การจำลองการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช

นายก่อกิจ ธีราโมกข์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2551

SIMULATION OF EXTRUSION FOR WET POWDER MASSES
IN PHARMACEUTICAL PROCESS

Mr. Gawkij Teeramoke

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Computational Science
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2008

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การจำลองการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช
โดย	นายก่อกิจ ธีราโมกข์
สาขาวิชา	วิทยาการคณนา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัศวานันท์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตรวาหา)

.... กรรมการ

(ดร. คำรณ เมฆฉาย)

ก่อกิจ ธีราโมกข์ : การจำลองการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช. (SIMULATION OF EXTRUSION FOR WET POWDER MASSES IN PHARMACEUTICAL PROCESS) อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร, 107 หน้า.

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้ทำการศึกษาการจำลองการไหลในแกนสมมาตร 2 มิติด้วยตัวแบบอ็อลดรอยด์บีสำหรับปัญหาสติค-สลิปและปัญหาการบวมตัวในกระบวนการอัดรีด ปัญหาการบวมตัวได้นำไปประยุกต์กับอุตสาหกรรมที่เกี่ยวกับสารโพลิเมอร์และเป็นกระบวนการที่สำคัญในกระบวนการเภสัชสำหรับผลิตยาชนิดเม็ดทรงกลม

การจำลองปัญหาสติค-สลิปและปัญหาการบวมตัวจะจำลองด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเนเวียร์-สโตกส์และสมการองค์ประกอบ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้สมการคือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขชิ้นประกอบอันตะเซมิอิมพลิซิทเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรซเชอร์คอร์เรคชัน ส่วนเงื่อนไขการลื่นไถลที่ปลายท่อจะใช้ในการปรับปรุงความเร็วที่ผนังท่อหลังจากการคำนวณที่บริเวณพื้นผิวอิสระ และได้นำหลักการสายกระแสอัพวิน/เพทรอฟ-กาเลอร์คินมาเพื่อปรับปรุงให้ผลเฉลยที่ได้มีความเสถียรมากยิ่งขึ้น การจำลองการไหลนี้อยู่ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่าระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว ของไหลไหลแบบราบเรียบ และเป็นการไหลแบบช้าๆ

ผลเฉลยที่ได้จากการจำลองจะนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองจริงและบทความงานวิจัยอื่นๆ

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ก่อกิจ ธีราโมกข์

สาขาวิชา วิทยาการคณนา ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา 2551

4872215323 : MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE
KEY WORD : FINITE ELEMENT / SLIP / VISCOELASTC FLUID / EXTRUSION
GAWKIJ TEERAMOKE : SIMULATION OF EXTRUSION FOR WET POWDER MASSES IN PHARMACEUTICAL PROCESS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. VIMOLRAT NGAMARAMVARANGGUL, Ph.D. 107 pp.

In this thesis, the simulation of two dimensional axisymmetric flows with an Oldroyd B model for stick-slip and die-swell problems in extrusion processes is determined. The die-swell problem is applied in polymeric industry and drug manufactory, especially in the step of transformation from wet powder masses to pellets.

The simulations of stick-slip and die-swell problems are set up in the forms of the Navier-Stokes and constitutive equation. The numerical method in the name of the semi-implicit Taylor-Galerkin/pressure-correction finite element scheme is used for solving the mathematical model. The condition of slip effect at die wall is adjusted after free surfaces are computed. In addition, the Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin method is utilized to improve the stability under the assumptions of isothermal, incompressible, laminar and creeping flows.

The numerical results of the simulation problems are compared with the experiment and other literatures.

Department Mathematics — Student's signature Gawkij Teeramoke

Field of study Computational Science — Advisor's signature ....

Academic year 2008

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ท่านได้กรุณาให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา และการตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัศวานันท์ ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตรวาหา และ ดร. คำรณ เมฆฉาย กรรมการ ที่ได้ให้คำปรึกษาและการช่วยเหลือตลอดระยะเวลาในการทำวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ คุณจิริสุดา สุทธิประภา ดร. จิตติมา ชัชวาลสายสินธ์ หัวหน้าภาคภาควิชาเภสัชอุตสาหกรรม คณะเภสัชศาสตร์ และหัวหน้าภาควิชาคณะเทคโนโลยีทางอาหาร คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้อนุเคราะห์ตัวอย่างสาร และการเก็บข้อมูลจากการทดลอง และขอขอบคุณศูนย์วิจัย Advanced Virtual and Intelligent Computing Center (AVIC) สำหรับความอนุเคราะห์ให้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ Hewlett Packard Unix (HP-UX) ในการทำงานวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ตลอดจนพี่น้องในครอบครัวที่คอยเป็นกำลังใจและช่วยเหลือผู้วิจัยมาโดยตลอด และขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่เป็นกำลังใจพร้อมกับคำแนะนำที่ดี

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

มนุษย์มีความต้องการขั้นพื้นฐานในการดำรงชีวิตอยู่ 4 ปัจจัย และพบว่าหนึ่งในปัจจัยที่สำคัญได้แก่ ยารักษาโรค ดังนั้นการที่จะผลิตยาให้ดีและมีคุณภาพ ตรงตามคุณสมบัติของตัวยานั้น จึงต้องใช้กระบวนการผลิตที่พิถีพิถัน และรวมไปถึงการพัฒนาตัวยาชนิดใหม่ขึ้นมาทดแทน เภสัชกรจึงพบความลำบากในตอนเริ่มต้นที่จะผลิตตัวยาชนิดใหม่ออกมา ซึ่งทุกๆตัวยาต้องผ่านกระบวนการทดลองนับไม่ถ้วน จึงถือว่าเป็นการสิ้นเปลืองทั้งเวลาและค่าใช้จ่าย ดังนั้นการจำลองปัญหากระบวนการผลิตยาโดยใช้คอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการตรวจสอบความเป็นไปได้ในกระบวนการผลิต ไม่ว่าขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของกระบวนการผลิต ย่อมส่งผลดีต่อการผลิตยาชนิดนั้น

ขั้นตอนการผลิตตัวยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลม ในกระบวนการผลิตมี 3 ขั้นตอน ได้แก่ การผสมตัวยา (formation of wet powder mass) กระบวนการอัดรีด (extrusion) กระบวนการสเฟียโรไนเซชั่น (spheronisation) สำหรับงานวิจัยนี้ทำการศึกษาในขั้นตอนการอัดรีด ซึ่งเป็นขั้นตอนการขึ้นรูปของวัตถุดิบให้มีรูปทรงคล้ายกับแม่พิมพ์ที่ออกมา ซึ่งกระบวนการนี้ รวมอยู่ในขั้นตอนการผลิตของโรงงานอุตสาหกรรมการผลิตวัสดุหลายชนิดตั้งแต่ ขวดน้ำพลาสติก ถุงพลาสติก ท่อพีวีซี สายไฟหุ้มลวดทองแดงเป็นต้น ลักษณะของของไหลที่ออกมาจากแม่พิมพ์ที่มีรูปร่างแบบท่อไม่ได้มีขนาดเท่ากับปากท่อ แต่จะใหญ่กว่าปากท่อเล็กน้อยหรือมาก ขึ้นกับปัจจัยหลายอย่าง เช่นชนิดของของไหล แรงที่ใช้ในการอัดรีด และอุณหภูมิเป็นต้น พฤติกรรมลักษณะนี้เรียกว่าการบวมตัว (die swell) ซึ่งสามารถจำลองขนาดการบวมตัวด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์และแก้ปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์

สำหรับงานวิจัยนี้จะเริ่มต้นการศึกษาปัญหาการไหลแบบสติค-สลิปในกระบวนการอัดรีดเพื่อพัฒนาไปสู่การศึกษาการบวมตัวที่ปลายท่อ การบวมตัวนี้เกิดจากการประมาณรูปร่างของผิวอิสระ(free surface) แล้วคำนวณอัตราส่วนการบวมตัวของของไหล (swelling ratio) โดยผู้ที่เริ่มศึกษาปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียนคือ Richardson [1] ในปีค.ศ.1970 ซึ่งศึกษาภายใต้เงื่อนไขว่ามีแรงตึงผิว (surface tension) ที่มาก เป็นการไหลแบบช้าๆ (creeping flow) และไม่คิดผลกระทบจากแรงโน้มถ่วง (gravitational effect) จากการศึกษาของเขาพบว่าที่บริเวณปลายท่อได้เกิดจุดเอกฐาน (singular point) ซึ่งเป็นบริเวณที่มีแรงเข้ากระทำสูง และมีความเร็วสูงกว่าปกติ ต่อมา ปีค.ศ.1981 Okabe [2] ได้เสนอทฤษฎีสำหรับหาความเค้นและความเครียดใกล้ๆ บริเวณที่ปลายท่อ หลังจากนั้นในปีค.ศ.1984 Ingham และ Kelmanson [3]

ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบขอบเอกฐาน (a singular boundary element method) เพื่อปรับปรุงความแม่นยำ หลังจากนั้นหนึ่งปี Kermode และคณะ [4] ได้ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (finite element method) ในการหาผลเฉลย ต่อมาในปีค.ศ.1991 Georgiou และคณะ [5,6] ได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่า วิธีฟังก์ชันฐานหลักรอบจุดเอกฐานปริพันธ์ (integrated singular basis function method)

ปัญหาการบวมตัวได้เริ่มมีการศึกษาในปีค.ศ.1970 โดย Tanner [7] เป็นคนแรกที่ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์เพื่อประมาณตำแหน่งของสายกระแสที่ผิวอิสระ (free surface streamline) และหาผลเฉลยของอัตราส่วนการบวมตัวที่ปลายท่อของของไหลนิวโตเนียนและวิสโคอีลาสติก (viscoelastic fluid) ในกระบวนการอัดรีด (extrudate swell) โดยไม่คำนึงถึงแรงตึงผิว ต่อมามีนักวิจัยได้พัฒนาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการบวมตัวสำหรับของไหลที่มีการไหลแบบช้าๆ ในปีค.ศ.1974 Nickell และคณะ [8] ได้แสดงวิธีการหาผลเฉลยของผิวอิสระสำหรับของไหลนิวโตเนียน หลังจากนั้น Chang และคณะ [9] ได้ศึกษาการการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก สี่ปีต่อมา Crochet และ Keuning [10,11,12] ได้ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะในการแก้ปัญหาของไหลนิวโตเนียนและของไหลแมกซ์เวลล์ (Maxwell fluid) เพื่อคำนวณการบวมตัวที่ปลายท่อ พวกเขายังพบอีกว่าถ้าทำการปรับโครงข่าย (remesh) ให้ละเอียดขึ้นที่บริเวณรอบจุดเอกฐานจะทำให้ได้ผลเฉลยแม่นยำขึ้น ในปีค.ศ.1991 Beverly และ Tanner [13] ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะในการศึกษาการอัดรีดของของไหลนิวโตเนียนในระบบพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอกสามมิติ ต่อมา Karagiannis และคณะ [14] พบว่าอุณหภูมิมีผลต่อการบวมตัวในขั้นตอนกระบวนการอัดรีด

จากการแก้ปัญหาการบวมตัวด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข พบว่าผลเฉลยที่ได้ยังมีค่าคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง เมื่อแรงที่ใช้ในการผลักของไหลมีค่ามาก ผลที่ได้จากการคำนวณได้ค่าการบวมตัวสูงขึ้น แต่จากการทดลองพบว่า การบวมตัวลดลง ดังนั้น ปัญหาการลื่นไถลบริเวณผนังท่อ จึงได้นำมาประกอบการคำนวณ ประกอบกับในธรรมชาติความเร็วที่ผนังท่อไม่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์จริง จึงได้กำหนดค่าความเร็วของของไหลที่ผนังท่อไม่เป็นศูนย์ จากจุดนี้เองจึงทำให้มีผู้ที่สนใจศึกษาปัญหาลักษณะนี้ โดยในปีค.ศ.1980 Silliman และ Scriven [15] ได้เสนอความคิดในงานวิจัยของเขาว่าการลื่นไถลและแรงตึงผิวมีผลในปัญหาผิวอิสระของการไหลของของไหลนิวโตเนียน ในปีค.ศ.1988 Phan-Thein [16] ได้นำผลจากการทดลองปัญหาการลื่นไถลของ Ramamurthy [17] ที่ทำไว้ในปีค.ศ.1986 มาจำลองปัญหาด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบขอบ ด้วยตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์เอกซ์โปเนนเชียล (exponential Phan-Thein/Tanner model) ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ พบว่าความเค้นเฉือนบริเวณผนัง (wall shear stress) มีค่าสูงมาก และขนาดของความเร็วในการลื่นไถลมีผลต่อรูปร่างการบวมตัว ต่อมาในปีค.ศ. 1992 Hatzikirakos

และ Dealy [18] ได้แสดงว่าการลื่นไถลที่บริเวณทางออกของท่อ (die exit) มีความสำคัญต่อพฤติกรรมการไหลในกระบวนการอัดรีดอย่างมาก โดยพวกเขาได้ศึกษาการลื่นไถลของพอลิเมอร์พอลิเอธิลีนที่มีความหนาแน่นสูง (high density polyethlene) โดยสังเกตพบว่า ปรากฏการณ์เสียรูปของพอลิเมอร์หลอมเหลวบริเวณทางออกของท่อมีความเค้นสูงขึ้น โดยใช้รูปแบบพาวเวอร์-ลอ (power law) ในการหาค่าความเค้นเฉือน ทำให้ของไหลที่ออกมาจากท่อ (extrudate) มี 2 แบบ แบบแรกเกิดเป็นรอยฟันฉลาม (sharkskin) เนื่องจากค่าความเค้นเฉือนมีค่าสูงถึงระดับหนึ่ง ส่วนอีกแบบเกิดการเสียรูปทรงไป (melt fracture) เนื่องจากค่าความเค้นเฉือนสูงเกินระดับหนึ่ง ต่อมาในปีค.ศ.1998 Den Doelder และคณะ [19] ได้ทำการศึกษาผนังท่อที่มีการลื่นไถลในตัวแบบของสมการองค์ประกอบต่างๆ ของพอลิเมอร์หลอมเหลว

ในปีค.ศ.2000 Ngamaramvaranggul และ Webster [20] ได้ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะเซมิอิมพลิซิทเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรซเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit Taylor-Galerkin/pressure-correction finite element method) ในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอกเพื่อศึกษาปัญหาสติค-สลิปและการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน หลังจากนั้นได้ศึกษาปัญหาการบวมตัวที่ปลายท่อของของไหลวิสโคอีลาสติกด้วยตัวแบบอ็อลดรอยด์บี (Oldroyd-B model) ในปีต่อมาคณะของเขายังได้ศึกษาการไหลแบบทิวบ์ทูลลิ่ง (tube tooling) และเพรซเชอร์ทูลลิ่ง (pressure tooling) ในกระบวนการเคลือบสายไฟ (wire-coating) สำหรับของไหลนิวโตเนียน พบว่าในกรณีของปัญหาที่ผนังท่อไม่มีการลื่นไถล ณ ทางออกจะมีค่าความเค้นเฉือนและความเร็วมากกว่าบริเวณอื่น ทำให้เกิดการบวมตัวสูง แต่ในกรณีที่มีการลื่นไถลปรากฏว่าอัตราส่วนการบวมตัวลดลง อีกสองปีต่อมา Ngamaramvaranggul และ Webster [21,22,23] ได้ศึกษาเพิ่มเติมด้วยของไหลแพนเทียนแทนเนอร์ (Phan-Thein/Tanner) พบว่าของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กสูงจะมีขนาดการบวมตัวที่มากด้วย

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นการจำลองปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติกที่มีการลื่นไถลบริเวณผนังท่อ และใส่ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ได้จากการเก็บข้อมูลจากการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช โดยจำลองปัญหานี้ ด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) และสมการองค์ประกอบ (constitutive equation) ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ ภายใต้ข้อสมมุติฐานที่ว่า ไม่มีผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงของโลก ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) ของไหลไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) และระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (isothermal system) จากนั้นทำการแปลงระบบสมการดังกล่าวให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (finite element) เพื่อทำนายบริเวณผิวอิสระจากการบวมตัว ในกระบวนการอัดรีดที่มีการลื่นไถล

1.1 วัตถุประสงค์ (Objective)

เพื่อจำลองปัญหาการบวมตัวและการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติกและจำลองปัญหาการผลิตยาในขั้นตอนกระบวนการอัดรีดผ่านท่อหน้าตัดกลมด้วยตัวแบบอ็อลดรอยด์บี

1.2 วิธีการดำเนินงานและขอบเขต (Methodology and outline)

1.2.1 ศึกษาความรู้พื้นฐานพลศาสตร์ของไหล

1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (finite element method)

1.2.3 พัฒนาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะสำหรับการอัดรีดผ่านท่อหน้าตัดกลม

1.2.4 จำลองปัญหาและพัฒนาโปรแกรม

1.2.5 แก้ไขข้อผิดพลาดในการคำนวณและปรับปรุงผลที่ได้รับ

1.2.6 วิเคราะห์สรุปผลที่ได้ และเขียนวิทยานิพนธ์

1.3 ประโยชน์ที่ได้รับ (Benefit)

1.3.1 ทำให้เกิดความเข้าใจลักษณะทางกายภาพ ของการไหลของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก

1.3.2 สามารถจำลองการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัชด้วยตัวแบบอ็อลดรอยด์บี

บทที่ 2

สมการพื้นฐานการไหลและระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
(Basic Flow Equation and Numerical Method)

สิ่งสำคัญที่ใช้ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการไหลในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ คือ

1. สมการควบคุม (governing equations)
2. เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ (initial and boundary conditions)
3. ลักษณะของโดเมนที่ใช้ในการศึกษา (geometry of domain)

กำหนดสมการควบคุมโดยพิจารณาจากหลักการพื้นฐานต่อไปนี้ หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) และ หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (conservation of linear momentum) จากหลักการพื้นฐานเหล่านี้สามารถที่จะจำลองปัญหาในรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ในพจน์ขององค์ประกอบความเร็ว และความดัน เนื่องจากปัญหาที่ศึกษาเป็นปัญหาของของไหล นอนนิวโตเนียนจึงต้องเพิ่มสมการองค์ประกอบ (constitutive equation) เพื่อหาความเค้น

2.1 หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (Conservation of linear momentum)

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกล่าวว่า ถ้ามีแรงลัพธ์มากระทำต่อวัตถุ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไปในทิศทางของแรงลัพธ์นั้น โดยแรงลัพธ์นั้นแบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ แรงที่ผิว (surface force) และแรงวัตถุ (body force) ดังนั้นสมการโมเมนตัมสามารถแสดงในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ ได้ดังนี้

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \nabla \cdot \tilde{T} - \nabla p + \rho \vec{g} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\tilde{T}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า (extra stress tensor)

$\vec{g}$ คือ ค่าเวกเตอร์ความเร่งจากความโน้มถ่วงของโลก

เมื่อกำหนดให้ตัวดำเนินการ $\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla(\ )$

และเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีผลต่อระบบน้อยมาก จึงไม่พิจารณานิพจน์ของแรงวัตถุ สมการ (2.1) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\nabla\cdot\tilde{T}-\rho\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}-\nabla p \tag{2.2}$$

สำหรับของไหลนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอ็กตร้าคือ

$$\tilde{T}=2\mu_N\tilde{D}$$

เมื่อ μ_N คือ ความหนืดของของไหลนิวโตเนียน และ

$$\tilde{D}=\frac{1}{2}\left(\nabla\vec{U}+\nabla\vec{U}^{\dagger}\right)$$

โดยที่ $\tilde{D}$ คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (rate of deformation tensor)

$\nabla\vec{U}^{\dagger}$ คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of matrix) ของ $\nabla\vec{U}$

สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอ็กตร้าคือ

$$\tilde{T}=\tilde{\tau}+2\mu_N\tilde{D} \tag{2.3}$$

เทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้าของของไหลนอนนิวโตเนียนเพิ่มส่วนที่เป็นความเค้นของพอลิเมอร์
เมื่อ $\tilde{\tau}$ คือ ความเค้นของพอลิเมอร์

2.2 หลักการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass)

สำหรับระบบกฎอนุรักษ์มวลกำหนดให้มวลในระบบมีค่าคงตัว ดังนั้นหากเขียนในลักษณะอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลในระบบเทียบกับเวลา จะเขียนได้เป็น

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{system}=0 \tag{2.4}$$

โดยที่ M คือ มวลในระบบ

t คือ เวลา

จากสมการของการอนุรักษ์มวลสมการ (2.4) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{system}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho d\forall+\int_{cs}\rho\vec{U}\cdot\vec{n}dA=0$$

โดย cv หมายถึงการควบคุมปริมาตร (control volumm) และ cs หมายถึงการควบคุมพื้นผิว (control surface)

สมการของการอนุรักษ์มวลคงตัวใช้กับปริมาตรควบคุมจะกลายเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho d\forall+\int_{cs}\rho\vec{U}\cdot\vec{n}dA=0 \tag{2.5}$$

นิพจน์แรกทางซ้ายของสมการเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลในปริมาตรควบคุม และนิพจน์ที่สองของสมการเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของการไหลของมวลผ่านผิวของปริมาตรควบคุม เมื่อทำการประยุกต์สมการ (2.5) ด้วยทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์และเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{U} \right) = 0 \tag{2.6}$$

สำหรับการไหลแบบไม่บีบอัดตัว (incompressible flow) ของไหลจะมีค่าหนาแน่นคงตัวตลอดการไหล ดังนั้นสมการที่ (2.6) จะลดรูปเหลือสมการความต่อเนื่อง (coutinuity equation)

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{2.7}$$

2.3 สมการองค์ประกอบ (Constitutive equation)

2.3.1 ตัวแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwell model)

แมกเวลล์ได้สร้างตัวแบบ 2 ลักษณะคือแมกซ์เวลล์แบบพาล่างไม่เชิงเส้นและแมกซ์เวลล์แบบพาบนไม่เชิงเส้น (non-linear upper convected Maxwell model) โดยจะกล่าวถึงลักษณะลักษณะแบบพาบนไม่เชิงเส้นเท่านั้น สมการคือ

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D}$$

โดยที่

$$\overset{\triangledown}{\tilde{T}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \tilde{T} - \left(\nabla \vec{U} \right)^{\dagger} \cdot \tilde{T} - \tilde{T} \cdot \nabla \vec{U} \tag{2.8}$$

2.3.2 ตัวแบบอ็อลดรอยด์บี (The Oldroyd-B model)

โดยตัวแบบอ็อลดรอยด์บี ได้พัฒนามาจากตัวแบบแมกเวลล์แบบพาบนไม่เชิงเส้นดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu \tilde{D} \tag{2.9}$$

ทำการกระจายนิพจน์และจัดรูปสมการ (2.9) ใหม่ จะได้สมการตัวแบบอ็อลดรอยด์บีสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\tilde{T} + \lambda_1 \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu \left(\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\triangledown}{\tilde{D}} \right) \tag{2.10}$$

เมื่อ $\overset{\triangledown}{\tilde{D}}$ คือ เทนเซอร์อัตราการผิดรูปพาบน

μ คือ ความหนืดรวม : $\mu = \mu_V + \mu_N$ (2.11)

λ_1 คือ เวลาผ่อนคลาย (relaxation time)

λ_2 คือ เวลาหน่วง (retardation time) : $\lambda_2 = \dfrac{\mu_N \lambda_1}{\mu}$

ทำการวิยุต (discretisation) สมการ (2.10) เป็นตัวแบบอ็อลดรอยด์บีที่ได้นำไปใช้แล้วในงานของ Paddon และ Holstein [26] และงานของ Crochet และ Keunings [10] ซึ่งอยู่ในรูป

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}$$

โดยที่ $$\tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2\mu_V \tilde{D}$$

2.4 ระบบไร้หน่วย (Non-dimensional system)

กำหนดอัตราส่วนของค่าที่มีหน่วยเทียบกับปัจจัยลักษณะเฉพาะ (characteristic factor) ของแต่ละตัวให้เป็นตัวแปรไร้หน่วย (non-dimensional variable) คือ $r^*, z^*, \vec{U}^*, p^*, t^*, \mu^*, \frac{\partial}{\partial t^*}$ ซึ่งมีการกำหนดดังนี้

การกระจัดในทิศทางของแกน r คือ $r^* = \frac{r}{L}$

การกระจัดในทิศทางของแกน z คือ $z^* = \frac{z}{L}$

เวกเตอร์ความเร็ว คือ $\vec{U}^* = \frac{\vec{U}}{V}$

ความดัน คือ $p^* = \frac{L}{\mu_0 V} p$

เวลา คือ $t^* = \frac{V}{L} t$

ค่าความหนืด คือ $\mu^* = \frac{1}{\mu_0} \mu$

เทนเซอร์ความเค้น คือ $\tilde{T}^* = \frac{L}{\mu_0 V} \tilde{T}$

ตัวดำเนินการ คือ $\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{L}{V} \frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial r^*} \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z^*} \qquad \frac{\partial^2}{\partial^2 z} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ คือ $\nabla^* = L\nabla$

โดยที่ L คือ ความยาวลักษณะเฉพาะ (characteristic length) หน่วยเป็นเมตร (m)

V คือ ความเร็วลักษณะเฉพาะ (characteristic velocity) หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

μ_0 คือ ความหนืดอ้างอิง (reference viscosity) หน่วยเป็นปาสคาล-วินาที (Pa.s) หรือกรัมต่อเมตรต่อวินาที (g/(m·s))

ดังนั้น สมการ (2.2) จะได้

$$\rho\frac{V^2}{L}\frac{\partial\vec{U}^*}{\partial t^*}=\frac{\mu_0 V}{L^2}\nabla^*\cdot\tilde{T}^*-\rho\frac{V^2}{L}\vec{U}^*\cdot\nabla^*\vec{U}^*-\frac{\mu_0 V}{L^2}\nabla^* p^* \qquad (2.12)$$

คูณด้วย $\frac{L^2}{\mu_0 V}$ ตลอดสมการ (2.12) จะได้

$$\frac{\rho VL}{\mu_0}\frac{\partial\vec{U}^*}{\partial t^*}=\nabla^*\cdot\tilde{T}^*-\frac{\rho VL}{\mu_0}\vec{U}^*\cdot\nabla^*\vec{U}^*-\nabla^* p^* \qquad (2.13)$$

เมื่อกำหนดให้ $Re=\frac{\rho VL}{\mu_0}$ โดย Re คือ ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number)

ดังนั้นสมการ (2.13) เขียนในนิพจน์ของตัวเลขเรย์โนลด์ ได้ดังนี้

$$Re\frac{\partial\vec{U}^*}{\partial t^*}=\nabla^*\cdot\tilde{T}^*-Re\vec{U}^*\cdot\nabla^*\vec{U}^*-\nabla^* p^*$$

ทำการกำจัด เครื่องหมาย * ออกเพื่อความง่ายในการเขียน ดังนั้นสมการไร้หน่วยเขียนใหม่ได้ว่า

$$Re\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\nabla\cdot\tilde{T}-Re\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}-\vec{\nabla}p \qquad (2.14)$$

และจากสมการ (2.3) , (2.7) และ (2.8) ทำให้เป็นแบบไร้หน่วยจะได้

$$\tilde{T}=\tilde{\tau}+2\mu_N\tilde{D} \qquad (2.15)$$

$$\nabla\cdot\vec{U}=0 \qquad (2.16)$$

$$We\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}=2\mu_V\tilde{D}-\tilde{\tau}+We\left[\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}-\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}+\left(\nabla\vec{U}\right)^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right] \qquad (2.17)$$

กำหนดให้ $We=\frac{\lambda_1 V}{L}$ โดย We (Weissenberg number) เป็นตัวบ่งบอกความยืดหยุ่นของของไหล และค่า Re เป็นค่าที่บอกลักษณะการไหลของของไหล หากของไหลมีเลขเรย์โนลด์มากกว่า 1500 แสดงว่าเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) และถ้ามีเลขเรย์โนลด์ต่ำกว่า 1500 จะเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow)

2.5 อัตราเฉือน (Shear rate)

สำหรับพฤติกรรมของของไหลไอโซโทรปิคเอกพันธุ์แบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic homogeneous isotropic fluid) ภายใต้ระบบอุณหภูมิคงตัว (isothermal system) Rivlin และ Eriksen [27] ได้อธิบายรูปแบบทั่วไปของเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า โดยอธิบายเป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปภายใต้สภาวะไม่อัดตัว ดังนี้

$$\tilde{T} = 2\mu(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon})$$

สำหรับการไหลเฉือนอย่างง่าย อัตราเฉือน $(\dot{\gamma})$ คือ

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{II_d}$$

โดยที่ II_d คือ ความแปรผันอันดับที่สอง (the second invariants) ของเทนเซอร์อัตราการผิดรูป (the rate of strain tensor) $\tilde{D}$ ตามลำดับ

ในระบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate system) ใน 2 มิติ ค่า II_d คือ

$$II_d = \frac{1}{2} trace(\tilde{D}^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right\}$$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) ใน 2 มิติ ค่า II_d คือ

$$II_d = \frac{1}{2} trace(\tilde{D}^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right] \qquad (2.18)$$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปมาใช้เพื่อพิจารณาบ่งบอกถึงปริมาณความเค้นเฉือนโดยรวมของของไหลที่บริเวณผนังของท่อ ถ้าค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปมีค่ามากแสดงว่าที่บริเวณนั้นมีความเค้นเฉือนสูง ในทางกลับกันถ้าค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปมีค่าต่ำแสดงว่าที่บริเวณนั้นมีความเค้นเฉือนต่ำ

2.6 รูปแบบทั่วไปของเงื่อนไขขอบ (General form of boundary conditions)

รูปแบบทั่วไปของเงื่อนไขขอบที่บริเวณผนังท่อ อาจแบ่งได้เป็น 3 รูปแบบคือ

2.6.1 ไม่มีเงื่อนไขการลื่นไถล (no slip condition) การไม่ลื่นไถลหรือการยึดติดที่ผนังนั้นมาจากรูปแบบเงื่อนไขขอบ Dirichlet และรูปแบบของความเร็วสามารถแสดงดังนี้

$$\hat{n}\cdot\vec{U}=0 \quad , \quad \hat{t}\cdot\vec{U}=0$$

โดยที่ $\hat{n}$ คือ เวกเตอร์แนวฉากขนาดหนึ่งหน่วย (unit normal vector)

$\hat{t}$ คือ เวกเตอร์แนวขนานเส้นสัมผัสขนาดหนึ่งหน่วย (unit tangential vector)

$\vec{U}$ คือ เวกเตอร์ความเร็วที่ผนัง (wall slip velocity vector)

2.6.2 เงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 1 (slip condition 1) รูปแบบเงื่อนไขนี้มาจากกฎการลื่นไถลเนเวียร์ (Navier slip law) เงื่อนไขการลื่นไถลนั้นจะพิจารณาเฉพาะส่วนของแนวขนานเส้นสัมผัส โดยรวมรูปแบบของเงื่อนไขขอบ Dirichlet - Robbins ดังนี้

$$\alpha_0\hat{t}\cdot\left(\hat{n}\cdot\tilde{T}\right)-\alpha_1\hat{t}\cdot\vec{U}=0 \quad , \quad \hat{n}\cdot\vec{U}=0$$

โดยที่ α_0,α_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลซึ่งเป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์

$\tilde{T}$ คือ เทนเซอร์ความเค้น เมื่อ $\tilde{T}=-p\mathrm{I}+\tau_{ij}$

p คือ ความดัน

τ คือ ความเค้น

2.6.3 เงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 2 (slip condition 2) เงื่อนไขการลื่นไถลตั้งอยู่บนองค์ประกอบแนวฉากและแนวขนานเส้นสัมผัสของการดึงและความเร็วโดยเรียกว่ารูปแบบเงื่อนไขขอบ Robbins มีลักษณะดังนี้

$$\alpha_0\hat{t}\cdot\left(\hat{n}\cdot\tilde{T}\right)-\alpha_1\hat{t}\cdot\vec{U}=0 \quad , \quad \beta_0\hat{n}\cdot\left(\hat{n}\cdot\tilde{T}\right)+\beta_1\hat{n}\cdot\vec{U}=0$$

โดยที่ β_0,β_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่มากกว่าศูนย์และส่งผลต่อองค์ประกอบแนวฉาก

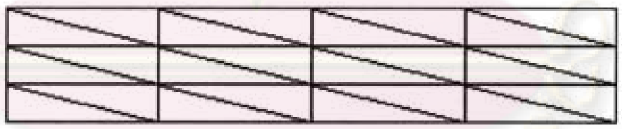
หากพิจารณาให้ $\alpha_0=\beta_0=0$ ในเงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 2 (slip condition 2) จะกลายเป็นเงื่อนไขไม่มีการลื่นไถล (no slip condition) และถ้า $\beta_0=0$ อย่างเดียวในเงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 2 จะกลายเป็นเงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 1 (slip condition 1) ดังนั้นเงื่อนไขการลื่นไถลแบบ 2 จึงเป็นการจำแนกหลักโดยอาศัยจาก 2 กรณีตัวอย่างด้านบน

2.7 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite element method)

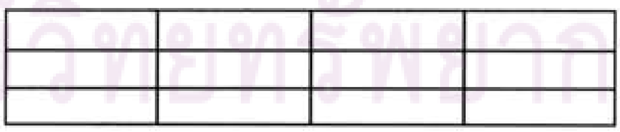
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยเริ่มจากการแบ่งรูปร่างขอบเขตของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ เรียกว่าชิ้นประกอบ (element) หลังจากนั้นสร้างสมการของแต่ละชิ้นประกอบให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วนำสมการที่ได้มาร่วมกันแล้วจึงประมาณค่าผลเฉลยโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต โดยที่แต่ละชิ้นประกอบจะเชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ใช้คำนวณหาค่าของตัวแปรที่ต้องการ แนวความคิดระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกคิดค้นขึ้นเมื่อปีคศ. 1940 โดยนำมาวิเคราะห์หาความเค้นที่เกิดในโลหะของปัญหามิติเดียว และได้พัฒนามาเรื่อยเป็นลำดับจนถึงปีคศ. 1965 Zienkiewicz และ Cheng จึงได้นำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์กับปัญหาการไหลของของไหล จากนั้นได้มีผู้นำหลักการและวิธีการนี้ไปพัฒนาจนทำให้สามารถหาผลเฉลยที่มีความแม่นยำสูง

การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยปกติทั่วไปจะประกอบด้วย 5 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เป็นขั้นตอนการแบ่งพื้นที่โดเมนของปัญหาออกเป็นชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยมหรือแบบสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 2.1 สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งโดเมนเป็น ชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม (triangular element) โดยแต่ละชิ้นประกอบจะเชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ใช้คำนวณตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ (nodal unknowns) สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้คำนวณค่าของ ความเร็ว ความดัน และความเค้น เป็นต้น



(ก) ชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม (triangular element)



(ข) ชิ้นประกอบแบบสี่เหลี่ยม (quadrilateral element)

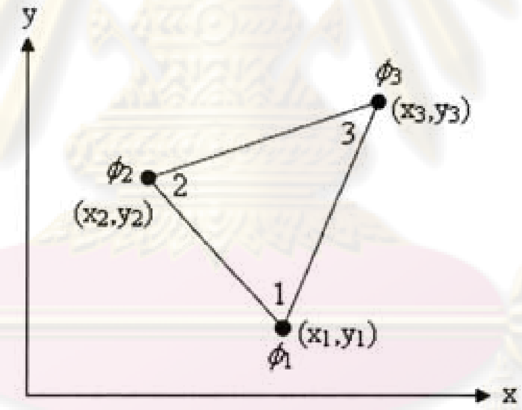
รูปที่ 2.1 การแบ่งรูปร่างโดเมนของปัญหาออกเป็นชิ้นประกอบแบบต่างๆ ; (ก) ชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม, (ข) ชิ้นประกอบแบบสี่เหลี่ยม

ขั้นตอนที่ 2 สร้างสมการการประมาณค่าบนแต่ละชิ้นประกอบ โดยสมมติว่าเป็นค่าความดันของการไหลบนชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่อยู่ในโดเมน ซึ่งประกอบไปด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ให้แต่ละจุดต่อเป็นตำแหน่งของค่าความดันที่ไม่รู้ค่าซึ่งแทนด้วย ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับ ดังนั้นสมการการประมาณบนชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยมนี้คือ

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \qquad (2.19)$$

โดย $N_i\left(x,y\right)$, เมื่อ $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม สมการ (2.19) สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \left[N(x,y)\right]_{(1\times3)} \left\{\phi\right\}_{(3\times1)} \end{aligned}$$



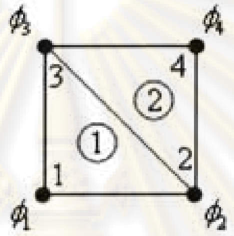
รูปที่ 2.2 ชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม 3 จุดต่อ พร้อมกับตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจากการประมาณบนชิ้นประกอบจะมีการคลาดเคลื่อนไปจากผลลัพธ์แท้จริง จึงได้นำวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) มาใช้ลดการคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่า โดยใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin method) ซึ่งวิธีการนี้สามารถประยุกต์ได้กับสมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อแปลงให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) เช่น สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมดังรูปที่ 2.2 จะอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}_e$$

เมื่อ $k_{ij} : i, j = 1,2,3$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับคุณสมบัติและขนาดชิ้นประกอบนั้นและ e แสดงให้ทราบว่าเมทริกซ์ที่พิจารณาเป็นระดับชิ้นประกอบ

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทุกๆชิ้นประกอบมาประกอบเข้ารวมกันเป็นระบบสมการ (system of equations) เช่น



รูปที่ 2.3 โดเมนที่มีชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม 2 ชิ้นประกอบ

เมื่อ ① และ ② เป็นหมายเลขชิ้นประกอบ จากรูปที่ 2.3 แสดงว่าชิ้นประกอบที่ 1 มีจุดต่อ 1, 2 และ 3 และตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 เมื่อเรียงทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ และชิ้นประกอบที่ 2 มีจุดต่อ 2, 4 และ 3 และตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ ϕ_2, ϕ_4 และ ϕ_3 ตามลำดับเมื่อเรียงค่าแบบทวนเข็มนาฬิกาเช่นกัน ดังนั้นการพิจารณาโดเมนในรูปที่ 2.3 ซึ่งมี 2 ชิ้นประกอบ ทำให้ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 2 สมการ คือ

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_{①} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_{①} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}_{①} \text{ และ } \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{②} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}_{②} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_{②} \text{ ตามลำดับ}$$

เมื่อรวมกันเป็นระบบสมการจะได้

$$\begin{bmatrix} k_{11}① & k_{12}① & k_{13}① & 0 \\ k_{21}① & k_{22}①+k_{22}② & k_{23}①+k_{23}② & k_{24}② \\ k_{31}① & k_{32}①+k_{32}② & k_{33}①+k_{33}② & k_{34}② \\ 0 & k_{42}② & k_{43}② & k_{44}② \end{bmatrix}_{sys} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}_{sys} = \begin{Bmatrix} f_1① \\ f_2①+f_2② \\ f_3①+f_3② \\ f_4② \end{Bmatrix}_{sys} \quad (2.20)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา เข้ากับสมการ (2.20) ในขั้นตอนที่ 4 จากนั้นแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลเฉลยของตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ ระเบียบวิธีที่ใช้ในการแก้ระบบสมการคือระเบียบวิธีโชเลชกี (Choleski's method) และระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบี

(Jacobi iterative method) ถ้าต้องการให้ค่าผลเฉลย ณ ตำแหน่งที่ต้องการมีค่าที่ได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริงจะใช้วิธีการเข้าสู่เพ็นนัลทิ (penalty approach)

2.8 เกณฑ์การลู่เข้า (Convergent criteria)

การตรวจสอบว่า ค่าประมาณของผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณได้ลู่เข้าถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้แล้วหรือไม่นั้น มีวิธีการพิจารณาหลายรูปแบบ เช่น การหาค่าความคลาดเคลื่อนด้วยความผิดพลาดสัมบูรณ์, ความผิดพลาดสัมพัทธ์ และความผิดพลาดกำลังสองน้อยสุด เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้เกณฑ์ความคลาดเคลื่อนด้วย ความผิดพลาดสัมพัทธ์ที่เขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\left\|E(x)\right\|_{\infty} = \frac{\left\| x^{n+1} - x^{n} \right\|_{\infty}}{\left\| x^{n+1} \right\|_{\infty}} \leq \varepsilon$$

โดย ε แทนค่าความผิดพลาดที่ยอมได้เพื่อหยุดการคำนวณ (stopping tolerance) หากค่าประมาณของผลเฉลยที่ได้มีค่าถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนด ก็ให้หยุดการคำนวณ แต่หากยังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ ก็ให้ย้อนกลับไปคำนวณใหม่

2.9 แผนการเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรซเชอร์คอร์เรคชัน (Taylor-Galerkin/pressure correction scheme)

แผนการเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรซเชอร์คอร์เรคชันคือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นสามตัวแปรในที่นี้ ได้แก่ความเร็ว ความดัน และความเค้น ให้เป็นระบบสมการเชิงเส้น เมื่อพิจารณาจากสมการกำกับและสมการองค์ประกอบ สำหรับตัวแบบอ็อลดรอยด์บี จากสมการ (2.14)-(2.17) ที่อยู่ในรูปแบบไร้หน่วยมาวิยุต (discretise) เวลาด้วยวิธีการของเทเลอร์ และวิยุตปริภูมิด้วยวิธีการของกาเลอร์คิน รวมทั้งวิธีตรวจแก้ความดัน (pressure correction scheme)

การวิยุตเวลา (time discretisation)

การวิยุตเวลาใช้ระเบียบวิธีลักซ์-เวนดรอฟฟ์สองขั้นตอน (two step Lax-Wendroff method) ได้มาจากการขยายอนุกรมเทเลอร์ในเวลา โดยพิจารณาจากสเกลาร์ฟังก์ชัน $(\Phi(x))$ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\Phi^{n+1} = \Phi^{n} + \Delta t \frac{\partial \Phi^{n}}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^{2} \frac{\partial^{2} \Phi^{n}}{\partial t^{2}} + \dots$$

เมื่อ Φ^{n+1}, Φ^{n} คือ ฟังก์ชัน $\Phi(x)$ ที่เวลา $n+1$ และ n ตามลำดับ

และกำหนดให้ $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = F$

ระเบียบวิธีลักซ์-เวนดรอฟฟ์สองขั้นตอนเป็นระเบียบวิธีการที่ประกอบด้วยการคำนวณตัวทำนายและตัวแก้ (predictor-corrector method) ที่มีขั้นตอนดังนี้

ตัวทำนาย : $$\Phi^{n+1/2} = \Phi^{n} + \frac{\Delta t}{2} F^{n} \qquad (2.21)$$

ตัวแก้ : $$\Phi^{n+1} = \Phi^{n} + \Delta t F^{n+1/2} \qquad (2.22)$$

จากสมการ (2.21) และ (2.22) นำไปใช้ในสมการองค์ประกอบของตัวแบบอ็อยดรอยด์บีสามารถเขียนได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1a :

$$\frac{2We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+1/2} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left\{2\mu_v \tilde{D} - \tilde{\tau} + We\left[\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - \vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} + \left(\nabla\vec{U}\right)\cdot\tilde{\tau}\right]\right\}^{n} \qquad (2.23)$$

ขั้นตอนที่ 2a :

$$\frac{We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left\{2\mu_v \tilde{D} - \tilde{\tau} + We\left[\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - \vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} + \left(\nabla\vec{U}\right)\cdot\tilde{\tau}\right]\right\}^{n+1/2} \qquad (2.24)$$

เพรชเชอร์คอร์เรคชัน (pressure correction)

ระเบียบวิธีเพรชเชอร์คอร์เรคชันคือระเบียบวิธีขั้นตอนการแยกส่วน (fractional step method) เพื่อเพิ่มขั้นตอนการคำนวณความดัน โดยจัดเรียงสมการพจน์ของความเร็วและพจน์ของความดันของสมการโมเมนตัมให้เป็นอิสระจากกัน เมื่อพิจารณาสมการต่อไปนี้

$$Re\left(\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n}}{\Delta t}\right) = \left(\nabla\cdot\tilde{T} - Re\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)^{n} - \nabla p^{n+1} \qquad (2.25)$$

จากสมการ (2.25) จะใช้หลักการแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ในพจน์ของความดัน โดยค่า $\theta = \frac{1}{2}$ จะได้

$$\nabla p^{n+1} \approx \theta\nabla p^{n+1} + (1-\theta)\nabla p^{n}$$

หรือ $$\nabla p^{n+1} \approx \nabla p^{n} + \theta\nabla q^{n+1} \qquad (2.26)$$

เมื่อ $$\nabla q^{n+1} = \nabla p^{n+1} - \nabla p^{n}$$

เมื่อนำสมการ (2.26) แทนลงในสมการ (2.25) จะได้

$$Re\left(\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n}}{\Delta t}\right) = \left(\nabla\cdot\tilde{T} - Re\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)^{n} - \left(\nabla p^{n} + \theta\nabla q^{n+1}\right) \qquad (2.27)$$

จากสมการ (2.27) จะเพิ่มความเร็วอิสระ $\left(\vec{U}^{*}\right)$ เข้าไปในสมการ แล้วแบ่งสมการออกเป็น 2 สมการดังนี้

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{*}-\vec{U}^{n}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{T}-Re\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}-\nabla p\right)^{n} \tag{2.28}$$

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{*}\right)=-\theta\nabla q^{n+1} \tag{2.29}$$

เมื่อนำตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์กระทำสมการ (2.29) ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้เงื่อนไขความต่อเนื่อง $\left(\nabla\cdot\vec{U}^{n+1}=0\right)$ จะได้ว่า

$$\frac{Re}{\Delta t}\nabla\vec{U}^{*}=\theta\nabla^{2}q^{n+1} \tag{2.30}$$

ใช้หลักการเซมิอิมพลิซิท (semi-implicit) เพื่อปรับนิพจน์การแพร่ (diffusion term) คือ

$$\nabla\cdot\tilde{T}=\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\tilde{T}^{n+\frac{1}{2}}+\nabla\cdot\tilde{T}^{n}\right)$$

เมื่อรวมวิธีการตัวทำนาย-ตัวแก้ การปรับนิพจน์การแพร่และแทนสมการ (2.15) ในสมการ (2.28) และสมการองค์ประกอบของตัวแบบอ็อยดรอยด์บี สมการ (2.23) และ (2.24) จะได้ ส่วนการแก้ไขความดันจะใช้สมการ (2.30) ขั้นตอนการแยกส่วนสามารถเขียนเป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1A เป็นสมการที่ใช้หา $U^{n+\frac{1}{2}}$ และ $\tau^{n+\frac{1}{2}}$

$$\frac{2Re}{\Delta t}\left(U^{n+\frac{1}{2}}-U^{n}\right)=\left[\nabla\cdot\left(\tilde{\tau}+2\mu_{N}\tilde{D}\right)-ReU\cdot\nabla U-\nabla p\right]^{n}+\nabla\cdot\mu_{N}\left(\tilde{D}^{n+\frac{1}{2}}-\tilde{D}^{n}\right) \tag{2.31}$$

$$\frac{2We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}}-\tilde{\tau}^{n}\right)=\left[2\mu_{V}\tilde{D}-\tilde{\tau}+We\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}-\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}+\left(\nabla\vec{U}\right)^{t}\cdot\tilde{\tau}\right)\right]^{n} \tag{2.32}$$

ขั้นตอนที่ 1B เป็นสมการที่ใช้หา U^{*} และ τ^{n+1}

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(U^{*}-U^{n}\right)=\left[\nabla\cdot\left(2\mu_{N}\tilde{D}\right)-\nabla p\right]^{n}+\left[\tilde{\tau}-ReU\cdot\nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}}+\nabla\cdot\mu_{N}\left(\tilde{D}^{*}-\tilde{D}^{n}\right) \tag{2.33}$$

$$\frac{2We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+1}-\tilde{\tau}^{n}\right)=\left[2\mu_{V}\tilde{D}-\tilde{\tau}+We\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}-\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}+\left(\nabla\vec{U}\right)^{t}\cdot\tilde{\tau}\right)\right]^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.34}$$

ขั้นตอนที่ 2 เป็นสมการที่ใช้หา p^{n+1} โดยทราบค่า U^{*} และ p^{n}

$$\theta\nabla^{2}\left(p^{n+1}-p^{n}\right)=\frac{Re}{\Delta t}\nabla\cdot U^{*} \tag{2.35}$$

ขั้นตอนที่ 3 เป็นสมการที่ใช้หา U^{n+1} โดยทราบค่า U^{*}, p^{n+1} และ p^{n}

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(U^{n+1}-U^{*}\right)=-\theta\nabla\left(p^{n+1}-p^{n}\right) \tag{2.36}$$

ในระดับต่อไปจะทำการแปลงสมการต่างๆให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ โดยการวิยุตปริภูมิด้วยวิธีการของกาเลอร์คิน ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

2.10 เกรเดียนต์ริคัฟเวอรี (Gradient recovery)

เทคนิควิธีเกรเดียนต์ริคัฟเวอรีใช้เพื่อปรับค่าผลเฉลยให้เกิดความแม่นยำและเร่งเข้าสู่ผลเฉลยที่ถูกต้องโดยส่วนใหญ่พิจารณาเป็น 3 วิธีดังนี้

1. ระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ (local direct method)
2. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินวงกว้าง (global Galerkin method)
3. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินเฉพาะที่ (local Galerkin method)

ในงานวิจัยนี้จะใช้ระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีที่มีการสร้างเมทริกซ์ขนาดไม่ใหญ่

ส่วนประกอบเกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชิ้นประกอบจะอยู่ในรูป

$$G_{m}^{e}(x,t)=\frac{\partial v}{\partial x_{m}}(x,t) \tag{2.37}$$

โดยที่ $m=1,2$ และ e เป็นชิ้นประกอบที่กำลังพิจารณา

นำหลักการของกาเลอร์คินมาพิจารณาความเร็วโดยใช้ชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยมชนิด 6 จุด จะได้

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{6}\phi_{i}(x)v_{i}(t) \tag{2.38}$$

เมื่อแทนสมการ (2.38) ลงในสมการ (2.37) จะได้เกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชิ้นประกอบอยู่ในรูป

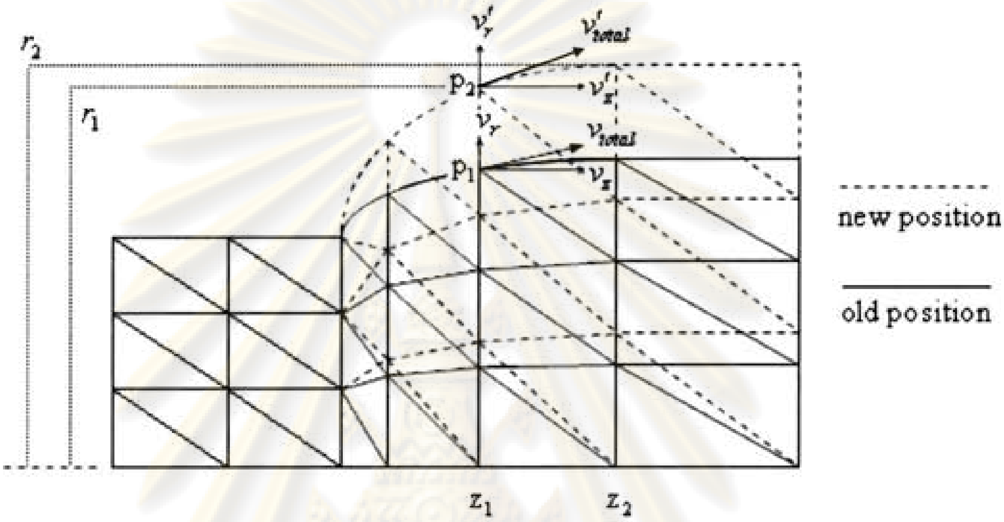
$$G_{m}^{e}(x,t)=\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\phi_{i}(x)}{\partial x_{m}}v_{i}(t)$$

โดยที่ ϕ_{i},v_{i} เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง และ ความเร็วที่จุดต่อ i ตามลำดับ

ต่อจากนั้น จะนำค่าเกรเดียนต์ความเร็วที่ได้จากการหาของแต่ละชิ้นประกอบที่มีการใช้จุดต่อร่วมมาหาค่าเฉลี่ย

2.11 การแสดงเวกเตอร์ภาพฉายของผิวผลเฉลย (Surface solution reprojection)

หลังจากคำนวณเพื่อปรับพื้นผิวอิสระใหม่แล้ว จะทำการคำนวณหาความเร็วใหม่ เนื่องจากจุดต่อที่บริเวณนอกท่อได้มีการเปลี่ยนแปลงทำให้ค่าความเร็วที่คำนวณได้ไม่ถูกต้อง จึงต้องทำการปรับเพื่อให้ค่าสอดคล้องกับพิกัดใหม่ของจุดต่อนั้น โดยใช้หลักการเวกเตอร์ภาพฉายที่ผิวอิสระ



รูปที่ 2.4 การปรับพื้นผิวอิสระ

ให้ v_r, v_z, v_{total} คือค่าความเร็วในแนวแกน r , z และความเร็วรวม ณ จุดต่อ p_1 ที่ยังไม่ได้ปรับพื้นผิวอิสระตามลำดับ

และ v_r', v_z', v_{total}' คือค่าความเร็วในแนวแกน r , z และความเร็วรวม ณ จุดต่อ p_2 ที่ได้ปรับพื้นผิวอิสระแล้วตามลำดับ

จากรูปที่ 2.4 จะได้ความสัมพันธ์ของความเร็วรวมเป็น

$$v_{total} = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$$

ดังนั้นค่าความเร็ว ณ จุดต่อ p_2 ที่ปรับพื้นผิวอิสระแล้วคือ

$$v_r' = v_{total} \sin\theta$$

$$v_z' = v_{total} \cos\theta$$

เมื่อค่ามุม θ เป็นมุมระหว่างแนวรัศมีและแนวแกน z มีความสัมพันธ์เป็น

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1}\right)$$

2.12 ระเบียบวิธีการทำนายสายกระแส (Streamline prediction method)

การทำนายการบวมตัวที่บริเวณนอกท่อนั้น ได้จากการศึกษางานของ Crochet และคณะ [25] โดยเป็นไปตามเงื่อนไขด้านล่าง

$$v_r n_r + v_z n_z = 0$$

$$t_r n_r + t_z n_z = s\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

$$t_r n_z - t_z n_r = 0$$

เมื่อ v_r, v_z คือ ความเร็วในแนวแกน r และความเร็วในแนวแกน z

n_r, n_z คือ ส่วนประกอบของแนวฉาก (unit normal component) กับพื้นผิวอิสระ

t_r, t_z คือ แรงผิวที่ตั้งฉากกับพื้นผิว (surface force normal to the surface)

ρ_1, ρ_2 คือ รัศมีความโค้งของผิวอิสระ (principal radii of curvature to surface)

s คือ สัมประสิทธิ์แรงตึงผิว (surface tension coefficient)

จากเงื่อนไขทั้งสามข้างบน จะได้ขนาดการบวมตัวของของไหลที่นอกท่อ

$$r(z) = R + \int_z \frac{v_r(z)}{v_z(z)} dz \tag{2.39}$$

เมื่อ R คือ รัศมีที่ปลายท่อ

งานวิจัยนี้ ได้ใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน (Simpson's 1/3 rule) ในการหาค่าปริพันธ์ของสมการ (2.39) ซึ่งใช้จุดต่อ 3 จุด ในแต่ละชิ้นประกอบเพื่อประมาณค่าจาก $z = 0$ ถึง 2 คือ

$$r_{iz}^n = r_{iz}^{n-1} + \int_z \frac{v_r^{e_i}(z)}{v_z^{e_i}(z)} dz$$

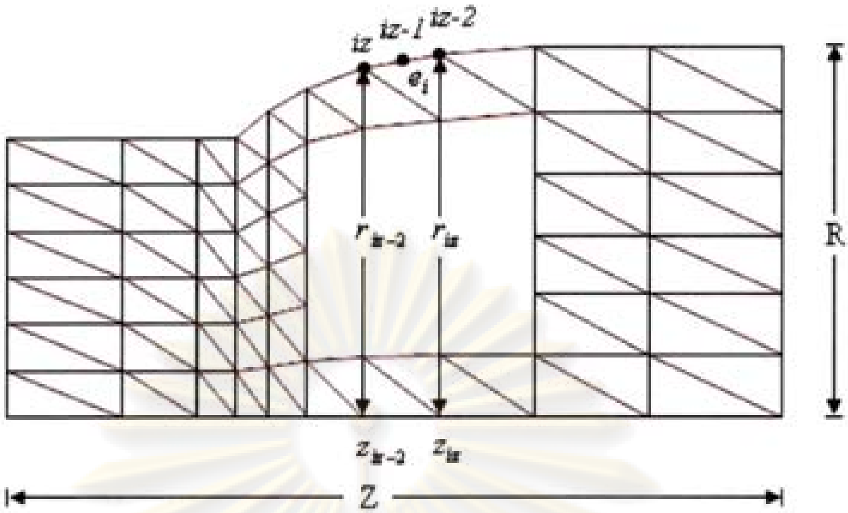
$$\int_z \frac{v_r^{e_i}(z)}{v_z^{e_i}(z)} dz \approx \frac{h}{3}\left[\frac{v_r^{e_i}(iz-2)}{v_z^{e_i}(iz-2)} + 4\frac{v_r^{e_i}(iz-1)}{v_z^{e_i}(iz-1)} + \frac{v_r^{e_i}(iz)}{v_z^{e_i}(iz)}\right]$$

$$h = \frac{z_{iz} - z_{iz-2}}{2}$$

เมื่อ r_{iz}^n, r_{iz}^{n-1} คือ รัศมีที่ตำแหน่ง *iz* และอยู่ในขั้นการคำนวณที่ n และ n-1 ตามลำดับ

$v_r^{e_i}(z), v_z^{e_i}(z)$ คือ ค่าความเร็วในแนวแกน r และ z ในชิ้นประกอบ e_i ตามลำดับ

z_{iz}, z_{iz-2} คือ ค่า z ที่ตำแหน่ง *iz* และ *iz-2* ตามลำดับ

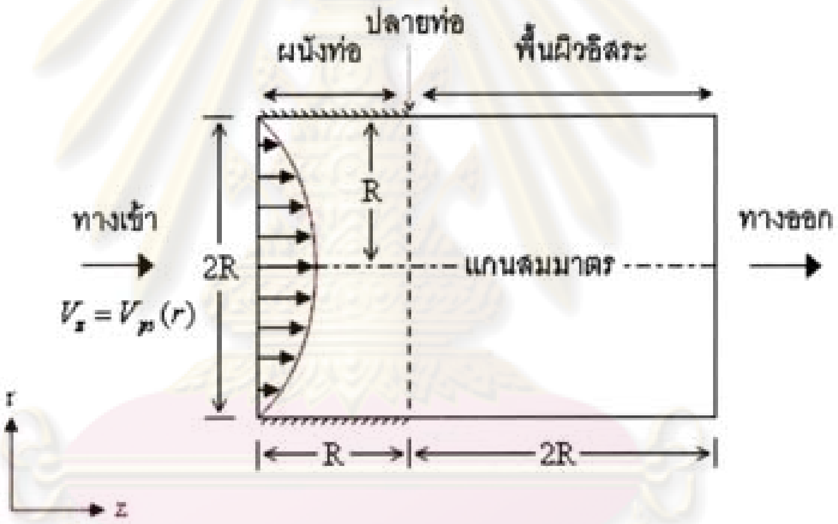


รูปที่ 2.5 รูปทรงเรขาคณิตของการบวมตัว (die swell geometry)

บทที่ 3

การจำลองการไหลของของไหลนิวโตเนียน
(Simulation of Newtonian Fluid Flow)

ปัญหาที่ศึกษาในบทนี้แบ่งเป็น 2 หัวข้อคือ การจำลองรูปแบบการไหลของปัญหาสติคสลิป (stick-slip problem) และปัญหาการบวมตัว (die-swell problem) ของของไหลนิวโตเนียน ด้วยการพิจารณาสมการและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 และ 3 โดยลักษณะโดเมนของปัญหาเป็นท่อทรงกระบอกดังรูปที่ 3.1 ซึ่งมีของไหลไหลผ่านท่อนี้จึงทำให้สามารถพิจารณาระบบพิกัดเป็น 2 มิติ ในพิกัดทรงกระบอกบนแกน r และแกน z เพราะในทุกแกนองศาคุณสมบัติต่างๆ มีค่าเท่ากัน ณ จุดที่ห่างจากแกนสมมาตรในรัศมีที่เท่ากัน ดังนั้นจึงสามารถพิจารณารูปโดเมนเป็นครึ่งหนึ่งดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.1 รูปท่อแบบการไหลเต็มท่อ

รูปที่ 3.2 โดเมนแบบครึ่งท่อในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ

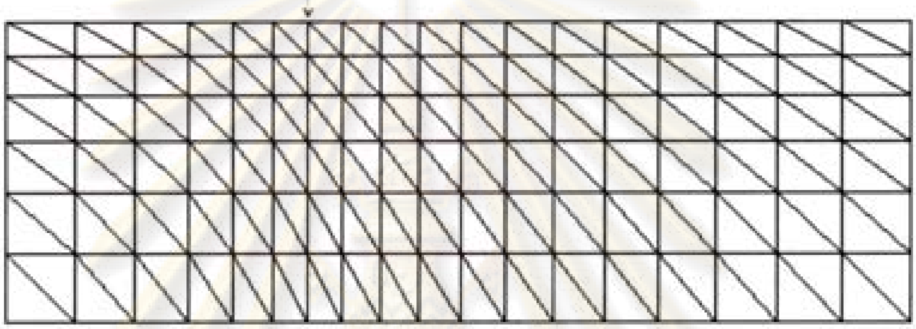
และจากสมมุติฐานที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 1 ว่าความเร็วที่เข้ามาในท่อมีรูปแบบพาราโบลา (Poiseuille flow) ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการที่ 3.1

$$V_{in}(r) = V_{\max}(1 - r^2) \tag{3.1}$$

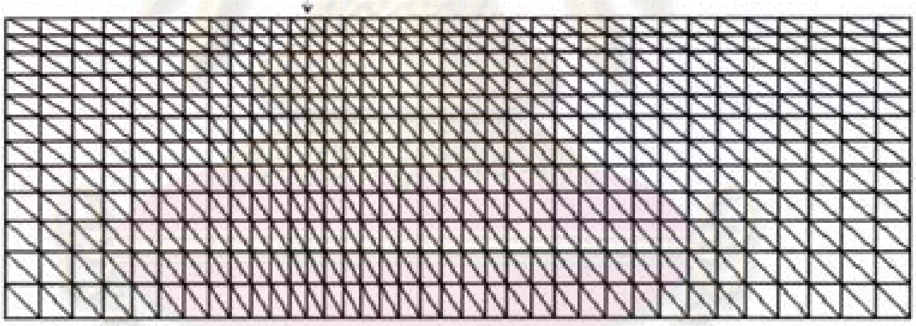
โดยที่ $V_{in}(r)$ เป็นความเร็วของของไหลที่เข้าท่อโดยขึ้นกับรัศมีของท่อ

$V_{\max}$ เป็นความเร็วสูงสุดที่เข้าท่อ โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้เป็นความเร็วลักษณะเฉพาะ ดังนั้นค่า $V_{\max}$ ไร้หน่วยจึงมีค่าเท่ากับ 1

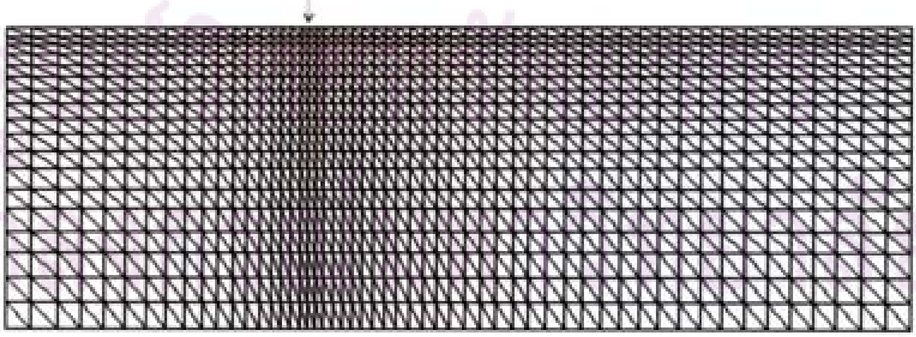
การแบ่งรูปร่างโดเมนของปัญหาจะพิจารณาโดยแบ่งความละเอียดเป็น 3 แบบ ดังรูปที่ 3.3 และตารางที่ 3.1



(ก) แบบหยาบ (coarse mesh)



(ข) แบบปานกลาง (medium mesh)



(ค) แบบละเอียด (fine mesh)

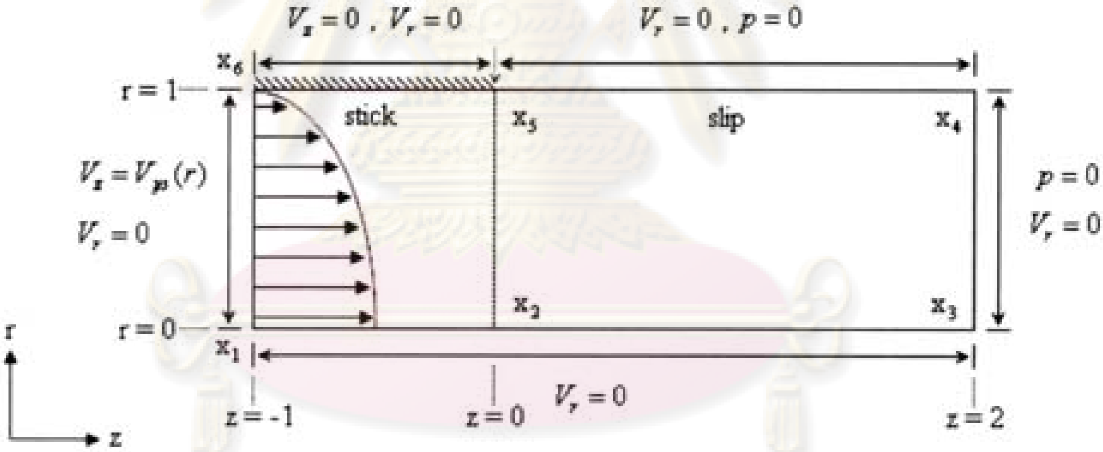
รูปที่ 3.3 การแบ่งรูปร่างโดเมนของปัญหาออกเป็นชิ้นประกอบขนาดต่างๆ ; (ก) coarse mesh, (ข) medium mesh, (ค) fine mesh

โดเมน	จำนวนชิ้นประกอบ	จำนวนจุดต่อ	ขนาดความกว้างที่น้อยที่สุด
(ก) coarse mesh	216	481	0.115
(ข) medium mesh	864	1825	0.058
(ค) fine mesh	1944	4033	0.025

ตารางที่ 3.1 แสดงข้อมูลของแต่ละโดเมน ; จำนวนชิ้นประกอบ, จำนวนจุดต่อ และ ขนาดความกว้างที่น้อยที่สุด

3.1 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน (Stick-slip problem for Newtonian fluid)

ลักษณะของปัญหาคือการจำลองการไหลที่ผ่านท่อเมื่อมีความเร็วที่ผนังท่อเป็นศูนย์คือส่วนของสติค (stick) และออกจากท่อได้พบอากาศจึงมีความเร็วแนวแกน (axial velocity : V_z) ไม่เป็นศูนย์คือส่วนของสลิป (slip) แต่ยังไม่มีการบวมตัว ดังนั้นความเร็วในแนวรัศมี (radial velocity : V_r) จึงเท่ากับศูนย์ โดยจะกำหนดเงื่อนไขขอบดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ลักษณะปัญหาการไหลสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน

จากรูปที่ 3.4 กำหนดให้ส่วน $x_1x_2x_5x_6$ เป็นส่วนของท่อ และ $x_2x_3x_4x_5$ เป็นส่วนของการไหลนอกท่อ ดังนั้นเรียกส่วนที่ของไหลติดผนัง x_5x_6 ว่าสติค และส่วนที่เป็นพื้นผิวอิสระ x_4x_5 เรียกว่าสลิป โดยจุด x_1 มีพิกัด (-1,0), x_2 มีพิกัด (0,0), x_3 มีพิกัด (2,0), x_4 มีพิกัด (2,1), x_5 มีพิกัด (0,1) และ x_6 มีพิกัด (-1,1) เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบดังนี้

ขอบด้านล่าง x_1x_3 คือกึ่งกลางแกนสมมาตร ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์

ขอบด้านขวา x_3x_4 คือขอบผิวอิสระ ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์ และค่าความดัน (p) มีค่าเท่ากับศูนย์

ขอบอิสระบน x_4x_5 คือขอบด้านที่ของไหลสัมผัสอากาศ ค่าความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์ และค่าความดัน (p) มีค่าเท่ากับศูนย์

ขอบผนังบน x_5x_6 คือขอบผนังท่อ ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์ และความเร็วในแนวแกน (V_z) มีค่าเป็นศูนย์

ขอบด้านซ้าย x_1x_6 คือขอบด้านที่ของไหลไหลเข้าท่อ ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์ และความเร็วในแนวแกน (V_z) มีค่าเป็นไปตามสมการที่ 3.1

ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) ของไหลไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ค่าเรย์โนลด์มีค่า (*Re*) เท่ากับ 10^{-4} ระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (isothemal system) และไม่มีการลื่นไถลที่ผนังท่อ (no slip)

เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ในปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียนจะกำหนดให้ค่าเริ่มต้นมีค่าเท่ากับศูนย์ทุกค่า

ผลที่ได้รับจากปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน

เปรียบเทียบค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) และค่าความดัน (p) ของโดเมนแบบต่างๆ เทียบกับ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ได้ตามตารางที่ 3.2

โดเมน	V_z plug	V_r max	Δp
(ก) coarse mesh	0.517	0.102	4.900
(ข) medium mesh	0.510	0.105	4.877
(ค) fine mesh	0.505	0.108	4.877
Ngamaramvaranggul และ Webster [21]**	0.500	0.100	4.880

ตารางที่ 3.2 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : เปรียบเทียบค่าต่างๆของแต่ละโดเมน

** Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ใช้โดเมนจำนวนชิ้นประกอบ 1800 ชิ้นประกอบ

จากตารางที่ 3.2 พบว่าค่าความเร็วและค่าผลต่างความดันระหว่างความดันตอนเข้าท่อและตอนปลายของของไหล (pressure drop, Δp) ของโดเมน fine mesh มีค่าใกล้เคียงกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] มากกว่าโดเมนตัวอื่น เมื่อนำค่าความเร็วและค่าความดันของโดเมน coarse mesh, medium mesh และ fine mesh ไปวิเคราะห์ด้วยวิธีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (root mean square deviation (RMSD) ;

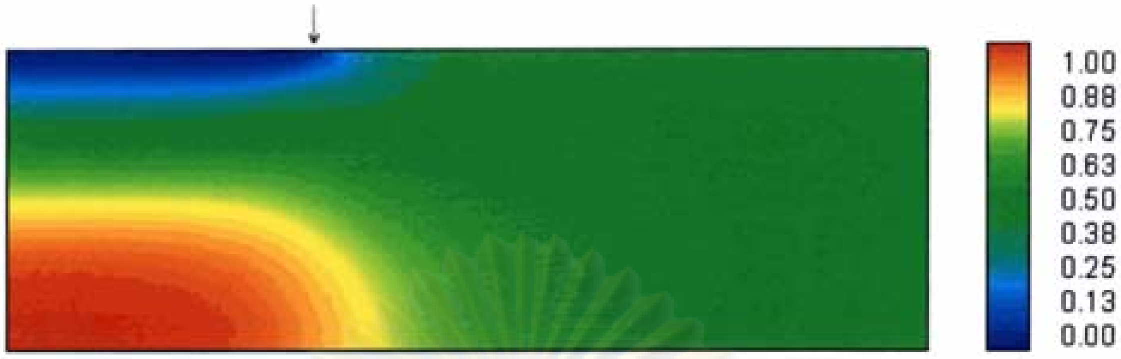
$\mathrm{RMSD}(\theta_1,\theta_2)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1,i}-x_{2,i}\right)^2}{n}}$ เมื่อ $\theta_1=[x_{1,1},x_{1,2},\ldots,x_{1,n}]$, $\theta_2=[x_{2,1},x_{2,2},\ldots,x_{2,n}]$) กับของงาน Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ได้ผลเท่ากับ 0.0152, 0.0067 และ 0.0057 ตามลำดับ พบว่าค่าของโดเมน fine mesh ให้ผลสอดคล้องกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] จึงได้นำผลนั้นมาแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี (color contour) ดังรูปที่ 3.5 และจะนำโดเมนชนิดแบบละเอียด (fine mesh) นี้ไปใช้กับปัญหาอื่นต่อๆไป

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.5 (ก) ค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ตรงบริเวณทางเข้าท่อมีระดับสีไล่ระดับจากบนลงล่างแบบค่าความเร็วน้อยไปหาค่าความเร็วมากเนื่องจากความเร็วที่เข้ามาภายในท่อเป็นแบบพาราโบลา และความเร็วภายในท่อยังคงรักษารูปแบบการไหลแบบคงตัวจนของไหลออกจากท่อ จากนั้นจะมีการปรับค่าความเร็วจนได้ค่าออกมาใกล้เคียงกัน และตรงบริเวณปลายของของไหล (z = 2) ความเร็วในแนวแกนจะมีค่าเท่ากันเรียกว่าการไหลแบบปลั๊ก (plug flow) ดังรูปที่ 3.6 และ 3.7

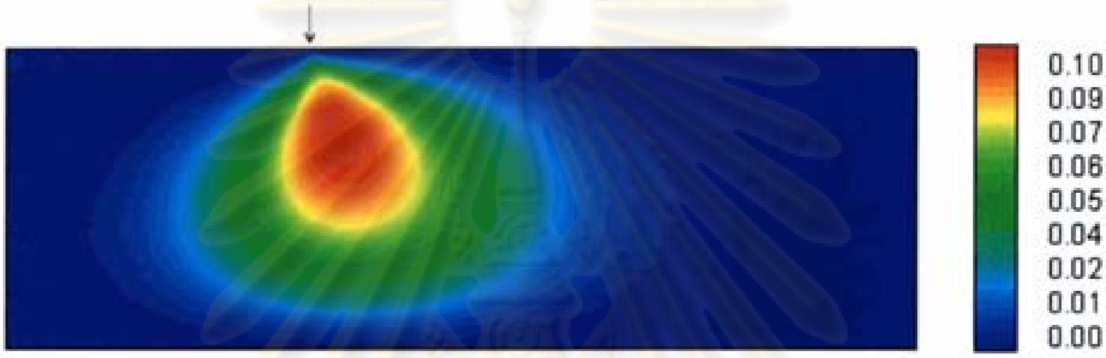
เมื่อพิจารณารูปที่ 3.5 (ข) ค่าความเร็วในแนวแกนรัศมี (V_r) มีค่าเป็นศูนย์ที่ทุกขอบเนื่องจากเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ จึงทำให้สีที่ปรากฏคือสีน้ำเงินตามบริเวณขอบโดเมนหมายถึงความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นตรงใกล้ทางออกของท่อ จะมีค่าความเร็วเกิดขึ้นสูงมาก เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความดัน

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.5 (ค) ค่าความดัน (pressure) มีค่าสูงที่สุดตรงบริเวณทางเข้าท่อและไล่ระดับลดลงจนออกจากท่อ เนื่องจากของไหลจะไหลจากที่มีค่าความดันมากไปสู่ที่ที่มีความดันต่ำกว่า ดังรูปที่ 3.8

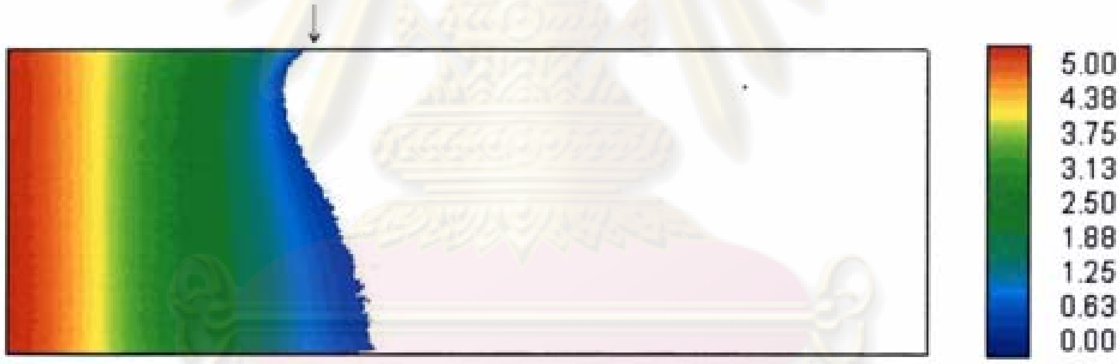
เมื่อพิจารณารูปที่ 3.5 (ง) ค่าอัตราเฉือน (shear rate) ซึ่งแปรผันตรงกับค่าอินแวเรียนท์อันดับสองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (the second invariants of the rate of strain tensor, II) หรือค่าความเค้นเฉือนโดยรวม ดังนั้นค่าอัตราเฉือนจึงมีค่ามากที่บริเวณผนังท่อและจะมากที่สุดตรงบริเวณปลายท่อเนื่องจากการยึดติดของโมเลกุลระหว่างของไหลกับผนังท่อ ถ้าค่าความเค้นเฉือนโดยรวมมีค่าสูง ณ จุดใดจุดนั้นก็จะเป็นจุดเปราะและแตกหักง่ายซึ่งบริเวณดังกล่าวได้แก่บริเวณรอบจุด z = 0 หรือบริเวณรอยต่อระหว่างของไหลที่กำลังจะออกจากท่อสู่อากาศ ดังรูปที่ 3.9



(ก) V_z



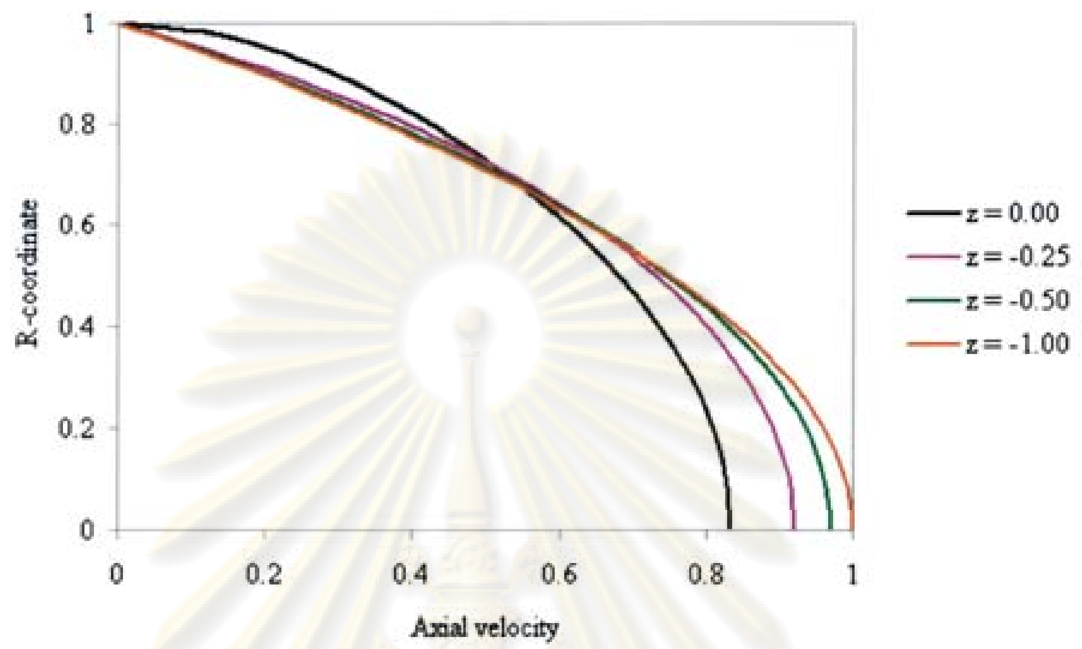
(ข) V_r



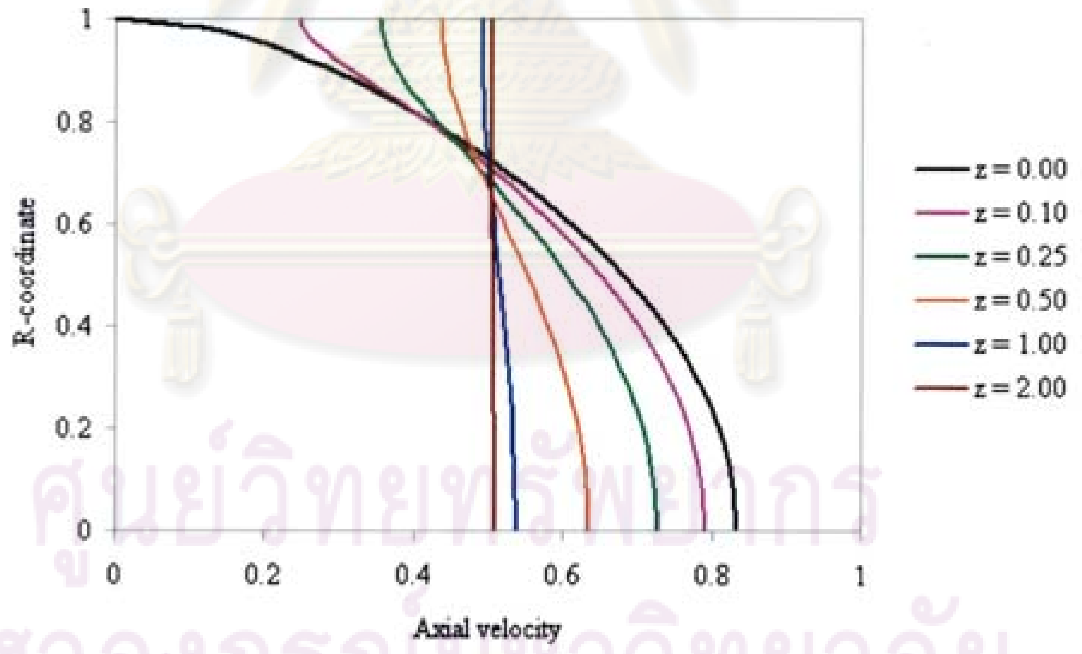
(ค) pressure

(ง) shear rate

รูปที่ 3.5 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี ; (ก) V_z, (ข) V_r, (ค) pressure, (ง) shear rate

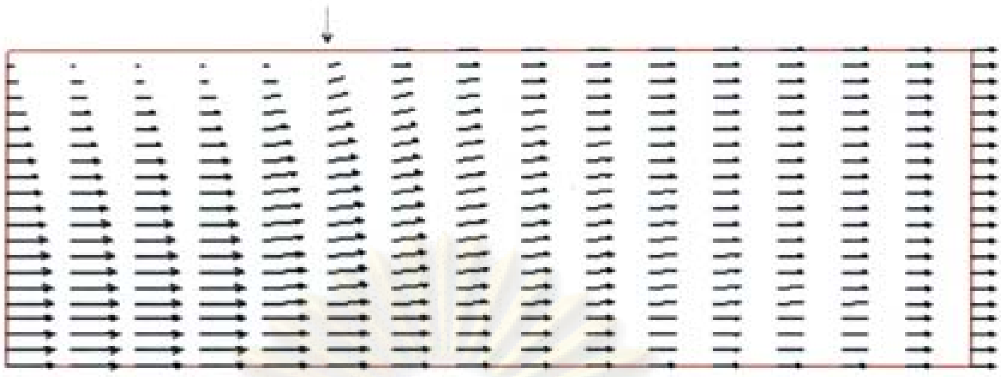


(ก) V_z ที่ $z \le 0$

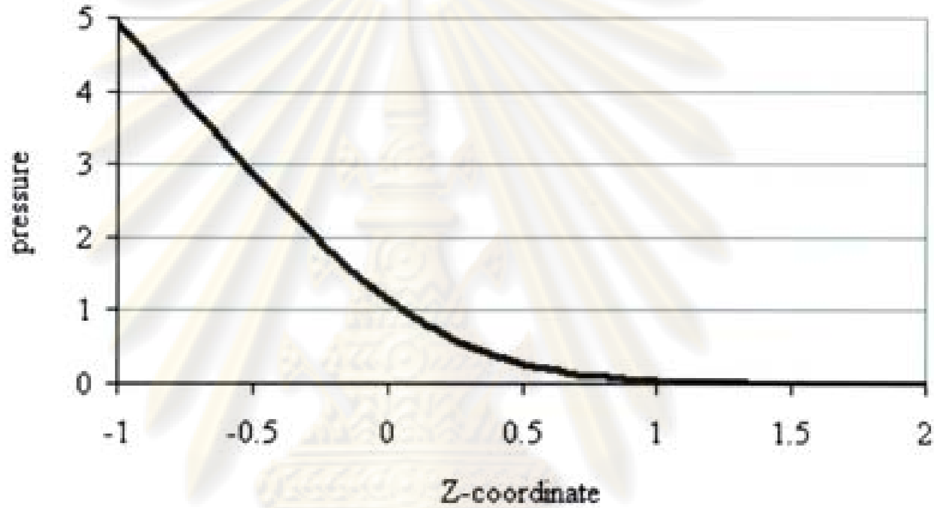


(ข) V_z ที่ $z \ge 0$

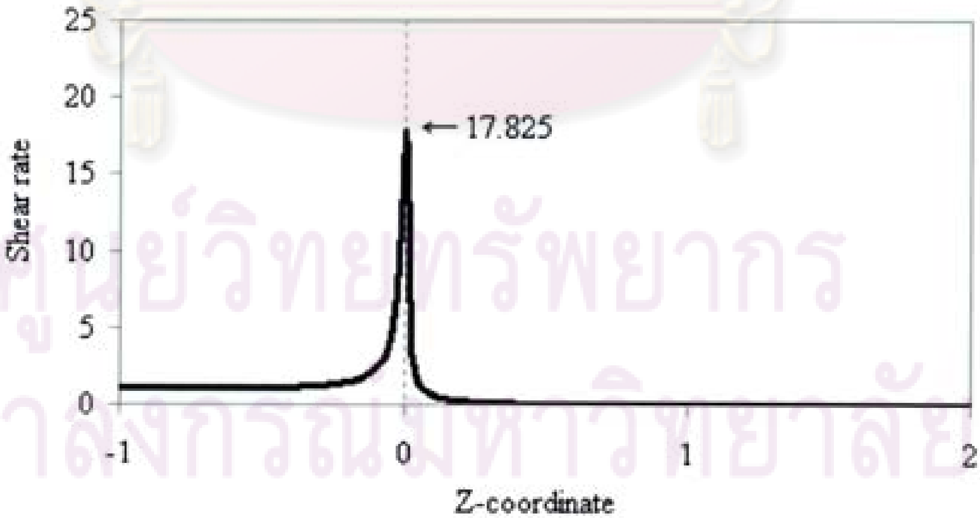
รูปที่ 3.6 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : ความเร็วในแนวแกน (V_z) ณ จุด z ต่างๆกัน ; (ก) V_z ที่ $z \le 0$, (ข) V_z ที่ $z \ge 0$



รูปที่ 3.7 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : เวกเตอร์ความเร็ว



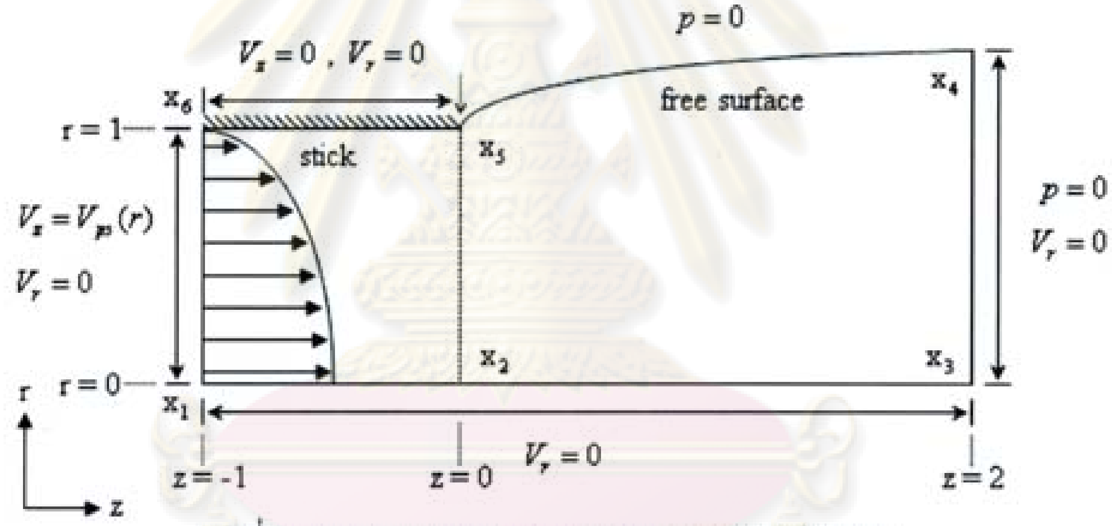
รูปที่ 3.8 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : ค่าความดันบนแกนสมมาตร (r = 0)



รูปที่ 3.9 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : ค่าอัตราเฉือนที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ

3.2 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน (Die-swell problem for Newtonian fluid)

ลักษณะของปัญหาคือการจำลองการไหลผ่านท่อรูปทรงกระบอกแล้วออกจากท่อ ทำให้ของไหลที่ไหลออกจากท่อมีขนาดใหญ่กว่าท่อเกิดเป็นลักษณะที่เรียกว่าการบวมตัวเนื่องจากความดันของของไหลภายในท่อมีค่ามากกว่าภายนอกท่อมาก ของไหลเมื่อไหลเข้าท่อมีความเร็วในแนวแกน (V_z) เป็นรูปแบบพาราโบลา ในขณะที่ด้านปลายของของไหลจะมีการไหลแบบปลั๊ก (plug flow) สังเกตจากผลที่ได้รับจากปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปแบบดังกล่าวทำให้เกิดความเค้นเฉือน (shearing strees) ที่ผนังท่อมาก นั่นคือความเร็วที่ไหลผ่านบริเวณผนังท่อมีค่าต่ำกว่าที่กึ่งกลางท่อ ดังนั้นเพื่อสร้างรูปแบบการไหลแบบปลั๊ก ทำให้ของไหลที่ผนังท่อต้องเร่งความเร็วมากกว่าที่กึ่งกลางท่อ จึงส่งผลให้เกิดค่าความเค้นเฉือนสูงขึ้น ทำให้เกิดการบวมตัวที่บริเวณปากท่อ โดยการคำนวณจะกำหนดเงื่อนไขขอบดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 ลักษณะปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน

ลักษณะเงื่อนไขขอบจะแตกต่างจากปัญหาการไหลสติค-สลิป ตรงขอบอิสระบน x_4x_5 มีค่าความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นบริเวณ $x_3x_4x_5$ จึงเป็นบริเวณที่เรียกว่าพื้นผิวอิสระ (free surface) และมีความอิสระในการบวมตัว (die-swell) ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาการบวมตัวจะนำค่าผลเฉลยที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปมาเป็นค่าเริ่มต้น

ผลการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน

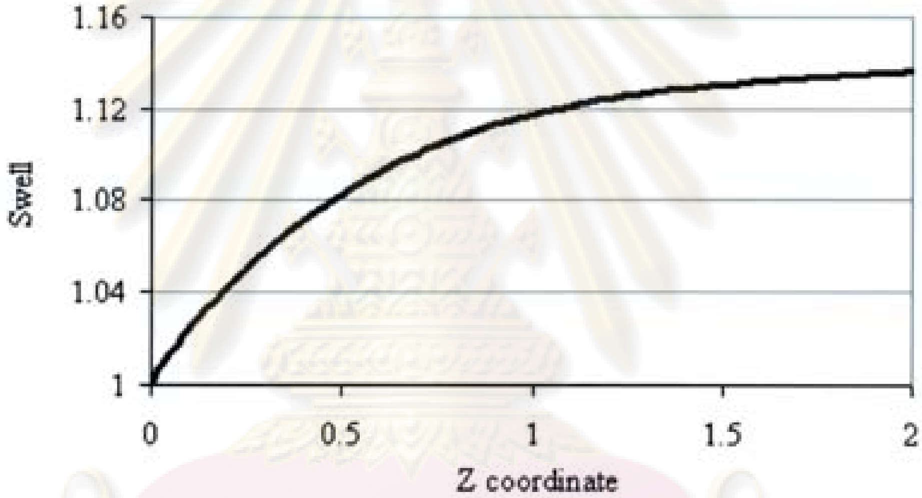
ผลที่ได้จากการคำนวณจะนำไปเปรียบเทียบกับ Nickell และคณะ [8], Tanner [7], Ngamaramvaranggul และ Webster [21] โดยจะเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัว(หาได้จาก

รัศมีการบวมตัวหารด้วยรัศมีของท่อ) ดังตารางที่ 3.3 และรูปที่ 3.11 แสดงอัตราส่วนการบวมตัวที่ได้จากการคำนวณ

ผู้วิจัย	χ	$\chi\%$
Nickell และคณะ [8] (experiment)	1.128	12.8
Tanner [7] (analytical approximation)	1.136	13.6
Ngamaramvaranggul และ Webster [21] (simulation)	1.130	13.0
fine mesh	1.136	13.6

ตารางที่ 3.3 เปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน

โดยที่ $\chi, \chi\%$ แทนอัตราส่วนการบวมตัวและอัตราส่วนการบวมตัวที่คิดแบบร้อยละตามลำดับ



รูปที่ 3.11 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน : อัตราส่วนการบวมตัว

จากตารางที่ 3.3 พบว่าผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับของ Tanner [7] ต่อไปจะทำการเปรียบเทียบค่าอื่นๆ กับ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ดังตารางที่ 3.4

โดเมน	V_z max	V_r max	Pressure
Ngamaramvaranggul และ Webster [21]	1.002	0.138	5.083
fine mesh	1.000	0.143	4.950

ตารางที่ 3.4 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน : การเปรียบเทียบค่าความเร็วและความดันกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

จากตารางที่ 3.4 พบว่าค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) และค่าความดันมีค่าใกล้เคียงกับ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] และค่าต่างๆ ที่แสดงผลลัพธ์แบบแถบชั้นสี ในรูปที่ 3.12 ลักษณะรูปแบบของผลลัพธ์จะไม่ต่างจากปัญหาสติค-สลิป โดยความเร็วในแนวแกน (V_z) ตรงบริเวณทางเข้าท่อยังคงเป็นรูปแบบพาราโบลา ส่วนตรงบริเวณทางปลายของไหลเป็นการไหลแบบปลั๊ก พิจารณารูปที่ 3.13 ประกอบ ส่วนความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ตรงขอบผิวอิสระจะมีค่าเนื่องจากของไหลมีการบวมตัว และมีค่ามากที่สุดตรงบริเวณปากท่อที่มีการบวมตัว ค่าความดันมีค่ามากที่สุดตรงทางเข้าและจะค่อยๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ที่บริเวณพื้นผิวอิสระดังรูปที่ 3.14 ส่วนที่ค่าติดลบบางส่วนเกิดจากความผิดพลาดเชิงตัวเลข (numerical error) ส่วนค่าอัตราเฉือนจะมีค่ามากที่สุด ณ จุด x_5 ดังรูปที่ 3.10 ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างท่อและอากาศซึ่งเป็นบริเวณที่เริ่มเกิดการบวมตัว รองลงมาจะเป็นบริเวณผนังท่อดังรูปที่ 3.15

สำหรับปัญหาการบวมตัวพบว่าการไหลที่ขอบด้านขวาดังรูปที่ 3.13 เป็นการไหลแบบปลั๊ก (plug flow) ซึ่งค่าความเร็วน้อยกว่าค่าความเร็วแบบปลั๊กของปัญหาสติค-สลิปเนื่องจากกฎการอนุรักษ์อัตราการไหล จึงทำให้ค่าของความเร็วที่ขอบด้านขวาลดลงเมื่อเทียบกับปัญหาสติค-สลิป

ความเร็วในแนวแกน (V_z) ของทั้งสองปัญหาพบว่าค่าที่มากที่สุดมีค่าเท่ากันเนื่องจากความเร็วที่เข้าท่อมีการไหลแบบพาราโบลาและเป็นเงื่อนไขขอบโดยกำหนดให้ค่าความเร็วสูงสุดเท่ากับ 1.00 เมื่อของไหลเคลื่อนที่ไปจะสูญเสียพลังงานจากแรงเสียดทานทำให้ความเร็วลดลง

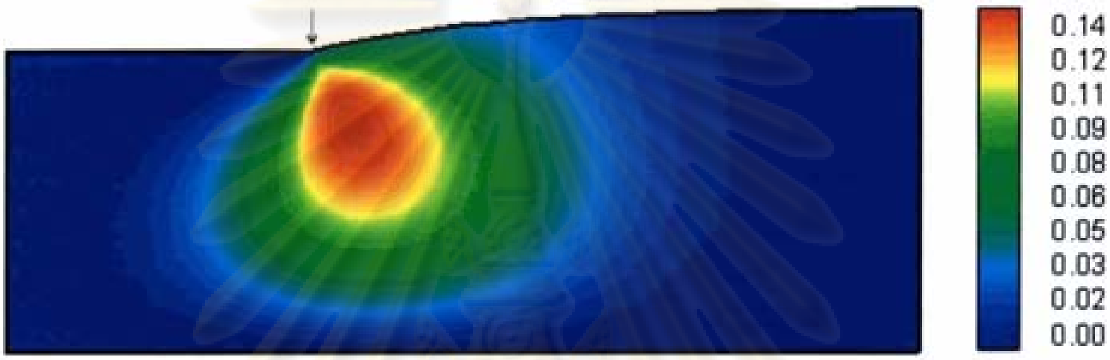
ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) พบว่าปัญหาการบวมตัวมีค่ามากกว่าปัญหาสติค-สลิป เพราะปัญหาการบวมตัวได้มีการปล่อยให้มีการคำนวณที่ขอบผิวอิสระ ส่วนปัญหาสติค-สลิปได้กำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงทำให้ค่าความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ของปัญหาการบวมตัวมีค่ามากกว่า

ความดันระหว่างทางเข้าท่อและปลายของของไหล (pressure drop, Δp) สำหรับปัญหาการบวมตัวมีค่ามากกว่าปัญหาสติค-สลิป เนื่องจากการบวมตัวต้องการแรงดันมากขึ้น และค่าอัตราเฉือน ($\dot{\gamma}$) ก็มีลักษณะทำนองเดียวกัน

ลักษณะปัญหา	*Vplug*	V_z max	V_r max	Δp	$\dot{\gamma}$ max
ปัญหาสติค-สลิป (stick-slip)	0.505	1.000	0.108	4.877	17.798
ปัญหาการบวมตัว (die-swell)	0.387	1.000	0.143	4.950	19.213

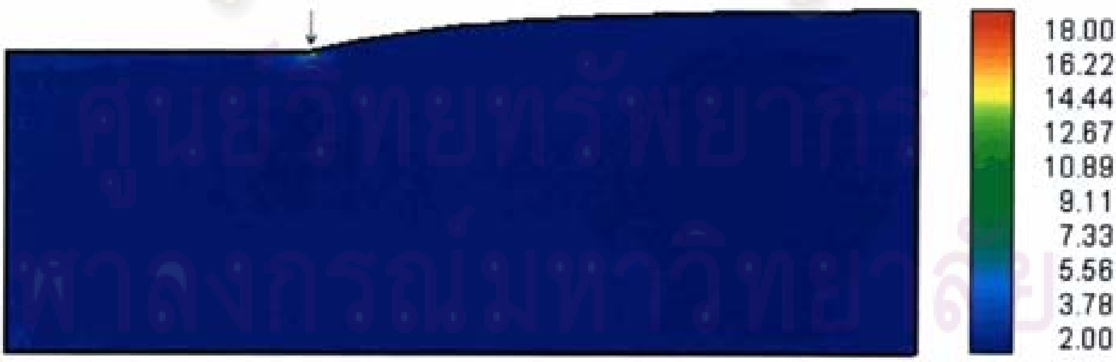
ตารางที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบค่าต่างๆ ของปัญหาสติค-สลิปและปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน

(ก) V_z



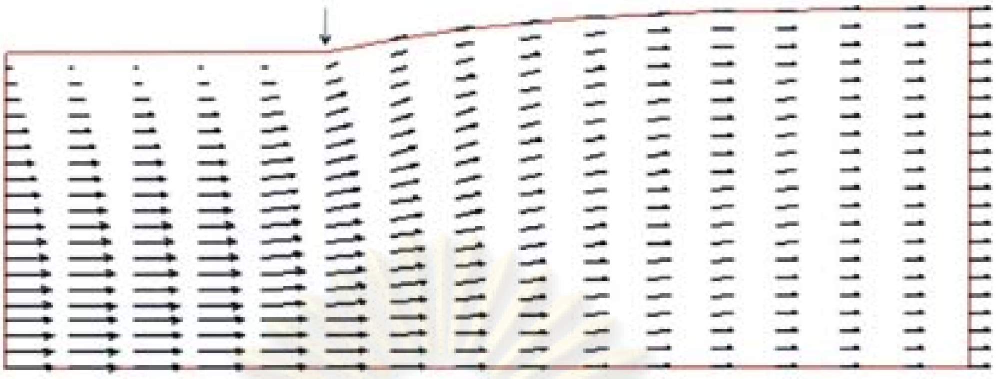
(ข) V_r

(ค) pressure

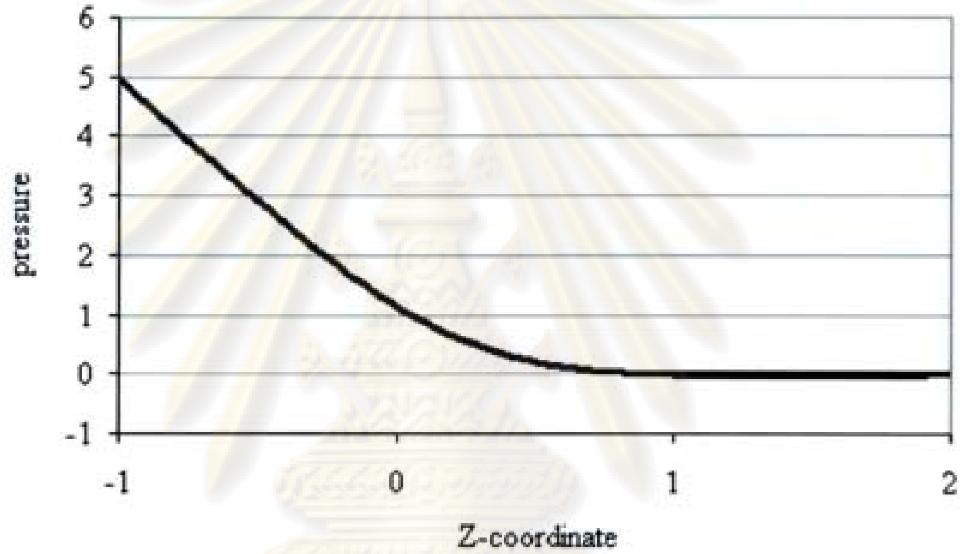


(ง) shear rate

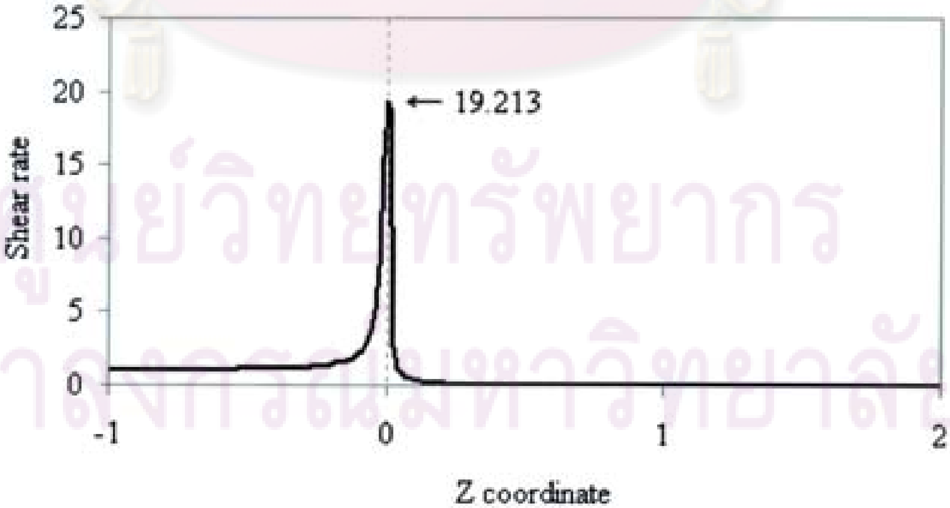
รูปที่ 3.12 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี ; (ก) V_z, (ข) V_r, (ค) pressure, (ง) shear rate



รูปที่ 3.13 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน : เวกเตอร์ความเร็ว



รูปที่ 3.14 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน : ค่าความดันบนแกนสมมาตร (r = 0)



รูปที่ 3.15 ปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน : ค่าอัตราเฉือนที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ

3.3 สรุปผล (Conclusion)

ในการพิจารณาปัญหาการไหลของของไหลชนิดนิวโตเนียน จะเริ่มจากการศึกษาปัญหาการไหลแบบสติค-สลิป พบว่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ตรงทางเข้าท่อหรือขอบด้านซ้ายมีรูปแบบพาราโบลา (Poiseuille flow) และเมื่อของไหลเคลื่อนที่ภายในท่อ ลักษณะการไหลยังคงรักษาสภาพของความเร็วในแนวแกน (V_z) คงตัว เมื่อของไหลเคลื่อนที่ออกนอกท่อความเร็วจะมีการพัฒนาให้มีขนาดเท่ากันที่ขอบด้านขวา เรียกรูปแบบความเร็วแบบนี้ว่าการไหลแบบปลั๊ก (plug flow) ส่วนความเร็วในแนวรัศมี (V_r) จะมีค่ามากตรงบริเวณทางออกของท่อ ส่วนความดัน (pressure) จะมีค่ามากตรงทางเข้าท่อและจะมีค่าลดลงตลอดแนวทางการไหล และค่าอัตราเฉือนพบว่าจะมีค่ามากที่สุดตรงบริเวณทางออกของท่อ รองลงมาจะเป็นบริเวณผนังท่อ สืบเนื่องมาจากการที่ชั้นของไหลที่ติดกับผนังท่อมีการยึดติดหรือไม่ลื่นไถล (no slip condition) คือมีความเร็วเท่ากันเท่ากับศูนย์ ทำให้เกิดความเค้นเฉือนมากกว่าบริเวณอื่น

หลังจากการศึกษาปัญหาการบวมตัว ผลปรากฏว่าค่าผลเฉลยแตกต่างกันเล็กน้อยแต่รูปแบบลักษณะแถบชั้นสีของผลเฉลยไม่แตกต่างกับปัญหาสติค-สลิป มีเพียงแต่ขนาดของค่าที่ต่างกัน โดยเมื่อเปรียบเทียบผลระหว่างปัญหาสติค-สลิปและปัญหาการบวมตัวด้วยค่าผลลัพธ์ต่างๆ ปรากฏว่าค่าที่ได้จากปัญหาการบวมตัวมีค่าความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ความดัน และค่าอัตราเฉือน $(\dot{\gamma})$ มากกว่าปัญหาสติค-สลิป

จากปัญหาสติค-สลิปและปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน บริเวณที่ผนังท่อมีการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบด้วยเงื่อนไขการไม่ลื่นไถล แต่ในความเป็นจริงพบว่าที่บริเวณผนังท่อนั้นของไหลไม่ได้ยึดติดกับผนังท่อแต่มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ ซึ่งผลกระทบจากการลื่นไถลที่เกิดขึ้นจะนำไปศึกษาต่อในบทต่อไป

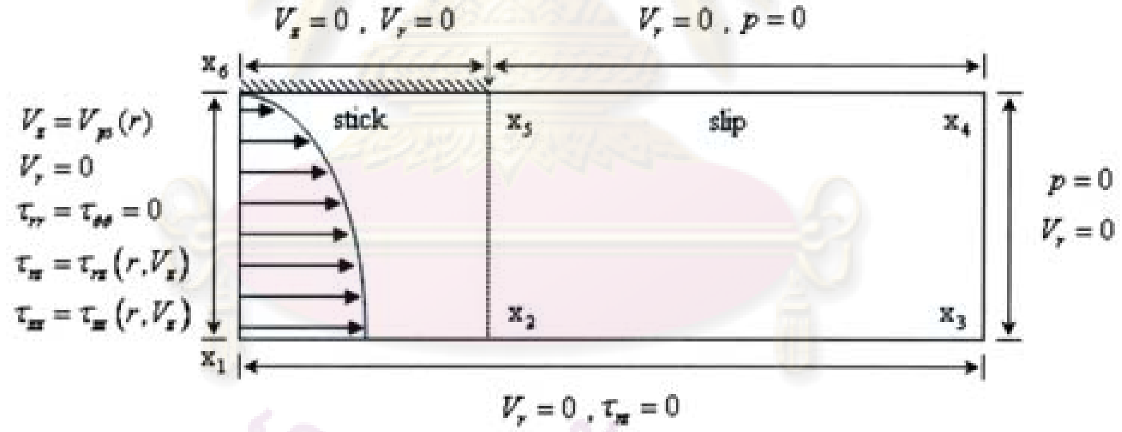
บทที่ 4

การจำลองการไหลของของไหลวิสโคอีลาสติก
(Simulation of Viscoelastic Flow)

การศึกษาการไหลของปัญหาสติค-สลิปและการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียนที่ไม่มีการลื่นไถลที่ผนังท่อได้ทำการศึกษามาแล้วในบทที่ 3 ในบทนี้จะศึกษาถึงการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียนชนิดวิสโคอีลาสติก (viscoelastic fluid) ที่มีสมบัติของความหนืด (viscous) และสมบัติของความยืดหยุ่น (elastic) อยู่ในของไหลชนิดนี้ โดยใช้ตัวแบบอ็อลดรอยด์บี (Oldroyd-B model) ในสมการองค์ประกอบ

4.1 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก (Stick-slip problem for viscoelastic fluid)

ลักษณะของปัญหาคือการจำลองการไหลที่ผ่านท่อและออกจากท่อแต่ยังไม่มีการบวมตัว โดยจะกำหนดเงื่อนไขขอบดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ลักษณะปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก

จากรูปที่ 4.1 แสดงลักษณะเงื่อนไขที่ขอบของความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ความเร็วในแนวแกน (V_z) และความดัน (p) จะมีลักษณะเหมือนในปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียนในหัวข้อที่ 4.1 และได้มีการพิจารณาตัวแปรเพิ่มเติมจากของไหลนิวโตเนียนโดยเพิ่มค่าความเค้น $(\tau_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{zz}, \tau_{\theta\theta})$ ที่ขอบด้านซ้าย เป็นตัวแบบในการแก้ปัญหา โดยแบ่งลักษณะการยืดหยุ่นของของไหล ด้วยค่าไร้หน่วยที่เรียกว่า ไวเซนต์เบอร์ก (Weissenberg number, *We*) และศึกษา

ปัญหาสติค-สลิป และปัญหาการบวมตัวของของไหล สำหรับค่าไวเซนต์เบอร์กที่แปรผันตั้งแต่ 0 ถึง 1

ขอบด้านซ้าย x_1x_6 ให้ $\tau_{rr}=0$ และ $\tau_{zz}=0$ ส่วน τ_{rz} กับ τ_{zz} จะขึ้นกับฟังก์ชันที่มีรัศมีและความเร็วในแนวแกน z เป็นตัวแปร

ขอบด้านล่าง x_1x_3 หรือแกนสมมาตร ให้ $\tau_{rz}=0$

เงื่อนไขค่าเริ่มต้นสำหรับค่า $We = 0.25$ จะนำผลเฉลยที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปของค่า $We = 0.00$ มาเป็นค่าเริ่มต้น ในทำนองเดียวกันสำหรับค่า $We = 0.50$, 0.75 และ 1.00 จะนำผลเฉลยที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปของค่า $We = 0.25$, 0.50 และ 0.75 ตามลำดับ มาเป็นค่าเริ่มต้น

จากสมการที่ 2.11 พิจารณาค่าความหนืดรวม $\mu=\mu_V+\mu_N$ โดยที่ μ_V คือความหนืดของตัวถูกละลายวิสโคอีลาสติก และ μ_N คือความหนืดของตัวทำละลายนิวโตเนียน ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $\mu_V=0.88$ และ $\mu_N=0.12$ ตามหัวข้อ 2.3

ผลที่ได้รับจากปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก

ผลที่ได้จากการคำนวณเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก แล้วนำมาเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] โดยแสดงดังตารางที่ 4.1

ค่าต่างๆ		$We = 0.00$		$We = 0.25$		$We = 0.50$		$We = 0.75$		$We = 1.00$	
		N.W.	stick [1]	N.W.	stick [2]	N.W.	stick [2]	N.W.	stick [2]	N.W.	stick [2]
P	max	4.92	4.89	5.66	5.66	6.38	6.38	9.33	9.18	15.78	15.78
	min	-4.26	-3.92	-0.57	-0.57	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00
τ_{rr}	max	0.43	0.43	0.39	0.43	0.36	0.40	0.85	0.88	4.54	4.64
	min	-3.42	-3.49	-1.51	-1.94	-1.24	-1.84	-1.05	-1.78	-1.19	-1.95
τ_{rz}	max	0.01	0.01	0.00	0.00	0.04	0.00	2.29	1.92	4.66	4.47
	min	-6.80	-7.23	-4.16	-5.18	-3.88	-4.53	-5.27	-5.63	-4.55	-4.56
τ_{zz}	max	10.76	10.66	43.20	43.69	44.48	40.08	30.60	30.89	19.68	19.94
	min	-0.87	-1.07	-0.60	-0.69	-0.48	-0.57	-0.42	-0.51	-2.79	-2.79
$\tau_{\theta\theta}$	max	0.43	0.43	0.39	0.50	0.36	0.54	0.36	0.52	0.36	0.40
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00

ตารางที่ 4.1 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : แสดงการเปรียบเทียบผลเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

หมายเหตุ จากตารางที่ 4.1 N.W. คือค่าที่ได้จาก Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

stick [1] คือค่าที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปของของของไหลนิวโตเนียน

stick [2] คือค่าที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปของของของไหลวิสโคอีลาสติก

ผลจากตารางที่ 4.1 เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยวิธีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง ของแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก (We = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00) ปรากฏว่าได้ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.19, 0.39, 1.42, 0.31, 0.26 ตามลำดับ หมายความว่าผลที่ได้จากการคำนวณแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กเทียบกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ให้ผลสอดคล้องกัน

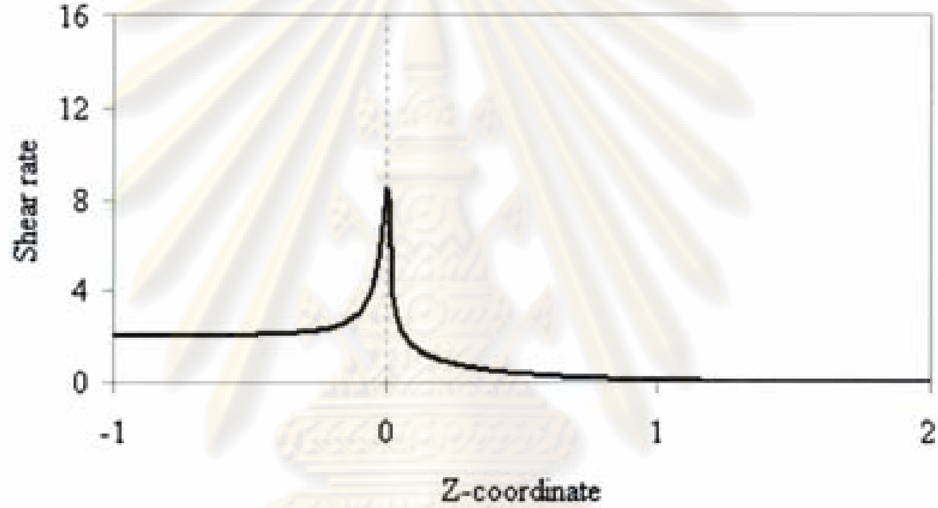
We ค่าต่างๆ		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
V_r	max	0.11	0.11	0.10	0.11	0.12
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01
V_z	max	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
P	max	4.92	5.66	6.38	9.33	15.78
	min	-4.26	-0.57	-0.01	-0.01	0.00
τ_{rr}	max	0.43	0.39	0.36	0.85	4.54
	min	-3.42	-1.51	-1.24	-1.05	-1.19
τ_{rz}	max	0.01	0.00	0.04	2.29	4.66
	min	-6.80	-4.16	-3.88	-5.27	-4.55
τ_{zz}	max	10.76	43.20	44.48	30.60	19.68
	min	-0.87	-0.59	-0.48	-0.42	-2.79
$\tau_{\theta\theta}$	max	0.43	0.39	0.36	0.36	0.36
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01

ตารางที่ 4.2 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก

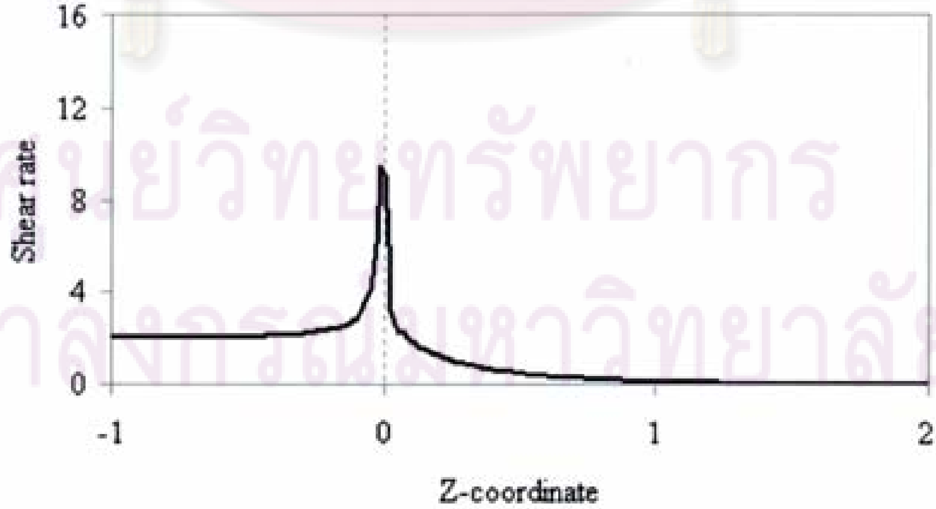
จากตารางที่ 4.2 แสดงค่าความเร็ว ความดันและความเค้นเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก ซึ่งค่าไวเซนต์เบอร์กเป็นค่าที่แสดงถึงความยืดหยุ่นของของไหล ยิ่งมีค่ามากแสดงว่าความหนืดจะมีค่ามากตาม เมื่อค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับศูนย์ (We = 0) ของไหลที่พิจารณาคือของไหลนิวโตเนียน โดยนำผลของของไหลนิวโตเนียนมาเปรียบเทียบกับของไหลวิสโคอีลาสติกที่ค่าไวเซนต์เบอร์กในช่วง ($0.25 \le We \le 1.00$) ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น 6% ที่ค่าไวเซนต์เบร์กเท่ากับ 1 ส่วนความเร็วในแนวแกน (V_z) มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ส่วนค่าความดันมีค่ามากขึ้นสามเท่า เนื่องจากการที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเพิ่มขึ้นทำให้ค่าความหยืดหยุ่นมากขึ้น ส่งผลให้ต้องใช้ค่าความดันให้มากขึ้นเพื่อให้ของไหลไหลผ่านท่อได้ ค่า τ_{rr} มีลักษณะเพิ่มขึ้นแบบเลขชี้กำลัง (exponential) โดยสูงขึ้นถึง 10 เท่า ค่า τ_{rz} มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า τ_{zz} มีค่าเพิ่มขึ้นสูงที่สุดที่ไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.5 เฉพาะช่วงของค่าไวเซนต์เบอร์กที่ได้ทำการทดลองในบทนี้ ส่วน

ค่า $\tau_{\theta\theta}$ มีค่าใกล้เคียงกัน และ $\tau_{\theta\theta}$ ที่พิจารณามีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับค่าอื่นๆ จึงไม่มีความสำคัญสามารถละทิ้งได้

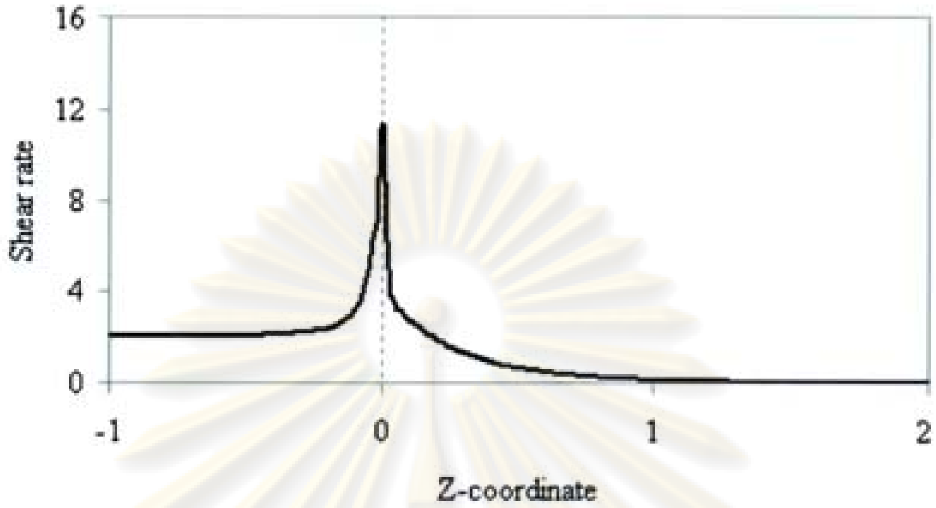
เมื่อพิจารณาที่ค่าความเค้นเฉือนโดยรวมที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ (r = 1) ดังรูปที่ 4.2 เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กจะพบว่าค่าความเค้นเฉือนจะมีค่าสูงที่สุดบริเวณรอยต่อของขอบผนังบนและขอบอิสระบน (z = 0) สำหรับรูปที่ 4.2 (ง) และ (จ) ค่าสูงสุดความเค้นเฉือนน้อยกว่ารูปที่ 4.2 (ค) เนื่องจากความละเอียดของโครงข่าย (mesh) บริเวณรอบจุด x_5 ดังรูปที่ 4.1 หรือบริเวณใกล้จุดเอกฐาน (singular point) มีไม่เพียงพอจึงทำให้กราฟของรูปที่ 4.2 (ง) และ (จ) เกิดการแกว่งกวัด



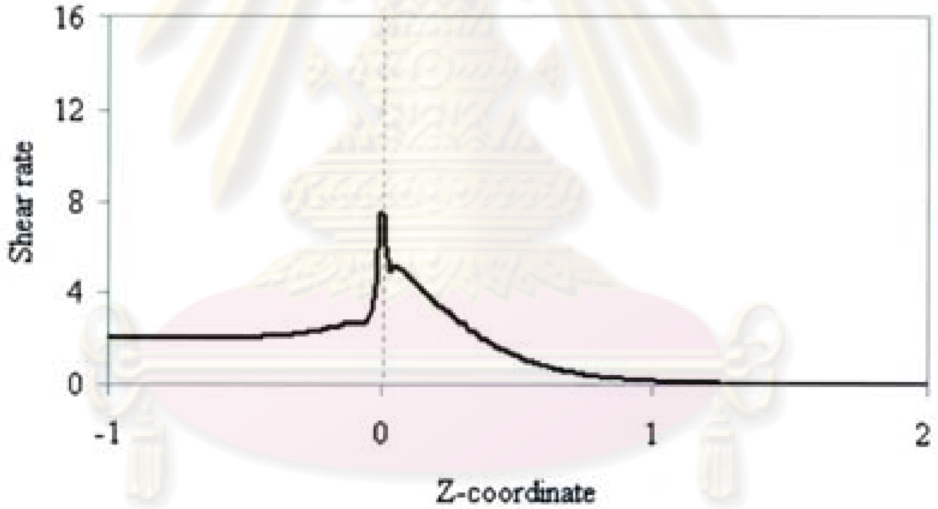
(ก) *We* = 0.00, Shear rate max = 8.44



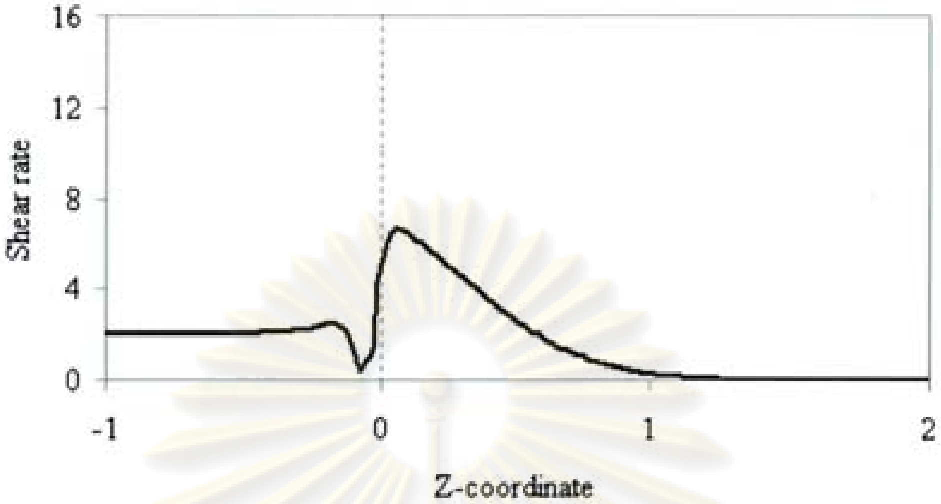
(ข) *We* = 0.25, Shear rate max = 9.36



(ค) *We* = 0.50, Shear rate max = 11.22

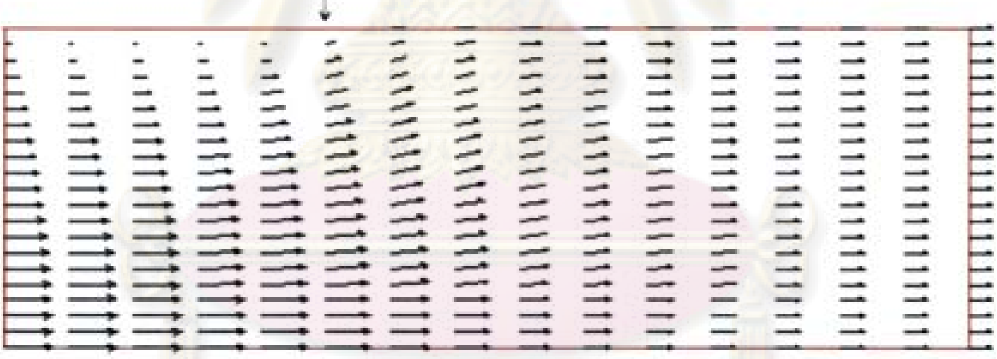


(ง) *We* = 0.75, Shear rate max = 7.35



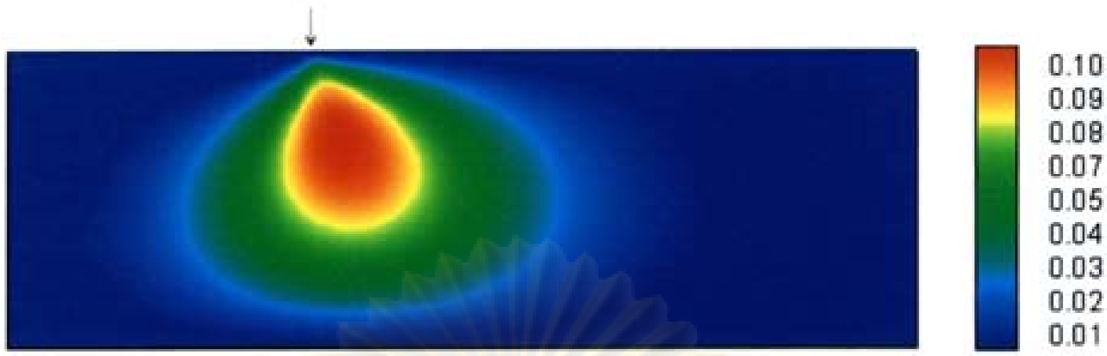
(จ) We = 1.00, Shear rate max = 6.50

รูปที่ 4.2 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่าอัตราเฉือนเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ ; (ก) We = 0.00, (ข) We = 0.25, (ค) We = 0.50, (ง) We = 0.75, (จ) We = 1.00



รูปที่ 4.3 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : เวกเตอร์ความเร็วที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00

จากรูปที่ 4.3 แสดงลักษณะเวกเตอร์ความเร็วของของไหลที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 ปรากฏว่าลักษณะคล้ายกับปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียน ส่วนผลที่แสดงในรูปแถบชั้นสีของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00 แสดงในรูปที่ 4.4 และค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 แสดงในรูปที่ 4.5 ปรากฏว่าลักษณะรูปแถบชั้นสีของผลเฉลยสำหรับค่าไวเซนต์เบอร์กทั้งสองมีความคล้ายกัน



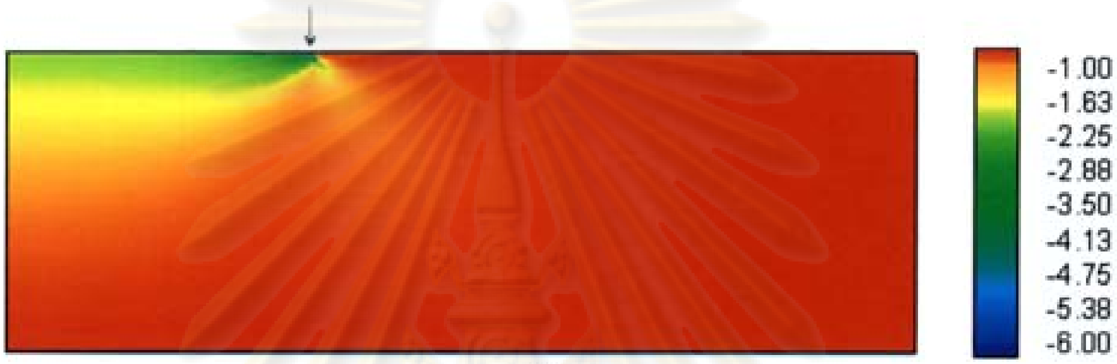
(ก) V_r

(ข) V_z

(ค) pressure

(ง) shear rate

(จ) τ_{rr}

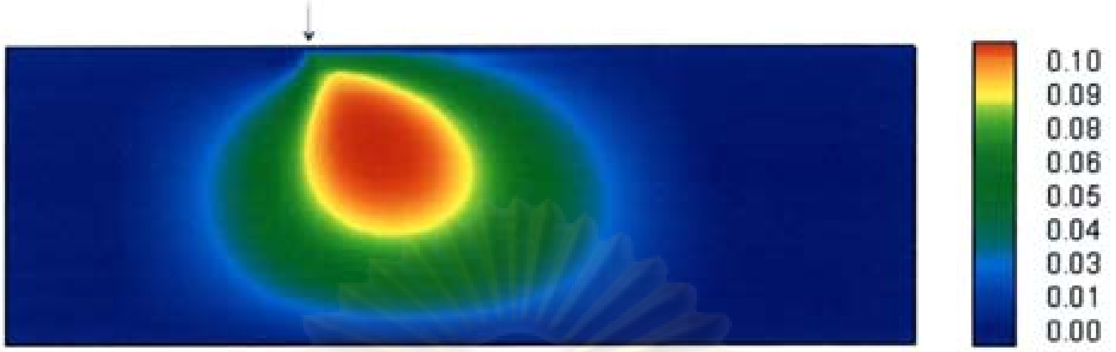


(ฉ) τ_{rz}

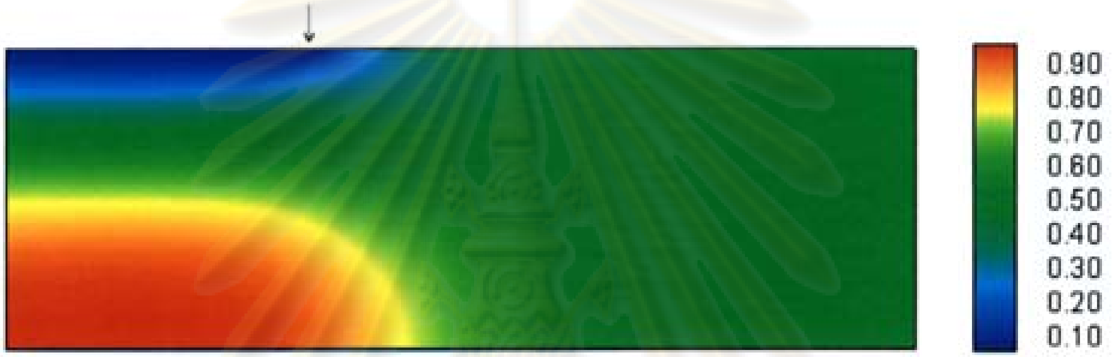
(ช) τ_{zz}

(ซ) $\tau_{\theta\theta}$

รูปที่ 4.4 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสีที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00 ; (ก) V_r, (ข) V_z, (ค) pressure, (ง) shear rate, (จ) τ_{rr}, (ฉ) τ_{rz}, (ช) τ_{zz}, (ซ) $\tau_{\theta\theta}$



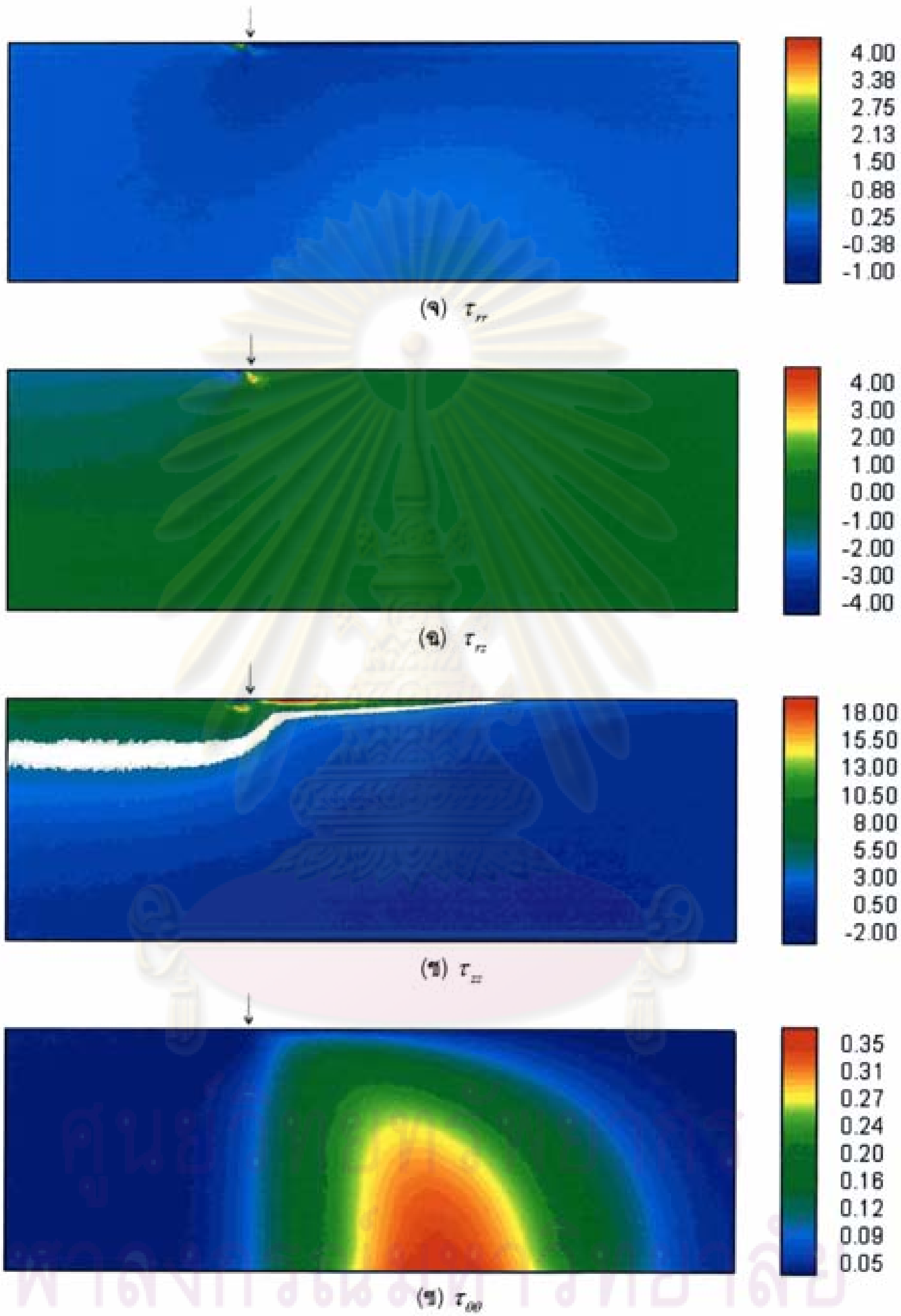
(ก) V_r



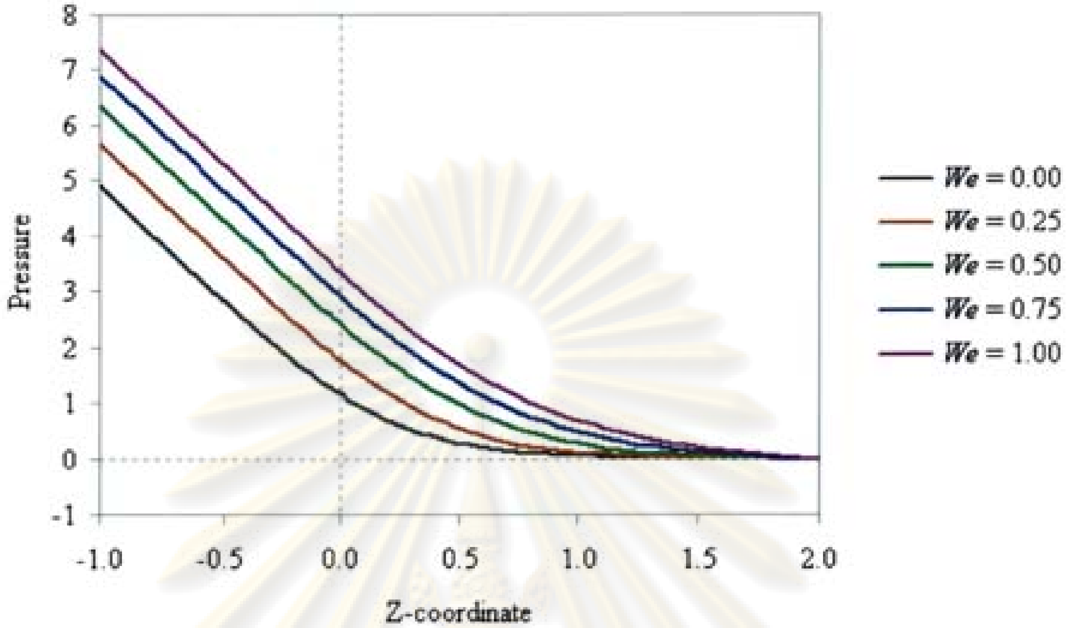
(ข) V_z

(ค) pressure

(ง) shear rate



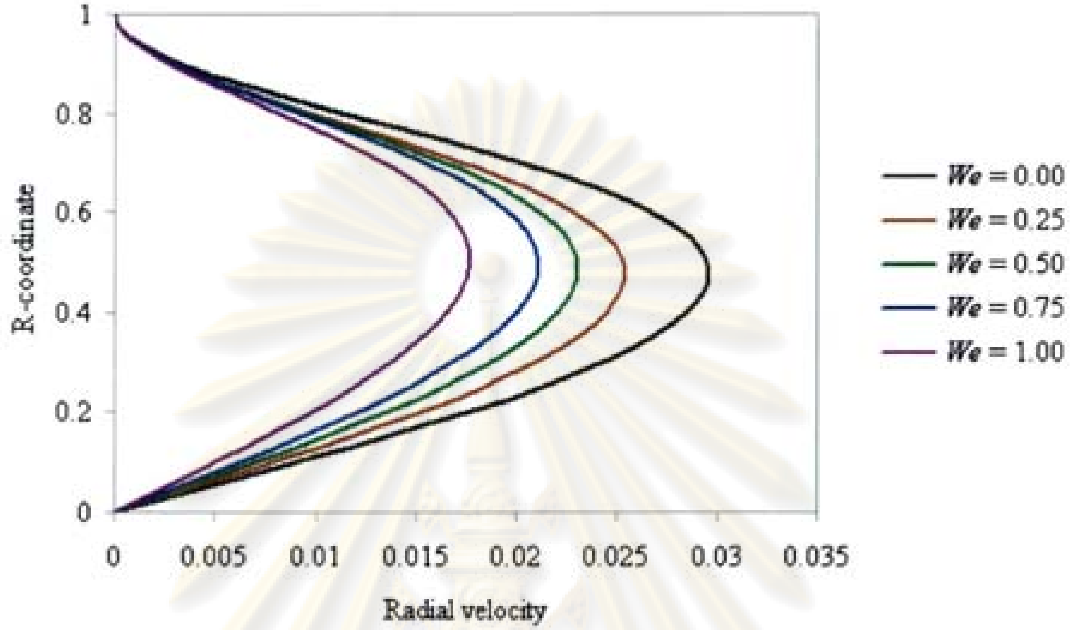
รูปที่ 4.5 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสีที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 ; (ก) V_r, (ข) V_z, (ค) pressure, (ง) shear rate, (จ) τ_{rr}, (ฉ) τ_{rz}, (ช) τ_{zz}, (ซ) $\tau_{\theta\theta}$



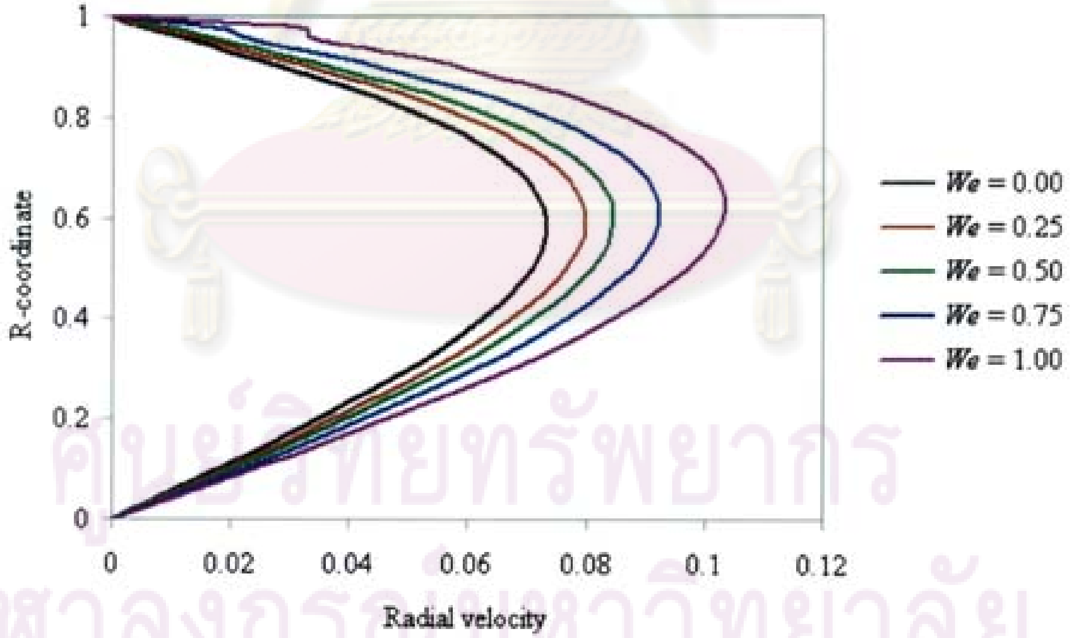
รูปที่ 4.6 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่าความดันเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กที่แนวแกนสมมาตร (r = 0)

รูปที่ 4.6 เป็นการแสดงค่าความดันเปรียบเทียบเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก พบว่าของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กมากจะให้ค่าความดันมากเมื่อเปรียบเทียบ ณ จุดเดียวกัน เนื่องจากค่าความยืดหยุ่นมาก จึงต้องออกแรงมากขึ้นในการผลักของไหล รูปที่ 4.7 เป็นการแสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = -0.4 และ z = 0.4 พบว่าที่ z = -0.4 (รูปที่ 4.7 (ก)) ค่าความเร็วในแนวรัศมีของของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กน้อยให้ค่าความเร็วมากกว่าของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กมาก แต่ที่ z = 0.4 (รูปที่ 4.7 (ข)) ค่าความเร็วในแนวรัศมีของของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กมากกลับให้ค่ามากกว่าของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กน้อย และพิจารณาภาพประกอบได้จากรูปที่ 4.4 (ก) และ 4.5 (ก) ค่าความเร็วในแนวรัศมีจะมีค่ามากที่บริเวณตรงกลางของรูปตรงบริเวณปลายท่อ และจะค่อยลดค่าลงซึ่งคล้ายกันทุกค่าไวเซนต์เบอร์ก แต่ต่างกันตรงที่ค่าความเร็วในแนวรัศมีสูงสุดของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 จะขยับออกห่างจากปลายท่อมากกว่าค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00 ซึ่งทำให้ลักษณะการลดลงของความเร็วขยับออกห่างจากปลายท่อด้วยทำให้เกิดลักษณะดังรูปที่ 4.7 ส่วนรูปที่ 4.8 เป็นการแสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = -0.4 และ z = 0.4 และแสดงการเปลี่ยนแปลงรูปแบบความเร็วจากรูปแบบพาราโบลาดังรูปที่ 4.8 (ก) ไปเป็นรูปแบบการไหลแบบปลั๊กดังรูปที่ 4.8 (ข) สรุปได้ว่าของไหลที่ค่าไวเซนต์เบอร์กมากจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างช้ากว่าของไหลที่ค่าไวเซนต์เบอร์กน้อย

เนื่องจากของไหลที่ค่าไวเซนต์เบอร์กมากบ่งบอกถึงค่าเวลาผ่อนคลาย (relaxation time) สูง รวมถึงการจดจำพฤติกรรมเก่านานกว่าของไหลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กน้อย

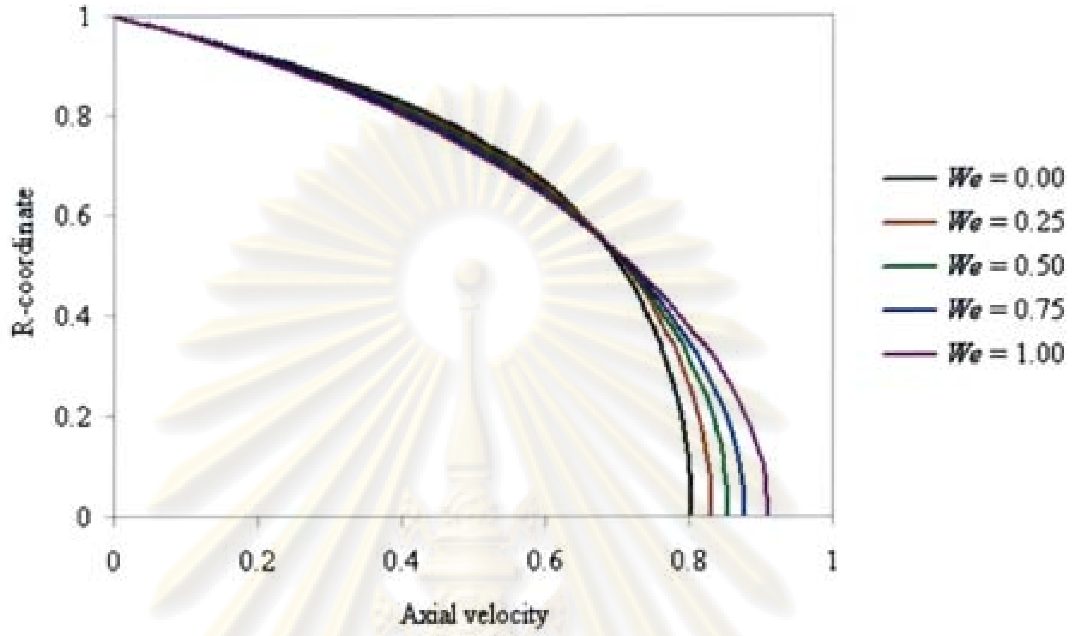


(ก) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = -0.4

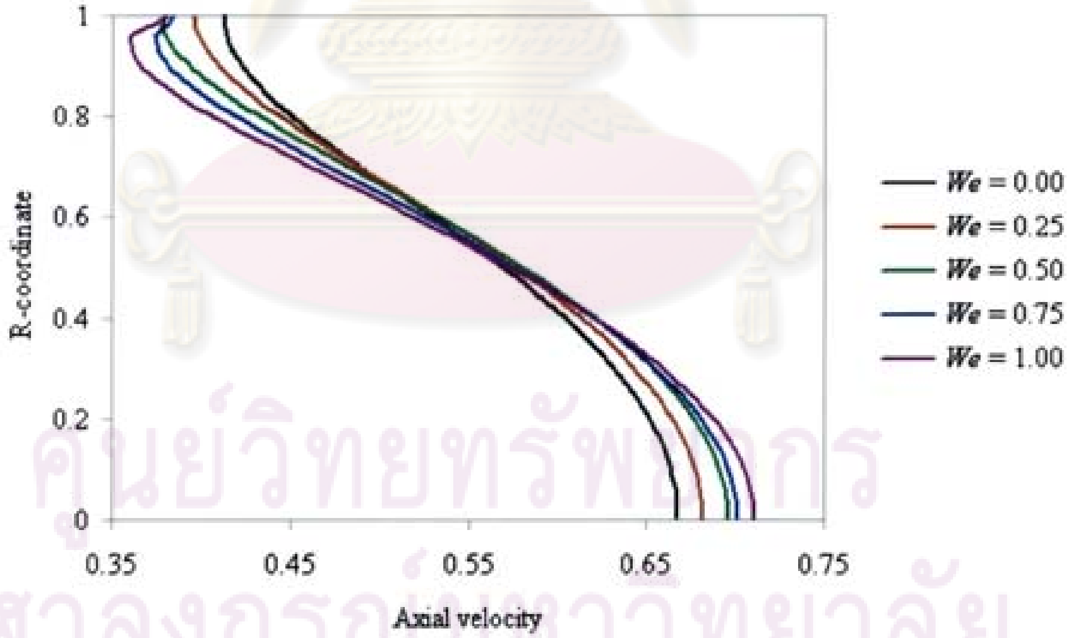


(ข) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = 0.4

รูปที่ 4.7 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = -0.4 และ 0.4



(ก) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = -0.4

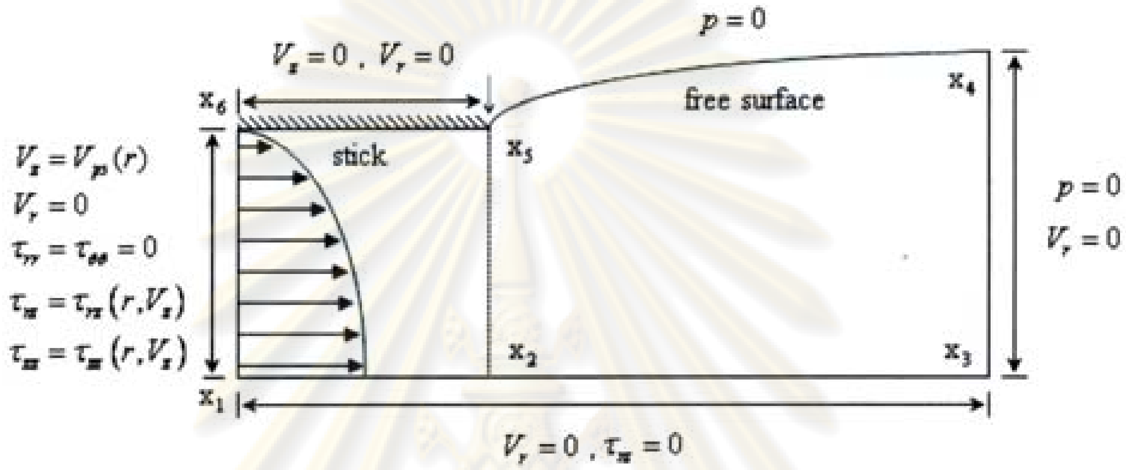


(ข) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = 0.4

รูปที่ 4.8 ปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติก : รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = -0.4 และ 0.4

4.2 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก (Die-swell problem for viscoelastic fluid)

ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกเป็นปัญหาที่พัฒนามาจากปัญหาสติค-สลิป ของของไหลวิสโคอีลาสติกเพื่อศึกษาผลกระทบที่เกิดจากการบวมตัว โดยลักษณะเงื่อนไขขอบจะแสดงดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 ลักษณะปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก

รูปที่ 4.9 เป็นการแสดงค่าขอบของปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก ลักษณะเงื่อนไขขอบของปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกแตกต่างจากปัญหาสติค-สลิปของของไหลวิสโคอีลาสติกตรงที่ขอบอิสระบน x_4x_5 กำหนดให้ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่าไม่เป็นศูนย์ ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาการบวมตัวของแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กจะนำผลเฉลยที่ได้จากปัญหาสติค-สลิปที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเดียวกันมาเป็นค่าเริ่มต้น

ผลที่ได้รับจากปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก

จากตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบค่าต่างๆ ของของไหลวิสโคอีลาสติกระหว่างปัญหาสติค-สลิปกับปัญหาการบวมตัว และพบว่าโดยส่วนมากที่แสดงเป็นค่าสูงสุดในปัญหาการบวมตัวจะให้ค่าเพิ่มขึ้นในแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก ส่วนที่แสดงเป็นค่าน้อยสุดจะให้ค่าลดลงในแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กเช่นกัน ส่วนตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากปัญหาการบวมตัวของแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยวิธีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองของแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก (We = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00) ปรากฏว่าได้ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.02, 2.22, 1.43, 1.88, 1.87 ตามลำดับ วิเคราะห์ได้ว่าให้ผลสอดคล้องกัน

ค่าต่างๆ		We = 0.00		We = 0.25		We = 0.50		We = 0.75		We = 1.00	
		stick[1]	swell[2]	stick	swell	stick	swell	stick	swell	stick	swell
V_r	max	0.11	0.14	0.11	0.15	0.10	0.16	0.11	0.18	0.12	0.19
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.02
V_z	max	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01
p	max	4.92	4.98	5.66	5.58	6.38	16.99	9.33	26.45	15.78	37.26
	min	-4.26	-7.12	-0.57	-2.09	-0.01	-1.39	-0.01	-0.98	0.00	-0.80
τ_{rr}	max	0.43	0.52	0.39	2.30	0.36	5.10	0.85	11.42	4.54	14.85
	min	-3.42	-4.69	-1.51	-1.93	-1.24	-1.27	-1.05	-0.91	-1.19	-2.91
τ_{rz}	max	0.01	0.93	0.00	12.97	0.04	5.57	2.29	7.26	4.66	9.21
	min	-6.80	-9.00	-4.16	-4.24	-3.88	-8.45	-5.27	-3.90	-4.55	-4.07
τ_{zz}	max	10.76	15.12	43.20	47.35	44.48	21.53	30.60	17.85	19.68	16.97
	min	-0.87	-1.03	-0.59	-0.71	-0.48	-0.59	-0.42	-5.88	-2.79	-3.00
$\tau_{\theta\theta}$	max	0.43	0.52	0.39	0.49	0.36	0.50	0.36	0.51	0.36	0.53
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.03

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ของของไหลวิสโคอีลาสติกระหว่างปัญหาสติค-สลิปกับปัญหาการบวมตัว

ค่าต่างๆ		We = 0.00		We = 0.25		We = 0.50		We = 0.75		We = 1.00	
		N.W.[3]	swell	N.W.	swell	N.W.	swell	N.W.	swell	N.W.	swell
p	max	4.94	4.98	5.59	5.58	14.53	16.99	24.65	26.45	32.92	37.26
	min	-7.10	-7.12	-1.90	-2.09	-1.21	-1.39	-0.95	-0.98	-0.68	-0.80
τ_{rr}	max	0.52	0.52	2.25	2.30	3.52	5.10	7.54	11.42	12.62	14.85
	min	-4.68	-4.69	-1.70	-1.93	-1.24	-1.27	-0.69	-0.91	-0.89	-2.91
τ_{rz}	max	0.94	0.93	11.37	12.97	8.11	5.57	7.96	7.26	9.48	9.21
	min	-9.01	-9.00	-4.00	-4.24	-8.66	-8.45	-6.67	-3.90	-4.05	-4.07
τ_{zz}	max	15.14	15.12	40.52	47.35	23.84	21.53	20.77	17.85	19.62	16.97
	min	-1.03	-1.03	-0.71	-0.71	-0.59	-0.59	-6.41	-5.88	-2.90	-3.00
$\tau_{\theta\theta}$	max	0.52	0.52	0.49	0.49	0.51	0.50	0.53	0.51	0.59	0.53
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.03

ตารางที่ 4.4 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : การเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

หมายเหตุ [1] ค่าที่ได้จากปัญหาสติค-สลิป [2] ค่าที่ได้จากปัญหาการบวมตัว

[3] Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

We ค่าต่างๆ		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
V_r	max	0.143	0.147	0.163	0.178	0.192
	min	0.000	-0.001	-0.007	-0.009	-0.015
V_z	max	1.000	1.000	1.000	1.003	1.012
	min	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.009
p	max	4.983	5.583	16.986	26.453	37.260
	min	-7.123	-2.087	-1.386	-0.982	-0.798
τ_{rr}	max	0.517	2.294	5.097	11.423	14.849
	min	-4.687	-1.933	-1.267	-0.911	-2.914
τ_{rz}	max	0.931	12.965	5.567	7.256	9.210
	min	-8.995	-4.241	-8.446	-3.898	-4.067
τ_{zz}	max	15.118	47.345	21.530	17.846	16.971
	min	-1.033	-0.713	-0.586	-5.880	-2.997
$\tau_{\theta\theta}$	max	0.517	0.493	0.500	0.511	0.530
	min	0.000	-0.002	-0.005	-0.010	-0.027

ตารางที่ 4.5 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก

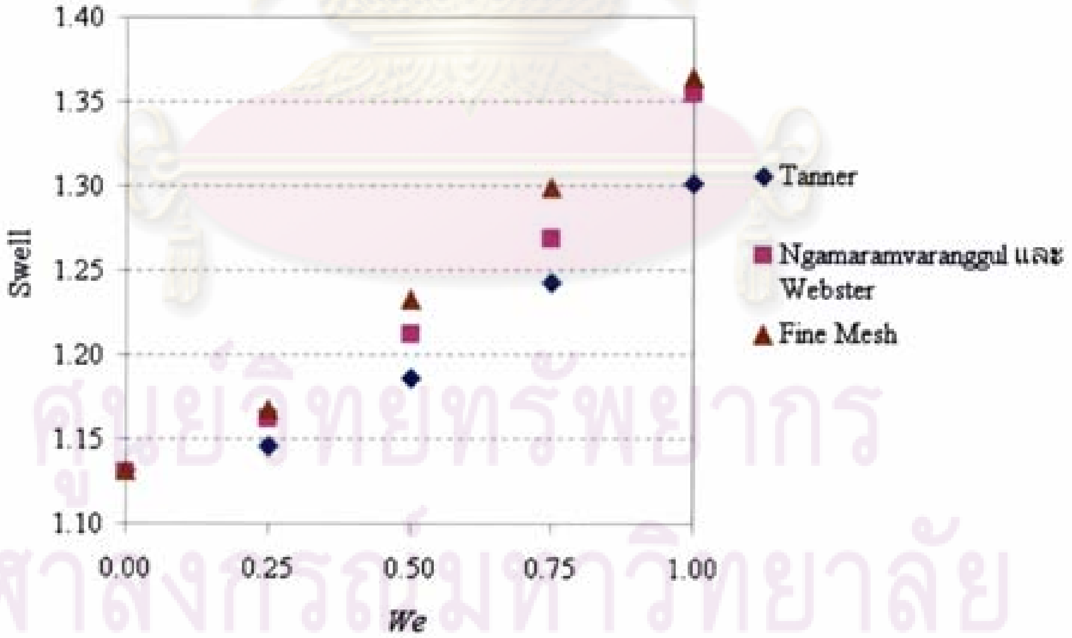
ตารางที่ 4.5 เป็นการแสดงค่าผลเฉลยที่ได้ของปัญหาการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก พบว่าค่าความเร็วในแนวรัศมีค่าสูงสุด (V_r max) มีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นตามการเพิ่มค่าไวเซนต์เบอร์กเนื่องจากการบวมตัวที่สูงขึ้นตามค่าไวเซนต์เบอร์ก ส่วนค่าความเร็วในแนวรัศมีค่าน้อยสุด (V_r min) มีแนวโน้มลดน้อยลงตามการเพิ่มค่าไวเซนต์เบอร์กเนื่องจากค่าลบบ่งบอกถึงทิศทางตรงข้ามกับทิศบวก(ทิศเหนือ)ในแกนอ้างอิง ดังนั้นความเร็วในแนวรัศมีจึงมีมากขึ้น ในทำนองเดียวกันกับค่าความเร็วในแนวแกน(V_z) ค่าความดัน และค่าความเค้นก็มีลักษณะเพิ่มสูงขึ้นตามค่าไวเซนต์เบอร์ก

ตารางที่ 4.6 เป็นการเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กกับของ Tanner [7] ซึ่งเป็นการประมาณจากการวิเคราะห์ (analytical approximation) และของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เมื่อนำผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ไปวิเคราะห์ด้วยวิธีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองระหว่างปัญหาการบวมตัวกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ได้ค่าเท่ากับ 0.017 แต่เมื่อเทียบกับงานของ Tanner [7] ให้ค่าเท่ากับ 0.044 พบว่าปัญหาการบวมตัวให้ค่าได้ใกล้เคียงกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] มากกว่าของ Tanner [7] เป็นเพราะงาน

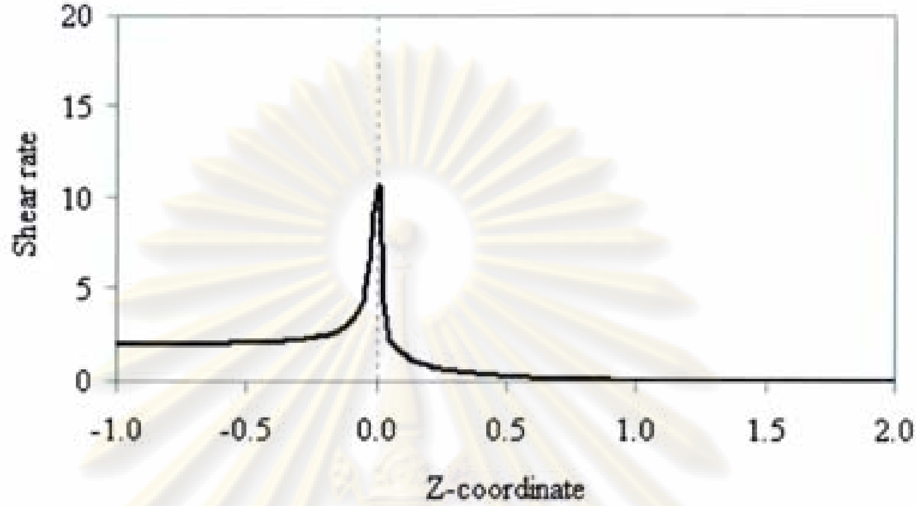
Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ยังไม่ได้ใส่เงื่อนไขการลื่นไถลทำให้ได้อัตราส่วนการบวมตัวใกล้เคียงกัน แต่เมื่อเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวกับของ Tanner [7] ที่แต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กพบว่าอัตราส่วนการบวมตัวของ Tanner [7] มีค่าน้อยกว่าเกือบทุกค่าไวเซนต์เบอร์กยกเว้นที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00 ดังรูปที่ 4.10

ผู้วิจัย	*We*				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Tanner [7] (analytical approximation)	1.131	1.146	1.186	1.242	1.301
Ngamaramvaranggul และ Webster [21]	1.130	1.162	1.212	1.268	1.354
fine mesh	1.131	1.167	1.233	1.299	1.364

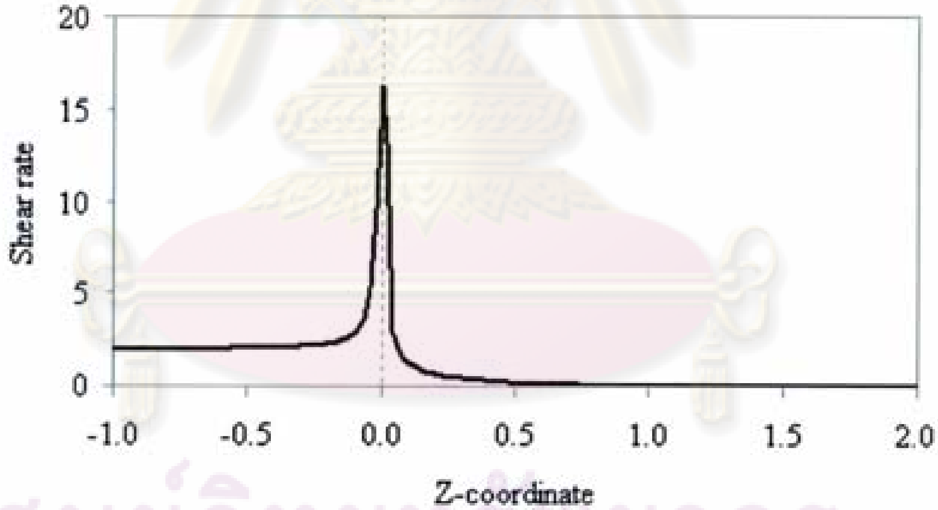
ตารางที่ 4.6 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : การเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กกับงานของ Tanner [7] และงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]



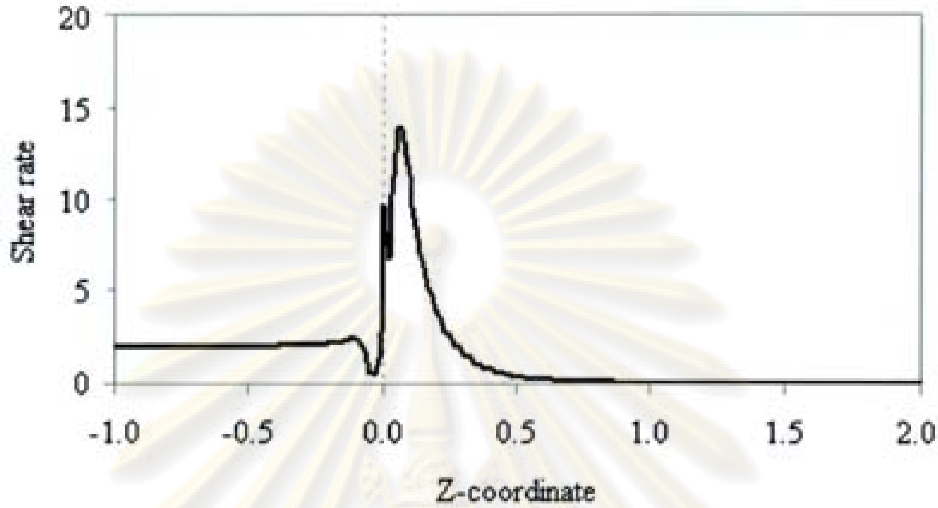
รูปที่ 4.10 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : การเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก (*We*) กับงานของ Tanner [7] และงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]



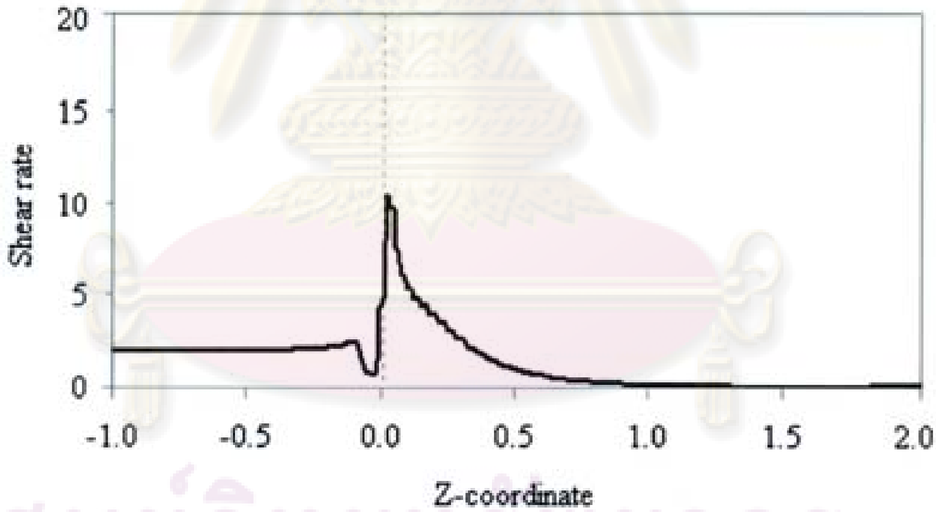
(ก) *We* = 0.00, shear rate max = 10.75



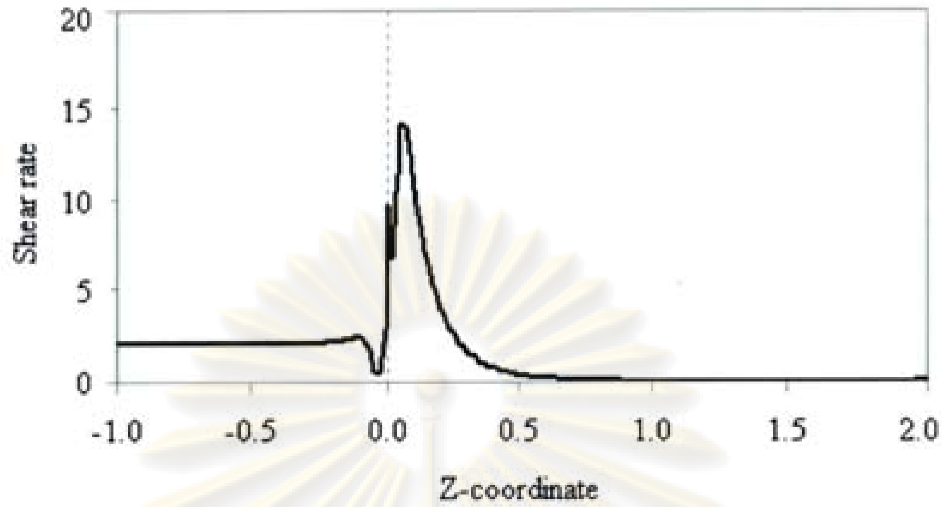
(ข) *We* = 0.25, shear rate max = 16.15



(ค) *We* = 0.50, shear rate max = 13.82

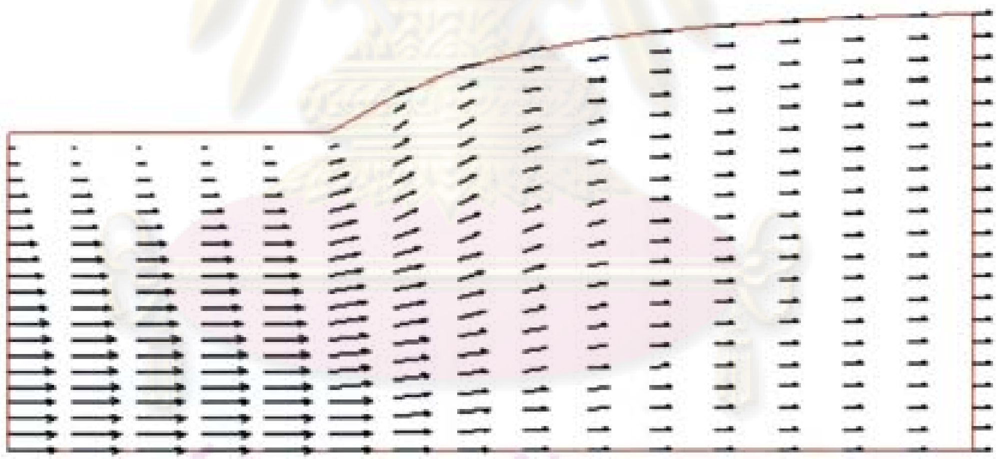


(ง) *We* = 0.75, shear rate max = 10.32



(จ) *We* = 1.00, shear rate max = 13.82

รูปที่ 4.11 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่าอัตราเฉือนเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ ; (ก) *We* = 0.00, (ข) *We* = 0.25, (ค) *We* = 0.50, (ง) *We* = 0.75, (จ) *We* = 1.00



รูปที่ 4.12 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : เวกเตอร์ความเร็วของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00

รูปที่ 4.11 แสดงค่าอัตราเฉือนเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ (r = 1.0) แสดงให้เห็นว่าที่บริเวณปลายท่อจะมีค่าสูงที่สุด แต่หลังจากออกจากท่อค่าจะค่อยๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ สำหรับรูปที่ 4.11 (ค),(ง) และ (จ) พบว่าบริเวณใกล้จุดเอกฐานรูปกราฟเกิดการแกว่งกวัดในลักษณะ ทำนองเดียวกับรูปที่ 4.2 (ง) และ (จ) และเนื่องจากปัญหาของของ

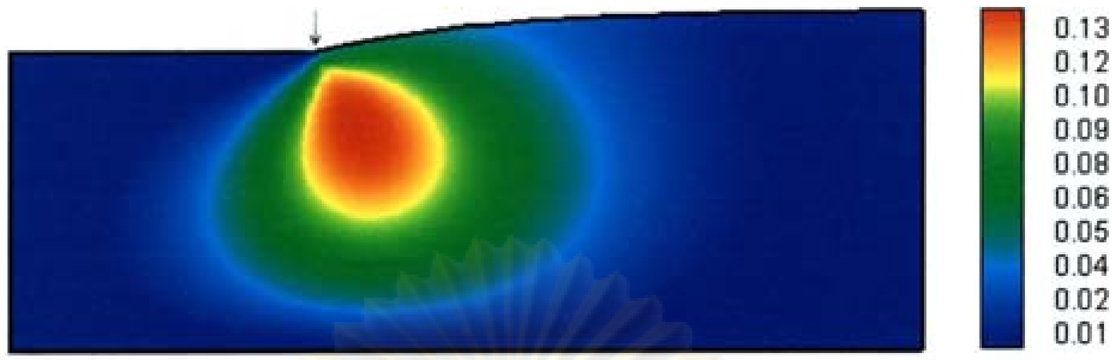
ไหลวิสโคอีลาสติกที่ของไหลมีความยืดหยุ่นมากกว่าของไหลนิวโตเนียน ดังนั้นรูปกราฟของอัตราเฉือนที่ $We = 0.5$ จึงเริ่มเกิดการกวัดแกว่งแล้ว

รูปที่ 4.12 แสดงเวกเตอร์ความเร็วของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 พบว่าตรงบริเวณภายในท่อจะมีรูปแบบความเร็วแบบพาราโบลา เมื่อออกนอกท่อรูปแบบการไหลจะมีการพัฒนารูปร่างไปเป็นการไหลแบบปลั๊ก

รูปที่ 4.13 และ 4.14 เป็นการแสดงผลลัพธ์ค่าต่างๆ ด้วยแถบชั้นสีของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00 และ 1.00 ของปัญหาการบวมตัวตามลำดับ พบว่าลักษณะรูปแบบผลลัพธ์แถบชั้นสีจะคล้ายกับในปัญหาสติค-สลิป รูปที่ 4.15 แสดงค่าความดันเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กในปัญหาการบวมตัว พบว่าที่จุดเดียวกันค่าไวเซนต์เบอร์กมากจะให้ค่าความดันมากกว่าค่าไวเซนต์เบอร์กน้อยเหมือนในปัญหาสติค-สลิป รูปที่ 4.16 แสดงอัตราส่วนการบวมตัวที่พื้นผิวอิสระเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก พบว่าที่ค่าไวเซนต์เบอร์กมากจะมีอัตราส่วนการบวมตัวมากกว่าค่าไวเซนต์เบอร์กน้อยสอดคล้องกับค่าความดัน เพราะขนาดการบวมตัวที่สูงย่อมต้องมีแรงผลักดันที่มาก

รูปที่ 4.17 แสดงรูปแบบความเร็วในแนวตัดขวางกับท่อที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 โดยรูปที่ 4.17 (ก) และ (ข) แสดงรูปแบบความเร็วในแนวรัศมี พบว่ายิ่งเข้าใกล้บริเวณปลายท่อค่าความเร็วในแนวรัศมีจะมีค่าสูงขึ้น แต่เมื่อออกห่างไปเรื่อยค่าจะมีขนาดน้อยลง รูปที่ 4.17 (ค) และ (ง) แสดงรูปแบบความเร็วในแนวแกน พบว่ารูปแบบทางเข้าท่อเป็นรูปพาราโบลาและจะเปลี่ยนแปลงเป็นการไหลแบบปลั๊กที่บริเวณปลายของไหล

รูปที่ 4.18 และ 4.19 แสดงรูปแบบความเร็วในแนวรัศมีและแนวแกน ที่ $z = -0.4$ และ 0.4 ตามลำดับ พบว่ามีลักษณะรูปแบบคล้ายกับปัญหาสติค-สลิป



(ก) V_r

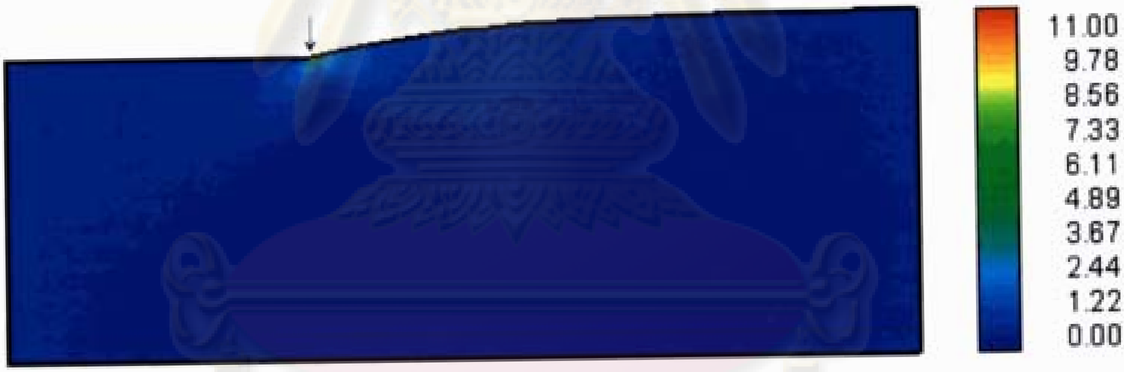
(ข) V_z

(ค) pressure

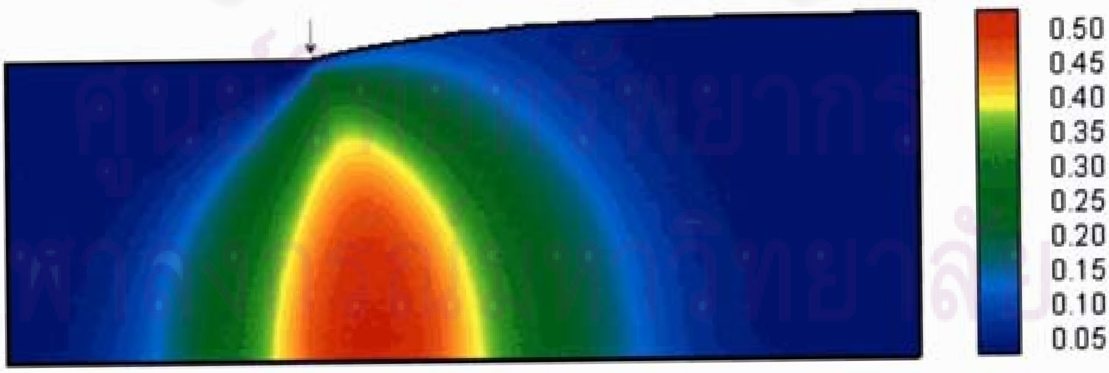
(ง) shear rate

(จ) τ_{rr}

(ฉ) τ_{rz}

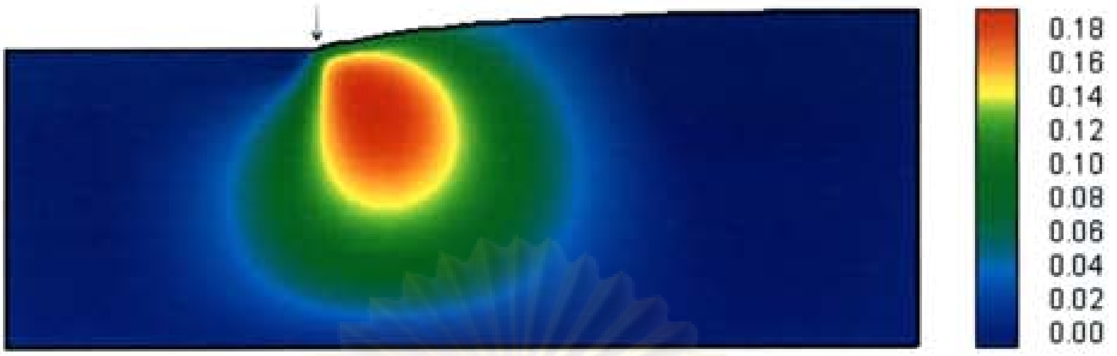


(ช) τ_{zz}



(ซ) $\tau_{\theta\theta}$

รูปที่ 4.13 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสีที่ $We = 0.00$; (ก) V_r, (ข) V_z, (ค) pressure, (ง) shear rate, (จ) τ_{rr}, (ฉ) τ_{rz}, (ช) τ_{zz}, (ซ) $\tau_{\theta\theta}$

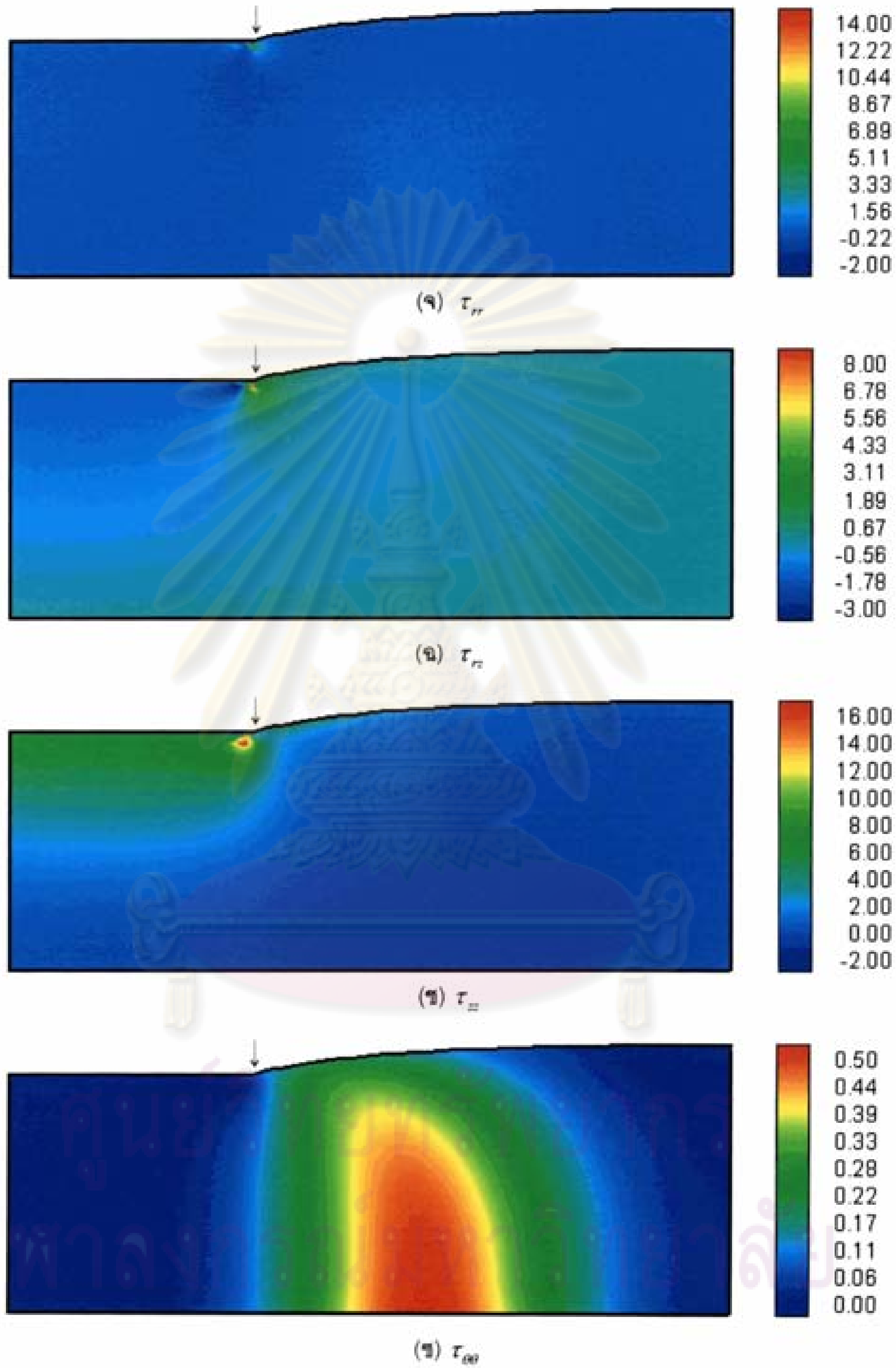


(ก) V_r

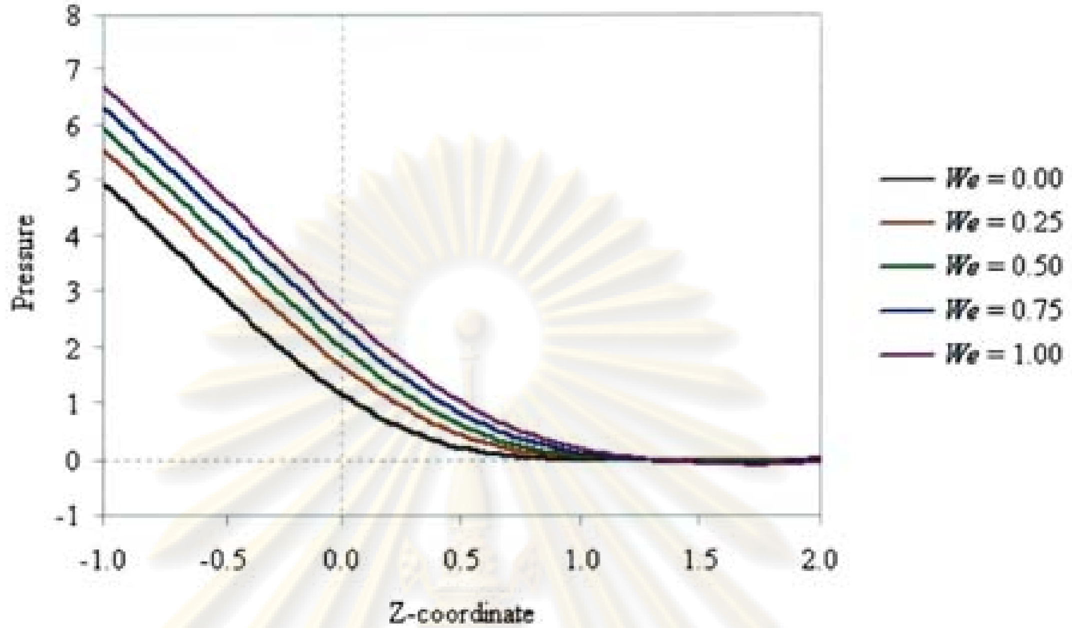
(ข) V_z

(ค) pressure

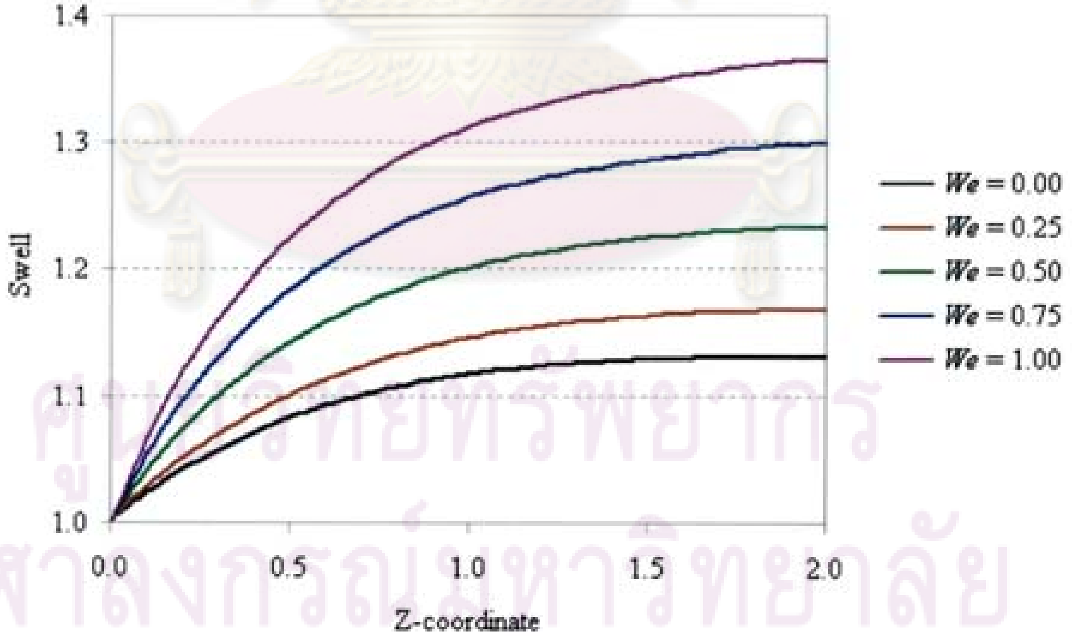
(ง) shear rate



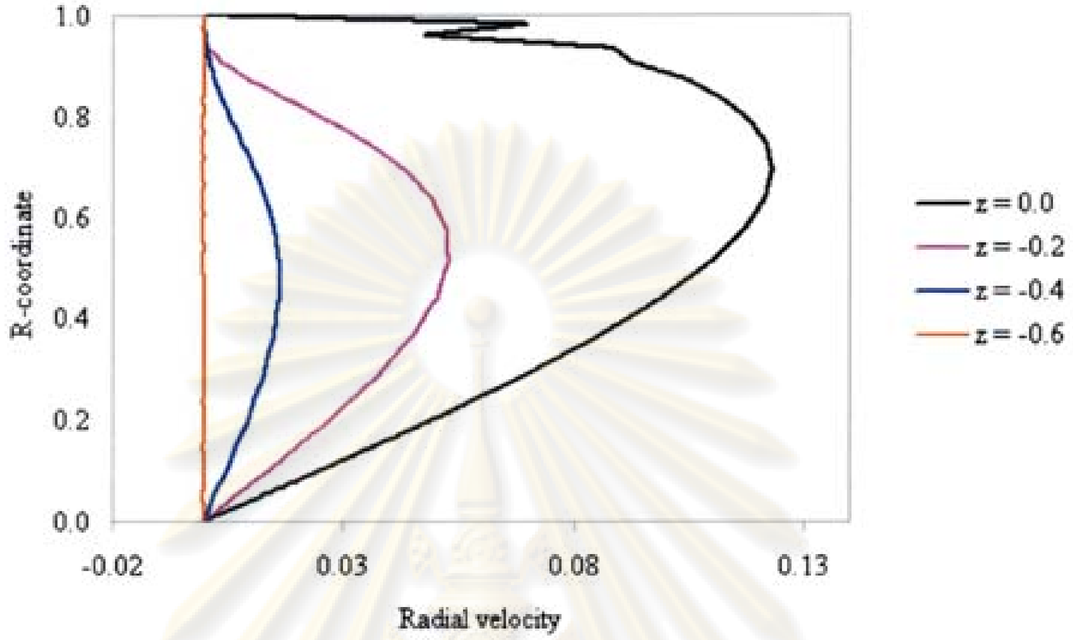
รูปที่ 4.14 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสีที่ $We = 1.00$; (ก) V_r , (ข) V_z , (ค) pressure, (ง) shear rate, (จ) τ_{rr} , (ฉ) τ_{rz} , (ช) τ_{zz} , (ซ) $\tau_{\theta\theta}$



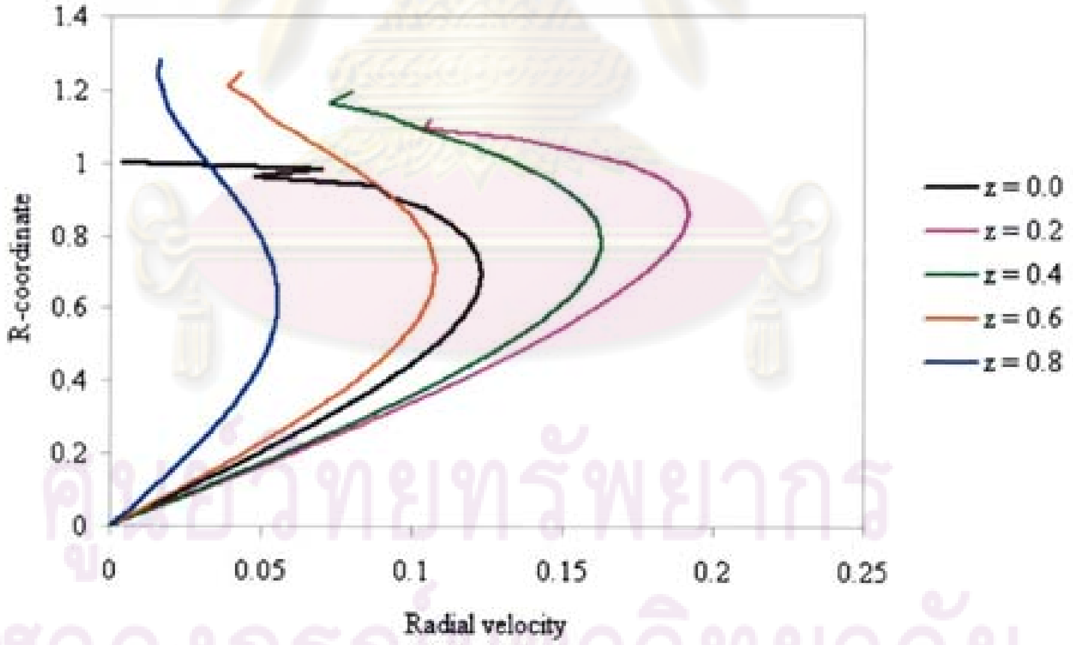
รูปที่ 4.15 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่าความดันเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กที่แนวแกนสมมาตร (r = 0)



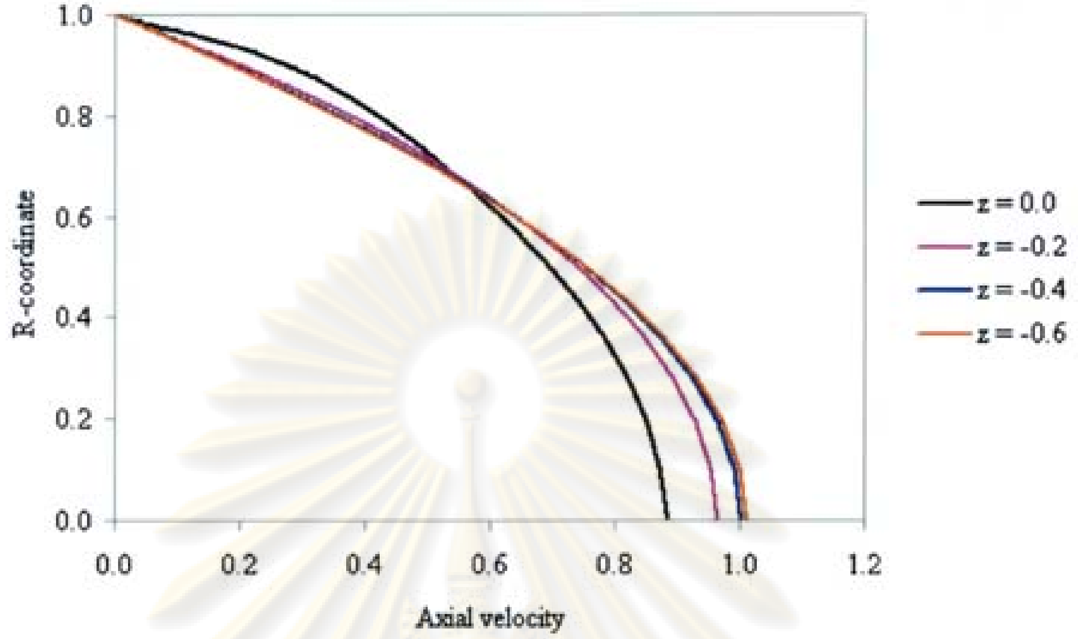
รูปที่ 4.16 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : อัตราส่วนการบวมตัวที่ขอบผิวอิสระเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก



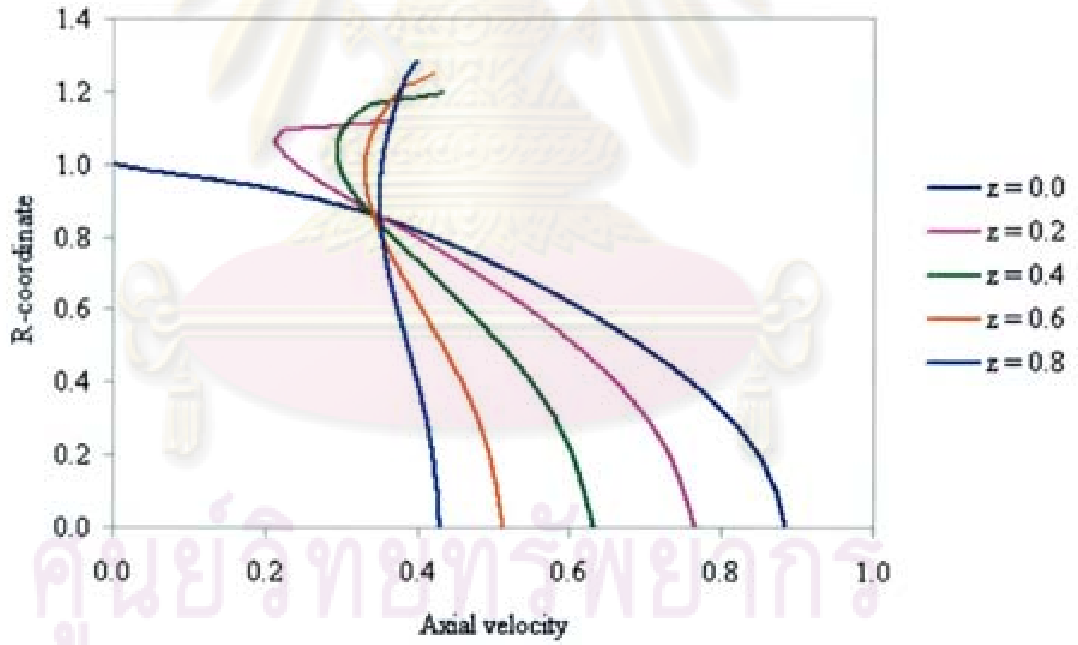
(ก) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ $z \le 0$



(ข) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ $z \ge 0$

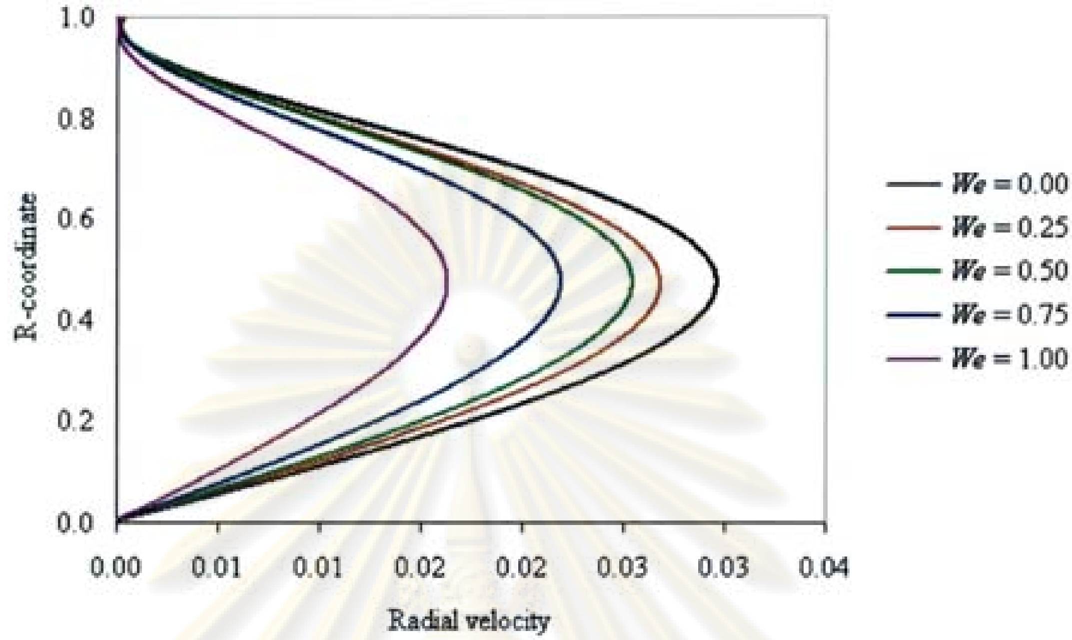


(ค) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ $z \le 0$

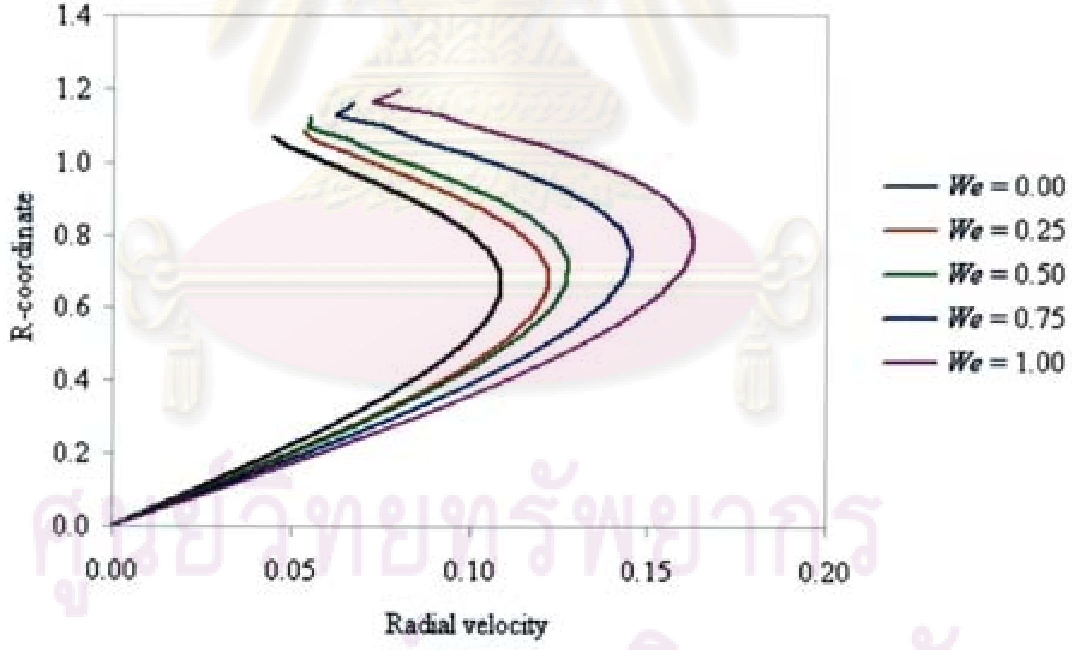


(ง) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ $z \ge 0$

รูปที่ 4.17 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : รูปแบบความเร็วในแนวตัดขวางกับท่อที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 1.00 ; (ก) V_r ที่ $z \le 0$, (ข) V_r ที่ $z \ge 0$, (ค) V_z ที่ $z \le 0$, (ง) V_z ที่ $z \ge 0$

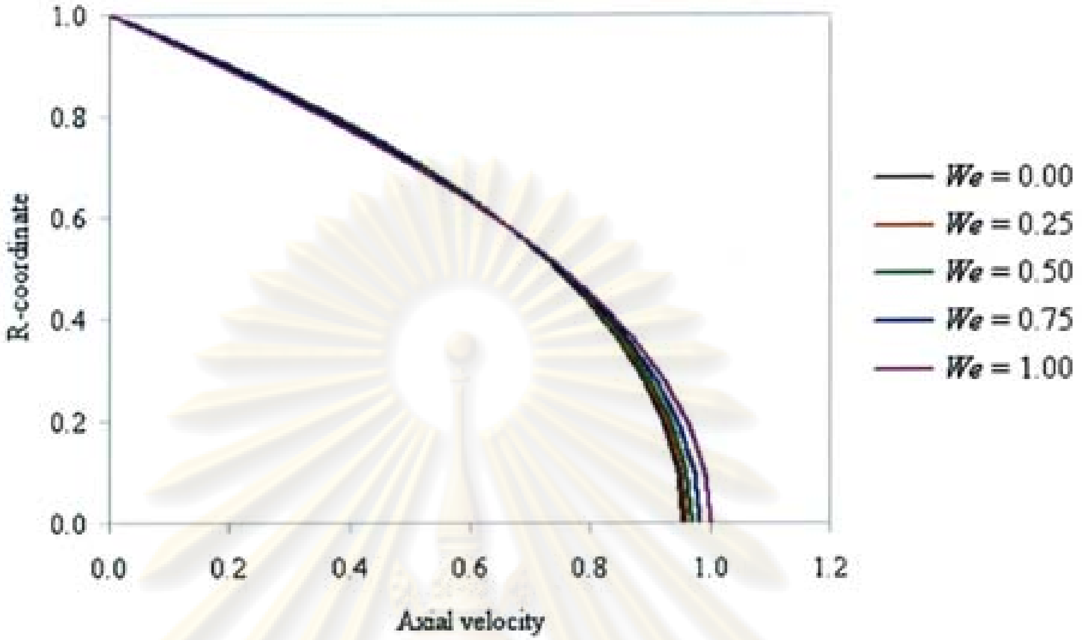


(ก) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = -0.4

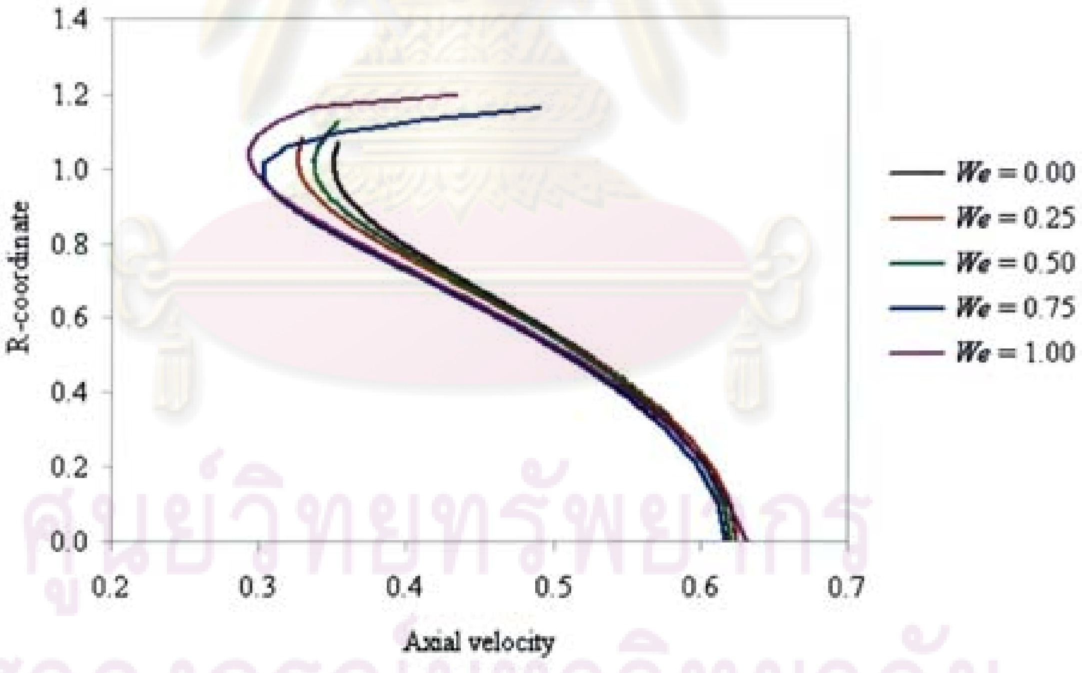


(ข) รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) ที่ z = 0.4

รูปที่ 4.18 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : รูปแบบความเร็วในแนวรัศมี (V_r) เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก ; (ก) V_r ที่ z = -0.4, (ข) V_r ที่ z = 0.4



(ก) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = -0.4



(ข) รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ z = 0.4

รูปที่ 4.19 ปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก : รูปแบบความเร็วในแนวแกน (V_z) เมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก ; (ก) V_z ที่ z = -0.4, (ข) V_z ที่ z = 0.4

4.3 สรุปผล (Conclusion)

ในบทนี้ได้ทำการศึกษาการไหลของของไหลวิสโคอีลาสติกทั้งปัญหาสติค-สลิป และปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก โดยเริ่มแรกได้ทำการศึกษาปัญหาสติค-สลิปที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 และ 1.00 ตามลำดับ ผลปรากฏว่าค่าที่ได้เกือบทุกค่าให้ค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าไวเซนต์เบอร์กมีค่าเพิ่มขึ้นและเมื่อพิจารณาผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี พบว่าลักษณะคล้ายกันในแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก และเมื่อนำค่าต่างๆไปเปรียบเทียบกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ได้ผลที่สอดคล้องกัน หลังจากที่ศึกษาผลที่ได้จากปัญหาสติค-สลิป แล้วจึงศึกษาปัญหาการบวมตัว ได้ผลปรากฏว่าเมื่อเทียบค่าต่างๆ กับปัญหาสติค-สลิปค่าความเร็วในแนวรัศมี ค่าความดันและค่าความเค้นต่างๆ มีค่าเพิ่มขึ้นในแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก เมื่อพิจารณาค่าการบวมตัวพบว่าอัตราส่วนการบวมตัวจะสูงเพิ่มขึ้นตามการเพิ่มค่าไวเซนต์เบอร์ก และเมื่อนำค่าไปเปรียบเทียบกับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] พบว่าได้ผลที่สอดคล้องกัน แต่เมื่อเปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวกับงานของ Tanner [7] (analytical approximation) พบว่างานของ Tanner [7] มีค่าน้อยกว่า จึงเป็นที่มาในการศึกษาผลกระทบจากการลื่นไถลที่ผนังท่อเพื่อลดอัตราส่วนการบวมตัวซึ่งได้นำมาทำการศึกษาในบทถัดไป

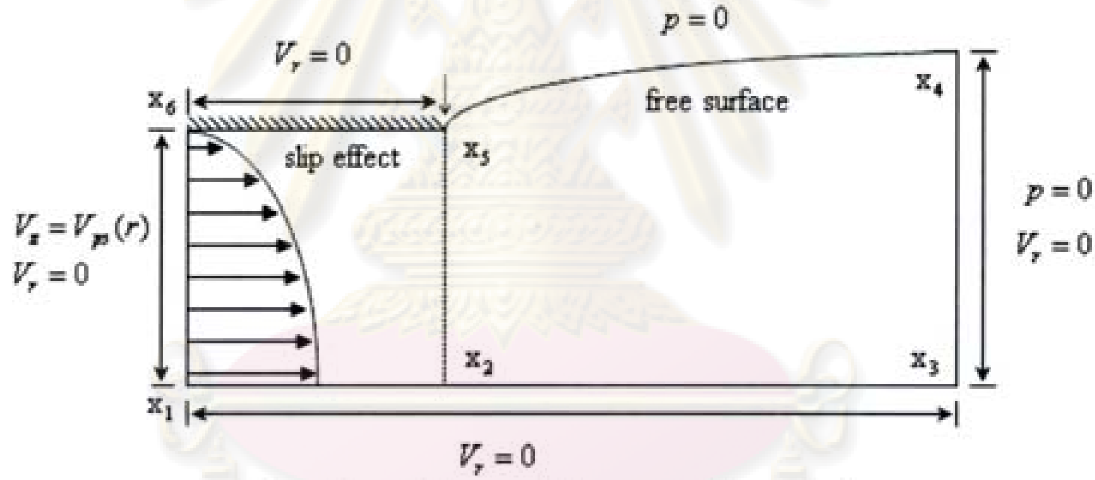
บทที่ 5

การลื่นไถลที่ผนังท่อ (Slip Effect at Die Wall)

5.1 ปัญหาการลื่นไถลที่ผนังท่อของของไหลนิวโตเนียน

ปัญหาการลื่นไถลที่ผนังท่อของของไหลนิวโตเนียนเป็นปัญหาที่ นวลักษณ์ ทองจับ [28] ได้ทำการศึกษาไว้แล้ว แต่ได้ทำกับโครงข่ายประกอบจำนวน 16 ชิ้นประกอบ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้โครงข่ายประกอบจำนวน 1944 ชิ้นประกอบในการศึกษาเพื่อทำการเปรียบเทียบและใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาต่อยอดจากของไหลนิวโตเนียนเป็นของไหลวิสโคอีลาสติก

เงื่อนไขขอบของปัญหาการลื่นไถลที่ผนังท่อแตกต่างจากปัญหาการบวมตัวตรงผนังท่อจะทำการคำนวณความเร็วในแนวแกน (V_z) ดังนั้นความเร็วในแนวแกนที่ขอบผนังท่อจึงมีบางค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 5.1 ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นจะนำผลเฉลยที่ได้จากปัญหาการบวมตัวมาเป็นค่าเริ่มต้น



รูปที่ 5.1 ลักษณะปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน

จากรูปที่ 5.1 ขอบผนังบน x_5x_6 ซึ่งเป็นขอบผนังท่อที่ได้มีการกำหนดค่าความเร็วในแนวรัศมี ให้มีค่าเป็นศูนย์ ($V_r = 0$) โดยจะทำการคำนวณความเร็วในแนวแกน (V_z) ซึ่งวิธีการคำนวณจะอาศัยกฎการลื่นไถลแพนเทียน (Phan-Thien slip rule) มีสูตรการคำนวณดังนี้

$$V_{slip} = V_{mean} * (1.0 - e^{(-\alpha * Xine)}) \qquad (5.1)$$

กำหนดให้ $Xine = \dfrac{II}{II_c}$ และให้ $e = 2.71828183$

โดยที่ II_c คือ ค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป

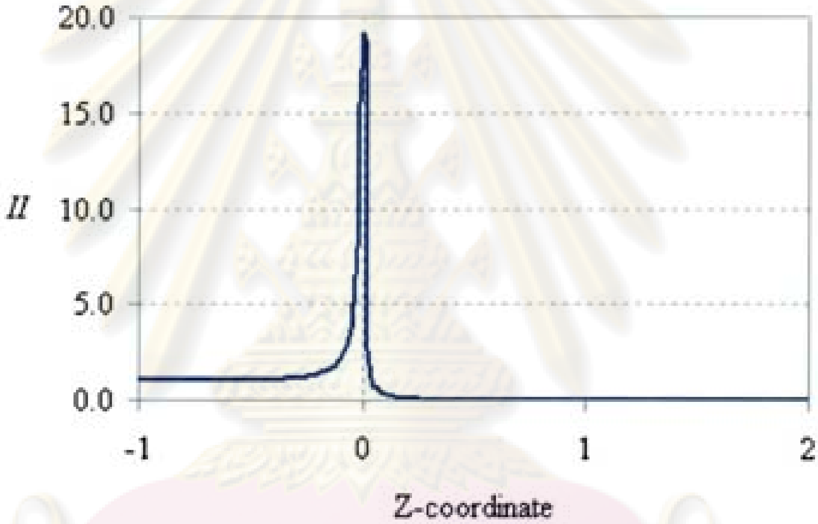
V_{mean} คือ ค่าความเร็วเฉลี่ย

V_{slip} คือ ค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่ผนังท่อ

α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังท่อ

ผลการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน

พิจารณาสมการ (5.1) จะพบปัจจัยที่ทำให้ค่าความเร็วในแนวแกน (V_z) เปลี่ยนไป เนื่องมาจากค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II_c) และค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังท่อ (α) การกำหนดค่าให้เหมาะสม จะเริ่มจากการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังท่อ จากการพิจารณางานของ นวลักษณ์ ทองจับ [28] ซึ่งได้เลือกใช้ค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังท่อเท่ากับ 0.25 เป็นค่าที่เหมาะสมในงานวิจัยของเขาและเลือกค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II_c) โดยพิจารณาจากค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II) ของปัญหาการบวมตัวสำหรับของไหลนิวโตเนียนดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 ค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II) ของปัญหาการบวมตัวของไหลนิวโตเนียน

รูปที่ 5.2 แสดงค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II) ของปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน เมื่อพิจารณาจากรูปทำให้สามารถเลือกค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II_c) โดยเลือกค่าเป็น 5.0, 7.5, 10.0, 12.5 และ 15.0 เนื่องจากค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปเป็นค่าที่บอกถึงขนาดความเค้นเฉือนรวม ถ้าค่าความเค้นเฉือนรวมมีค่าสูงมากโอกาสที่จะเกิดการลื่นไถลก็มากตาม ดังนั้นค่าความเค้นเฉือนสูงจึงส่งผลให้เกิดแรงที่กระทำระหว่างผิวของไหลที่สัมผัสกับผนังท่อมากจนทำให้ของไหลเกิดการลื่นไถล ผลของการเลือกใช้ค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป ที่มีผลทำให้อัตราส่วนการบวมตัวเปลี่ยนไป ได้แสดงไว้ในตาราง ที่ 5.1

H_c	$H_c = 5.0$	$H_c = 7.5$	$H_c = 10.0$	$H_c = 12.5$	$H_c = 15.0$	ไม่มีการลื่นไถล
χ	1.1300	1.1313	1.1321	1.1328	1.1335	1.1362

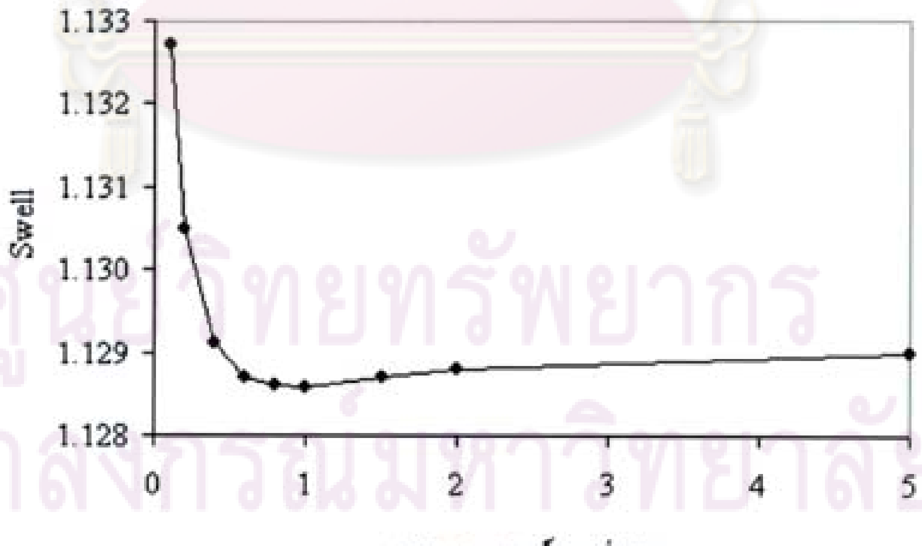
ตารางที่ 5.1 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน : อัตราส่วนการบวมตัว (χ) ของการแปรผันค่า H_c ณ ค่า $\alpha = 0.25$ และแบบไม่มีการลื่นไถล

เปรียบเทียบอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่า H_c ณ ค่า $\alpha = 0.25$ กับของ Nickell และคณะ [8] ซึ่งเป็นผลที่ได้จากการทดลอง ดังตารางที่ 4.3 พบว่าค่า $H_c = 5.0$ จะให้ค่าได้ใกล้เคียงกับของ Nickell และคณะ [8] มากที่สุด ดังนั้นการเพิ่มเงื่อนไขของการลื่นไถลที่ผนังท่อจึงให้อัตราส่วนการบวมตัวลดลงและให้ค่าใกล้เคียงมากขึ้นเมื่อเทียบกับผลการทดลอง

เลือกค่า $H_c =$ 5.0 เป็นค่าที่เหมาะสมกับผลการทดลอง ขั้นตอนต่อไปหาค่า α ที่เหมาะสม โดยทำการคำนวณค่า α ต่างๆ ณ ค่า $H_c = 5.0$ ดังผลที่แสดงไว้ในตารางที่ 5.2

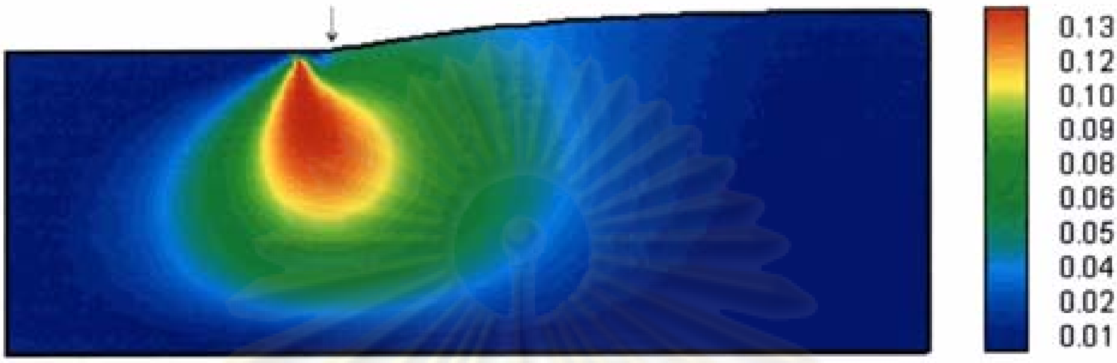
α	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	2.00	5.00
χ	1.1327	1.1305	1.1291	1.1287	1.12860	1.12859	1.1288	1.1290

ตารางที่ 5.2 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน : อัตราส่วนการบวมตัวของการแปรผันค่า α ณ ค่า $H_c = 5.0$



รูปที่ 5.3 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน : อัตราส่วนการบวมตัวจากกฎการลื่นไถลแพนเทียน ณ ค่า H_c เท่ากับ 5.0 เมื่อแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถล (α)

พิจารณาตารางที่ 5.2 พบว่าค่า $\alpha = 1.00$ เป็นค่าที่ให้ผลใกล้เคียงกับค่าของ Nickel และคณะ [8] ดังนั้นนำค่าที่เหมาะสมของ H_c และ α มาหาผลเฉลยดังผลลัพธ์ที่แสดงในรูปที่ 5.4



(ก) V_r

(ข) V_z

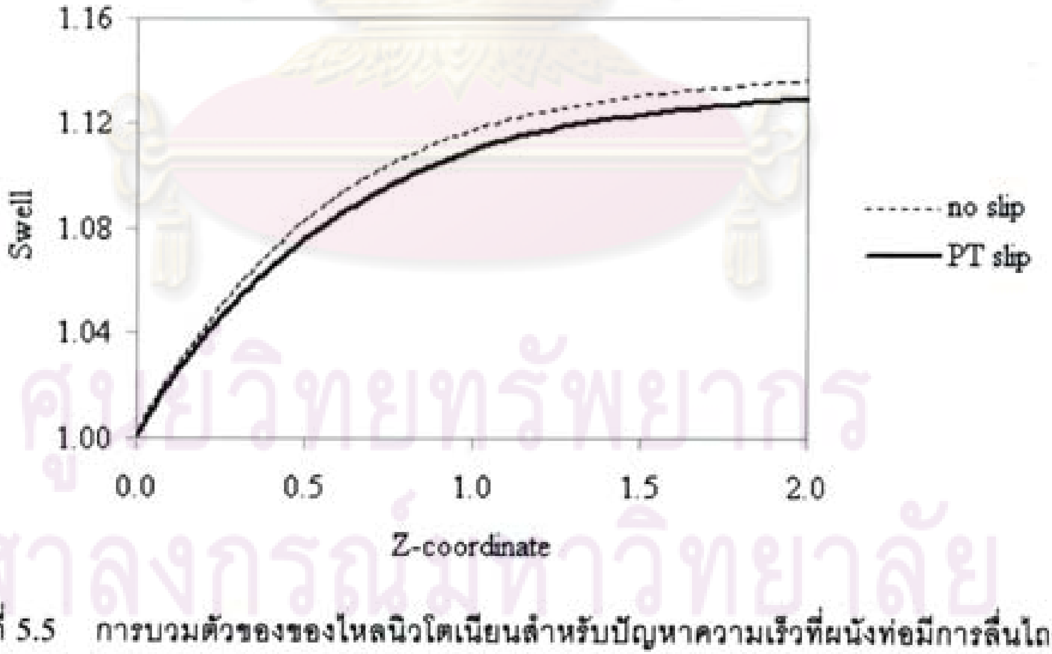
(ค) pressure

รูปที่ 5.4 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน : การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี ; (ก) V_r, (ข) V_z, (ค) pressure

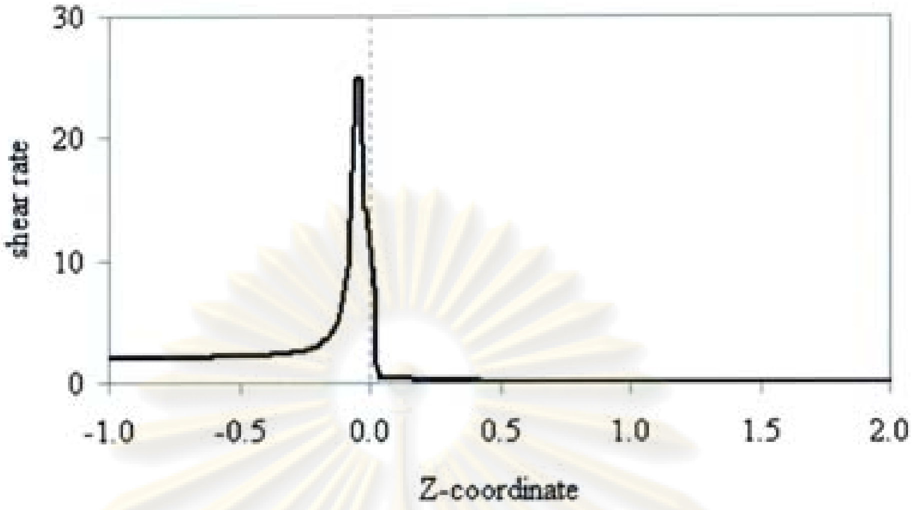
พิจารณารูปที่ 5.4 และตารางที่ 5.3 พบว่าค่าสูงสุดของความเร็วในแนวรัศมี (V_r) อยู่ที่บริเวณปลายท่อ แต่เมื่อปล่อยให้มีการลื่นไถลความเร็วในแนวรัศมีจะมีค่าเพิ่มขึ้นภายในท่อตรงบริเวณที่เกิดการลื่นไถล และค่าความเร็วในแนวรัศมีของปัญหาการลื่นไถลมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับปัญหาการบวมตัว ส่วนความเร็วในแนวแกน (V_z) มีลักษณะคล้ายกับปัญหาการบวมตัว แต่ที่ขอบผนังท่อเกิดการลื่นไถลจึงมีค่าไม่เป็นศูนย์ และค่าความดันจะมีลักษณะคล้ายกับปัญหาการบวมตัวแต่มีค่าน้อยกว่าเนื่องจากปัญหาการลื่นไถลทำให้ค่าการบวมตัวลดลง ทำให้ค่าความดันมีค่าลดลง ดังรูปที่ 5.5

เงื่อนไข	V_r		V_z		ΔP	χ
	max	min	max	min		
no slip	0.143	0.000	1.000	0.000	4.919	1.136
PT slip	0.138	0.000	1.000	0.000	4.280	1.129

ตารางที่ 5.3 เปรียบเทียบค่าความเร็ว และค่าความดันระหว่างของไหลที่ผนังท่อมีการลื่นไถล (PT slip) และไม่มีการลื่นไถล (no slip) สำหรับของไหลนิวโตเนียน

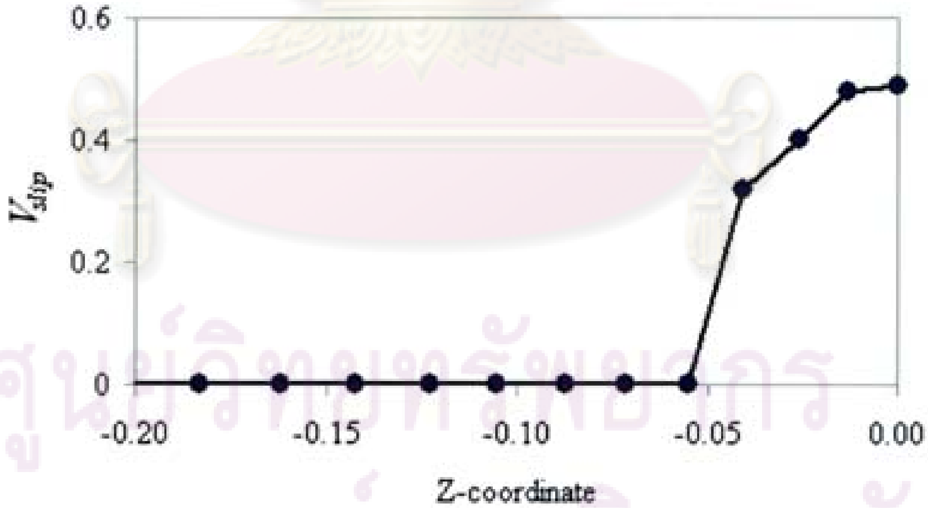


รูปที่ 5.5 การบวมตัวของของไหลนิวโตเนียนสำหรับปัญหาความเร็วที่ผนังท่อมีการลื่นไถล (PT slip) และไม่มีการลื่นไถล (no slip)



รูปที่ 5.6 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน : อัตราเฉือนที่ขอบผนังท่อและขอบผิวอิสระ

รูปที่ 5.6 แสดงค่าอัตราเฉือนที่ขอบด้านบน (top surface) ของของไหลนิวโตเนียน พบว่าค่าสูงสุดอยู่ก่อนถึงปลายท่อเล็กน้อย คือตรงตำแหน่งที่มีค่า $V_{slip} = 0$ ดังรูปที่ 5.7 เนื่องจากบริเวณที่เกิดการลื่นไถลมีความเร็วในแนวแกน (V_z) มากขึ้นทำให้ความเค้นเฉือนมีค่าลดลงเนื่องจากแรงเสียดทานน้อยลง และจะลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์ที่ขอบผิวอิสระเนื่องจากไม่มีแรงเสียดทาน

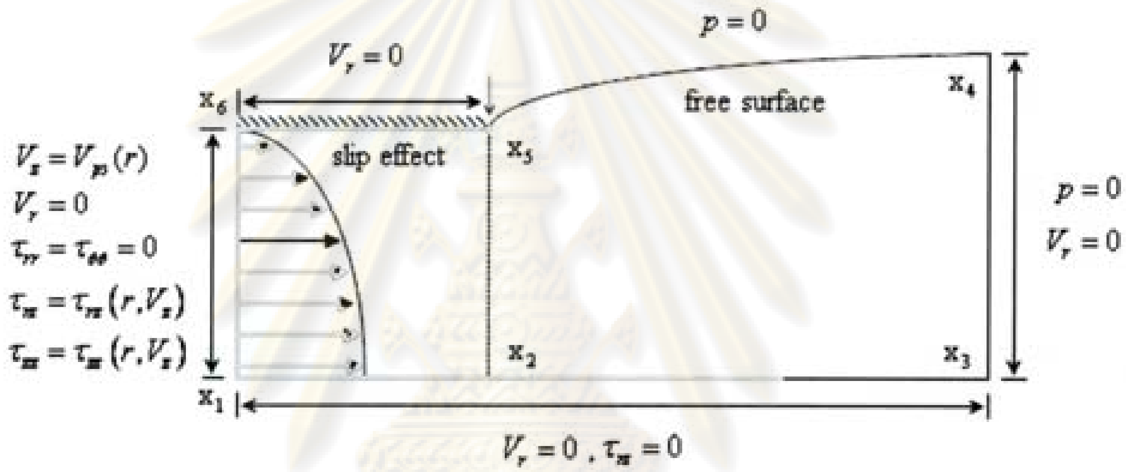


รูปที่ 5.7 ค่า V_{slip} ของปัญหาการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียน

5.2 ปัญหาการลื่นไถลที่ผนังท่อของของไหลวิสโคอีลาสติก

ปัญหาการลื่นไถลที่ผนังท่อของของไหลวิสโคอีลาสติกเป็นปัญหาที่ศึกษาเพิ่มเติม จากปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติก เนื่องจากในธรรมชาติความเร็วที่ผนังท่อไม่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์จริง ดังนั้นการศึกษาปัญหาการลื่นไถลจึงนำมาประกอบการพิจารณา เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้น

เงื่อนไขขอบจะแตกต่างจากปัญหาการบวมตัวตรงบริเวณผนังท่อมีการคำนวณความเร็วในแนวแกน (V_z) ดังรูปที่ 5.8 ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาการลื่นไถลของแต่ละค่าไวเซนต์เบอร์กจะนำผลเฉลยที่ได้จากปัญหาการบวมตัวที่ค่าไวเซนต์เบอร์กเดียวกันมาเป็นค่าเริ่มต้น

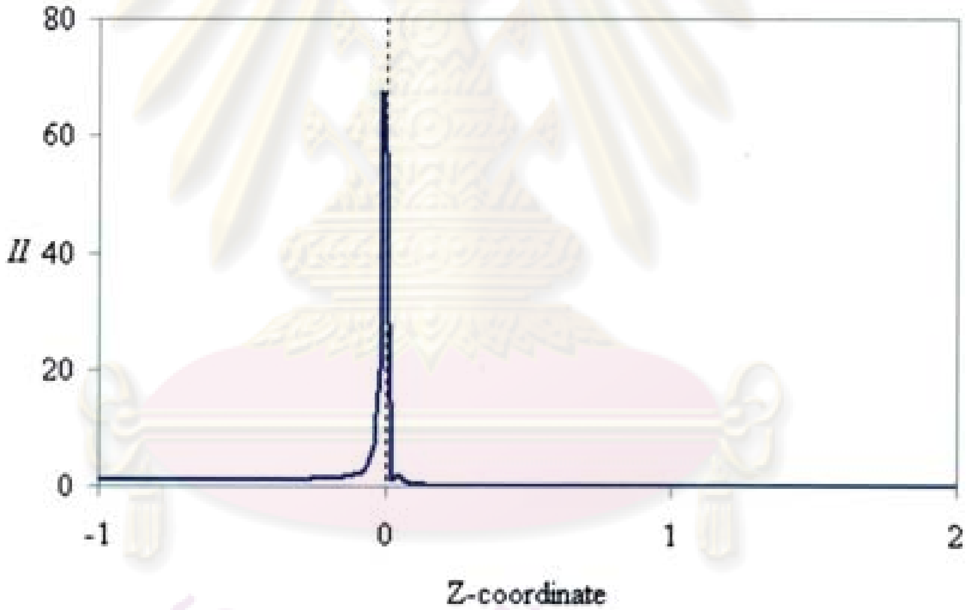


รูปที่ 5.8 ลักษณะปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก

รูปที่ 5.8 แสดงเงื่อนไขขอบผนังบน x_5x_6 ซึ่งเป็นขอบผนังท่อที่กำหนดค่าความเร็วในแนวรัศมีเป็นศูนย์ $(V_r=0)$ และให้มีการคำนวณความเร็วในแนวแกน (V_z) โดยใช้วิธีการคำนวณจากกฎการลื่นไถลแพนเทียน (Phan-Thien slip rule) ดังการคำนวณตามสมการ (5.1)

ผลการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก

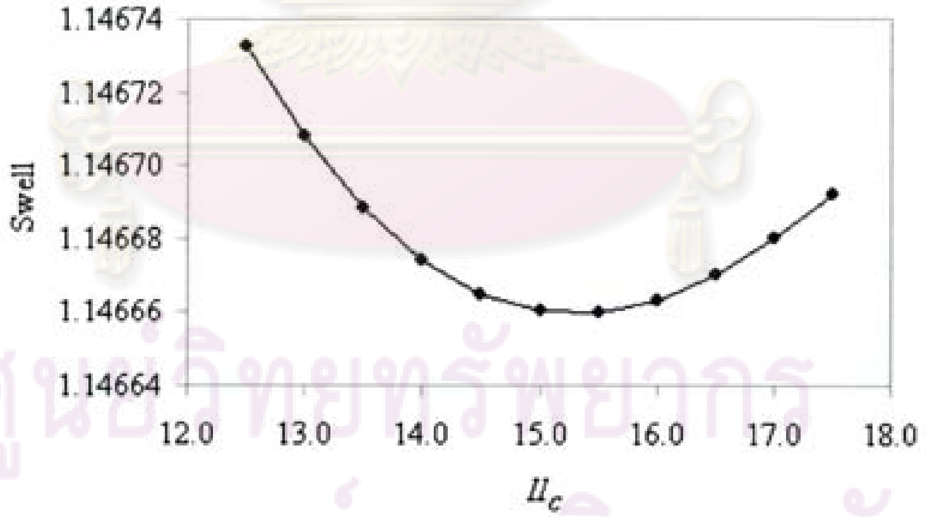
ตัวอย่างวิธีการเลือกค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (II_c) และค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังท่อ (α) สำหรับของไหลวิสโคอีลาสติกมีค่าเท่ากับ 0.25 ในขั้นตอนแรกให้พิจารณาค่า II ที่ขอบผนังท่อและขอบพื้นผิวอิสระ ดังรูปที่ 5.9 ค่า $II_{max} = 67.79$ เลือกค่า II_c ในช่วง 12.5 - 17.5 มาหาอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อเลือกค่า α = 0.8 ผลที่ได้ดังตารางที่ 5.4 และรูปที่ 5.10 และพบว่าค่า II_c = 15.5 เป็นค่าที่ให้อัตราส่วนการบวมตัวน้อยที่สุด ดังนั้นจึงเลือกค่า II_c = 15.5 ไว้ใช้ในการหาค่า α ผลที่ได้รับแสดงในตารางที่ 5.5 และรูปที่ 5.11 เลือกค่าอัตราส่วนการบวมตัวที่น้อยที่สุดนั่นคือค่า α = 0.8 ดังนั้นค่าที่เหมาะสมคือ II_c = 12.5 และ α = 0.8 จึงเป็นค่าที่ใช้ในการหาผลเฉลย เมื่อมีการแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก



รูปที่ 5.9 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่า II ณ ค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.25

H_c	χ
12.5	1.14673217
13.0	1.14670750
13.5	1.14668822
14.0	1.14667406
14.5	1.14666474
15.0	1.14665999
15.5	1.14665950
16.0	1.14666293
16.5	1.14666998
17.0	1.14667975
17.5	1.14669201

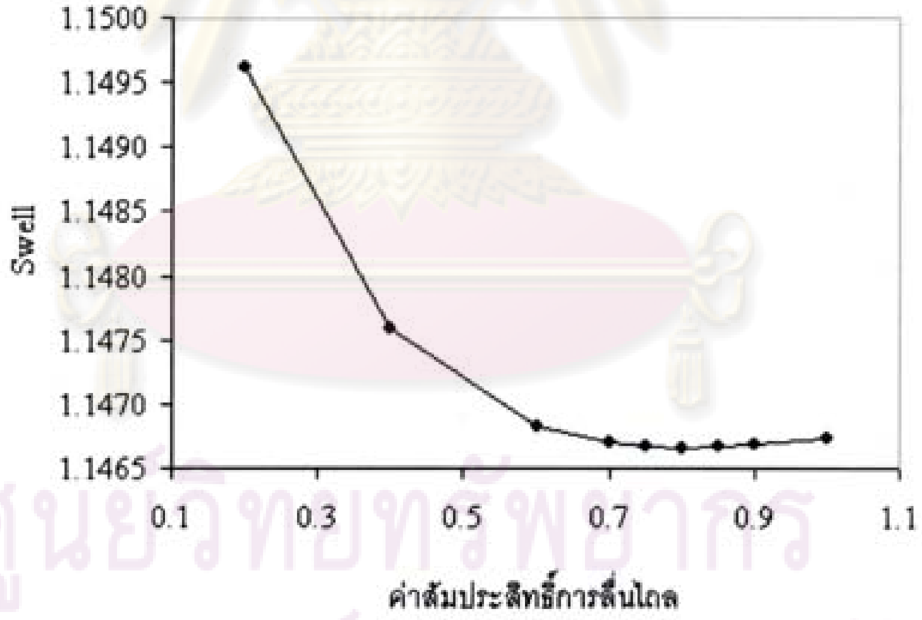
ตารางที่ 5.4 อัตราส่วนการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกในปัญหาการลื่นไถลที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.25 ณ ค่า α เท่ากับ 0.8 เมื่อแปรผันค่า H_c



รูปที่ 5.10 อัตราส่วนการบวมตัวของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.25 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถล (α) เท่ากับ 0.8 เมื่อแปรผันค่า H_c

α	χ
0.20	1.14961546
0.40	1.14759093
0.60	1.14681917
0.70	1.14669810
0.75	1.14667056
0.80	1.14665950
0.85	1.14666357
0.90	1.14667974
1.00	1.14673776

ตารางที่ 5.5 อัตราส่วนการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกที่มีค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.25 ณ ค่า H_c เท่ากับ 15.5 เมื่อแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถล (α)



รูปที่ 5.11 อัตราส่วนการบวมตัวของค่าไวเซนต์เบอร์กเท่ากับ 0.25 ณ ค่า H_c เท่ากับ 15.5 เมื่อแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถล (α)

ค่าพารามิเตอร์	*We*				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
α	1.00	0.80	0.85	0.80	0.80
H_c	5.00	15.50	6.75	3.00	6.00

ตารางที่ 5.6 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก : ค่า α และค่า H_c ที่เหมาะสมเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก

ผู้วิจัย	*We*				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Tanner [7] (analytical approximation)	1.131	1.146	1.186	1.242	1.301
Ngamaramvaranggul และ Webster [22]	1.130	1.162	1.212	1.268	1.354
fine mesh (PT slip)	1.129	1.147	1.187	1.223	1.310
fine mesh (no slip)	1.131	1.167	1.233	1.299	1.364

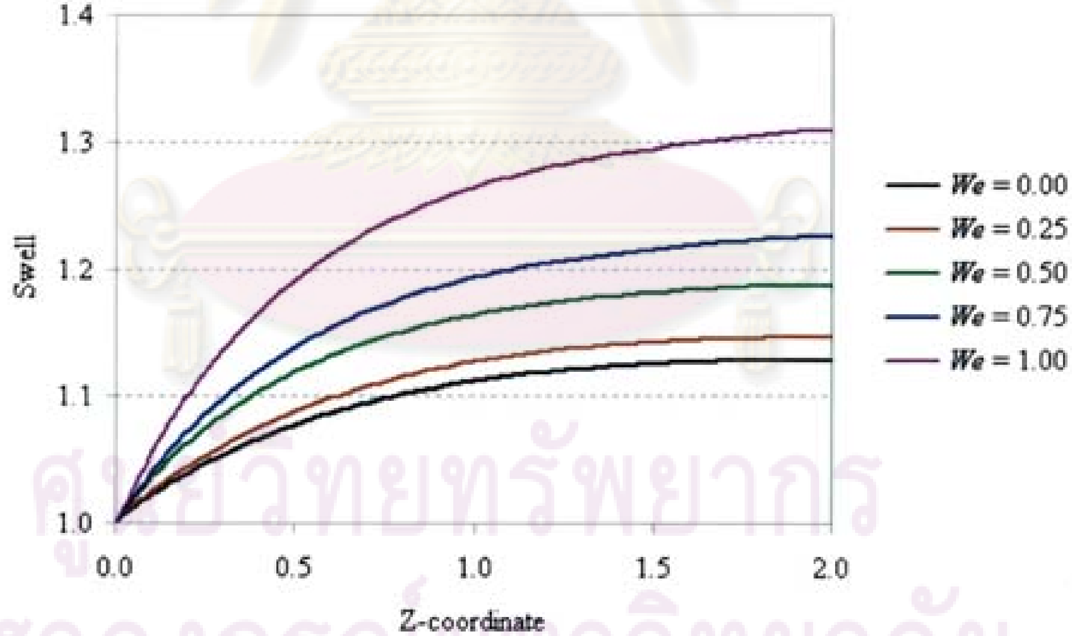
ตารางที่ 5.7 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก : อัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก

ค่าต่างๆ		*We* = 0.00		*We* = 0.25		*We* = 0.50		*We* = 0.75		*We* = 1.00	
		no	slip	no	slip	no	slip	no	slip	no	slip
V_z	max	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
V_r	max	0.14	0.14	0.15	0.17	0.16	0.17	0.18	0.20	0.19	0.26
	min	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.02	-0.01
ΔP		4.92	4.28	5.57	5.45	5.97	5.63	6.38	6.16	6.77	6.66

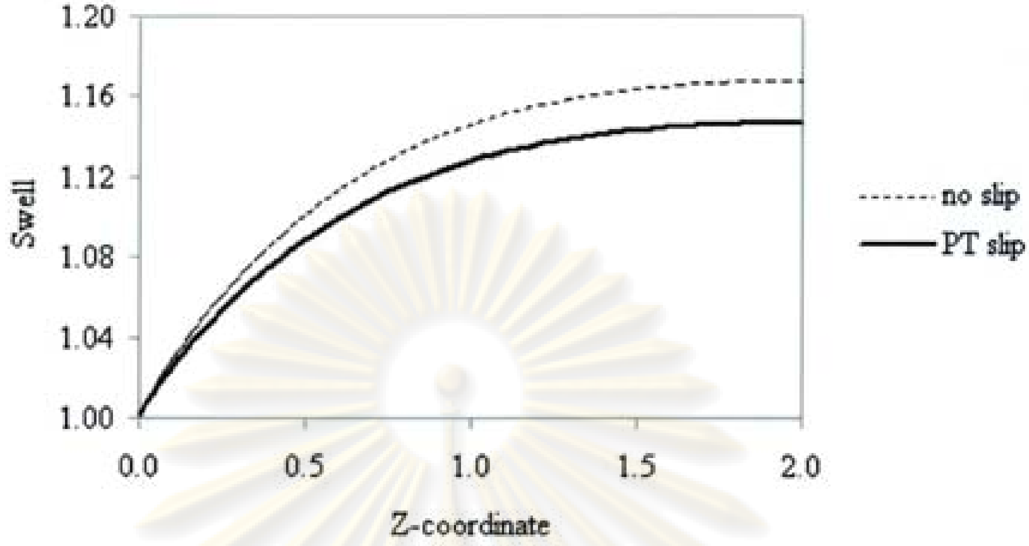
ตารางที่ 5.8 เปรียบเทียบค่าความเร็วและค่าความดันระหว่างปัญหาที่ผนังท่อมีการลื่นไถลและไม่มีการลื่นไถลเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก

หมายเหตุ ตารางที่ 5.8 no คือค่าจากปัญหาการบวมตัว และ slip คือค่าของไหลที่มีการลื่นไถลที่ผนังท่อ

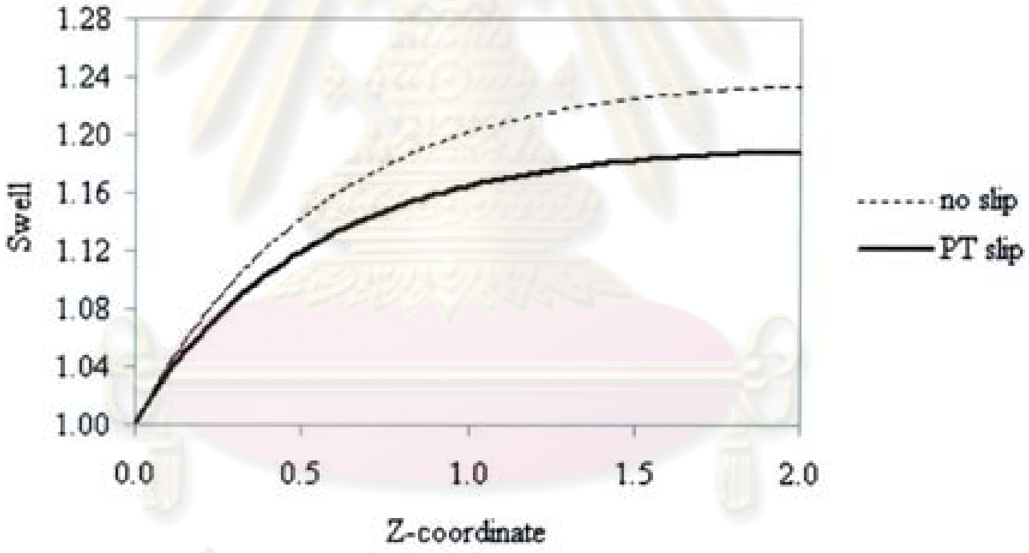
ตารางที่ 5.6 แสดงค่า α และค่า H_c ที่เหมาะสมเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก ส่วนตารางที่ 5.7 แสดงอัตราส่วนการบวมตัวแบบมีการลื่นไถล (PT slip) แล้วทำให้อัตราส่วนการบวมตัวมีขนาดลดลงเมื่อเทียบกับอัตราส่วนการบวมตัวแบบไม่มีการลื่นไถล (no slip) ดังรูปที่ 5.13 เมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง กับงานของ Ngamaramvaranggul และ Webster [22] และงานของ Tanner [7] ได้ค่าเท่ากับ 0.031 และ 0.009 ตามลำดับ พบว่าได้ค่าสอดคล้องกับงานของ Tanner [7] เมื่อเปรียบเทียบกับงานของ Tanner [7] ที่แต่ละค่าไวเซนต์เบอร์ก พบว่าค่าไวเซนต์เบอร์กที่แตกต่างกันมากที่สุดแตกต่างอยู่ร้อยละ 1.53 ตารางที่ 5.8 เป็นการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการพิจารณาผนังท่อที่มีการลื่นไถลกับไม่มีการลื่นไถล พบว่าความเร็วในแนวแกน (V_z) ไม่มีความแตกต่างกัน แต่ความเร็วในแนวรัศมี (V_r) มีค่ามากขึ้น พบว่าค่าที่ได้จากการลื่นไถลมีค่ามากกว่าค่าที่ไม่มีการลื่นไถล และค่าความดันที่ได้จากการเพิ่มเงื่อนไขการลื่นไถลได้ค่าน้อยกว่าปัญหาการบวมตัวที่ไม่มีการลื่นไถลทุกค่าไวเซนต์เบอร์ก รูปที่ 5.12 แสดงอัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กและพบว่าเมื่อค่าไวเซนต์เบอร์กมีค่ามากขึ้นอัตราส่วนการบวมตัวมีค่ามากตาม



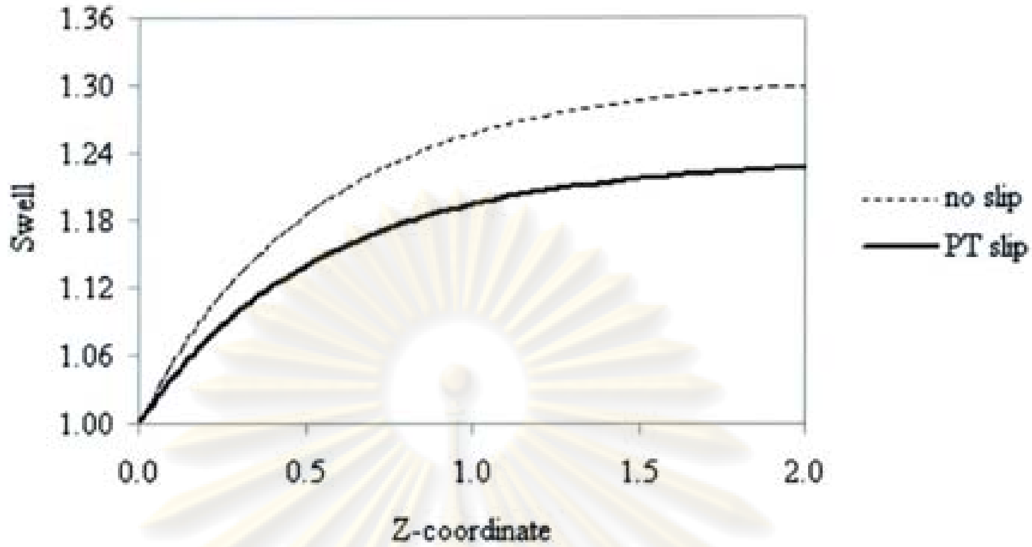
รูปที่ 5.12 ปัญหาการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก : อัตราส่วนการบวมตัวเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก



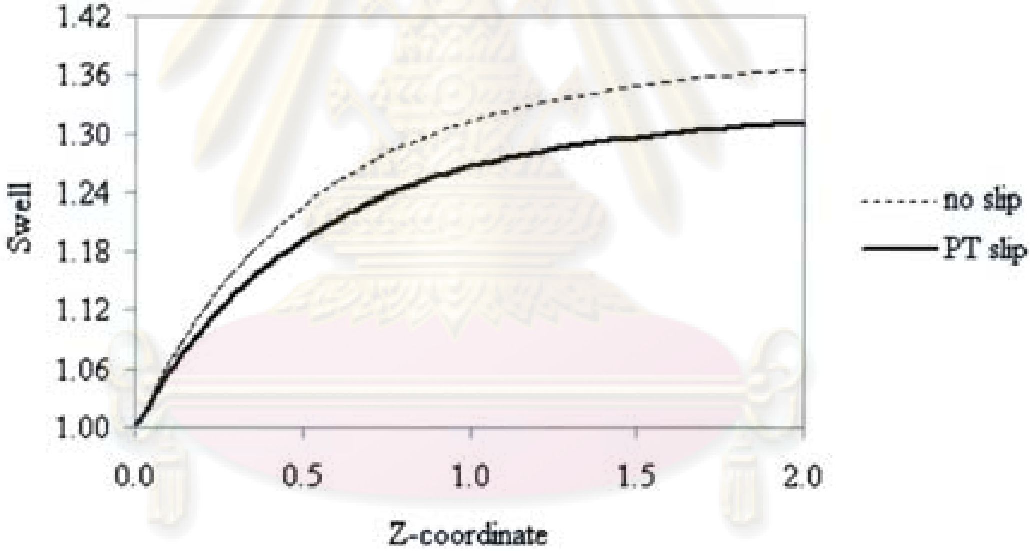
(ก) *We* = 0.25



(ข) *We* = 0.50



(ค) $We = 0.75$



(ง) $We = 1.00$

รูปที่ 5.13 อัตราส่วนการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกที่มีการลื่นไถลและไม่มีการลื่นไถลเมื่อแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์ก ; (ก) $We = 0.25$, (ข) $We = 0.50$, (ค) $We = 0.75$, (ง) $We = 1.00$

5.3 สรุปผล (Conclusion)

ในบทนี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการบวมตัวที่มีผลกระทบเกิดจากการลื่นไถล ณ ผนังท่อสำหรับของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก เมื่อกำหนดให้มีการคำนวณความเร็วในแนวแกน (V_z) ซึ่งเป็นบริเวณที่มีค่าอัตราเฉือนสูง และส่งผลให้เกิดอัตราส่วนการบวมตัวลดลง เนื่องจากความเร็วในแนวแกน (V_z) ที่เกิดจากการคำนวณ ณ ผนังท่อใกล้ๆปลายท่อไปลดพลังงานสะสมอันเนื่องมาจากแรงเสียดทานที่เกิดจากการยึดติดระหว่างของไหลกับผนังท่อโดยไม่มีการลื่นไถล และการบวมตัวที่ลดลงทำให้ค่าความดันมีค่าลดน้อยลง เนื่องจากแรงที่ใช้ในการผลักของไหลให้เกิดการบวมตัวน้อยลง เมื่อพิจารณาการแปรผันค่าไวเซนต์เบอร์กของของไหลวิสโคอีลาสติกพบว่าค่าแต่ละค่าให้ผลลัพธ์ในลักษณะทำนองเดียวกับปัญหาการบวมตัว

บทที่ 6

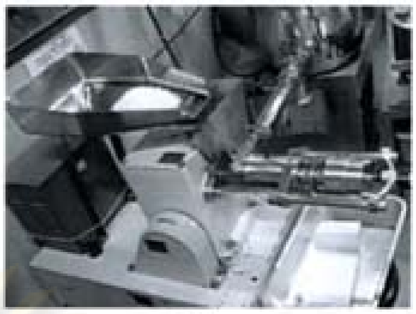
การจำลองการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช
(Simulation of Extrusion for Wet Powder Masses in Phamaceutical Process)

ในบทนี้จะศึกษาการจำลองการอัดรีดมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช โดยใช้ตัวแบบอ็อลดรอยด์บี แทนพฤติกรรมความเค้นของมวลผงเปียกที่ประกอบไปด้วยจุลผลึกเซลลูโลส (microcrystalline cellulose ; MCC) แล็คโตสและน้ำในอัตราส่วน 5 : 5 : 6 ต่อน้ำหนัก ขั้นตอนกระบวนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลมทุกขั้นตอนได้อธิบายไว้ในภาคผนวก สมมุติฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหาให้พิจารณาของไหลเป็น ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible fluid) ที่มีการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) และพิจารณาระบบที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (isothemal system)

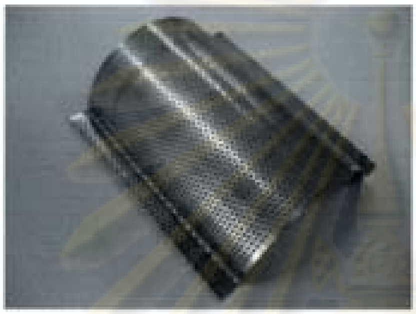
6.1 ขั้นตอนการเก็บข้อมูล

เริ่มจากการนำสารทั้ง 3 ชนิด มาผสมกันเข้าเป็นเนื้อเดียวกัน ดังรูปที่ 6.1 (ก) หลังจากนั้นนำสารที่ได้ไปผ่านเครื่องอัดรีดดังรูปที่ 6.1 (ข) สารจะผ่านเครื่องอัดรีดออกมาทางท่อหรือเรียกว่าดายดังรูปที่ 6.1 (ค) และ 6.1 (ง) สารที่ได้เรียกว่าเอกซ์ทรูเดต(extrudate) ซึ่งมีลักษณะเป็นแท่งรูปทรงกระบอกดังรูปที่ 6.1 (จ) ความเร็วของสาร(v) ที่ออกมาโดยวัดความยาว(l) ของเอกซ์ทรูเดตในช่วงเวลา(t) แล้วคำนวณหาความเร็วของสารที่ออกจากท่อหรือความเร็วปลั๊ก (V_z plug) ด้วยสูตร V_z plug $= l\ /\ t$ หลังจากนั้นนำเอกซ์ทรูเดตไปวัดขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง เพื่อหาอัตราส่วนการบวมตัว(รัศมีของเอกซ์ทรูเดตหารด้วยรัศมีของท่อ) ส่วนค่าความหนืดของสารวัดจากเครื่องวัดความหนืด(viscometer) ดังรูปที่ 6.1 (ฉ) ความหนาแน่นวัดจากการนำมวลผงเปียกใส่ในกระบอกตวงแก้วดังรูปที่ 6.1 (ช) แล้วนำกระบอกตวงแก้วไปวางบนเครื่องกระแทกดังรูปที่ 6.1 (ซ) เพื่อให้สารอัดแน่นแล้ววัดปริมาตรของสารเพื่อคำนวณหาความหนาแน่นจากมวลสารหารด้วยปริมาตรของสาร การหาความหนืดของสารได้รับความอนุเคราะห์จากภาควิชาเทคโนโลยีทางอาหาร คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ส่วนข้อมูลอย่างอื่นได้รับความอนุเคราะห์จาก ดร. จิตติมา ชัชวาลสายสินธ์ ภาควิชาเภสัชอุตสาหกรรม คณะเภสัชศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(ก)



(ข)

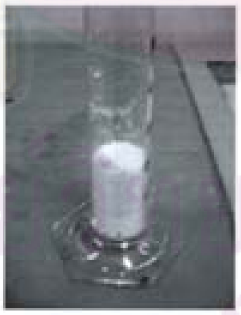


(ค)

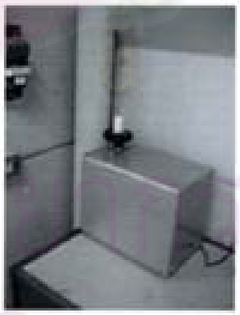
(ง)

(จ)

(ฉ)



(ช)



(ซ)

รูปที่ 6.1 แสดงภาพขั้นตอนต่างๆ ในขั้นตอนการเก็บข้อมูล

6.2 ค่าพารามิเตอร์และโดเมนที่ใช้ในการจำลอง

ค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่จำเป็นในการจำลองได้แก่

ค่าความหนาแน่นของสาร (ρ) เท่ากับ 0.821 กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

ค่าความเร็วของสารที่ออกจากท่อเท่ากับ 0.390 มิลลิเมตรต่อวินาที

ค่าความยาวของท่อเท่ากับ 1.536 มิลลิเมตร

ค่ารัศมีของท่อเท่ากับ 1.294 มิลลิเมตร

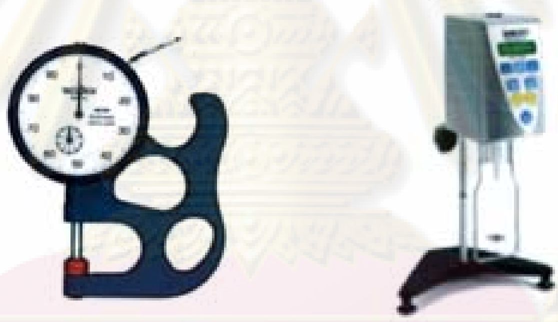
ค่าการบวมตัวเท่ากับ 1.876 มิลลิเมตร

ค่าอัตราส่วนการบวมตัวเท่ากับ 1.451

ค่าความหนืดของสาร (μ_0) เท่ากับ 89.00 กรัมต่อเซนติเมตรต่อวินาที

ค่าเวลาผ่อนคลาย (λ_1) เท่ากับ 1.076 วินาที

เครื่องมือวัดความหนา-บางที่ใช้คือเครื่องมือวัดความละเอียด TECLOCK SM-112 เครื่องมือวัดความหนืดใช้เครื่อง BROOKFIELD DV – I + Viscometer ดังรูปที่ 6.2 ตามลำดับ



(ก) (ข)

รูปที่ 6.2 แสดงเครื่องมือวัดความหนาบางและเครื่องมือวัดความหนืด

กำหนดความยาวลักษณะเฉพาะ(L) ความเร็วลักษณะเฉพาะ(V) ความหนืดอ้างอิง(μ_0) และเวลาอ้างอิง(λ_1)เท่ากับ 0.647 มิลลิเมตร 0.780 มิลลิเมตรต่อวินาที 89.00 กรัมต่อเซนติเมตรต่อวินาทีและ 1.076 วินาทีตามลำดับ ทำให้สามารถคำนวณหาตัวเลขเรย์โนลดส์ (Re) ได้เท่ากับ 9.311×10^{-5} และค่าไวเซนต์เบอร์ก (We) เท่ากับ 0.649 ส่วนค่าความหนืดของสารละลายต่อตัวทำละลาย $(\mu_V : \mu_N)$ ให้เท่ากับ 0.99 : 0.01

วิธีการคำนวณค่า *Re* และ *We*

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu_0} = \frac{(0.821g/cm^3)*(0.780mm/s)*(1.294mm)}{(89.000g/cm \cdot s)}$$

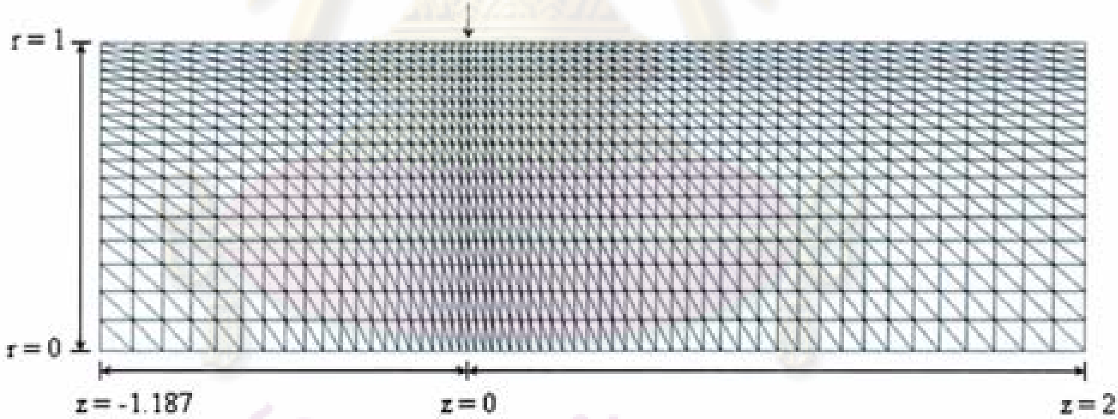
$$= 9.311 \times 10^{-5}$$

$$We = \frac{\lambda_1 V}{L} = \frac{(1.076s)*(0.780mm/s)}{(1.294mm)}$$

$$= 0.649$$

ค่าความยาวลักษณะเฉพาะใช้ค่ารัศมีของท่อ ค่าความเร็วลักษณะเฉพาะเป็นค่าความเร็วสูงสุดที่แกนสมมาตรหาได้จากสองเท่าของความเร็วปลั๊ก ความเร็วปลั๊กคิดจากค่าความเร็วของสารที่ออกจากท่อ ความหนืดอ้างอิงใช้ค่าความหนืดของสาร

โดเมนที่ใช้ในการจำลองมีลักษณะดังรูปที่ 6.3 โดยอัตราส่วนของรัศมีท่อต่อความยาวท่อเท่ากับ 1 : 1.187 และส่วนที่เป็นพื้นผิวอิสระยาวเท่ากับ 2 หน่วย จำนวนชิ้นประกอบ 2052 ชิ้นประกอบ และจำนวนจุดต่อ 4255 จุดต่อ



รูปที่ 6.3 โดเมนที่ใช้ในการจำลองการอัดรีดมวลผงเปียก

ส่วนเงื่อนไขขอบมีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาการบวมตัวของของไหลวีสโคอีลาสติกในหน้า 62

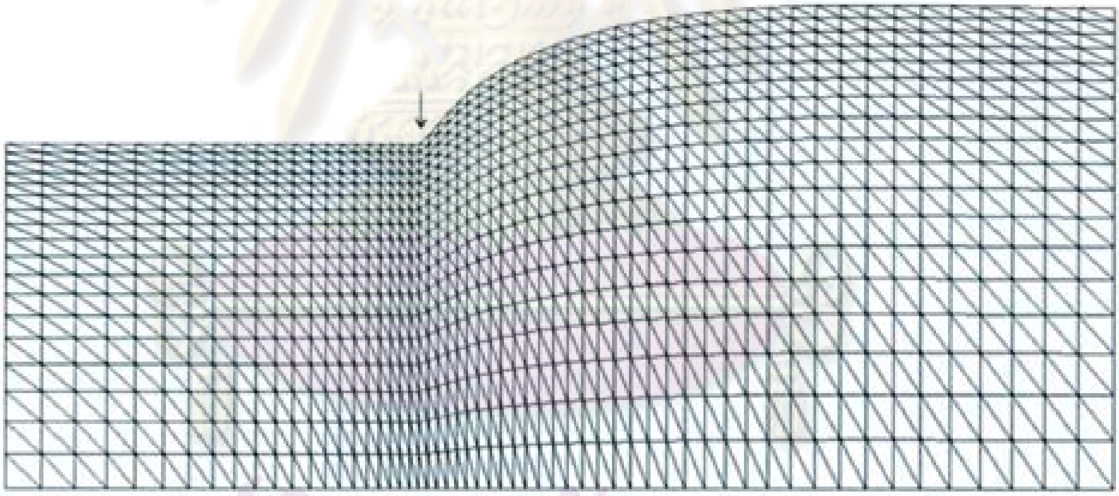
6.3 ผลที่ได้จากการจำลอง

ค่าความเร็ว ความเค้น ความดันและอัตราส่วนการบวมตัว (χ) ที่ได้จากการจำลองปัญหาการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกได้แสดงไว้ในตารางที่ 6.1 ส่วนรูปที่ 6.4 แสดงการบวมตัว

	V_z	V_r	τ_{rr}	τ_{rz}	τ_{zz}	$\tau_{\theta\theta}$	ΔP	χ
max	1.000	0.365	0.360	0.036	129.883	0.359	8.804	1.403
min	0.000	-0.009	-1.243	-4.276	-1.397	-0.001		

ตารางที่ 6.1 แสดงค่าความเร็ว ความเค้น ความดันและอัตราส่วนการบวมตัวของปัญหาการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียก

โดยผลการจำลองที่ได้ไม่ได้ใส่เงื่อนไขการลื่นไถลเนื่องจากค่า *Re* มีค่าน้อยมากซึ่งบ่งบอกถึงความเร็วของของไหล ของไหลที่เคลื่อนที่ช้าจะไม่ปรากฏการลื่นไถล จึงไม่จำเป็นต้องใส่เงื่อนไขการลื่นไถลในการจำลอง



รูปที่ 6.4 ลักษณะการบวมตัวของปัญหาการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียก

6.4 สรุปผล

พิจารณาอัตราส่วนการบวมตัวที่ได้จากการจำลอง (1.403) กับค่าการบวมตัวจริง (1.451) ด้วยวิธีการค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) ให้ผลเท่ากับ 0.0332 พบว่าค่าที่ได้จากการจำลองและข้อมูลจริงให้ผลใกล้เคียงกัน ทำให้เกิดความน่าเชื่อถือในค่าต่างๆตามตารางที่ 6.1 ซึ่งบางค่าไม่สามารถเก็บข้อมูลได้จากการทดลองจริง

บทที่ 7

สรุปผลและข้อเสนอแนะ (Conclusion and Suggestion)

7.1 สรุปผลการวิจัย (Conclusion)

งานวิจัยนี้เริ่มต้นด้วยการศึกษาปัญหาสติค-สลิปของของไหลนิวโตเนียนเพื่อดูผลจากการใช้โครงข่ายประกอบ 3 แบบ แบบหยาบ แบบปานกลาง และแบบละเอียด ปรากฏว่าโครงข่ายแบบละเอียดจะให้ผลดีที่สุดเมื่อเทียบจากโดเมนทั้ง 3 แบบ จึงได้นำโครงข่ายนี้ไปใช้ในปัญหาอื่นๆ หลังจากได้ทำการศึกษาปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน โดยนำผลอัตราส่วนการบวมตัวเปรียบเทียบกับของ Nickell และคณะ [8], Tanner [7], และ Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ปรากฏว่าอัตราส่วนการบวมตัวที่ได้มีขนาดเท่ากับของ Tanner [7]

การศึกษาของไหลชนิดวิสโคอีลาสติกด้วยตัวแบบอ็อลดรอยด์บี ที่ค่าไวเซนต์เบอร์กแตกต่างกัน โดยจะศึกษาทั้งปัญหาการไหลแบบสติค-สลิป และการบวมตัวที่ปลายท่อ ผลปรากฏว่าค่าที่ได้ให้ผลสอดคล้องกับของ Ngamaramvaranggul และ Webster [21]

ปัญหาผลกระทบจากการลื่นไถลของความเร็วในแนวแกนที่ขอบผนังท่อของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก พบว่าอัตราส่วนการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียนให้ผลใกล้เคียงกับของ Nickell และคณะ [8] ซึ่งค่าของ Nickell และคณะ [8] เป็นค่าที่ได้จากการทดลองจริง ส่วนปัญหาผลการลื่นไถลบริเวณผนังท่อของของไหลวิสโคอีลาสติกให้ค่าอัตราส่วนการบวมตัวลดลงเปรียบเทียบกับปัญหาการบวมตัวที่ไม่มีการลื่นไถลที่ผนังท่อซึ่งเป็นไปตามทฤษฎี

ปัญหาการอัดรีดสำหรับมวลผงเปียกในกระบวนการเภสัช พบว่าขนาดการบวมตัวมีค่าใกล้เคียงกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองจริงโดยแตกต่างกันอยู่ร้อยละ 3.32

7.2 ข้อจำกัดและเงื่อนไขของงานวิจัย (Limitation and condition)

งานวิจัยนี้มีข้อจำกัดที่อยู่ภายใต้สมมติฐานหลายประการ จึงอาจทำให้ผลที่ได้จากการคำนวณคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง เนื่องจากปัจจัยต่อไปนี้

7.2.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ จะไม่สามารถแสดงผลให้เห็นจริง ถึงผลกระทบที่เกิดขึ้นจริงในแนวรัศมี โดยอาจคิดว่าไม่มีความเร็วเกิดขึ้นในแนวรัศมี แต่ผลที่ได้ยังคงให้ค่าที่ใกล้ความเป็นจริง

7.2.2 เงื่อนไขอุณหภูมิ ที่กำหนดให้ระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ แต่ในความเป็นจริงของไหล เมื่อเกิดการเคลื่อนที่ย่อมเกิดแรงเฉือนระหว่างชั้นการไหล และของไหลกับผนังท่อ ทำให้อุณหภูมิสูงขึ้น

7.2.3 แรงโน้มถ่วง โดยการไหลของของไหลในท่ออาจจะมีผลไม่มากเท่ากับเมื่อของไหลได้เคลื่อนที่ออกนอกท่อแล้วเกิดการบวมตัวขึ้น

7.2.4 ประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ที่จำกัดหน่วยความจำเมื่อใช้ในการคำนวณ จากการคำนวณที่ใช้ความละเอียดของโครงข่ายที่มีขนาดความละเอียดต่างๆกันพบว่ายิ่งมีความละเอียดมากจะให้ผลดี แต่การเพิ่มความละเอียดของโครงข่ายย่อมหมายถึงการเพิ่มจำนวนจุดต่อและจำนวนชิ้นประกอบซึ่งจะส่งผลให้คอมพิวเตอร์ต้องเพิ่มภาระงานในการคำนวณ เพิ่มหน่วยความจำ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้นจึงกลายเป็นข้อจำกัดของประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์

7.2.5 แรงตึงผิวเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่ส่งผลต่อผิวอิสระของของไหล ซึ่งในงานวิจัยนี้ไม่ได้พิจารณา

7.2.6 การเก็บข้อมูลไม่ครบถ้วน เนื่องจากไม่มีเครื่องมือที่อำนวยการเก็บค่า ทำให้การอธิบายและเปรียบเทียบกับผลจริงมีข้อจำกัด และในการเก็บข้อมูลนี้ได้ทำการทดลองจริงเพียงครั้งเดียวเนื่องจากตัวสารที่ใช้ในการทดลองมีราคาแพง

7.3 ข้อเสนอแนะ (Suggestion)

7.3.1 ศึกษาปัญหาการบวมตัวของของไหลวิสโคอีลาสติกเพิ่มเติมโดยใช้ตัวแบบอื่นๆ เช่นตัวแบบเพนเทียนเทนเนอร์ (Phan-Thien/Tanner model) เป็นต้น

7.3.2 ศึกษาผลการลื่นไถลที่ผนังท่อของปัญหาการบวมตัวของของไหลด้วยกฎการลื่นไถล (slip laws) ตัวอื่นๆ เช่น กฎเนเวียร์สลิป (Navier slip law) และ กฎเพรียวสลิป (Pure slip law) เป็นต้น

7.3.3 ศึกษาตัวแปรอื่นๆที่มีอิทธิพลต่อการบวมตัวของของไหล เช่น ความยาวของท่อ (die length) สัดส่วนของความยาวต่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของท่อ (die L/D ratio) และอุณหภูมิของท่อ (die temperature) เป็นต้น

7.3.4 ศึกษาผลกระทบจากการพิจารณาแรงตึงผิวของของไหล

7.3.5 ศึกษาผลจากการที่โดเมนมีหลายท่อ เพื่อที่จะได้ให้ผลใกล้เคียงกับความเป็นจริง

7.3.6 ศึกษาดูผลจากการเปลี่ยนองค์ประกอบของตัวยา

รายการอ้างอิง

[1] S. Richardson. A stick-slip Problem Relatived to the Motion of a Free Jet at Low Reynolds Numbers. Proc. Camb. Phil. Soc. 67(1970): 477-489.

[2] M. Okabe. Fundamental Theory of the Semi-radial Singularity Mapping with Applications to Fracture Mechanics. Comp. Meth. App. Mech. Eng. 26(1981): 53-73.

[3] D.B. Ingham and M.A. Kelmanson. Boundary Intergal Equation Analyses of Singular Potential and Biharmonic Problems. Berlin : Spinger-Verleg, 1984.

[4] M. Kermode, A. Mckerrell, and L.M. Delves. The Calculation of Singular Coefficients. Comp. Meth. App. Mech. Eng. 50(1985): 205-215.

[5] G. Georgiou, L. Olson, W. Schultz, and S. Sagan. A Singular Finite Element for Stokes Flow : The Stick-slip Problem. Int. J. Num. Meth. Fluids. 9(1989): 1353-1367.

[6] G. Georgiou, L. Olson, and W. Schultz. The Integrated Singular Basis Function Method for the Stick-slip and the Die-swell Problem. Int. J. Num. Meth. Fluids. 13(1991): 1251-1265.

[7] R.I. Tanner. Engineering Rheology. London : Oxford University Press, 1985.

[8] R.E. Nickell, R.I. Tanner, and B. Caswell. The Solution of Viscous Incompressible Jet and Free-surface flows Using Finite-element Methods. J. Fluid Mech. 65(1974): 189-206.

[9] P.W. Chang, T.W. Patten, and B.A. Finlayson. Collocation and Galerkin Finite Element Methods for Viscoelastic Fluid Flow-ii. Comp. and Fluids. 17(1979): 285-293.

[10] M.J. Crochet and R. Keunings. Die Swell of a Maxwell Fluid Numerical Prediction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 7(1980): 199-212.

[11] M.J. Crochet and R. Keunings. On Numerical Die Swell Calculation. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 10(1982): 85-94.

[12] M.J. Crochet and R. Keunings. Finite Element Analysis of Die-swell of a Maxwell Fluid Numerical Prediction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 10(1982): 339-356.

[13] C.R. Beverly and R.I. Tanner. Numerical Analysis of Three-dimensional Newtonian Extrudate Swell. Rheol. Acta. 30(1991): 341-356.

[14] A. Karagiannis, A.N. Hrymak, and J. Vlachopoulos. Three-dimensional non-Isothermal Extrusion Flows. Rheol. Acta. 28(1989): 121-123.

[15] W.J. Silliman and L.E. Scriven. Separating Flow near a Static Contact Line : Slip ata Wall and Shape of a Free Surface. J. Comp Phys. 34(1980): 287-313.

[16] N. Phan-Thein. Influence of Wall Slip on Extrudate Swell : A Boundary Element Investigration. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 26(1988): 327-340.

[17] A.V. Ramamurthy. Wall Slip in Viscous Fluids and Influence of Materials of Construction. J. Rheol. 30(1986): 337-357.

[18] S.G. Hatzikiriakos and J.M. Dealy. Role of Slip and Fracture in the Oscillating Flow of HDPE in a Capillary. J. Rheol. 36(1992): 845-884.

[19] C.F.J. Den Doelder, R.J. Koopmans, J. Molenaar, and A.A.F. Van de Ven. Comparing the Wall Slip and the Constitutive Approach for Modelling Spurt Instabilities in Polymer Melt Flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 75(1998): 25-41.

[20] V. Ngamaramvaranggul and M.F. Webster. Computation of Free Surface Flows with a Taylor-Galerkin/Pressure-Correction Algorithm. Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000): 936-1026.

[21] V. Ngamaramvaranggul and M.F. Webster. Viscoelastic Simulation of stick-slip and Die-swell Flows. Int. j. Num. Meth. Fluid. 36(2001): 539-595.

[22] V. Ngamaramvaranggul and M.F. Webster. Simulation of Coating Flows with Slip Effects. Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000): 961-992.

[23] V. Ngamaramvaranggul and M.F. Webster. Simulation of Pressure-tooling Wire-coating Flow with Phan-Thein/Tanner Model. Int. J. Num. Mech Fluids. 38(2002): 677-710.

[24] ณรงค์ฤทธิ์ สมบัติสมภพ และ ชาคริต สิริสิงห. Basic Polymer Rheology and Applications. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, 2544.

[25] M.J. Crochet, A.R. Davies, and K. Walters. Numerical Simulation of Non-Newtonian Fluid Flow: Rheology Series 1. Elsevier Science Publishers, 1984.

[26] มนตรี พิรุณเกษตร. กลศาสตร์ของไหล (Fluid mechanics). กรุงเทพฯ : บริษัทวิทยพัฒน์ จำกัด, 2550.

[27] D. Paddon and H. Holstein. Technical Report. BUCSTR 80-01, Bristol University, 1980.

[28] R.S. Rivlin and J.L. Eriksen. Stress Deformation Relations for Isotropic Material. J. Rat. Mech. Anal. 4, 1995.

[29] นวลักษณ์ ทองจับ. ผลของการลื่นไถลของของไหลนิวโตเนียนสำหรับการบวมตัวที่หัวดาย. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิทยการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.

[30] S. Galland, T. Ruiz, M. Delalode, A. Krupa and B. Bataille. Texturing the spherical granular system influence of the spheronisation stage. Powder Technol. 157(2005): 156-162.

[31] K.E. Fielden, J.M. Newton and R.C. Rowe. The influence of lactose particle size on spheronization of extrudate processed by a ram extruder. Int. J. Pharm. 81(1992): 205-224.

[32] P.J. Harrison, J.M. Newton and R.C. Rowe. The characterization of wet powder masses suitable for extrusion-spheronisation. J. Pharm. Pharmacol. 37(1985): 686-691.

[33] L. Baert and J.P. Remon. Influence of amount of granulation liquid on the drug release rate from pellets made by extrusion-spheronisation. Int. J. Pharm. 95(1933): 135-141.

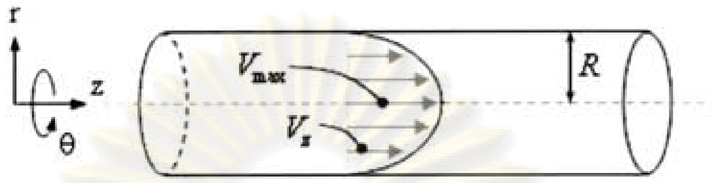
[34] L. Baert, J.P. Remon, H. Vermeersch, J. Smeyers-Verbeke and D.L. Massart. Study of parameters important in the spheronisation process. Int. J. Pharm. 96(1933): 225-229.

[35] V. Ngamaramvaranggul. Numerical Simulation of Non-Newtonian Free Surface Flows. Master's Thesis. Department of Computer Science, University of Wales Swansea, 2000.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การไหลแบบราบเรียบที่พัฒนาเต็มที่ในท่อกลม (Fully developed laminar flow)



รูปที่ ก.1 การไหลแบบราบเรียบที่พัฒนาเต็มที่ในท่อกลม

จากรูปเป็นการไหลเต็มท่อแนวตรงที่มีพื้นที่หน้าตัดคงตัว โดยกำหนดให้ท่อมีรัศมีเท่ากับ R ซึ่งการไหลแบบนี้เรียกว่า การไหลแบบพาราโบลา (Poiseuille flow) ซึ่งเรียกตามนักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Jean Louis Poiseuille, 1799 – 1869 ในการวิเคราะห์หารูปแบบสมการความเร็วในแนวแกน (V_z) จะอาศัยสมการความต่อเนื่อง สมการนาเวียร์-สโตกส์ในพิกัดทรงกระบอก โดยมีข้อสมมติฐานการไหลดังนี้

1) เป็นการไหล 2 มิติพิกัด (r,z) โดยมีสมมาตรในทิศ θ จะได้ว่า $v_\theta = 0$ และ $\dfrac{\partial(\ )}{\partial\theta} = 0$
2) ภายใต้สภาวะคงตัว $\left(\dfrac{\partial(\ )}{\partial t} = 0\right)$
3) ไหลแบบราบเรียบ $(v_r = 0)$ จะได้ว่า $\dfrac{\partial v_r}{\partial r} = 0$ และ $\dfrac{\partial v_r}{\partial z} = 0$
4) อาศัยสมการความต่อเนื่อง $\left(\nabla\cdot\vec{U} = 0\right)$ จะได้ว่า $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
5) ไม่คิดแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล $\rho g_r = 0, \rho g_z = 0$ และ $\rho g_\theta = 0$
6) ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว

พิจารณาสมการของเนเวียร์-สโตกส์ ในแนวแกน z ได้

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z = \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

จากข้อสมมุติฐานที่กำหนด ทำให้พจน์ $\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}, \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}, \rho g_z, \dfrac{\partial v_z}{\partial t}, v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}, \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial\theta}, v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ มีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้นสมการจะลดรูปเหลือ

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0 \qquad (ก.1)$$

หาปริพันธ์สมการ (ก.1) เทียบกับ r

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2+c_1 \quad ;\ c_1 \text{ คือค่าคงที่} \qquad (\text{ก}.2)$$

จากเงื่อนไขที่ขอบ

$\dfrac{\partial v_z}{\partial r}=0$ ที่ $r=0$ แทนลงในสมการ (ก.2) จะได้ว่า $c_1=0$

ดังนั้นสมการ (ก.2) จะได้

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2 \qquad (\text{ก}.3)$$

หาปริพันธ์สมการ (ก.3) เทียบกับ r

$$v_z=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2+c_2 \quad ;\ c_2 \text{ คือค่าคงที่} \qquad (\text{ก}.4)$$

จากเงื่อนไขที่ขอบ

$v_z=0$ ที่ $r=R$ แทนลงในสมการ (ก.6) จะได้ว่า $c_2=-\dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)R^2$

ดังนั้นสมการ (ก.4) จะได้

$$v_z=\frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (\text{ก}.5)$$

สมการ (ก.5) เป็นสมการความเร็วในแนวแกนของของไหลไม่มีการบีบอัดตัวซึ่งไหลเต็มท่อในสภาวะคงตัว จากสมการ (ก.5) สามารถหาค่าอัตราการไหล ได้เป็น

$$Q=\int_A v_z dA=\int_0^R \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r dr$$

$$Q=\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad (\text{ก}.6)$$

จากสมการ (ก.6) สามารถหาค่าความเร็วเฉลี่ย (V_{mean}) ได้เป็น

$$V_{mean}=\frac{Q}{A}=\frac{R^2}{8\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad (\text{ก}.7)$$

พิจารณาค่าความเร็วตามแนวแกนสูงสุด $(V_{\max})$ จากการแทน $r = 0$ และแทนค่าความเร็วเฉลี่ยจากสมการ (ก.7) ในสมการ (ก.5) จะได้

$$V_{\max} = 2V_{mean}$$

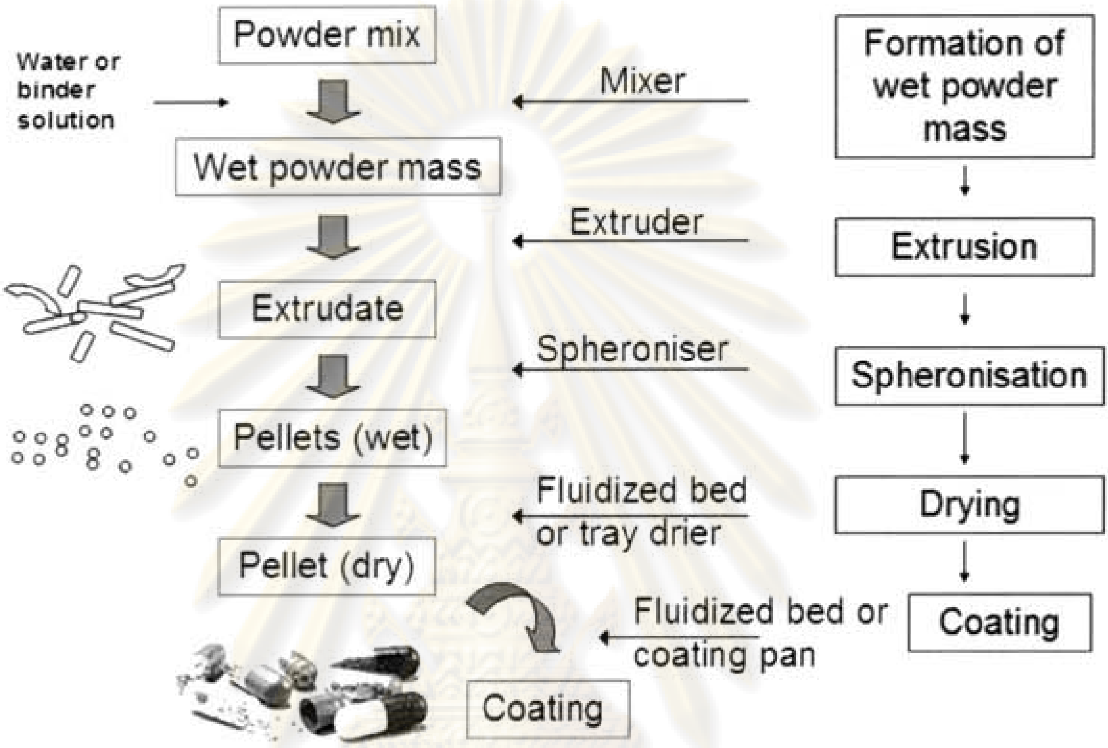
เนื่องจากในงานวิจัยนี้กำหนดค่า $V_{\max} = 1$ ดังนั้นค่าความเร็วเฉลี่ยจะเท่ากับ 0.5 $(V_{mean} = 0.5)$ และจากสมการ (ก.5) สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของความเร็วตามแนวแกนสูงสุด $(V_{\max})$ ได้เป็น

$$v_z = V_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{(ก.8)}$$

ค่า v_z จากสมการ (ก.8) นำไปใช้ในการหาค่าความเร็วในแนวแกนที่ขอบทางเข้า

ภาคผนวก ข

ข.1 ขั้นตอนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลม (Spherical granules)



รูปที่ ข.1 แผนภาพขั้นตอนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลม

รูปที่ ข.1 แสดงขั้นตอนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลมแบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

(1) ขั้นตอนการผสมตัวยา (formation of wet powder mass) เป็นขั้นตอนการนำส่วนผสมของตัวยาทั้งหมดมาผสมให้เป็นเนื้อเดียวกันด้วยเครื่องผสม (mixer) เมื่อผสมเสร็จแล้วจะเรียกของผสมที่ได้ว่ามวลผงเปียก (wet powder mass)

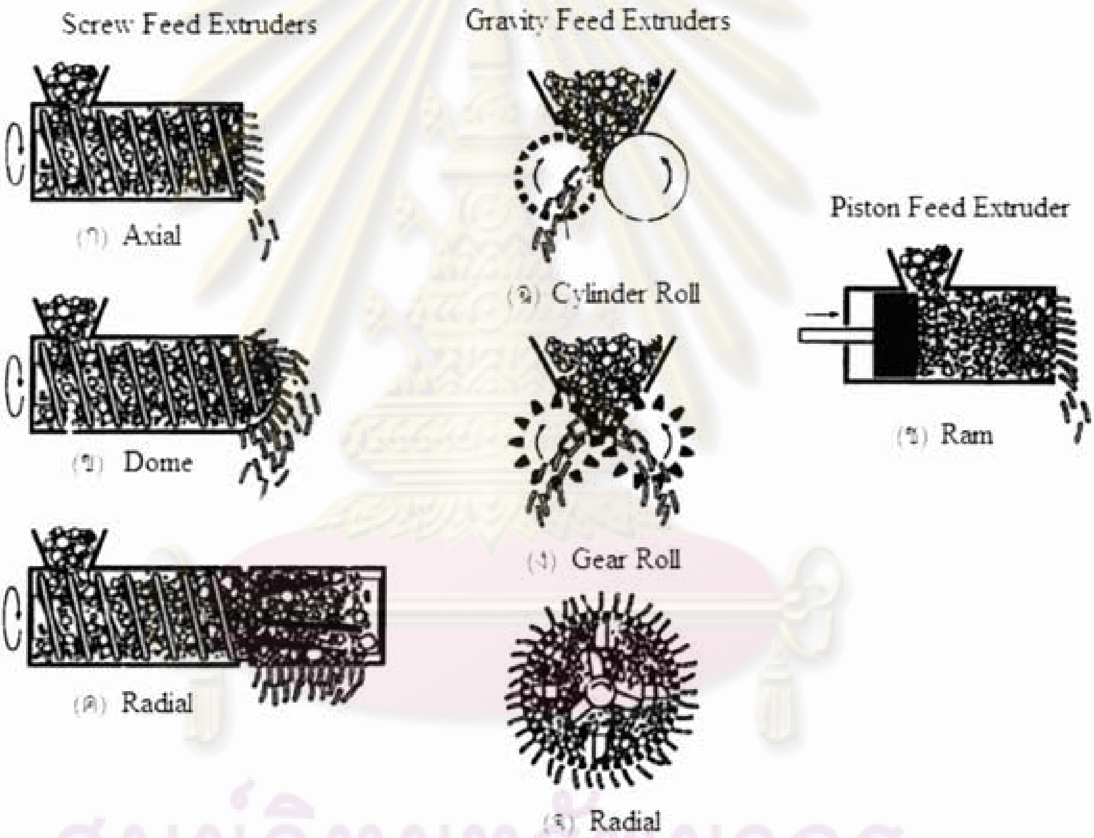
(2) ขั้นตอนการอัดรีด (extrusion) เป็นขั้นตอนการนำมวลผงเปียกเข้าสู่กระบวนการอัดรีด (extrusion process) เพื่อทำการอัดรีดให้สารที่ได้ออกมาเป็นลักษณะแท่งยาวรูปทรงกระบอกเรียกว่าเอกซ์ทรูเดต (extrudate) ดังรูปที่ ข.2 และรูปที่ ข.3

(3) ขั้นตอนสเฟียโรไนเซชั่น (spheronisation) เป็นขั้นตอนการเปลี่ยนสารที่มีลักษณะเป็นแท่งให้เป็นเม็ดกลมเล็ก (pellet) ดังรูปที่ ข.4 และรูปที่ ข.5

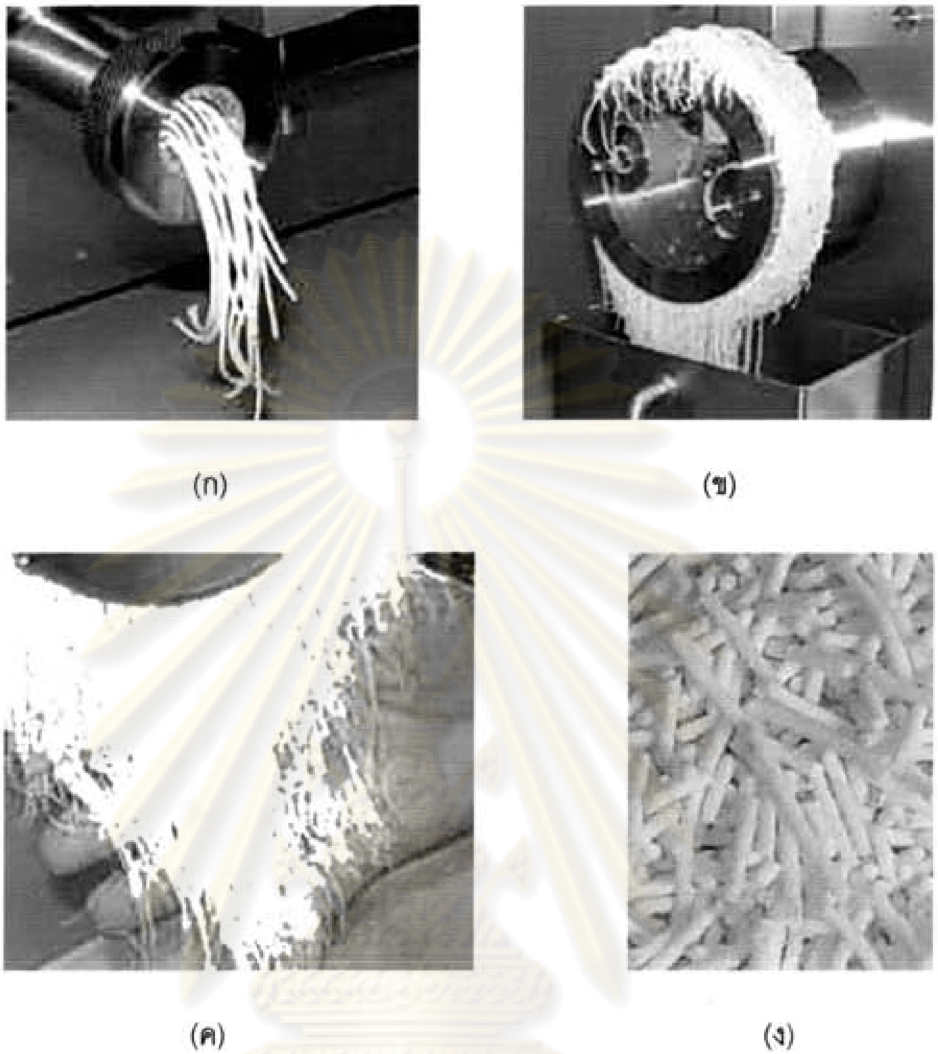
(4) ขั้นตอนอบแห้ง (drying) เป็นขั้นตอนการอบตัวสารที่ยังคงมีความชื้นอยู่ให้แห้งสนิท

(5) ขั้นตอนการเคลือบ (coating) เป็นขั้นตอนสุดท้ายที่ใช้ในการเคลือบตัวสารที่มีลักษณะเป็นเหมือนผงแป้งให้มีรูปทรงที่อยู่ตัวและไม่ให้เกิดความเสียหายได้ง่าย

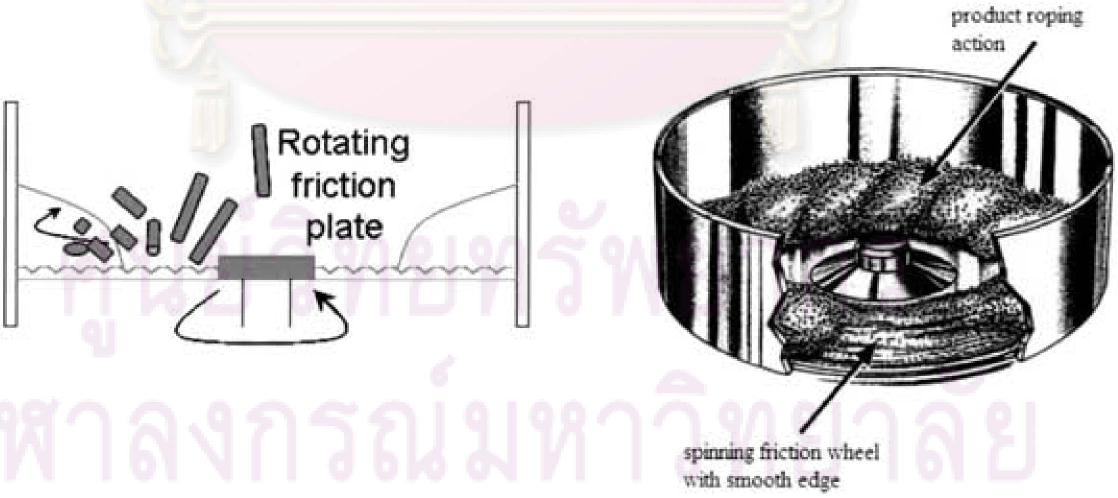
รูปที่ ข.6 แสดงภาพการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของสารในกระบวนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลมจากงานของ Galland [29] รูปที่ ข.7 แสดงถึงลักษณะผิวของตัวเอกซ์ทรูเดตที่ได้จากกระบวนการอัดรีดจะเห็นว่าลักษณะของผิวเอกซ์ทรูเดตในรูปที่ ข.7 (ก) มีลักษณะผิวเอกซ์ทรูเดตที่เรียบ รูปที่ ข.7 (ข) มีลักษณะผิวค่อนข้างเรียบ ส่วนในรูปที่ ข.7 (ค)-(ง) มีลักษณะผิวเป็นริ้วรอยแบบฟันฉลาม (sharkskin) ซึ่งเรียกลักษณะนี้ว่าพฤติกรรมการเสียรูปทรงของสาร (melt fracture หรือ melt distortion) พฤติกรรมการเกิดริ้วรอยแบบฟันฉลามนี้เกิดได้จากการที่ความเค้นหรือความเครียดเฉือนมีค่าเกินจุดวิกฤต แล้วทำให้รูปร่างของสารที่อัดรีดออกมาแตกต่างไปจากรูปร่างของหัวดาย (die) ที่ใช้อย่างสิ้นเชิง จึงทำให้ผิดวัตถุประสงค์ของการผลิต



รูปที่ ข.2 ตัวอย่างเครื่องอัดรีดแบบต่างๆ ; แบบ Screw Feed Extruders : (ก) Axial, (ข) Dome, (ค) Radial, แบบ Gravity Feed Extruders : (ฉ) Cylinder Roll, (ง) Gear Roll, (จ) Radial, แบบ Piston Feed Extruder : (ช) Ram



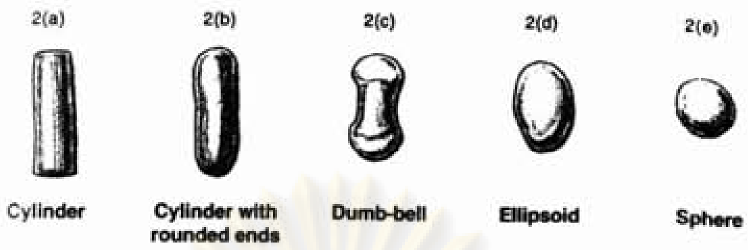
รูปที่ ข.3 เอกซ์ทรูเดต (Extrudate)



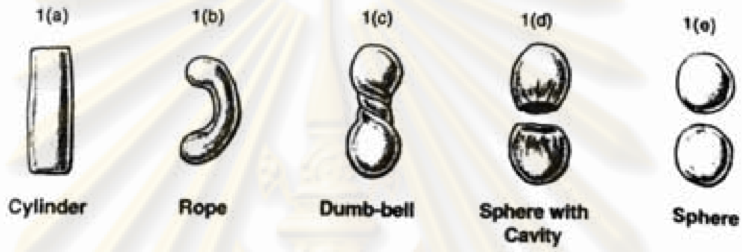
(ก) ภาพตัดขวาง

(ข) จำลองกระบวนการสเฟียโรไนเซชั่น

รูปที่ ข.4 กระบวนการสเฟียโรไนเซชั่น : (ก) ภาพตัดขวาง (ข) จำลองกระบวนการสเฟียโรไนเซชั่น

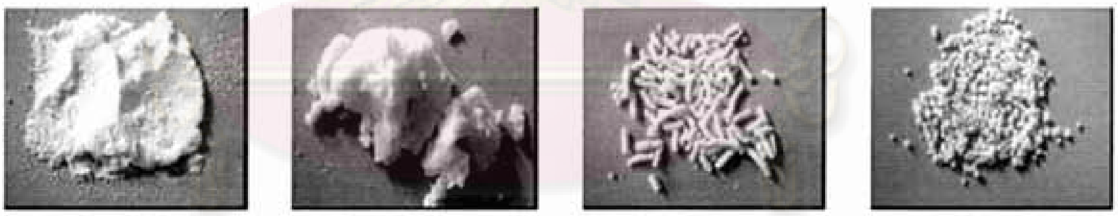


(ก) Rowe และคณะ



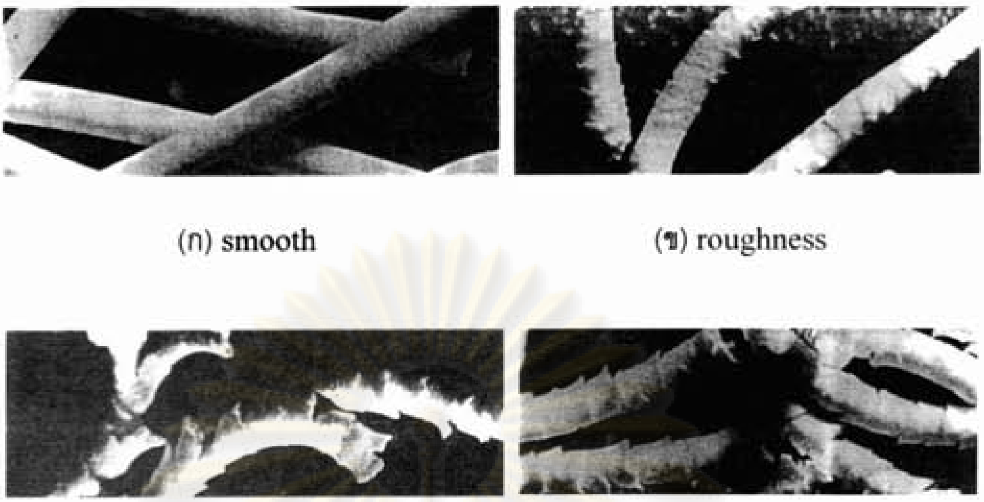
(ข) Baert และคณะ

รูปที่ ข.5 ลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างจากเอกซ์ทรูเดตเป็นเม็ดกลมเล็ก (Pellet-forming mechanism) : (ก) Rowe และคณะ [30,31], (ข) Baert และคณะ [32,33]



(ก) powders (ข) wet mass (ค) extrudates (ง) pellets

รูปที่ ข.6 ภาพการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของสารในกระบวนการผลิตยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลม จากงานของ Galland [29] : (ก) powders, (ข) wetmass, (ค) extrudates, (ง) pellets



(ก) smooth (ข) roughness

(ค) sharkskin (ง) sharkskin

รูปที่ ข.7 ลักษณะผิวของเอกซ์ทรูเดต ; (ก) ราบเรียบ (smooth), (ข) ค่อนข้างราบเรียบ (roughness), (ค) และ (ง) ริ้วรอยแบบฟันฉลาม (sharkskin)

ข.2 องค์ประกอบของยา (Drug composition)

องค์ประกอบของยา หมายถึงส่วนประกอบทางเคมีในตำรับยา หรือรูปแบบยา (dosage forms) ซึ่งแบ่งเป็นประเภทต่าง ๆ ดังนี้

1 รูปแบบยาที่เป็นของแข็ง (solid dosage forms) ได้แก่ ยาเม็ด (tablets) ยาแคปซูล (capsules)

2 รูปแบบยาที่เป็นของเหลว (liquid dosage forms) ได้แก่ ยาน้ำ (solutions) ยาฉีด (parenterals)

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาตัวยาที่มีลักษณะเป็นทรงกลมซึ่งอยู่ในประเภทรูปแบบยาที่เป็นของแข็ง โดยมีองค์ประกอบของยาคือ ตัวยาสำคัญ (active ingredient) และสารเพิ่มปริมาณ (excipient) ซึ่งตัวยาสำคัญมีหน้าที่ออกฤทธิ์ทางยาและสารเพิ่มปริมาณมีหน้าที่เพื่อทำให้ตัวยามีปริมาณมากขึ้น เนื่องจากตัวยาสำคัญนั้นมีปริมาณที่น้อยมากจนไม่สามารถนำมาขึ้นรูปได้จึงจำเป็นต้องมีการเพิ่มปริมาณด้วยสารเพิ่มปริมาณ

ในส่วนของการจำลองจะทำการจำลองการไหลของสารภายในบริเวณดายและนอกดายที่เกิดการบวมตัวซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในขั้นตอนการอัดรีด สำหรับสารที่ใช้จะไม่มีการนำตัวยาสำคัญมาผสม โดยสารที่ผสมประกอบด้วยจุลผลึกเซลลูโลส (microcrystalline cellulose ; MCC) แล็คโตสและน้ำในอัตราส่วน 5 : 5 : 6 ต่อน้ำหนัก โดยสารต่างๆจะมีคุณสมบัติดังนี้

จุลผลึกเซลลูโลสเป็นสารช่วยในตำรับยา (excipient) ซึ่งถูกใช้ในสูตรของยาเม็ดและยาแคปซูล โดยใช้เสมือนเป็นตัวเชื่อมเนื่องจากคุณสมบัติการถูกตอกอัดได้ดีของสาร และเป็นการแตกตัวของยาเพื่อเพิ่มการใช้ประโยชน์ทางชีวภาพของตัวยา นอกจากนี้ยังใช้เป็นตัวหล่อลื่นเพื่อช่วยในกระกระบวนการผลิตยาเม็ด ที่ไม่มีฤทธิ์ทางยา ไม่มีกลิ่น และไม่มีรส ซึ่งเหมาะที่จะเป็นสารเพิ่มปริมาณในกรณีที่จะทำให้ขนาดของยาใหญ่ขึ้นและช่วยให้การผลิตง่ายขึ้น และทำให้รูปแบบยาถูกต้อง

แล็คโตส (lactose) เป็นน้ำตาลโมเลกุลคู่ (disaccharide) มีผลึกสีขาว รสหวานน้อย ละลายน้ำได้ พบในน้ำนมสัตว์ เมื่อถูกย่อยจะได้น้ำตาลกลูโคส 1 โมเลกุล และน้ำตาลกาแล็คโตส 1 โมเลกุล ในการผลิตยาเม็ดได้นำสารชนิดนี้มาผสมเพื่อเป็นสารเพิ่มปริมาณเนื่องจากมีราคาถูก

น้ำ (water) ใช้ในการผสมให้สารที่มีลักษณะผงให้รวมกันเป็นเนื้อเดียวกลายเป็นมวลผงเปียก (wet powder masses) เพื่อเตรียมสารนำเข้าสู่ขั้นตอนการอัดรีดต่อไป และจะถูกกำจัดให้หมดในขั้นตอนการอบแห้ง

ภาคผนวก ค

ระเบียบวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin method)

ภาคผนวกนี้จะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการ (2.31) – (2.36) ด้วยการประยุกต์วิธีกาเลอร์คิน เริ่มจากการพิจารณาถึงนิพจน์ต่างๆที่อยู่ในสมการ สำหรับในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะพิกัดทรงกระบอก 2 มิติบนแนวแกน r และ z ดังนั้นนิพจน์ต่างๆ ในสมการบนพิกัด RZ พิจารณาได้ดังนี้

พิจารณาส่วนประกอบแนวรัศมี (r-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\nabla\cdot\tilde{\tau}\right)_r = \frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}$$

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial r}\right)$$

พิจารณาส่วนประกอบแนวแกน (z-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\nabla\cdot\tilde{\tau}\right)_z = \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}$$

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)_z = v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r\partial z}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

นิพจน์ต่างๆ ในสมการตัวแบบองค์ประกอบ

พิจารณาส่วนประกอบ rr (rr-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{rr} = v_r\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial z}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{rr} = \tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\left(\left(\nabla\vec{U}\right)^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{rr} = \tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

พิจารณาส่วนประกอบ *rz* (*rz*-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{rz} = v_r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{rz} = \tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\left(\left(\nabla\vec{U}\right)^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{rz} = \tau_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

พิจารณาส่วนประกอบ *zz* (*zz*-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{zz} = v_r\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{zz} = \tau_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\left(\left(\nabla\vec{U}\right)^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{zz} = \tau_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

พิจารณาส่วนประกอบ $\theta\theta$ ($\theta\theta$ -component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{\theta\theta} = v_r\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial z}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}\frac{v_r}{r}$$

$$\left(\left(\nabla\vec{U}\right)^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}\frac{v_r}{r}$$

ใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์คินกับทุกขั้นตอน ที่มีโดเมนแบ่งย่อยเป็นชิ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม แต่ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับจำนวนจุดต่อ สำหรับความเร็วและความเค้นจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองที่มีจุดต่อ 6 จุด $(\phi_i, i = 1,2,3,...,6)$ ส่วนความดันจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นที่มีจุดต่อ 3 จุด (ψ_1,ψ_2,ψ_3)

เมื่อพิจารณา สมการ (2.31) โดยใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนในแนวรัศมี (*r*-component) จะได้

$$\frac{2Re}{\Delta t}\int_{\Omega}\phi\left(v_r^{n+\frac{1}{2}} - v_r^n\right)d\Omega = \int_{\Omega}\phi\left[\nabla\cdot\left(\tilde{\tau}+2\mu_N\tilde{D}\right) - ReU\cdot\nabla U - \nabla p\right]^n d\Omega$$

$$+\mu_N\int_{\Omega}\phi\left[\nabla\cdot\left(\tilde{D}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{D}^n\right)\right]d\Omega \qquad (ค.1)$$

พิจารณาแต่ละนิพจน์ในสมการ (ค.1) โดยเริ่มจากนิพจน์แรกทางซ้าย

ซึ่งเป็นนิพจน์ของ $\int_{\Omega}\phi v_r^{n+\frac{1}{2}}d\Omega$

ใช้หลักการของกาเลอร์คิน โดยให้ $\phi=\sum_{i=1}^{6}\phi_i\varphi_i$ และ $v_r^{n+\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{6}\phi_i v_{r_i}^{n+\frac{1}{2}}$ จะได้

$$\int_{\Omega}\phi v_r^{n+\frac{1}{2}}d\Omega=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_i\left(\int_{\Omega}\phi_i\phi_j d\Omega\right)v_{r_j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{ค.2}$$

ทำในทำนองเดียวกัน สำหรับนิพจน์ที่สองทางซ้ายของสมการ (ค.1) จะได้

$$\int_{\Omega}\phi v_r^{n}d\Omega=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_i\left(\int_{\Omega}\phi_i\phi_j d\Omega\right)v_{r_j}^{n} \tag{ค.3}$$

สำหรับนิพจน์แรกทางขวาของสมการ (ค.1) ก็ทำในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\int_{\Omega}\phi(\nabla\cdot\bar{\tau})_r\,d\Omega=\int_{\Omega}\phi\left[\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\right]d\Omega \tag{ค.4}$$

ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) ร่วมพิจารณา จะได้

$$\int_{\Omega}\phi\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}d\Omega=-\int_{\Omega}\tau_{rr}\frac{\partial\phi}{\partial r}d\Omega+\int_{\Gamma}\phi\tau_{rr}\cdot n_r d\Gamma \tag{ค.5}$$

และ
$$\int_{\Omega}\phi\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}d\Omega=-\int_{\Omega}\tau_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z}d\Omega+\int_{\Gamma}\phi\tau_{rz}\cdot n_r d\Gamma \tag{ค.6}$$

แทนสมการ (ค.5) และ (ค.6) ลงในสมการ (ค.4) จะได้

$$\int_{\Omega}\phi(\nabla\cdot\bar{\tau})_r\,d\Omega=-\int_{\Omega}\tau_{rr}\frac{\partial\phi}{\partial r}d\Omega+\int_{\Omega}\phi\left[\frac{1}{r}(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})\right]d\Omega-\int_{\Omega}\tau_{rr}\frac{\partial\phi}{\partial r}d\Omega$$
$$+\text{boundary terms}_1$$

เมื่อ $\text{boundary terms}_1=\int_{\Gamma}\phi\tau_{rr}\cdot n_r d\Gamma+\int_{\Gamma}\phi\tau_{rz}\cdot n_r d\Gamma$

แทนค่า $\tau_k=\sum_{i=1}^{6}\phi_i\tau_{k_i}$ เมื่อ $k=rr,rz,zz,\theta\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\phi(\nabla\cdot\bar{\tau})_r\,d\Omega=&-\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial r}d\Omega\right)\tau_{rr_i}+\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_{\Omega}\phi_i\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}d\Omega\right)\tau_{rr_i}\\&-\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_{\Omega}\phi_i\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_j}{\partial r}d\Omega\right)\tau_{\theta\theta_i}-\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial z}d\Omega\right)\tau_{rz_i}\end{aligned} \tag{ค.7}$$

ได้นิพจน์ที่สองทางขวาของสมการ (ค.1) เป็น

$$\int_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r d\Omega = \int_\Omega \phi\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r}\right)\right] d\Omega \qquad (ค.8)$$

ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) ประกอบ จะได้

$$\int_\Omega \phi\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{r}\phi\frac{\partial v_r}{\partial r} d\Omega + \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma \qquad (ค.9)$$

$$\int_\Omega \phi\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega + \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma \qquad (ค.10)$$

และ $$\int_\Omega \phi\frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r} d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega + \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_z}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma \qquad (ค.11)$$

แทนค่าสมการ (ค.9), (ค.10) และ (ค.11) ลงในสมการ (ค.8) จะได้

$$\int_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} d\Omega - \int_\Omega \phi\frac{v_r}{r^2} d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega + \text{boundary terms}_2$$

โดย boundary $\text{terms}_2 = \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma + \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma + \int_\Gamma \phi\frac{\partial v_z}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma$

แทนค่า $v_l = \sum_{i=1}^{6}\phi_i v_{l_i}$ เมื่อ $l = r, z$ จะได้

$$\int_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_i\left[\int_\Omega\left(-\frac{\partial \phi_j}{\partial r}\frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\phi_j\phi_i - \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_j}{\partial z}\frac{\partial \phi_i}{\partial z}\right)d\Omega\right]v_{r_j}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_i\left(\int_\Omega \frac{\partial \phi_j}{\partial r}\frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega\right)v_{z_j} + \text{boundary terms}_2 \qquad (ค.12)$$

พิจารณานิพจน์ที่สามทางขวาของสมการ (ค.1) จะได้

$$\int_\Omega \phi\left(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)_r d\Omega = \int_\Omega \phi\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)d\Omega$$

ใช้หลักการของกาเลอร์คิน จะได้

$$\int_\Omega \phi\left(\vec{U}\cdot\nabla\vec{U}\right)_r d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\varphi_i\left[\left(\int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial \phi_k}{\partial r} d\Omega\right)v_{r_j} + \left(\int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial \phi_k}{\partial z} d\Omega\right)v_{z_j}\right]v_{r_k} \qquad (ค.13)$$

สำหรับนิพจน์ที่สี่ทางขวาของสมการ (ค.1) ให้กระจายความดัน p ด้วยฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น $p=\sum_{j=1}^{3}\psi_j p_j$ จะได้

$$\int_{\Omega}\phi(\nabla p)_r d\Omega=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}\varphi_i\left(\int_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial r}d\Omega\right)p_j \qquad (ค.14)$$

จากสมการ (ค.2), (ค.3), (ค.4), (ค.7), (ค.12), (ค.13) และ (ค.14) แทนในสมการที่ (ค.1) จะทำให้สามารถคำนวณหา $v_r^{n+\frac{1}{2}}$ เป็นตัวอย่างขั้นตอนการใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนจะสรุปสมการ (2.31) – (2.36) ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1A

$$\left[\frac{2Re}{\Delta t}M+\frac{\mu_N}{2}S\right]\left(U^{n+\frac{1}{2}}-U^n\right)=\left\{-\left[\mu_N S+ReN(U)\right]U-BT\right\}^n+L^T P^n$$

$$\frac{2We}{\Delta t}M\left(T^{n+1}-T^n\right)=\left[2\mu_v M\left(L+L^{\dagger}\right)-\left\{M+WeN(U)\right\}T+We\left\{N_1(T)L+N_1(T)L^{\dagger}\right\}\right]^n$$

ขั้นตอนที่ 1B

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(M+\frac{\mu_N}{2}S\right)\left(U^*-U^n\right)=\left\{-\left[\mu_N S+ReN(U)\right]U-BT\right\}^{n+\frac{1}{2}}+L^T P^n$$

$$\frac{We}{\Delta t}M\left(T^{n+1}-T^n\right)=\left[2\mu_v M\left(L+L^{\dagger}\right)-\left\{M+WeN(U)\right\}T+We\left\{N_1(T)L+N_1(T)L^{\dagger}\right\}\right]^{n+\frac{1}{2}}$$

ขั้นตอนที่ 2

$$\frac{\Delta t}{2Re}K\left(P^{n+1}-P^n\right)=-LU^*$$

ขั้นตอนที่ 3

$$\frac{2Re}{\Delta t}M\left(U^{n+1}-U^*\right)=L^T\left(P^{n+1}-P^n\right)$$

โดยกำหนดให้

$$U=(u_r,u_z) \qquad (v_r,v_z)^n=\left(v_{r_i},v_{z_i}\right)^n\phi_i$$

$$T=\left(\tau_{rr},\tau_{rz},\tau_{zz},\tau_{\theta\theta}\right) \qquad \left(\tau_{rr},\tau_{rz},\tau_{zz},\tau_{\theta\theta}\right)^n=\left(\tau_{rr_i},\tau_{rz_i},\tau_{zz_i},\tau_{\theta\theta_i}\right)^n\phi_i$$

$$p^n=(P_k)^n\psi_k$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\dagger} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$(S_{11})_{ij} = \int_{\Omega} \left(2\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} + \frac{\phi_i \phi_j}{r^2} \right) d\Omega$$

$$(S_{12})_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} d\Omega$$

$$(S_{22})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} + 2\frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

$$N(U)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_k U_k \nabla \phi_j d\Omega$$

$$\left(N_1(T)\right)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_k T_k \phi_j d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 - B_3 & B_2 & 0 & B_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_1)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} d\Omega$$

$$(B_2)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} d\Omega$$

$$(B_3)_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\phi_i \phi_j}{r} d\Omega$$

$$K_{mn} = \int_{\Omega} \nabla \psi_m \nabla \psi_n d\Omega$$

$$L = (L_1, L_2) \qquad (L_m)_{in} = \int_{\Omega} \psi_n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_m} d\Omega$$

เมื่อ

$$d\Omega = r dr dz \quad i, j, k = 1,2,3, \quad m, n = 1,2, \quad x_1 = r, x_2 = z$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายก่อกิจ ธีราโมกข์ เกิดวันที่ 29 เมษายน พ.ศ. 2524 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2546 หลังจากนั้นได้ศึกษาต่อในหลักสูตรประกาศนียบัตรบัณฑิต (ป.บัณฑิต) สาขาวิชาชีพครู คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา 2547 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2548