

	1. เซทของจำนวน 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 เรียงลำดับภายใต้กฎเกณฑ์ว่า จำนวนหลังต่างจากจำนวนหน้าอยู่ _____
1	2. เซทของจำนวน 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 เรียงลำดับภายใต้กฎเกณฑ์ว่า _____ _____
จำนวนหลังต่างจากจำนวนหน้าอยู่ 3	3. เซทของจำนวน $\frac{3}{4}$, 3, 12, 48, ... เรียงลำดับภายใต้กฎเกณฑ์ว่า จำนวนหลังเป็น____ ของจำนวนหน้า
4 เท่า	4. เซทของจำนวน $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}\cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ เรียงลำดับภายใต้กฎเกณฑ์ว่า _____ _____

จำนวนหลังเป็น $\sqrt{3}$ เท่าของจำนวนหน้า	5. เซทของจำนวน 2, 4, 6, 8, 10, ...$2n$,... เรียกว่า อันดับ ซึ่งเรียงภายใต้กฎเกณฑ์ว่า_____
จำนวนหลังต่างจากจำนวนหน้าอยู่ 2	6. อันดับคือ เซทของจำนวนที่เรียงลำดับภายใต้_____อย่างใดอย่างหนึ่ง จำนวนแต่ละจำนวนเรียกว่า พจน์ (Term) ของอันดับ อันดับทุกอันดับจะประกอบด้วยพจน์ที่ 1 พจน์ที่ 2 พจน์ที่ 3, ... ตามลำดับ จนถึงพจน์ที่ n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งจะเป็นจำนวนใด ๆ ก็ได้
กฎเกณฑ์	7. เซทของจำนวน 1, 3, 5, 7, 9, ..., 17 _____อันดับ (เป็น/ไม่เป็น)
เป็น	8. เซทของจำนวน 75, 15, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{25}$, ... _____อันดับ (เป็น/ไม่เป็น)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไม่เป็น	9. เซทของจำนวนเต็มทั้งหมด_____อันดับ (เป็น/ไม่เป็น)
ไม่เป็น (เพราะไม่ทราบว่าจำนวนใดเป็นพจน์ที่ 1 ของเซทของจำนวนเต็มทั้งหมด ซึ่งได้แก่ เซทของ ...-3,-2,-1,0,1,2,3...)	10. เซทของจำนวนเฉพาะ (prime number) _____ อันดับ (เป็น/ไม่เป็น)
เป็น [เซทของจำนวนเฉพาะคือเซทของ 2,3,5,7, 11,13,...]	11. การเขียนอันดับ อาจเขียนในรูป $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ a_1 เรียกว่า พจน์ที่ 1 ของอันดับ a_2 เรียกว่า พจน์ที่ 2 ของอันดับ a_3 เรียกว่า พจน์ที่___ของอันดับ - - - a_n เรียกว่า พจน์ที่___ของอันดับ หรือพจน์ทั่วไป (general term) ของอันดับ
3, n	12. นอกจากจะเขียนแจงพจน์ตามลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ แล้ว การเขียนอันดับอาจจะเขียนเฉพาะพจน์ทั่วไป เช่น อันดับ 1,3,6,10,...คือ อันดับ $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ และอันดับ $a_n = \frac{1}{n}$ คือ อันดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\therefore$ อันดับ $a_n = \frac{n}{n+2}$ คืออันดับ_____

$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$	13. อันดับ $a_n = (-1)^n$ คืออันดับ_____
$-1, 1, -1, \ldots$	14. อันดับ 1, 5, 13, 29, ... จำนวน 5 เป็นพจน์ที่_____ของอันดับ จำนวน___เป็นพจน์ที่ 4 ของอันดับ
2, 29	15. อันดับ 1, 3, 7, 15, ..., $2^n - 1$, ... จำนวน 7 เป็นพจน์ที่____ของอันดับ จำนวน_____เป็นพจน์ที่ n ของอันดับ
3, $2^n - 1$	16. อันดับ 1, 3, 6, 10, 15, 21 จำนวนพจน์ของอันดับนี้มีจำกัด เท่ากับ_____พจน์
6	17. อันดับ 4, 8, 12, ..., 32 จำนวนพจน์ของอันดับนี้มี_____จึงเรียกอันดับชนิดนี้ว่า "อันดับจำกัด" (finite sequence)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จำกัด	18. อันดับ 2, 4, 6, 8, ..., 2n เป็นอันดับ_____เพราะจำนวนพจน์ของอันดับนี้ (จำกัด/ไม่จำกัด) มี_____ (จำกัด/ไม่จำกัด)
จำกัด, จำกัด	19. อันดับ 3, 1, -1, -3, -5, ... จำนวนพจน์ของอันดับนี้มี_____ (จำกัด/ไม่จำกัด)
ไม่จำกัด	20. อันดับ 1, 3, 9, 27, 81,...,3n , ... จำนวนพจน์ของอันดับนี้มี_____จึงเรียก (จำกัด/ไม่จำกัด) อันดับชนิดนี้ว่า "อันดับอนันต์"
ไม่จำกัด	21. อันดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ คืออันดับ_____ _____เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ อนันต์	22. อันดับ -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, ... เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)
อนันต์	23. อันดับ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots, \sqrt{n}$ เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)
จำกัด	24. อันดับ $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$ เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)
อนันต์	25. อันดับของจำนวนเต็มตั้งแต่ -10 ถึง 32 เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)
จำกัด	26. อันดับของจำนวนเต็มลบทั้งหมด เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อนันต์	27.
	อันดับ $a_n = \frac{n}{2n + 1}$ $a_1 = \frac{1}{2.1 + 1} =$ _____ $a_2 = \frac{2}{2.2 + 1} =$ _____ $a_3 = \frac{3}{2.3 + 1} =$ _____ ∴ 3 พจน์แรกของอันดับ คือ _____
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$	28. อันดับ $a_n = n(n - 1)$ $a_1 =$ _____ $a_2 =$ _____ $a_3 =$ _____ $a_4 =$ _____ ดังนั้น 4 พจน์แรกของอันดับ คือ _____
0 2 6 12 : 0, 2, 6, 12	29. 5 พจน์แรกของอันดับ $a_n = (-1)^n(2n - 1)$ คือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

-1, 3, -5, 7, -9	30. พจน์ที่ 6 ของอันดับ $a_n = \sin^n\theta$ คือ $a_6 =$ _____
$\sin^6\theta$	31. จงเขียนอันดับอนันต์ต่อไปจนถึงพจน์ที่ 7 -2, 4, -8, 16, ____, ____, ____, ...
-32, 64, -128	32. พจน์ที่ 7 ของอันดับ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... คือ_____
$\frac{1}{64}$	33. อันดับ 2x5, 4x10, 8x20, 16x40, ... พจน์ที่ 1 คือ $2x5 = 2^1x(2^0x5)$ พจน์ที่ 2 คือ $4x10 = 2^2x(2^1x5)$ พจน์ที่ 3 คือ $8x20 = 2^3x(2^2x5)$ พจน์ที่ 4 คือ $16x40 = 2^4x(2^3x5)$ - - - พจน์ที่ n คือ $a_n =$ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$2^n x\ (2^{n-1} x\ 5)$	34. อันดับ 1, 3, 9, 27, ... พจน์ที่ 1 คือ 1 = 3^0 พจน์ที่ 2 คือ 3 = 3^1 พจน์ที่ 3 คือ 9 = 3^2 พจน์ที่ 4 คือ 27 = 3^3 - - - พจน์ที่ n คือ a_n = ————
3^{n-1}	35. อันดับ 1, 5, 13, 29, ... พจน์ที่ 1 คือ 1 = $2^2 - 3$ พจน์ที่ 2 คือ 5 = $2^3 - 3$ พจน์ที่ 3 คือ 13 = $2^4 - 3$ พจน์ที่ 4 คือ 29 = $2^5 - 3$ - - - พจน์ที่ n คือ a_n = ————

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$2^{n+1} - 3$	36. อันดับ 2, 0, 6, 0, 10, ... พจน์ที่ 1 คือ $2 = 1\left[1 - (-1)^1\right]$ พจน์ที่ 2 คือ $0 = 2\left[1 - (-1)^2\right]$ พจน์ที่ 3 คือ $6 = 3\left[1 - (-1)^3\right]$ พจน์ที่ 4 คือ $0 = 4\left[1 - (-1)^4\right]$ พจน์ที่ 5 คือ $10 = 5\left[1 - (-1)^5\right]$ - - - พจน์ที่ n คือ a_n = _____
$n\left[1 - (-1)^n\right]$	37. พจน์ที่ n ของอันดับ 0.5, 0.05, 0.005, ... คือ_____
5×10^{-n}	38. อันดับ 2, 5, 8, 11, 14, ... ได้ $a_1 = 2$ $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ $a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$ $a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$ $a_5 - a_4 = 14 - 11 = 3$ จะเห็นว่า ผลต่างของพจน์ที่ n+1 กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่ เท่ากับ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3	39. อันดับ 3, 7, 11, 15, ... ผลต่างของ a_{n+1} กับ a_n มีค่า_____ เท่ากับ_____
คงที่, 4	40. อันดับ -10, -20, -30, ... ผลต่างของ a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่ เท่ากับ_____
-10	41. อันดับ -6, -1, 4, 9, 14, ... ผลต่างของ a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่เท่ากับ _____และจะเรียก อันดับที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า อันดับเลขคณิต
5	42. อันดับเลขคณิต คือ อันดับที่_____ของ a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เรียกว่า "ผลต่างร่วม" (common difference) ถ้าให้ d แทนผลต่างร่วม $\therefore$ d = _____ a_{n+1} = _____

ผลต่าง, $a_{n+1} - a_n$, $a_n + d$	43. อันดับเลขคณิต $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \ldots$ a_1 = _____ d = _____ a_6 = _____
1 $\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{2}$	44. อันดับ $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ _____ อันดับเลขคณิต เพราะ_____ (เป็น/ไม่เป็น) _____
เป็น ผลต่างของ a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่เท่ากับ -2 (หรือ $d = -2$)	45. อันดับ $10, 6, 2, 0, -2, \ldots$ _____ อันดับเลขคณิต เพราะ_____ (เป็น/ไม่เป็น) _____
ไม่เป็น ผลต่างของ a_{n+1} กับ a_n มีค่าไม่คงที่ $0 - 2 \neq 2 - 6$	46. ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์ที่ 1 ของอันดับเลขคณิต และ d คือ ผลต่างร่วมแล้ว อาจเขียนอันดับเลขคณิตได้ดังนี้ $a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots$ ดังนั้น พจน์ที่ n ของอันดับเลขคณิต คือ a_n = _____

$a_1 + (n-1)d$	47. 3 พจน์ถัดไปของอันดับเลขคณิต -1, 6, 13, ... คือ ____, ____, ____
$(d = 7)$ ∴ 3 พจน์ถัดไปคือ 13+7, 20+7, 27+7 หรือ 20, 27, 34	48. อันดับเลขคณิต $x, x + 2, x + 4, \cdots$ พจน์ที่ 1 คือ $a_1 = x$ ผลต่างร่วม คือ $d = x + 2 - x = 2$ พจน์ที่ n คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ พจน์ที่ 9 คือ $a_9 = a_1 + (9-1)d$ $= x + 8(2)$ $= x + 16$ พจน์ที่ 14 คือ a_{14} = _____
$x + 26$	49. อันดับเลขคณิต $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \cdots$ พจน์ที่ 1 คือ $a_1 = -\frac{1}{6}$ ผลต่างร่วม คือ $d = \frac{1}{6} - (-\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $= \frac{1}{3}$ พจน์ที่ n คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ พจน์ที่ 25 คือ $a_{25} = a_1 + (25-1)d$ $= -\frac{1}{6} + 24(\frac{1}{3})$ $= -\frac{1}{6} + 8 = \frac{47}{6}$ พจน์ที่ 30 คือ a_{30} = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{19}{2}$	50. พจน์ที่ 20 ของอันดับเลขคณิต -2, 4, 10, ... คือ a_{20} = ————
112	51. อันดับเลขคณิต -1, -8, -15, -22, ... พจน์ที่ 1 คือ a_1 = -1 ผลต่างร่วม คือ d = -8-(-1) = -8+1 = -7 พจน์ที่ n คือ a_n = a_1+ (n-1)d = ———— = ————
-1+(n-1)(-7) 6 - 7n	52. อันดับเลขคณิต 3a + 2b, 2a + 4b, a + 6b,... พจน์ที่ 1 คือ a_1 = 3a + 2b ผลต่างร่วม คือ d = 2a + 4b - 3a - 2b = -a + 2b ∴ พจน์ที่ n คือ a_n = a_1+ (n-1)d = (3a+2b)+(n-1)(-a+2b) = ———— = ————

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$3a + 2b - an + a + 2bn - 2b$ $= 4a + (2b - a)n$	53. พจน์ที่ n ของอันดับเลขคณิต 7, 10, 13, ... คือ a_n = _____
$4 + 3n$	54. ถ้าพจน์ที่ 7 ของอันดับเลขคณิต คือ 22 และพจน์ที่ 12 คือ 37 แล้วจะได้ พจน์ที่ 7 คือ $a_7 = a_1 + (7-1)d$ $= a_1 + 6d$ $\therefore 22 = a_1 + 6d$ .....(1) พจน์ที่ 12 คือ $a_{12} = a_1 + (12-1)d$ $= a_1 + 11d$ $\therefore 37 = a_1 + 11d$ .....(2) จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 4$ $d = 3$ ดังนั้น พจน์ที่ 10 ของอันดับนี้ คือ_____
31	55. ถ้า p, 5p, 6p + 9 เป็น 3 พจน์เรียงกันใน อันดับเลขคณิต ดังนั้นจะได้ $5p - p = (6p + 9) - 5p$ $4p = p + 9$ $3p = 9$ $p =$ ___ $\therefore$ อันดับเลขคณิตนี้ คือ_____

3 3, 15, 27	56. จำนวนที่อยู่ระหว่าง 23 และ 47 ที่จะทำให้จำนวนทั้งสามนั้นเป็นอันดับเลขคณิตคือ_____
35 [วิธีคิด : ถ้า a เป็นจำนวนที่ต้องการแล้ว อันดับนี้มี 3 พจน์ คือ 23, a, 47 $\therefore a - 23 = 47 - a$ $2a = 47 + 23$ $a = \frac{47 + 23}{2}$]	57. ถ้า 8 และ 18 เป็นพจน์ 2 พจน์ของอันดับเลขคณิต อีก 3 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างสองพจน์ที่กำหนดให้นี้คือ_____ (ถ้านักเรียนทำไม่ได้ กรุณาดูกรอบที่ 58)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

10.5, 13, 15.5	58. ให้ A,B,C เป็น 3 พจน์ที่เรียงอยู่ระหว่างจำนวนทั้งสอง (8 และ 18) ดังนั้น อันดับเลขคณิตนี้คือ 8, A, B, C, 18 โดยที่ $a_1 = 8$ $a_5 = a_1 + 4d = 18$ $4d = 18 - 8 = 10$ $d = 2.5$ $\therefore A = 8 + 2.5 = 10.5$ $B = 8 + 5 = 13$ $C = 8 + 7.5 = 15.5$ ดังนั้น อีก 3 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่าง 8 และ 18 คือ 10.5, 13, 15.5 เมื่อนักเรียนคิดได้แล้ว ก็ลองทำโจทย์ต่อไปนี้ ถ้า -1 และ -31 เป็นพจน์ 2 พจน์ของอันดับเลขคณิต อีก 5 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างสองพจน์ที่กำหนดให้นี้คือ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

-6, -11, -16, -21, -26	59. อันดับ 1, 3, 9, 27, 81, ... ได้ $a_1 = 1$ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{3} = 3$ $\frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{9} = 3$ $\frac{a_5}{a_4} = \frac{81}{27} = 3$ จะเห็นว่า อัตราส่วนระหว่างพจน์ที่ $n+1$ กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่เท่ากับ_____
3	60. อันดับ 1, 4, 16, 64, ... อัตราส่วนระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่า_____ เท่ากับ_____
คงที่ 4	61. อันดับ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... อัตราส่วนระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่า_____ เท่ากับ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คงที่ $\frac{1}{2}$	62. อันดับ $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{3}, \ldots$ อัตราส่วนระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่ เท่ากับ_____เรียกอันดับที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า อันดับเรขาคณิต
$\sqrt{2}$	63. อันดับเรขาคณิตคือ อันดับที่_____ระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (common ratio) ถ้าให้ r แทน อัตราส่วนร่วม $r = \frac{\square}{\square}$ $a_{n+1} =$ _____
อัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $a_n \cdot r$	64. อันดับเรขาคณิต 3, 0.3, 0.03, 0.003, ... $a_1 =$ _____ $r =$ _____ $a_5 =$ _____
3 0.1 0.0003	65. อันดับ 1, -1, 1, -1, ... _____ (เป็น/ไม่เป็น) อันดับเรขาคณิต เพราะ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เป็น
เพราะอัตราส่วนระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่าคงที่เท่ากับ -1

$(r = -1)$

66.

อันดับ 10, 5, 1, ... _____

(เป็น/ไม่เป็น)

อันดับเรขาคณิต เพราะ_____

_____

ไม่เป็น
เพราะอัตราส่วนระหว่าง a_{n+1} กับ a_n มีค่าไม่คงที่คือ

$\frac{5}{10} \neq \frac{1}{5}$

67.

ให้ -3 เป็นพจน์ที่ 1 ของอันดับเรขาคณิต และ 2 เป็นอัตราส่วนร่วม แล้ว

พจน์ที่ 2 คือ $a_2 = -3.2 = -6$

พจน์ที่ 3 คือ $a_3 = -6.2 = -12$

พจน์ที่ 4 คือ $a_4 = -12.2 = -24$

-

-

-

ดังนั้น อันดับเรขาคณิตนี้คือ_____

-3, -6, -12, -24, ...

68.

กำหนดให้ a_1 เป็นพจน์ที่ 1 ของอันดับเรขาคณิต และ r คือ อัตราส่วนร่วม แล้ว พจน์อื่น ๆ จะเขียนในรูปของ a_1 และ r ได้ดังนี้

พจน์ที่ 2 คือ $a_2 = a_1r$

พจน์ที่ 3 คือ $a_3 = a_2r = (a_1r)r = a_1r^2$

พจน์ที่ 4 คือ $a_4 = a_3r = (a_1r^2)r = a_1r^3$

-

-

-

ดังนั้น อาจเขียนอันดับเรขาคณิตได้ดังนี้

$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots$

∴ พจน์ที่ n ของอันดับเรขาคณิตคือ a_n = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$a_1 r^{n-1}$	69. 3 พจน์ถัดไปของอันดับเรขาคณิต $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \ldots$ คือ ____, ____, ____
$\frac{125}{4}, \frac{625}{4}, \frac{3125}{4}$	70. 4 พจน์แรกของอันดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$ คือ ____, ____, ____, ____
$\frac{3}{4}, 3, 12, 48$	71. อันดับเรขาคณิต $-\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \ldots$ พจน์ที่ 1 คือ $a_1 = -\frac{2}{9}$ อัตราส่วนร่วมคือ $r = \frac{1}{3} \cdot -\frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$ หรือ $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = -\frac{3}{2}$ พจน์ทั่วไป คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ พจน์ที่ 5 คือ $a_5 = a_1 r^4$ $= -\frac{2}{9} \cdot (-\frac{3}{2})^4 = -\frac{9}{8}$ พจน์ที่ 7 คือ $a_7 =$ _____ $=$ ____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$-\frac{2}{9}\cdot(-\frac{3}{2})^6 = -\frac{81}{32}$	72. อันดับเรขาคณิต $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$ พจน์ที่ 1 คือ $a_1 = \frac{5}{6}$ อัตราส่วนร่วม คือ $r = -\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5} = -2$ พจน์ทั่วไป คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ พจน์ที่ 7 คือ $a_7 = a_1 r^6$ $= \frac{5}{6}\cdot(-2)^6 = \frac{160}{3}$ พจน์ที่ 10 คือ $a_{10} =$ _____ = _____
$\frac{5}{6}\cdot(-2)^9 = \frac{-1280}{3}$	73. พจน์ที่ 6 ของอันดับเรขาคณิต $\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots$ คือ_____
$\frac{81}{256}$	74. อันดับเรขาคณิต $6, -6, 6, -6, \ldots$ พจน์ที่ 1 คือ $a_1 = 6$ อัตราส่วนร่วม คือ $r = -\frac{6}{6} = -1$ $\therefore$ พจน์ที่ n คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ $=$ _____

$6.(-1)^{n-1}$	75. พจน์ที่ n ของอันดับเรขาคณิต $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ คือ a_n = _____
$3(\frac{1}{3})^{n-1}$ หรือ $9(\frac{1}{3})^{n}$	76. พจน์ที่ n ของอันดับเรขาคณิต $5, -10, 20, -40, \ldots$ คือ a_n = _____
$5(-2)^{n-1}$	77. ถ้าพจน์ที่ 4 ของอันดับเรขาคณิตคือ $\frac{125}{18}$ และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{5}{6}$ แล้ว จะได้ พจน์ที่ 4 คือ $a_4 = a_1 \cdot (r)^{4-1}$ $= a_1 r^3$ $\therefore \frac{125}{18} = a_1 \cdot (\frac{5}{6})^3$ a_1 = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

12	78. ถ้าพจน์ที่ 6 ของอันดับเรขาคณิต คือ 96 และ พจน์ที่ 8 คือ 384 แล้ว จะได้ พจน์ที่ 6 คือ $a_6 = a_1(r)^{6-1}$ $= a_1 \cdot r^5$ $\therefore 96 = a_1 r^5$ .....(1) พจน์ที่ 8 คือ $a_8 = a_1(r)^{8-1}$ $= a_1 r^7$ $\therefore 384 = a_1 r^7$ .....(2) จาก (1) และ (2) จะได้ a_1 = _____ r = _____ ดังนั้น พจน์ที่ 4 ของอันดับนี้คือ_____
-3 หรือ 3 -2 หรือ 2 24	79. ถ้า 8 และ 12 เป็นพจน์สองพจน์ในอันดับเรขาคณิต ให้ A เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสอง $\therefore$ จะได้ 8, A, 12 เป็นอันดับเรขาคณิต ซึ่ง $\frac{A}{8} = r$ และ $\frac{12}{A} = r$ $\therefore \frac{A}{8} = \frac{12}{A}$ A^2 = _____ A = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

96 $\pm 4\sqrt{6}$	80. ถ้า 5 และ 1215 เป็นพจน์ 2 พจน์ในอันดับเรขาคณิต ให้ A, B, C, D เป็นพจน์อีก 4 พจน์ ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ ดังนั้น 5, A, B, C, D, 1215 เป็นอันดับเรขาคณิต นั่นคือ $a = 5$ $ar^5 = 1215$ $\therefore r^5 = \frac{1215}{5} = 243$ $\therefore r =$ _____ $\therefore A =$ _____ $B =$ _____ $C =$ _____ $D =$ _____ ดังนั้น 4 พจน์ ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสอง คือ _____
3 15 45 135 405 15, 45, 135, 405	81. ถ้า -1 และ -216 เป็นพจน์ 2 พจน์ ในอันดับเรขาคณิต อีก 2 พจน์ ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ คือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

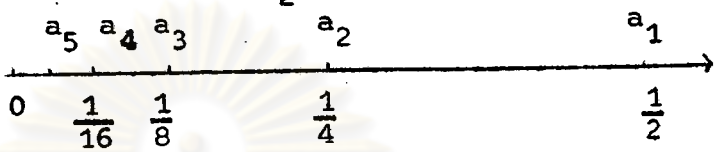
-6, -36	82. ถ้าผลบวกของ 3 พจน์แรกในอันดับเรขาคณิตคือ 13 และผลคูณของ 3 พจน์นี้คือ 27 ให้อันดับเรขาคณิตนี้คือ $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$ ดังนั้น $a_1 + a_1r + a_1r^2 = 13$ .....(1) $a_1 \cdot (a_1r) \cdot (a_1r^2) = 27$ .....(2) จาก (1) และ (2) ได้ $a_1 =$ _____ $r =$ _____ ดังนั้น อันดับเรขาคณิตคือ_____
1 หรือ 9 3 หรือ $\frac{1}{3}$ 1, 3, 9, 27,...หรือ 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$,...	83. อันดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ คืออันดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ เป็นอันดับ_____ (จำกัด/อนันต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

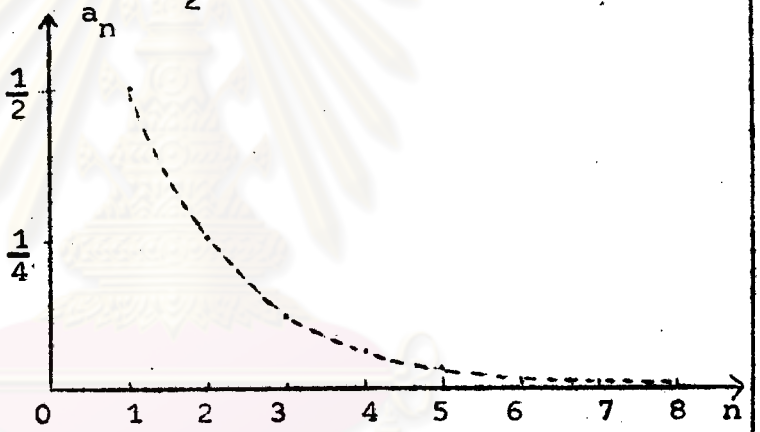
อนันต์

84.

พิจารณาตำแหน่งของ a_n ของอันดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots; \frac{1}{2^n}, \ldots$ บนเส้นจำนวนดังนี้



พิจารณากราฟ (n, a_n) ของอันดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ ดังนี้

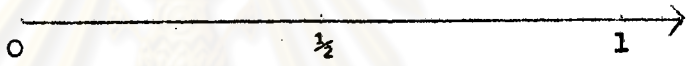
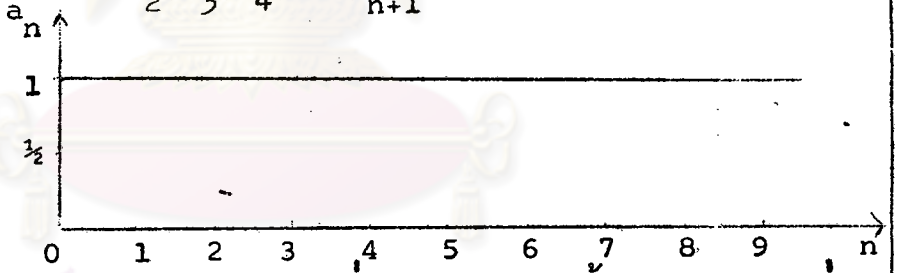


เส้นประที่ปรากฏในกราฟเป็นเส้นที่ใช้เพื่อแสดงแนวของจุดในกราฟ

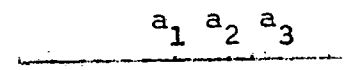
จากกราฟและตำแหน่งของพจน์บนเส้นจำนวนจะเห็นว่า ถ้า n มีค่ามากขึ้นแล้ว ค่าของพจน์ที่ n เข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนหนึ่งคือ_____

จำนวนซึ่งพจน์ที่ n ของอันดับเข้าใกล้เมื่อ n มีค่ามากขึ้น โดยไม่มีที่สิ้นสุด เรียกว่า "ลิมิต" (limit) ของอันดับ

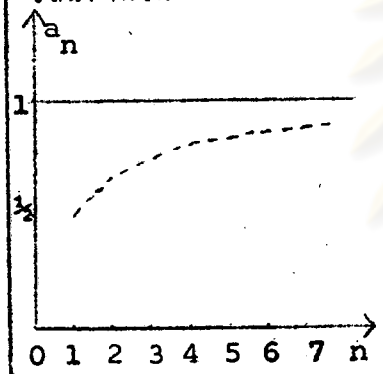
ดังนั้น อันดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ จึงมีลิมิต_____

0 0	85 อันดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ คือ อันดับ_____ เป็นอันดับ_____ (จำกัด / อนันต์)
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ อนันต์	86 จงแสดง ตำแหน่งของ a_n ของ อันดับ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots \frac{n}{n+1}, \cdots$ บนเส้นจำนวนที่กำหนดให้  จงเขียนกราฟของ (n, a_n) ของ อันดับ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ ลงในเสกลที่กำหนดให้  จากกราฟและตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น พจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้ _____ ดังนั้น อันดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ มีลิมิต _____ อันดับอนันต์ใดก็ตามที่มีลิมิต เรียกอันดับอนันต์นั้นว่า "อันดับคอนเวอเจนต์" (Convergent sequence)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน



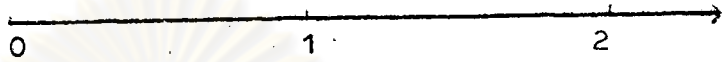
กราฟของ a_n

1

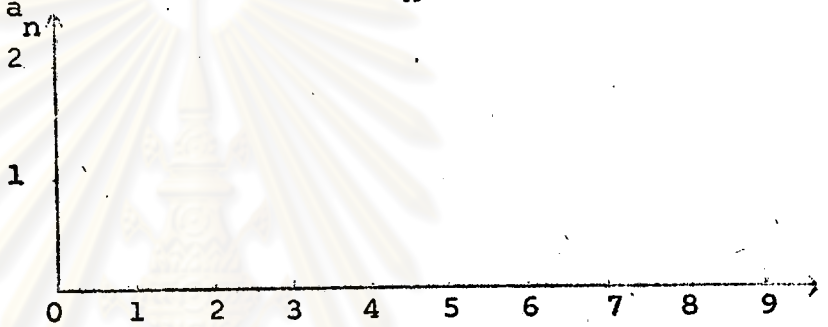
1

87

อันดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$



(จงแสดง) ตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน

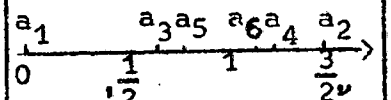


(จงเขียน) กราฟของ a_n

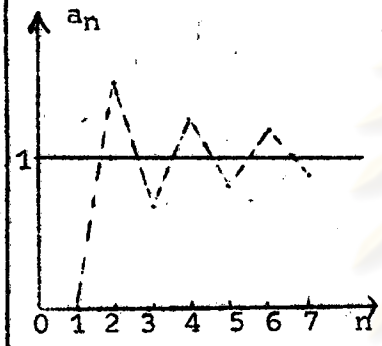
จากกราฟและตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น พจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้_____

ดังนั้น อันดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอันดับคอนเวอเจนต์ ที่มีลิมิตเท่ากับ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน



กราฟของ a_n

1

1

88.

อันดับ $a_n = 2n - 1$

คืออันดับ_____

เป็นอันดับ_____

(จำกัด/อนันต์)

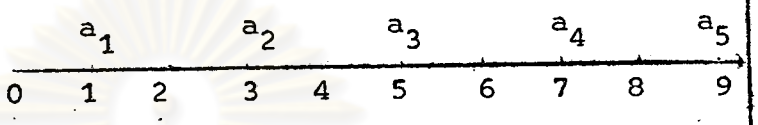
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1, 3, 5, ..., 2n-1, ...

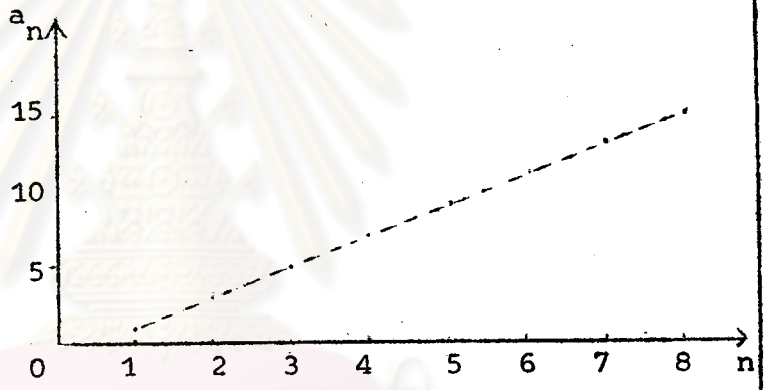
อนันต์

89.

พิจารณาตำแหน่งของ a_n ของอันดับ 1, 3, 5, ..., 2n-1, ... บนเส้นจำนวนดังนี้

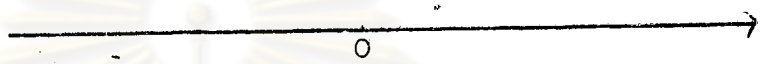


เมื่อพิจารณากราฟ (n, a_n) ของอันดับ 1, 3, 5, ..., 2n-1, ... ดังนี้

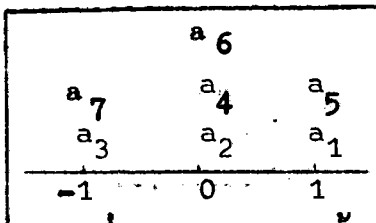


จากกราฟและตำแหน่งของพจน์บนเส้นจำนวน จะเห็นว่า เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับก็จะเพิ่มมากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนใด อันดับ $a_n = 2n-1$ จึงแตกต่างจากอันดับในกรอบที่ 83 - 87 อันดับที่มีลักษณะเช่นนี้จึงไม่ใช่อันดับ_____ แต่มีชื่อเฉพาะว่า อันดับไดเวอเจนต์ (divergent sequence)

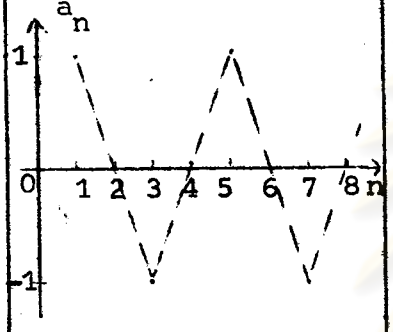
อันดับไดเวอเจนต์ หมายถึง อันดับอนันต์ที่_____ลิมิต

คอนเวอเจนต์ ไม่มี	90 อันดับ $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ คือ อันดับ $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\pi$, $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\sin 2\pi$, ... หรือ อันดับ 1, 0, -1, 0, 1, ...  (จงแสดง) ตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน (จงเขียน) กราฟของ a_n จากกราฟและตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับ_____ อันดับ $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ _____ ลิมิต (มี / ไม่มี) ดังนั้น จึงเป็นอันดับ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ตำแหน่งของ a_n บนเส้นจำนวน



กราฟของ a_n

ไม่เข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนใด

ไม่มี

ไดเวอเจนต์

91.

อันดับ $a_n = n(n+2)$ เป็นอันดับ_____

_____

(คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)

สิมิตของอันดับนี้ คือ_____

ไดเวอเจนต์

ไม่มีสิมิต (หรือหาค่าไม่ได้)

92.

อันดับ $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอันดับ_____

_____

สิมิตของอันดับนี้ คือ_____

คอนเวอเจนต์

0

93.

อันดับที่จะพิจารณาถึงสิมิตนั้นต้องเป็นอันดับ_____

(จำกัด/อนันต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อนันต์	94. ถ้ากล่าวว่า "L เป็นสิมิตของอันดับ a_n" หมายถึง "เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับจะเข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนหนึ่ง คือ___ จำนวนเดียวเท่านั้น และเขียน $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ แทน L เป็นสิมิตของอันดับ a_n
L	95. อันดับที่_____เรียกว่า อันดับคอนเวอเจนต์ ส่วน อันดับที่_____เรียกว่า อันดับไดเวอเจนต์
มีสิมิต ไม่มีสิมิต	96. การหาสิมิตของอันดับ นอกจากจะหาโดยตรงจากการเขียนกราฟ หรือการเขียนตำแหน่งของพจน์ที่ n บนเส้นจำนวนแล้ว อาจหาได้โดยอาศัยอันดับที่เคยทราบสิมิตมาแล้ว และทฤษฎีเกี่ยวกับสิมิต ทฤษฎีเกี่ยวกับสิมิต ถ้า c เป็นจำนวนคงที่ $a_n = c$ นั่นคือ c,c,c,c, ... เป็นอันดับคงที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$ ตัวอย่าง ให้ $a_n = 5$ อันดับคือ_____ สิมิตของอันดับคือ_____ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5 =$ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5, 5, 5, 5, ...

5

5

97.

ถ้า c เป็นจำนวนคงที่, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = cA$$

ตัวอย่าง ให้ $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

อันดับคือ $1 - 1,\ 1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ \ldots$

สิมิตของอันดับคือ_____

$\therefore \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) =$ _____

เมื่อเอา $\frac{1}{2}$ คูณเข้ากับทุกพจน์ของอันดับจะได้อันดับใหม่ คือ อันดับ_____

สิมิตของอันดับ คือ_____

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) =$ _____

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ ____ $\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})$

(=/≠)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$=$$

98.

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

ตัวอย่าง ให้ $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, $b_n = 3 - \frac{1}{n}$

$$a_n + b_n = 2 + \frac{1}{n} + 3 - \frac{1}{n} = 5$$

อันดับ a_n คือ $3, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, \ldots$ มีลิมิตเป็น___

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n$ = _____

อันดับ b_n คือ $2, 3-\frac{1}{2}, 3-\frac{1}{3}, \ldots$ มีลิมิตเป็น___

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} b_n$ = _____

อันดับ $a_n + b_n$ คือ $5,5,5,5,\ldots$ มีลิมิตเป็น_____

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$ = _____

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ _____ $\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

$(=/\neq)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2
2
3
3
5
5
=

99.

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

ตัวอย่าง ให้ $a_n = 3 + \frac{1}{n}$, $b_n = 2 - \frac{1}{n}$

$$a_n - b_n = 3 + \frac{1}{n} - 2 + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{2}{n}$$

อันดับ a_n คือ $4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, \ldots$ มีลิมิตเป็น___

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n =$ _____

อันดับ b_n คือ $1, 2-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, \ldots$ มีลิมิตเป็น___

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} b_n =$ _____

อันดับ $a_n - b_n$ คือ $1+2, 1+1, 1+\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{4}, \ldots$

มีลิมิตเป็น_____

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n =$ _____

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n$ _____ $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3 3 2 2 1 1 =	100. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$ ตัวอย่าง ให้ $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ $a_n \cdot b_n = (1 - \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n})$ $= 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ อันดับ a_n คือ $1 - 1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \cdots$ มีลิมิตเป็น_____ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n$ = _____ อันดับ b_n คือ $2 + 1, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, \cdots$ มีลิมิตเป็น_____ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} b_n$ = _____ อันดับ $a_n \cdot b_n$ คือ $2-1-1, 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 2-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}, \cdots$ มีลิมิตเป็น_____ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ = _____ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ _____ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ $(=/\neq)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1	101.
1	ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้
2	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
2	<u>ตัวอย่าง</u>
2	ให้ $a_n = 6 + \frac{1}{n}$, $b_n = 3 - \frac{1}{n}$
=	$\frac{a_n}{b_n} = \frac{6 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{6n + 1}{3n - 1} = 2 + \frac{3}{3n - 1}$
	อันดับ a_n คือ $6 + 1, 6 + \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{3}, \cdots$
	มีลิมิตเป็น_____
	นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n =$ _____
	อันดับ b_n คือ $3 - 1, 3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, \cdots$
	มีลิมิตเป็น_____
	นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} b_n =$ _____
	อันดับ $\frac{a_n}{b_n}$ คือ $2 + \frac{3}{2}, 2 + \frac{3}{5}, 2 + \frac{3}{8}, 2 + \frac{3}{11}, \cdots$
	มีลิมิตเป็น_____
	นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$ _____
	ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ _____ $\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6 6 3 3 2 2 =	102. ให้ $a_n = \frac{6n-4}{6n}$ $\frac{6n-4}{6n} = \frac{6n}{6n} - \frac{4}{6n}$ $= 1 - \frac{4}{6n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{6n-4}{6n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{4}{6n})$ $= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{6n}$ $=$ ——— $-$ ——— $=$ ———
1 - 0 1 .	103. ให้ $a_n = \frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2}$ $\frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2} = \frac{4n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}$ $= 4 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (4 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})$ $=$ ——— $=$ ———

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}$

4

104.

ให้ $a_n = \frac{3n - 4}{2n + 4}$

หารทั้งเศษและส่วนด้วย n จะได้

$$\frac{3n - 4}{2n + 4} = \frac{3 - \frac{4}{n}}{2 + \frac{4}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n - 4}{2n + 4} = \frac{\lim_{n\to\infty} (3 - \frac{4}{n})}{\lim_{n\to\infty} (2 + \frac{4}{n})}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\square - \square}{\square + \square}$$

$$= \frac{\square}{\square}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{3 - 0}{2 + 0}$

$\frac{3}{2}$

105.

ให้ $a_n = \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17}$

หารทั้งเศษและส่วนด้วย n^3 จะได้

$$\frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{17}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n\to\infty} \left(5 + \frac{17}{n^3} \right)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 5 + 17 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}$$

$$= \text{_____}$$

$$= \text{_____}$$

$\frac{3 - 0}{5 + 0}$

$\frac{3}{5}$

106.

ในการหาลิมิตของ $\frac{2n^2 + 4n - 3}{5n^2 - 6n + 1}$ เมื่อ $n \to \infty$

สิ่งแรกที่จะต้องทำคือ_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หารทั้งเศษและส่วนด้วย n^2

107. จะได้ $$\frac{2n^2+4n-3}{5n^2-6n+1} = \frac{2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{5-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n-3}{5n^2-6n+1} = \text{_____}$$

$\frac{2}{5}$

108. ให้ $a_n = \frac{4n+3}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{2} = \lim_{n\to\infty} (2n+\tfrac{3}{2})$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} \tfrac{3}{2}$$

แต่ $\lim_{n\to\infty} n$ ไม่มีลิมิต (หาค่าไม่ได้)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{2} = \text{_____}$$

ดังนั้น อันดับ $a_n = \frac{4n+3}{2}$ เป็นอันดับ_____

(คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไม่มีลิมิต (หาค่าไม่ได้) ไดเวอเจนต์	109. ผลบวกของพจน์ทุกพจน์ที่เรียงตามลำดับของอันดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ซึ่งเขียนในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ เรียกว่า "อนุกรม" จากอันดับ 1, 3, 5, ..., 15 จะได้อนุกรม _____
$1 + 3 + 5 + \ldots + 15$	110. อนุกรม_____ได้จาก อันดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots$	111. อนุกรม $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$ ได้จากอันดับ_____ ซึ่งมีจำนวนพจน์เท่ากับ_____พจน์
$6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$ 7	112. อนุกรม $50 + 48 + 46 + 44 + 42 + 40$ มีจำนวนพจน์เท่ากับ_____พจน์ ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด เรียกอนุกรมที่มีจำนวนพจน์_____นี้ว่า อนุกรมจำกัด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6 จำกัด	113. อนุกรม $3 + 10 + 21 + \cdots + n(2n + 1)$ มีจำนวนพจน์เท่ากับ_____พจน์ ซึ่งเป็นจำนวน___ ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรม_____
n จำกัด จำกัด	114. อนุกรม $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 100$ เป็นอนุกรม_____เพราะมีจำนวนพจน์_____ _____ (จำกัด/ไม่จำกัด)
จำกัด จำกัด	115. อนุกรม $2 + 8 + 24 + 64 + \cdots$ มีจำนวนพจน์_____ (จำกัด/ไม่จำกัด)
ไม่จำกัด	116. อนุกรม $1 + 6 + 15 + 28 + \cdots + n(2n-1) + \cdots$ มีจำนวนพจน์_____ (จำกัด/ไม่จำกัด)
ไม่จำกัด	117. อนุกรม $2 + 8 + 18 + 32 + \cdots + 2n^2 + \cdots$ มีจำนวนพจน์_____เรียกอนุกรมที่มีจำนวนพจน์ _____นี้ว่า "อนุกรมอนันต์"

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไม่จำกัด ไม่จำกัด	118. อนุกรม $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + \cdots$ เป็นอนุกรม_____ (จำกัด/อนันต์)
อนันต์	119. อนุกรม $4 + 7 + 10 + \cdots + (1 + 3n)$ เป็นอนุกรม_____ (จำกัด/อนันต์)
จำกัด	120. อนุกรม $1+4+12+32+\cdots+n.2^{n-1}+ \cdots$ เป็นอนุกรม_____ (จำกัด/อนันต์)
อนันต์	121. อนุกรม $30+24+18+12+6+0+-6- \cdots$ ได้จากอันดับ_____ ซึ่งเป็นอันดับ_____ (เลขคณิต/เรขาคณิต)
30,24,18,12,6,0,-6,.. เลขคณิต	122. อนุกรม $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$ ได้จากอันดับ_____ ซึ่งเป็นอันดับ_____ (เลขคณิต/เรขาคณิต)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1,2,4,8,16,32,... เรขาคณิต	123. อนุกรมที่ได้จากอันดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรม _____
เลขคณิต	124. อนุกรมที่ได้จากอันดับเรขาคณิต เรียกว่า อนุกรม _____
เรขาคณิต	125. อนุกรม 1 + 4 + 16 + 64 + ... เป็นอนุกรม_____ (เลขคณิต/เรขาคณิต)
เรขาคณิต	126. อนุกรม - 1 + 2 + 5 + 8 + ... เป็นอนุกรม_____ (เลขคณิต/เรขาคณิต)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เลขคณิต	127. เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม ให้ใช้อักษรกรีก $\sum$ (อ่านว่า ซิกมา) เป็นสัญญลักษณ์ของการบวก เช่น เขียนแทน $a_1+a_2+a_3+\cdots a_n$ ด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$ และแทน $a_1+a_2+a_3+\cdots a_n+\cdots$ ด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ดังนั้น $\sum_{i=1}^{15} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 15$ $\sum_{i=1}^{10} (i - 2) =$ _____
$(1-2)+(2-2)+\cdots(10-2)$ $= -1 + 0 + \cdots + 8$	128. $\sum_{n=1}^{\infty} n =$ _____
$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$	129. $\sum_{j=1}^{5} j^2 =$ _____ หมายเหตุ ตัวอักษรที่ใช้อาจใช้อักษรใดก็ได้ เช่น $\sum_{i=1}^{8} i^3$ หรือ $\sum_{k=1}^{8} k^3$ ต่างก็แทนอนุกรมเดียวกันคือ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ $1^3+2^3+3^3+\ldots+8^3$	130. $2+4+6+8+\ldots+2n+\ldots = \sum_{n=\square}^{\square}$ ———
$\sum_{n=1}^{8} 2n$	131. $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots10\cdot12 = \sum_{i=\square}^{\square}$ ———
$\sum_{i=1}^{10} i(2+i)$	132. เครื่อง $\sum_{i=1}^{n}$ นอกจากจะแสดงถึงอนุกรมแล้ว ในกรณีที่อนุกรมนั้นเป็นอนุกรมจำกัด อนุกรมนั้นย่อมแทนจำนวนใดจำนวนหนึ่งได้ด้วย เช่น $\sum_{k=1}^{4} (2k-1) =$ ——— $=$ ———
$1+3+5+7$ 16	133. $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-3) =$ ——— $=$ ———

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$-2-4+0+16$ 10	134. $\sum_{k=1}^{5}(k^2+3)$ = _____ = _____
$4+7+12+19+28$ 70	135. เครื่องหมาย $\sum_{i=1}^{n}$ นอกจากจะเขียนแทนอนุกรมแล้ว ยังใช้มากในวิชาสถิติ ดังนั้นจำนวนที่ใช้เป็นจำนวนเริ่มต้นจึงไม่จำเป็นต้องเป็น 1 เสมอไป อาจเป็นจำนวนเต็มใด ๆ เช่น $\sum_{i=-2}^{1} 2^{i+3} = 2^{-2+3}+2^{-1+3}+2^{0+3}+2^{1+3}$ = _____ = _____
$2+4+8+16$ 30	136. $\sum_{i=30}^{32}(i+2)$ = _____ = _____
$32+33+34$ 99	137. $\sum_{k=2}^{5}\frac{k+4}{k-1}$ = _____ = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$6 + \frac{7}{2} + \frac{8}{3} + \frac{9}{4}$ $\frac{173}{12}$	138. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{\square}{\sum_{i=\square}^{\square}}$
$\sum_{i=4}^{n} \frac{1}{i}$	คุณสมบัติของ $\sum$ ที่ใช้ในบทเรียนนี้ 139. $\sum_{i=1}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=1}^{n} f(i)$ เมื่อ c เป็นจำนวนคงที่ ตัวอย่าง ให้ $f(x) = x + 2$, $c = 4$ $\therefore f(i) = i + 2$ $\sum_{i=1}^{n} 4f(i) = 4(1+2)+4(2+2)+4(3+2)+\cdots+4(n+2)$ $= 4\cdot3+4\cdot4+4\cdot5+\cdots+4\cdot(n+2)$ —— (1) $\sum_{i=1}^{n} f(i) = (1+2)+(2+2)+(3+2)+\cdots+(n+2)$ $= 3+4+5+\cdots+(n+2)$ $\therefore 4\sum_{i=1}^{n} f(i) = 4\,[3+4+5+\cdots+(n+2)]$ $= 4\cdot3+4\cdot4+4\cdot5+\cdots+4(n+2)$ —— (2) ดังนั้นจะได้ $\sum_{i=1}^{n} 4f(i) \underset{(=/\neq)}{\quad\quad} 4\sum_{i=1}^{n} f(i)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

=	140. $\sum_{i=1}^{6} 3i = 3\sum_{i=1}^{6} i$ $= 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ $=$ _____
63	141. $\sum_{j=1}^{4} 2j^2$ = _____ = _____ = _____
$2\sum_{j=1}^{4} j^2$ $2(1+4+9+16)$ 60	142. $\sum_{k=2}^{5} 6k$ = _____ = _____ = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$6\sum_{k=2}^{5} k$

$6(2+3+4+5)$

84

143.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+b\right] = \sum_{i=1}^{n} f(i)+nb$$

เมื่อ b เป็นจำนวนคงที่

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 2x$, $b = 3$

$\therefore f(i) = 2i$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+b\right] = \sum_{i=1}^{n}(2i+3)$$

$$= (2+3)+(4+3)+\cdots+(2n+3)$$

$$= (2+4+6+\cdots 2n)+\underbrace{(3+3+\cdots+3)}_{n \text{ ตัว}}$$

$$= (2+4+6+\cdots+2n)+3n \quad \text{——(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = 2+4+6+\cdots 2n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + nb = (2+4+6+\cdots+2n)+3n \quad \text{—(2)}$$

ดังนั้นจะได้

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+b\right] \underset{(=/\neq)}{\text{———}} \sum_{i=1}^{n} f(i) + nb$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

=	144. $\sum_{k=1}^{5}(k^2+3) = \sum_{k=1}^{5} k^2 + 3.5$ $= (1+4+9+16+25)+15$ $=$ ———
70	145. $\sum_{i=1}^{4}(10-2i) =$ ——— $=$ ——— $=$ ———
$10.4 - 2\sum_{i=1}^{4} i$ $40-2(1+2+3+4)$ 20	146. $\sum_{i=1}^{4}(5k^2-3) =$ ——— $=$ ——— $=$ ———

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$5\sum_{i=1}^{4} k^2 - 3.4$

$5\ (1+4+9+16) - 12$

138

147. $\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+g(i)\right] = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x + 2$

$\therefore\ f(i) = 2i + 1$

$g(i) = i + 2$

$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+g(i)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[2i+1+i+2\right]$

$= \sum_{i=1}^{n}(3i + 3)$

$= (3+3)+(6+3)+\ldots+(3n+3)$

$= 6+9+\ldots+(3n+3)$ ——(1)

$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n}(2i + 1)$

$= 3+5+7+\ldots+(2n+1)$

$\sum_{i=1}^{n} g(i) = \sum_{i=1}^{n}(i + 2)$

$= 3+4+5+\ldots+(n+2)$

$\sum_{i=1}^{n} f(i)+\sum_{i=1}^{n} g(i) = \left[3+5+7+\ldots+(2n+1)\right] + \left[3+4+5+\ldots+(n+2)\right]$

$= (3+3)+(5+4)+(7+5)+\ldots + \left[(2n+1)+(n+2)\right]$

$= 6+9+12+\ldots+(3n+3)$ —(2)

ดังนั้นจะได้

$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)+g(i)\right] \underset{(=/\neq)}{\quad} \sum_{i=1}^{n} f(i)+ \sum_{i=1}^{n} g(i)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

=	148. $\sum_{i=1}^{5} (3i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^{5} 3i^2 + \sum_{i=1}^{5} 2i$ $= 3\sum_{i=1}^{5} i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} i$ $= 3(_____)+2(_____)$ $= _____$ $= _____$
1+4+9+16+25 1+2+3+4+5 165+30 195	149. $\sum_{j=1}^{4} (2j^2 + 5j + 3) = _____$ $= _____$ $= _____$ $= _____$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\sum_{j=1}^{4} 2j^2 + \sum_{j=1}^{4} 5j + \sum_{j=1}^{4} 3$$

$$2\sum_{j=1}^{4} j^2 + 5\sum_{j=1}^{4} j + 4 \cdot 3$$

$$2(1+4+9+16)+5(1+2+3+4)+12$$

$$60+50+12$$

$$122$$

150.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)-g(i)\right] = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 3x+1$

$g(x) = x+2$

$\therefore f(i) = 3i+1$

$g(i) = i+2$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)-g(i)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[(3i+1)-(i+2)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$= 1+3+5+\cdots+(2n-1) \quad \text{—(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n}(3i+1)$$

$$= 4+7+10+\cdots+(3n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(i) = \sum_{i=1}^{n}(i+2)$$

$$= 3+4+5+6+\cdots+(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} g(i) = \left[4+7+10+\cdots+(3n+1)\right] - \left[3+4+5+\cdots+(n+2)\right]$$

$$= (4-3)+(7-4)+(10-5)+\cdots+(3n+1-n-2)$$

$$= 1+3+5+\cdots+(2n-1) \quad \text{—(2)}$$

ดังนั้นจะได้

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)-g(i)\right] \underset{(=\neq)}{\qquad} \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

=	151. $\sum_{i=1}^{3}(i-4)^2 = \sum_{i=1}^{3}(i^2-8i+16)$ $= \sum_{i=1}^{3} i^2 - \sum_{i=1}^{3} 8i + \sum_{i=1}^{3} 16$ $= \sum_{i=1}^{3} i^2 - 8\sum_{i=1}^{3} i + 16 \cdot 3$ = _____ = _____ = _____
$(1+4+9)-8(1+2+3)+48$ $14-48+48$ 14	152. $\sum_{n=1}^{2}(n-1)^3$ = _____ = _____ = _____ = _____ = _____ = _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\sum_{n=1}^{2}(n^3-3n^2+3n-1)$

$\sum_{n=1}^{2}n^3-\sum_{n=1}^{2}3n^2+\sum_{n=1}^{2}3n-\sum_{n=1}^{2}1$

$\sum_{n=1}^{2}n^3-3\sum_{n=1}^{2}n^2+3\sum_{n=1}^{2}n-1\cdot 2$

$(1+8)-3(1+4)+3(1+2)-2$

$9-15+9-2$

1

153.

ในการหาผลบวกถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม

สูตรที่ใช้เสมอคือ $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$, $\sum_{i=1}^{n} i^3$

สูตร $\sum_{i=1}^{n} i$ นิยมเขียนแทนด้วย $\sum n$

$\sum n=1+2+3+4+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$ ——(1)

หรืออาจเขียนใหม่ได้ดังนี้คือ

$\sum n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$ ——(2)

รวมพจน์ที่ตรงกันของ (1) และ (2) ตามลำดับจะได้

$2\sum n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ วงเล็บ}}$

$= n(n+1)$

$\therefore \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ ค่าของ $\sum 50$ = _____

= _____

$\frac{50(50+1)}{2}$

1275

154. $\sum_{i=1}^{n} i^2$ นิยมเขียนแทนด้วย $\sum n^2$

$\sum n^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

$\therefore (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

$\therefore n^3-(n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

แทนค่า

ถ้า n=1, จะได้ $(1)^3-(1-1)^3 = 3(1)^2-3(1) + 1$

ถ้า n=2, จะได้ $(2)^3-(2-1)^3 = 3(2)^2-3(2) + 1$

ถ้า n=3, จะได้ $(3)^3-(3-1)^3 = 3(3)^2-3(3) + 1$

ถ้า n=4, จะได้ $(4)^3-(4-1)^3 = 3(4)^2-3(4) + 1$

ถ้า n = 1,2,3,4 เมื่อเอาบวกกันแล้วจะได้

$(1)^3-(0)^3+(2)^3-(1)^3+(3)^3-(2)^3+(4)^3-(3)^3$

$= 3(1^2+2^2+3^2+4^2)-3(1+2+3+4)+4$

$\therefore (4)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+4^2)-3(1+2+3+4)+4$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า n= 1,2,3,...10 เมื่อเอาบวกกันแล้วจะได้

$(10)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2)-3(1+2+3+\ldots+10)+10$

∴ ถ้า $n = 1,2,3,\ldots,n$ เมื่อเอาบวกกันแล้วจะได้

$$n^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-3(1+2+3+\ldots+n)+n$$

$$n^3 = 3\sum n^2 - 3\sum n + n$$

$$3\sum n^2 = n^3 + 3\sum n - n$$

$$3\sum n^2 = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n; \text{ แทนค่า } \sum n$$

$$= \frac{2n^3+3n(n+1)-2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ดังนั้น

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

∴ ค่าของ $\sum (12)^2$ = _____

= _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{12(12+1)(24+1)}{6}$

650

155.

สูตร $\sum_{i=1}^{n} i^3$ นิยมเขียนแทนด้วย $\sum n^3$

$$\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

$$1^3 = 1 = (1)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right\}^2$$

$$1^3+2^3 = 9 = (3)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right\}^2$$

$$1^3+2^3+3^3 = 36 = (6)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right\}^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = (10)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\right\}^2$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+10^3 = (55)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11\right\}^2$$

ดังนั้น

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3 = \left\{\frac{1}{2}\cdot n(n+1)\right\}^2$$

$$\therefore \sum n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

หรือ $n^3 =$ _____

$\therefore$ ค่าของ $\sum 9^3 =$ _____

$=$ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$(\sum n)^2$ $\left\{\frac{9(9+1)}{2}\right\}^2$ 2025	156. $\sum(n^2-n+1) = \sum n^2 - \sum n + \sum 1$ $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n$ $= \frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+6n}{6}$ $= \frac{n(n+1)(2n+1-3)+6n}{6}$ $= \frac{n(n+1)2(n-1)+6n}{6}$ $= \frac{n(n^2-1)+3n}{3}$ $= $ _____
$\frac{n(n^2+2)}{3}$	157. $\sum_{n=1}^{5} (n^3-2n) = \sum_{n=1}^{5} n^3 - 2 \sum_{n=1}^{5} n$ $= $ _____ $= $ _____ $= $ _____ $= $ _____ $= $ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\left(\sum_{n=1}^{5} n\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{5} n$$

$$\left\{\frac{5(5+1)}{2}\right\} - \left\{\frac{2.5(5+1)}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{4}(5.6)^2 - 5.6$$

$$\frac{900}{4} - 30$$

195

158. ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ถ้าพจน์แรกของอันดับเลขคณิตคือ a_1 และ d เป็นผลต่างร่วม

S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต นั้นแล้ว

$$S_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+\{a_1+(n-1)d\} \quad \text{—(1)}$$

หรืออาจเขียนใหม่ได้ดังนี้ คือ

$$S_n = \{a_1+(n-1)d\} + \{a_1+(n-2)d\} + \cdots + a_1 \quad (2)$$

รวมพจน์ที่ตรงกันของ (1) และ (2) ตามลำดับ จะได้

$$2S_n = \{a_1+a_1+(n-1)d\} + \{a_1+d+a_1+(n-2)d\} + \cdots + \{a_1+(n-1)d + a_1\}$$

$$= \underbrace{\{2a_1+(n-1)d\} + \{2a_1+(n-1)d\} + \cdots + \{2a_1+(n-1)d\}}_{\text{มีจำนวนพจน์ทั้งหมด } n \text{ พจน์}}$$

$$= n\{2a_1+(n-1)d\}$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$= \frac{n}{2}\{a_1+a_1+(n-1)d\}$$

แต่ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ดังนั้น $S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_n\}$

นั่นคือ

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

หรือ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

	ดังนั้น ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7+15+23+\ldots$ คือ _____
115 (วิธีคิด : $a_1=7,\ d=8$ $S_5=\frac{5}{2}\{2\cdot 7+4\cdot 8\}$ $=115$)	159. ผลบวกของอันดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 6 ผลต่างร่วมเป็น 4 และพจน์สุดท้ายคือ 26 มีค่าเท่ากับ _____
96 วิธีคิด : $a_n = 26$ $\therefore 26 = 6+(n-1)4$ $= 6+4n-4$ $\therefore n = 6$ $\therefore S_6 = \frac{6}{2}(6+26)=96$	160. ผลบวกของ 100 พจน์แรกของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเป็นเลขคี่ มีค่าเท่ากับ _____
อันดับคือ $1,3,5,7,9,\ldots,199$ $S_{100} = \frac{100}{2}(1+199)$ $= 10,000$	161. ถ้า $1+2+3+\ldots+n = 153$ แล้ว $n =$ _____

17

[วิธีคิด

$S_n = \frac{n}{2}(1+n) = 153$

$n^2+n-306 = 0$

$(n-17)(n+18) = 0$

$n = 17$]

162. ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ถ้า S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรกคือ a_1 และอัตราส่วนร่วม r แล้ว

$$S_n = a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1} \quad \text{_____(1)}$$

เอา r คูณทั้ง 2 ข้างจะได้

$$r\cdot S_n = a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^n \quad \text{_____(2)}$$

(1) - (2) จะได้

$$S_n-r\cdot S_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

เนื่องจาก $S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_1r^{n-1}\cdot r}{1 - r}$

แต่ $a_n = a_1r^{n-1}$

ดังนั้น $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}$

นั่นคือ

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

หรือ $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}$

ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต 8+4+2+1+... มีค่าเท่ากับ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{127}{8}$ [วิธีคิด :- $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$ $S_7 = \frac{a_1(1-r^7)}{1-r}$ $= \frac{8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\frac{1}{2}}$ $= \frac{8\left[\frac{128-1}{128}\right]}{\frac{1}{2}}$ $= \frac{127}{8}$]	163. ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \cdots$ มีค่าเท่ากับ _____
$\frac{121}{27}$	164. ผลบวก 4 พจน์แรกของอันดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$ มีค่าเท่ากับ _____
$\frac{255}{4}$	165. ผลบวกของพจน์แรกและพจน์ที่สองของอันดับเรขาคณิตมีค่าเท่ากับ -3 นั่นคือ $a_1 + a_1 r = -3$ _____ (1) และผลบวกของพจน์ที่ห้ากับพจน์ที่หกมีค่าเท่ากับ $\frac{-3}{16}$ นั่นคือ $a_1 r^4 + a_1 r^5 = \frac{-3}{16}$ _____ (2) จาก (1) และ (2) จะได้ a_1 = _____ r = _____ $\therefore$ ผลบวก 5 พจน์แรก = S_5 = _____

-2 หรือ - 6 $\frac{1}{2}$ หรือ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{31}{8}$	166. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ ผลบวกของอนุกรมจำกัดย่อมหาค่าได้แน่นอนเสมอ แม้บางอนุกรมจะหาไม่ได้โดยใช้สูตรอย่างง่าย ก็อาจหาได้โดยใช้เครื่องคำนวณ ส่วนอนุกรมอนันต์นั้นนอกจากอนุกรมที่แต่ละพจน์เป็น 0 แล้ว การจะหาผลบวกให้ได้แน่นอนย่อมทำได้ยาก ทั้งนี้เพราะไม่อาจหาพจน์สุดท้ายได้
	167. อนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$ **เป็นอนุกรมเรขาคณิต** ถ้ากำหนดให้ $S_1, S_2, S_3, \ldots$ แทนผลบวกของ 1, 2, 3, ... พจน์แรกของอนุกรมตามลำดับ กล่าวคือให้ $S_1 = \frac{1}{10}$ $S_2 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100} = \frac{11}{100}$ $S_3 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000} = \frac{11}{100}+\frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}$ $\vdots$ $S_n = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{(10)^n} = \frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}$ $= \frac{10^n-1}{9(10)^n}$ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ <u>แต่ละจำนวน</u> เรียกว่า <u>ผลบวกพาเชียลของอนุกรม</u> และเรียก $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ ว่า_____ ผลบวกพาเชียลของอนุกรม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อันดับ	168. อันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ คือ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \ldots, \frac{10^n-1}{9(10)^n}, \ldots$ ถ้าหาลิมิตของอันดับนี้จะได้ $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n-1}{9(10)^n} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty} \frac{10^n-1}{10^n}$ $= \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{10^n}\right]$ $=$ _____
$\frac{1}{9}$	169. จากกรอบ 168 จะเห็นว่า $\frac{1}{9}$ เป็น _____ ของอันดับผลบวกพาเชียล ของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ และถือว่า $\frac{1}{9}$ เป็นผลบวกของอนุกรมอนันต์นี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ลิมิต

170.

อนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

ผลบวกพาเชียลของอนุกรมนี้ คือ

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

-

-

-

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$ _____

$2(1 - \frac{1}{2^n})$

[อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=1$, $r = \frac{1}{2}$

$\therefore S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$= \frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$]

171.

อันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

คือ $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots, 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \ldots$

$\therefore \lim_{n\to\infty} 2(1 - \frac{1}{2^n}) =$ _____ $\lim_{n\to\infty}$ (_____)

= _____

ดังนั้น _____ เป็นผลบวกของอนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

$2 \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n})$ 2 2	172. อนุกรม $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=1$, $r=-1$ $\therefore S_n = \frac{1\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$ $\therefore$ อันดับของผลบวกพาเชียลของอนุกรมนี้คือ $1,0,1,0,\ldots, \frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}, \ldots$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\{1-(-1)^n\} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{1-(-1)^n\}$ = _____
ไม่มีลิมิต (หาค่าไม่ได้)	173. เนื่องจากอันดับ $1,0,1,0,\ldots$ ไม่มีลิมิต ดังนั้นจึงถือว่าอนุกรม $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ไม่อาจหาผลบวกได้ นั่นคือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด หมายถึง ลิมิตของอันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม เมื่ออันดับนั้นมีลิมิต
	174. อนุกรมที่อาจหาผลบวกได้ เรียกว่า อนุกรมคอนเวอเจนต์ ส่วนอนุกรมที่ไม่อาจหาผลบวกได้เรียกว่า_____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อนุกรมไดเวอเจนต์	175. อนุกรม $1+3+5+7+\cdots$ เป็นอนุกรม_____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)
ไดเวอเจนต์ (ดูคำอธิบายกรอบ 176)	176. อันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม $1+3+5+7+9+\cdots$ คือ $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ $\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^2$ เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $S_n \longrightarrow \infty$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าไม่ได้ คือ ไม่มีลิมิต $\therefore$ อนุกรม $1+3+5+7+9 \ldots$ ไม่อาจหาลิมิตได้ อนุกรมนี้จึงเป็นอนุกรมไดเวอเจนต์
	177. อันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots$ คือ_____ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}$ _____ $=$ _____ แสดงว่าอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18} \ldots$ เป็นอนุกรม_____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{13}{18}, \ldots, \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ $\lim_{n \to \infty} \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ $\frac{3}{4}$ คอนเวอเจนต์	178. อนุกรม $20 + 4 + \frac{4}{5} + \ldots$ เป็นอนุกรม _____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)
คอนเวอเจนต์	179. อนุกรม $20 + 4 + \frac{4}{5} + \ldots$ มีผลบวกเป็น _____
25	180. อนุกรม $5 + 5 + 5 + 5 + \ldots$ เป็นอนุกรม _____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)
ไดเวอเจนต์ [$\because S_n = 5n$ $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 5n$ หาค่าไม่ได้]	181. อนุกรม $2 + (-1) + (-4) + \ldots$ เป็นอนุกรม _____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไดเวอเจนต์

[$\because S_n = \frac{n}{2}(7-3n)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(7-3n)$

ซึ่งหาค่าไม่ได้]

182.

ในการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ วิธีที่จะหาผลบวกโดยการพิจารณาอันดับผลบวกพาเชียลนั้น จะต้องหาพจน์ที่ n ของผลบวกพาเชียลให้อยู่ในรูปของฟังชั่น n

พจน์ที่ n ของอันดับผลบวกพาเชียลที่เราจะหาได้ถูกต้องแน่นอนเสมอคือ อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

โดยเฉพาะอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรกคือ a_1 และ r เป็นอัตราส่วนร่วม ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\ldots+a_1r^{n-1}+\ldots$$

อันดับของผลบวกพาเชียล คือ อันดับที่มีพจน์ทั่วไป เป็น S_n โดยที่

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_1r^n}{1-r}$$

$$= \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1r^n}{1-r}$$

ถ้า $|r| < 1$ $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

ดังนั้น ลิมิตของอันดับผลบวกพาเชียล คือ $\frac{a_1}{1-r}$

แสดงว่า อนุกรมอนันต์เรขาคณิตที่มี $|r| < 1$ นั้นจะเป็นอนุกรมคอนเวอเจนต์ที่มีผลบวกเป็น_____

เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

$\frac{a_1}{1-r}$	183. อนุกรม $16+12+9+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1=16$, $r=\frac{3}{4}$ จึงเป็นอนุกรมคอนเวอเจนต์ที่มีผลบวก $=\frac{a_1}{1-r}=$ _____
64	184. อนุกรม $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$ เป็นอนุกรม_____ ที่มีผลบวกเป็น_____ _____ (คอนเวอเจนต์/ไดเวอเจนต์)
คอนเวอเจนต์ 3	185. ประโยชน์ที่ได้จากอนุกรมคือ การเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน ตัวอย่าง $0.3^{\cdot}=0.3333\ldots$ $=0.3+0.03+0.003+\ldots$ $=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ $=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรกคือ $a_1=\frac{3}{10}$ และมีอัตราส่วนร่วม $r=\frac{1}{10}$ ซึ่งน้อยกว่า 1 $\therefore$ ผลบวกของอนุกรมนี้ $=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=$ _____

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{1}{3}$	186. $5.4\dot{2}7^{\bullet} = 5.427272727...$ $5.4272727... = 5.4+0.027+0.00027+0.0000027+...$ $0.027+0.00027+0.0000027+...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มีพจน์แรกคือ $a_1 = 0.027$ และมีอัตราส่วนร่วม $r = 0.01$ ซึ่งน้อยกว่า 1 ดังนั้น $0.027+0.00027+0.0000027+... = \frac{0.027}{1-0.01}$ $= \frac{0.027}{0.99}$ $= \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$ $\therefore 5.\dot{4}2\dot{7} = 5.4+\frac{3}{110}$ $= \frac{\square}{\square}$
$\frac{597}{110}$	187. $0.6\dot{1}0\dot{4} = 0.6104104104...$ $= 0.6+0.0104+0.0000104+...$ $= 0.6 + \frac{\square}{\square}$ $= \frac{\square}{\square}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\frac{104}{9990}$ $\frac{6098}{9990}$	188. $0.\dot{2}\dot{1} = 0.212121\ldots$ $= 0.21 + 0.0021 + 0.000021 + \ldots$ $= \frac{0.21}{1-(.01)}$ $= \frac{\square}{\square}$
$\frac{21}{99}$	189. $7.2\dot{5}\dot{6} = 7.2565656\ldots$ $= 7.2 + 0.056 + 0.00056 + \ldots$ $= 7.2 + \frac{\square}{\square}$ $= \frac{\square}{\square}$
$\frac{56}{990}$ $\frac{7184}{990}$	190. $4.3\dot{8}\dot{7} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{4344}{990}$	

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

140

แบบสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียน

เวลา 1 ชั่วโมง

คำชี้แจง

1. ให้เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วทำเครื่องหมาย × ลงในวงเล็บใต้ตัวอักษรที่ต้องการในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{8}$ จำนวนใดมีค่ามากที่สุด

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{2}{5}$

ค. $\frac{4}{7}$ ง. $\frac{7}{8}$

คำตอบ

ก.	ข.	ค.	ง.
( )	( )	(×)	( )

2. ถ้าต้องการจะเปลี่ยนคำตอบ ให้ทำเครื่องหมาย ≍ ทับคำตอบเดิมที่ไม่ต้องการ แล้วใส่เครื่องหมาย × ใต้ตัวอักษรที่ต้องการ

ตัวอย่าง จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าจะเปลี่ยนคำตอบเป็นข้อ ง. ได้ดังนี้

คำตอบ

ก.	ข.	ค.	ง.
( )	( )	(≍)	(×)

3. ข้อสอบมีทั้งหมด 45 ข้อ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบก่อนและหลังเรียนบทเรียน

1. ข้อใดจัดว่าเป็นอันดับ ?

   ก. เซตของจำนวนนับทั้งหมด

   ข. เซตของจำนวนตักยะทั้งหมด

   ค. เซตของจำนวนอตักยะทั้งหมด

   ง. เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

   จงพิจารณาอันดับต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามในข้อ 2 - 3

   1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{64}$

   2) $1, 3, 6, 10, \cdots, \frac{1}{2}n(n-1), \cdots$

   3) $1, 2, 3, 2, \cdots$

   4) $-5, -4, -3, -2, -1$

2. อันดับในข้อใดเป็นอันดับจำกัด ?

   ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2

   ข. ข้อ 2 และ ข้อ 3

   ค. ข้อ 3 และ ข้อ 4

   ง. ข้อ 4 และ ข้อ 1

3. อันดับในข้อใดเป็นอันดับอนันต์ ?

   ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2

   ข. ข้อ 2 และ ข้อ 3

   ค. ข้อ 3 และ ข้อ 4

   ง. ข้อ 4 และ ข้อ 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. ข้อใดเป็นอันดับจำกัด ?

ก. อันดับของจำนวนเต็มตั้งแต่ -12 ถึง 738

ข. อันดับของจำนวนเต็มลบทั้งหมด

ค. อันดับของจำนวนนับทั้งหมด

ง. อันดับของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

5. สี่พจน์แรกของอันดับ $a_n = \frac{n}{2n+1}$ คืออะไร ?

ก. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}$

ข. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}$

ค. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \ldots, \frac{n}{2n+1}$

ง. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}$

6. พจน์ที่ 7 ของอันดับ 24, 8, $\frac{8}{3}$, ... คืออะไร ?

ก. $\frac{8}{27}$ ข. $\frac{8}{81}$

ค. $\frac{8}{243}$ ง. $\frac{8}{729}$

7. พจน์ที่ n ของอันดับ 1, 5, 13, 29, ... คืออะไร ?

ก. $2^n + 5$ ข. $2^n - 5$

ค. $2^{n+1} - 3$ ง. $2^n(n-1) + 1$

8. พจน์ที่ n ของอันดับ 0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, ... คืออะไร ?

ก. $(-1)^n + 1$ ข. $n(-1)^n + 1$

ค. $2[(-1)^n + 1]$ ง. $n[1 + (-1)^n]$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

9. ข้อใดเป็นอันดับเลขคณิต ?

ก. -8, -2, 4, 10, ...

ข. 0, 2, 6, 12,...

ค. 1, 3, 6, 10,...

ง. 1, 3, 9, 27,...

10. ถ้าพจน์ที่ 4 และที่ 7 ของอันดับเลขคณิตเท่ากับ 18 และ 16 ตามลำดับ พจน์ที่ 1 และผลต่างร่วม คืออะไร ?

ก. 20, $\frac{2}{3}$

ข. -20, $\frac{2}{3}$

ค. 20, $\frac{-2}{3}$

ง. -20, $\frac{-2}{3}$

11. พจน์ถัดไปของอันดับเลขคณิต $3a + 2b$, $2a + 4b$, $a + 6b$,. . . คืออะไร ?

ก. $-a + 8b$

ข. $-a + 4b$

ค. $8b$

ง. $4b$

12. พจน์ที่เท่าใดของอันดับเลขคณิต -1, -6, -11,... จึงจะเท่ากับ -176 ?

ก. 35

ข. 36

ค. 37

ง. 38

13. ถ้า 5 และ 29 เป็นพจน์สองพจน์ของดันดับเลขคณิต อีก 5 พจน์ซึ่งเรียงอยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองที่กำหนดให้นี้คืออะไร ?

ก. 9, 14, 17, 21, 25

ข. 9, 13, 17, 22, 25

ค. 9, 13, 18, 21, 25

ง. 9, 13, 17, 21, 25

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

14. ข้อใดเป็นอันดับเรขาคณิต ?

ก. 1, -1, 1, -1,...

ข. 1, 3, 5, 9,...

ค. 3, 0.3, 0.003,...

ง. $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}, \ldots$

15. จากอันดับ $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \ldots$ อัตราส่วนร่วมของอันดับคืออะไร?

ก. $\sqrt{2}$

ข. $\sqrt{3}$

ค. 2

ง. 3

16. ถ้าผลบวกของ 3 พจน์แรกในอันดับเรขาคณิต คือ -3 และผลคูณคือ 8 อันดับเรขาคณิตนี้คืออะไร ?

ก. $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$

ข. -4, 2, -1, 2,...

ค. -1, 2, -4, 6,...

ง. -1, 2, -4, 8,...

17. สี่พจน์แรกของอันดับเรขาคณิต ที่มีพจน์แรกเป็น $\frac{3}{4}$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 4 ได้แก่อะไร?

ก. $\frac{3}{4}$, 3, 12, 48

ข. 3, 12, 48, 192

ค. $\frac{3}{4}, \frac{19}{4}, \frac{35}{4}, \frac{51}{4}$

ง. $\frac{19}{4}, \frac{35}{4}, \frac{51}{4}, \frac{67}{4}$

18. พจน์ที่ n ของอันดับเรขาคณิต $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$ คืออะไร?

ก. $\frac{5}{6} \cdot -2^{n-1}$

ข. $\frac{5}{6}(-2)^{n-1}$

ค. $-\frac{5}{6}(2)^{n-1}$

ง. $-\frac{5}{6}(2^{n-1})$

19. พจน์ที่ n ของอันดับ -24, 12, -6,... คืออะไร ?

ก. $(-1)^n \cdot \frac{24}{2n}$

ข. $(-1)^n \cdot \frac{24}{2^n}$

ค. $(-1)^n \cdot \frac{24}{2^{n+1}}$

ง. $(-1)^n \cdot \frac{24}{2^{n-1}}$

20. จำนวนใดที่อยู่ระหว่าง -7 และ -189 ที่จะทำให้จำนวนทั้งสามอยู่ในอันดับเรขาคณิต?

ก. $20\sqrt{3}$ ข. $21\sqrt{3}$

ค. $23\sqrt{3}$ ง. $27\sqrt{3}$

21 ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ แทน "L เป็นลิมิตของอันดับ a_n" หมายถึงอะไร ?

ก. เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับจะเท่ากับ L

ข. เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับจะเข้าใกล้จำนวนคงที่ L

ค. เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับจะเข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง คือ L

ง. เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ค่าของพจน์ที่ n ของอันดับจะเข้าใกล้จำนวนคงที่จำนวนหนึ่ง คือ L จำนวนเดียวเท่านั้น

22. อันดับที่มีลิมิตเรียกว่าอันดับอะไร ?

ก. อันดับเลขคณิต ข. อันดับเรขาคณิต

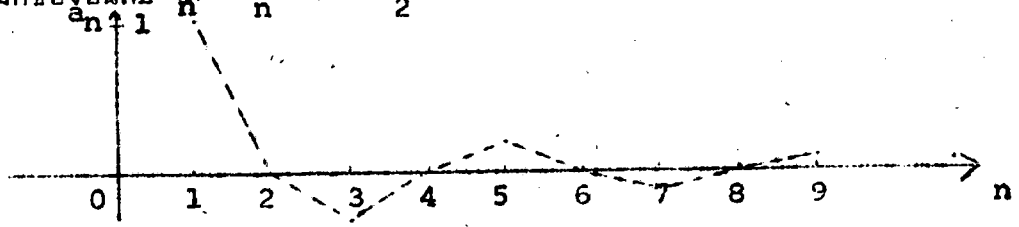
ค. อันดับคอนเวอเจนต์ ง. อันดับไดเวอเจนต์

23. อันดับที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า อันดับอะไร ?

ก. อันดับเลขคณิต ข. อันดับเรขาคณิต

ค. อันดับคอนเวอเจนต์ ง. อันดับไดเวอเจนต์

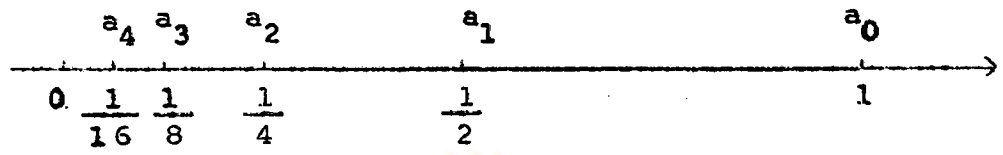
24. ลิมิตของอันดับ $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ มีค่าเท่าใด ?



ก. 0 ข. 1

ค. 9 ง. หาค่าไม่ได้

25. ลิมิตของอันดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ มีค่าเท่าใด ?



ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. หาค่าไม่ได้

26. ลิมิตของอันดับ $a_n = \frac{3 + 2n}{n}$ เท่ากับเท่าใด ?

ก. 3 ข. 2

ค. 1 ง. หาค่าไม่ได้

27. $a_n = \frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2}$ เป็นอันดับอะไร ?

ก. อันดับเลขคณิต ข. อันดับเรขาคณิต

ค. อันดับคอนเวอเจนต์ ง. อันดับไดเวอเจนต์

28 $a_n = n\left[1 + (-1)^n\right]$ เป็นอันดับอะไร ?

ก. อันดับเลขคณิต ข. อันดับเรขาคณิต

ค. อันดับคอนเวอเจนต์ ง. อันดับไดเวอเจนต์

29. ข้อใดจัดว่าเป็นอนุกรม ?

ก. $1 + 2 + 4 + 6 + \cdots$

ข. $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \cdots$

ค. $3 + 6 + 9 + 15 + \cdots$

ง. $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ ตอบคำถามในข้อ 30 - 33

1) $6 + 4 + 2 + 0 - 2 - \ldots$

2) $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 36$

3) $3 + 8 + 15 + 24 + 35 + \ldots + n(2 + n)$

4) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots + 3^{n-1} + \ldots$

30. อนุกรมในข้อใดเป็นอนุกรมจำกัด ?

ก. ข้อ 2
ข. ข้อ 3
ค. ข้อ 2 และ ข้อ 3
ง. ข้อ 2 และข้อ 4

31. อนุกรมในข้อใดเป็นอนุกรมอนันต์?

ก. ข้อ 1
ข. ข้อ 4
ค. ข้อ 1 และ ข้อ 3
ง. ข้อ 1 และ ข้อ 4

32. อนุกรมในข้อใดเป็นอนุกรมเลขคณิต?

ก. ข้อ 1
ข. ข้อ 2
ค. ข้อ 3
ง. ข้อ 4

33. อนุกรมในข้อใดเป็นอนุกรมเรขาคณิต?

ก. ข้อ 1
ข. ข้อ 2
ค. ข้อ 3
ง. ข้อ 4

34. ข้อใดต่อไปนี้ที่ไม่เป็นจริง ?

ก. $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

ข. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - k) = \sum_{i=1}^{n} x_i - nk$

ค. $\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$

ง. $\sum_{i=1}^{n} 5x_i = 5\sum_{i=1}^{n} x_i$

35. $\sum_{i=1}^{5}(i+5)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด?

ก. 40 ข. 34

ค. 27 ง. 19

36 ผลบวกของอันดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 6 ผลต่างร่วมเป็น 4 และพจน์สุดท้ายเท่ากับ 26 คือจำนวนอะไร ?

ก. 128 ข. 96

ค. 86 ง. 64

37. ผลบวก n พจน์ของอันดับเรขาคณิต 2, -4, 8, ... คือจำนวนอะไร ?

ก. $2\left[1-(-2)^n\right]$ ข. $\frac{2}{3}\left[(1-2^n)\right]$

ค. $\frac{2}{3}\left[1-(-2)^n\right]$ ง. $\frac{3}{2}\left[1-(-2)^n\right]$

38. ผลบวกพาเชียลของอนุกรม $0+3+8+15+24+\ldots$ คือข้อใด ?

ก. $S_2 = 3$ ข. $S_3 = 8$

ค. $S_4 = 15$ ง. $S_5 = 24$

39. อันดับผลบวกพาเชียล ของอนุกรม $5+5+5+5+\ldots$ คืออะไร?

ก. 5, 5, 5, 5, ... ข. $5+5+5+5+\ldots$

ค. 5, 10, 15, 20, ... , 5n ง. $5+10+15+20+\ldots+5n$

40 อันดับผลบวกพาเชียลของอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$ คืออะไร?

ก. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$ ข. $\frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{13}{18}, \ldots, \frac{3^n-1}{4.3^{n-1}}$

ค. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$ ง. $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{13}{18}+\ldots+\frac{3^n-1}{4.3^{n-1}}+\ldots$

41. ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ เป็นเท่าใด ?

ก. 2 ข. 1

ค. 0 ง. หาค่าไม่ได้

42. อนุกรม $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ เป็นอนุกรมอะไร ?

ก. อนุกรมเลขคณิต ข. อนุกรมเรขาคณิต

ค. อนุกรมคอนเวอเจนต์ ง. อนุกรมไดเวอเจนต์

43. อนุกรม $3 + 2 + \frac{4}{3} + \ldots + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$ เป็นอนุกรมอะไร?

ก. อนุกรมจำกัด ข. อนุกรมเลขคณิต

ค. อนุกรมคอนเวอเจนต์ ง. อนุกรมไดเวอเจนต์

44. ถ้า $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{3}{2}$ และ

$a - ar + ar^2 - ar^3 + \ldots = \frac{3}{4}$ แล้ว

a และ r มีค่าเท่าใด ?

ก. $1, \frac{1}{3}$ ข. $1, -\frac{1}{3}$

ค. $-1, \frac{1}{3}$ ง. $-1, -\frac{1}{3}$

45. ถ้าเขียน $0.6\dot{1}0\dot{4}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนจะได้จำนวนอะไร ?

ก. $\frac{6104}{9900}$ ข. $\frac{6098}{9900}$

ค. $\frac{6104}{9990}$ ง. $\frac{6098}{9990}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 1 ตารางหาตัวกลางเลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

X	f	fX	X^2	fX^2
55	2	110	3025	6050
54	1	54	2916	2916
51	1	51	2601	2601
50	3	150	2500	7500
49	3	147	2401	7203
48	3	144	2304	6912
47	6	282	2209	13254
46	12	552	2116	25392
45	11	495	2025	22275
44	6	264	1936	11616
43	9	387	1849	16641
42	3	126	1764	5292
41	1	41	1681	1681
40	1	40	1600	1600
39	2	78	1521	3042
38	3	114	1444	4332
37	2	74	1369	2738
36	1	36	1296	1296
35	5	175	1225	6125
34	1	34	1156	1156

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 1 (ต่อ)

X	f	fX	X^2	fX^2
33	3	99	1089	3267
30	2	60	900	1800
29	2	58	841	1682
28	1	28	784	784
21	1	21	441	441
	85	3620		157596

จากข้อมูลในตารางที่ 1 หาตัวกลางเลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบได้ดังนี้

ก. หาตัวกลางเลขคณิต

จากสูตร $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$

$= \frac{3620}{85}$

$= 42.588$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากสูตร $S.D. = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{157596}{85} - \left(\frac{3620}{85}\right)^2}$

$= \sqrt{1854.071 - (42.588)^2}$

$= \sqrt{1854.071 - 1813.738}$

$= \sqrt{40.333}$

$= 6.3508$

การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

จากสูตร $r_{tt} = \frac{n\,(S.D.)^2 - \bar{X}\,(n - \bar{X})}{(S.D.)^2(n - 1)}$

$\bar{X} = 42.588$ (จากตารางที่ 1)

$(S.D.)^2 = 40.333$ (จากตารางที่ 1)

$n =$ จำนวนข้อของแบบสอบเท่ากับ 67 ข้อ

$$r_{tt} = \frac{67(40.333) - 42.588(67 - 42.588)}{(40.333)\,(66)}$$

$$= \frac{2702.311 - 42.588\,(24.412)}{2661.978}$$

$$= \frac{2702.311 - 1039.658}{2661.978}$$

$$= \frac{1662.653}{2661.978}$$

$$= 0.625$$

นั่นคือ แบบสอบที่สร้างขึ้นมีความเชื่อมั่น 0.625

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) ของข้อของแบบสอบที่เลือกมาใช้ในการวิจัย

ให้ N = ข้อของแบบสอบที่ได้เลือกมาใช้ในการวิจัย

N	P_H	P_L	p	r
1	78.3	26.1	.52	.52
2	91.3	43.5	.70	.54
3	95.7	39.1	.73	.66
4	73.9	13.1	.42	.61
5	86.9	43.5	.66	.46
6	91.3	65.2	.79	.37
7	78.3	56.5	.67	.25
8	73.9	30.4	.52	.44
9	91.3	65.2	.79	.37
10	91.3	65.2	.79	.37
11	91.3	65.2	.79	.37
12	91.3	60.9	.78	.41
13	91.3	65.2	.79	.37
14	78.3	26.1	.52	.52
15	82.6	65.6	.74	.21
16	52.2	26.1	.39	.28
17	91.3	60.9	.78	.41
18	95.7	56.5	.79	.57
19	86.9	56.8	.73	.38

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 2 (ต่อ)

N	P_H	P_L	p	r
20	86.3	43.5	.66	.46
21	52.2	26.1	.39	.28
22	86.3	65.2	.76	.28
23	82.6	68.2	.74	.23
24	82.6	43.5	.65	.42
25	47.8	21.7	.35	.29
26	43.5	21.7	.32	.24
27	56.5	34.8	.45	.21
28	43.5	21.7	.32	.24
29	82.6	65.2	.74	.23
30	43.5	21.7	.32	.24
31	34.8	17.4	.25	.22
32	65.2	39.1	.52	.26
33	100	39.1	.77	.76
34	43.5	30.4	.37	.15
35	69.6	47.8	.59	.23
36	86.3	47.8	.68	.43
37	69.6	34.8	.53	.35
38	69.6	30.4	.50	.40
39	82.6	30.4	.57	.54

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 2 (ต่อ)

N	P_H	P_L	p	r
40	65.2	26.1	.45	.40
41	52.2	8.7	.28	.53
42	34.8	17.4	.25	.22
43	69.6	30.4	.50	.40
44	39.1	17.4	.28	.28
45	56.5	26.1	.41	.32

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3 ตารางแสดงผลการทดลองใช้บทเรียนแบบโปรแกรมขั้นกลุ่มเล็ก

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
1	16	42	344
2	7	34	301
3	11	37	339
4	11	38	310
5	3	39	298
6	13	40	340
7	8	32	301
8	2	30	327
9	8	35	309
10	5	29	300
รวม	84	346	3169
เฉลี่ย	8.4	34.6	
เฉลี่ยร้อยละ	18.67	76.89	91.33

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบก่อนและหลังการเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
1	14	33	19	361	330
2	10	27	17	289	313
3	16	36	20	400	323
4	11	36	25	625	344
5	17	23	6	36	293
6	7	24	17	289	338
7	19	37	18	324	331
8	6	26	20	400	339
9	9	17	8	64	300
10	13	37	24	576	336
11	7	30	23	529	343
12	15	36	21	441	339
13	12	35	23	529	310
14	16	39	23	529	324
15	12	30	18	324	299
16	8	27	19	361	277
17	13	39	26	676	317
18	12	30	18	324	292
19	19	36	17	289	331

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน(X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน(X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
20	12	31	19	361	311
21	18	40	22	484	317
22	13	40	27	729	305
23	11	30	19	361	332
24	14	36	22	484	346
25	11	40	29	841	329
26	18	27	9	81	300
27	20	39	19	361	298
28	17	31	14	196	305
29	10	22	12	144	310
30	10	30	20	400	339
31	13	32	19	361	340
32	14	32	18	324	299
33	6	26	20	400	306
34	11	38	27	729	317
35	17	33	16	256	302
36	10	38	28	784	327
37	7	21	14	196	312
38	11	32	21	441	322
39	7	36	29	841	331

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน(X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
40	10	36	26	676	328
41	8	39	31	961	340
42	5	21	16	256	300
43	16	29	13	169	318
44	15	32	17	289	329
45	12	27	15	225	304
46	11	34	23	529	319
47	22	39	17	289	308
48	8	26	18	324	322
49	5	27	22	484	332
50	4	29	25	625	339
51	15	40	25	625	321
52	16	37	21	441	303
53	18	32	14	196	314
54	19	40	21	441	307
55	11	27	16	256	300
56	11	30	19	361	314
57	3	25	22	484	340
58	16	35	19	361	318
59	9	21	12	144	298

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน(X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน(X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
60	6	22	6	256	299
61	10	38	28	784	331
62	7	22	15	225	300
63	8	25	17	289	319
64	20	35	15	225	321
65	14	33	19	361	333
66	18	39	21	441	325
67	8	37	29	841	339
68	13	40	27	729	316
69	13	31	18	324	337
70	17	38	21	441	310
71	15	37	22	484	330
72	15	31	16	256	315
73	14	36	22	484	320
74	5	29	24	576	325
75	12	38	26	676	336
76	14	34	20	400	319
77	9	30	21	441	315
78	8	24	16	256	306
79	13	37	24	576	338

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน (X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
80	2	22	20	400	312
81	4	30	26	676	326
82	9	28	19	361	320
83	13	25	-12	144	308
84	16	31	15	225	312
85	10	37	27	729	322
86	18	30	12	144	304
87	11	38	27	729	325
88	8	23	15	225	306
89	5	27	22	484	332
90	4	30	26	676	341
91	15	40	25	625	313
92	20	41	21	441	327
93	9	32	23	529	320
94	11	27	16	256	312
95	17	35	18	324	303
96	19	32	13	169	331
97	21	34	13	169	329
98	13	27	14	196	319

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียนบทเรียน(X_1)	คะแนนสอบหลังเรียนบทเรียน (X_2)	$d=X_2-X_1$	d^2	คะแนนคำตอบที่ตอบถูก
99	8	28	20	400	332
100	8	18	10	100	297
รวม	1200	3169	1949	41343	31906
เฉลี่ย	12.00	31.69			319.06
เฉลี่ยร้อยละ	26.67	70.42			91.95

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวิเคราะห์เกณฑ์มาตรฐาน 90/90

1. มาตรฐาน 90 ตัวแรก

จากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำบทเรียนได้คิดเฉลี่ยร้อยละ $\frac{C}{N} \times \frac{100}{A}$

เมื่อ C = 31906 คะแนน

N = 100 คน

A = 347 คำตอบ

∴ คะแนนที่นักเรียนทำบทเรียนได้คิดเฉลี่ยร้อยละ $= \frac{31906}{100} \times \frac{100}{347}$

$= 91.948126$

$= 91.95$

2. มาตรฐาน 90 ตัวหลัง

จากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบสอบหลังการเรียนบทเรียนได้คิดเฉลี่ยร้อยละ $\frac{S}{N} \times \frac{100}{T}$

เมื่อ S = 3169 คะแนน

N = 100 คน

T = 45 ข้อ

∴ คะแนนที่นักเรียนทำแบบสอบหลังการเรียนบทเรียนได้คิดเฉลี่ยร้อยละ

$= \frac{3169}{100} \times \frac{100}{45}$

$= 70.42$

สรุปนั่นคือบทเรียนแบบโปรแกรมที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพเป็น 91.95/70.42

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 5 ตารางหาตัวกลางเลขคณิตของคะแนน และหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบ จากผลการทดลองภาคสนาม

X	f	fX	X^2	fX^2
41	1	41	1681	1681
40	7	280	1600	11200
39	6	234	1521	9126
38	6	228	1444	8664
37	7	259	1369	9583
36	8	288	1296	10368
35	4	140	1225	4900
34	3	102	1156	3468
33	3	99	1089	3267
32	7	224	1024	7168
31	5	155	961	4805
30	10	300	900	9000
29	3	87	841	2523
28	2	56	784	1568
27	9	243	729	6561
26	3	78	676	2028
25	3	75	625	1875
24	2	48	576	1152
23	2	46	529	1058
22	4	88	484	1936

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 5 (ต่อ)

X	f	fX	X^2	fX^2
21	3	63	441	1323
18	1	18	324	324
17	1	17	289	289
		3169		103867

จากข้อมูลในตารางที่ 5 หาตัวกลางเลขคณิตของคะแนน และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบได้ดังนี้

ก. หาตัวกลางเลขคณิต

จากสูตร $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$

$= \frac{3169}{100}$

$= 31.69$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากสูตร $S.D. = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{103867}{100} - \left(\frac{3169}{100}\right)^2}$

$= \sqrt{1038.67 - (31.69)^2}$

$= \sqrt{1038.67 - 1004.2561}$

$= \sqrt{34.4139}$

$= 5.8663$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบจากผลการทดลองภาคสนาม

จากสูตร $r_{tt} = \frac{n(S.D.)^2 - \bar{X}(n - \bar{X})}{(S.D.)^2 (n - 1)}$

$\bar{X} = 31.69$ (จากตารางที่ 5)

$(S.D.)^2 = 34.4139$ (จากตารางที่ 5)

$n = 45$

$r_{tt} = \frac{45(34.4139)-31.69(45-31.69)}{(34.4139)\ 44}$

$= \frac{1548.6255 - 31.69(13.31)}{1514.2116}$

$= \frac{1548.6255 - 421.7939}{1514.2116}$

$= \frac{1126.8316}{1514.2116}$

$= 0.7441704$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียน

ร.ท.หญิง นิตย์ กุลละวณิชย์ ร.น. เกิดเมื่อวันที่ 3 มกราคม พ.ศ. 2493 ที่จังหวัดชลบุรี ได้รับปริญญาตรีทางอักษรศาสตร์ (คณิตศาสตร์) จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2515 ปัจจุบันรับราชการเป็นอาจารย์คณิตศาสตร์ สังกัดโรงเรียนนายเรือ กรมยุทธศึกษาทหารเรือ กระทรวงกลาโหม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย