บทที่ 2

พัฒนาการของสมการสมดุลย์กับการสร้าง
กลไกวิบัติแบบอิสระโดยอัตโนมัติ

2.1 ข้อสมมุติ

ข้อสมมุติทั่วไปเหมือนทฤษฎีพลาสติกอย่างง่าย แต่จะเน้นที่สำคัญดังนี้

1. คำนึงถึงเฉพาะการเปลี่ยนรูปร่างอันดับที่หนึ่ง กล่าวคือสามารถกำหนดสภาวะสมดุลย์ได้จากรูปร่างของโครงสร้างเดิมซึ่งยังไม่ได้เปลี่ยนไป

2. ข้อต่อต่าง ๆ ในโครงสร้างมีความแข็งแรงพอที่จะยอมให้การกระจายใหม่ของแรงดัด (Redistribution of Moment) เกิดขึ้นได้อย่างสมบูรณ์

2.2 สมการสมดุลย์ทั่วไป

ในขณะที่โครงสร้างเกิดกลไกวิบัติ ทุกชิ้นส่วนในโครงสร้างจะเกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body) ยกเว้นตำแหน่งที่เกิดจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) หรือชิ้นส่วนที่เกิดกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน (Axial Collapse) ดังนั้นจึงต้องหาสมการซึ่งบังคับให้เกิดการเคลื่อนที่แบบนี้ได้ (9)

ก. การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate System)

พฤติกรรมของโครงข้อแข็งระนาบสามารถอธิบายได้ด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบพิกัดเฉพาะที่ซึ่งผ่านแนวแกนของชิ้นส่วน 6 ตัว คือ การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในแนวสองแกน (แกน X, Y) และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนรอบแนวตั้งฉากกับระนาบ (แกน Z) ดังแสดงในรูปที่ 2.1 จาก

การเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด = การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง + การเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแข็งเกร็ง

พิจารณารูปที่ 2.1 จะมีการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแข็งเกร็งที่อิสระ 3 แบบ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้น 2 แบบ และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุน 1 แบบ ตัวอย่างในชิ้นส่วนคือ การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในทิศทางแนวแกนของชิ้นส่วนและตั้งฉากกับแนวแกนของชิ้นส่วน และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนรอบแกน z การเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแข็งเกร็งแบบอื่น ๆ ของชิ้นส่วนสามารถหาได้จากการรวมกันเชิงเส้นของ 3 แบบนี้

เลือกการเปลี่ยนรูปร่างอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ก. คือการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้น (การเปลี่ยนรูปร่างจากแรงในแนวแกน) การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนเทียบกับคอร์ดที่ปลาย i และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนเทียบกับคอร์ดที่ปลาย j พิจารณารูปที่ 2.2 ข. สามารถเขียนการเปลี่ยนรูปร่าง (อิสระ) ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะที่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \\ \bar{v}_6 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

หรือเขียนในรูปสัญญลักษณ์ได้

$$v_p = \bar{a}_p \bar{v}_p \tag{2.2}$$

โดยที่ v_p = เวกเตอร์การเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วน p ในระบบพิกัดเฉพาะที่

$\bar{v}_p$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วน p ในระบบพิกัดเฉพาะที่

$\bar{a}_p$ = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งเป็นเวกเตอร์การเปลี่ยน

รูปร่างของชิ้นส่วน p ในระบบพิกัดเฉพาะที่

รวมสมการที่ (2.2) สำหรับทุกชิ้นส่วนในโครงสร้างได้

$$v = \bar{a}\bar{v} \qquad (2.3)$$

ข. <u>การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบพิกัดในวงกว้าง</u>

(Global Coordinate System)

เนื่องจากระบบพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนแต่ละอันหันในทิศทางต่าง ๆ กัน จึงจำเป็นต้องนิยามการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนในระบบแกนร่วมกัน ในที่นี้ใช้ระบบพิกัดในวงกว้าง พิจารณารูปที่ 2.3 ก. 2.3 ข. แสดงระบบพิกัดเฉพาะที่และระบบพิกัดในวงกว้างโดยที่ θ เป็นมุมวัดจากระบบพิกัดในวงกว้างไปยังระบบพิกัดเฉพาะที่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแกนทั้งสองได้โดยใช้หลักการแปลงแกน โดยใช้โคซายน์แสดงทิศทาง ได้ดังนี้

	x	y
x	l_1	m_1
y	l_2	m_2

โดยที่ l_1 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน xx = $\cos\theta$

m_1 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน yx = $\cos(90-\theta) = \sin\theta$

l_2 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน xy = $\cos(90+\theta) = -\sin\theta$

m_2 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน yy = $\cos\theta$

ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$\bar{v}_p = \begin{bmatrix} \bar{v}_p^i \\ \bar{v}_p^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{v}}_p^i \\ \bar{\bar{v}}_p^j \end{bmatrix} = Q_p\bar{\bar{v}}_p \qquad (2.4)$$

โดยที่

$$\lambda_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

$\bar{\bar{v}}_p$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วน p ในระบบพิกัดในวงกว้าง

Q_p = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วน p ในระบบพิกัดในวงกว้างเป็นระบบพิกัดเฉพาะที่

รวมสมการที่ (2.4) สำหรับทุกชิ้นส่วนในโครงสร้างได้

$$\bar{v} = Q\bar{\bar{v}} \qquad (2.6)$$

ค. <u>ระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่</u> (Displacement Degree of Freedom)

ชิ้นส่วนที่ประกอบกันเป็นโครงสร้างเมื่อเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งต้องเข้ากันได้ กับของชิ้นส่วนอื่นที่มีประกอบกันที่จุดต่อนั้น และต้องเข้ากันได้กับเงื่อนไขที่ขอบ ดังนั้นจึงต้องเขียนความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบพิกัดในวงกว้าง กับระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่ซึ่งจะมี 3 ตัวต่อหนึ่งข้อต่อ (ยกเว้นข้อต่อซึ่งถูกบังคับ) ซึ่งจะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\bar{\bar{v}} = \bar{\bar{a}}r \qquad (2.7)$$

โดยที่ r = เวกเตอร์ระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่

$\bar{\bar{a}}$ = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์ระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่ของโครงสร้างเป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของทุกชิ้นส่วนในระบบพิกัดในวงกว้าง

เมตริกซ์ a อาจเรียกว่าเมตริกซ์ความเข้ากันได้ (Compatibility Matrix)

จากสมการที่ (2.3), (2.6) และ (2.7) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง

การเปลี่ยนรูปร่างกับระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$v = \bar{a}\bar{v} = \bar{a}Q\bar{\bar{v}} = \bar{a}Q\bar{\bar{a}}r \qquad (2.8)$$

หรือ $$v = ar \qquad (2.9)$$

$$a = \bar{a}Q\bar{\bar{a}} \qquad (2.10)$$

= เมตริกซ์แปลงการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Transformation Matrix)

ขนาดของเมตริกซ์ a เท่ากับ (3m x n) โดยที่ m คือจำนวนชิ้นส่วนและ n คือ ระดับขั้นความเสรีในการเคลื่อนที่

ในเวลาคำนวนเราไม่จำเป็นต้องเขียนสมการที่ (2.3), (2.6) และ (2.7) ของทั้งโครงสร้างโดยชัดแจ้ง เพื่อจะหาเมตริกซ์ a เนื่องจากสามารถทำในระดับชิ้นส่วน แล้วไปประกอบในระดับโครงสร้างได้ โดยทำได้ดังนี้ จากสมการที่ (2.8) $v = \bar{a}Q\bar{\bar{v}}$

$$\bar{a}Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 1 & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0 & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{\bar{v}}_1 \\ \bar{\bar{v}}_2 \\ \bar{\bar{v}}_3 \\ \hline \bar{\bar{v}}_4 \\ \bar{\bar{v}}_5 \\ \bar{\bar{v}}_6 \end{array}\right] \quad (2.11)$$

สมการที่ (2.11) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์การเปลี่ยนรูปร่างในระบบพิกัดเฉพาะที่ (v_p) กับเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบพิกัดในวงกว้าง ($\bar{\bar{v}}_p$) ซึ่งอาจเรียกว่า สมการความเข้ากันได้หรือสมการการเคลื่อนที่ (Compatibility or Kinematic Equations) ของชิ้นส่วนสำหรับโครงข้อแข็งในระนาบ (21) ส่วนเมตริกซ์ ลิ พิจารณาจากสภาวะความต่อเนื่อง ของการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วนแต่ละอันกับข้อต่อ โดยพิจารณาที่ละข้อต่อว่ามีชิ้นส่วนอันไหนบ้างมาต่อที่ข้อต่อนั้น แทนการเขียนเมตริกซ์ ลิ โดยชัดแจ้ง

2.3 <u>หลักการปลดในชิ้นส่วน</u> (Releases in the Member)

การหากลไกวิบัติทำได้โดยให้การเปลี่ยนรูปร่าง (v) ในสมการที่ (2.9) เท่ากันศูนย์ นั้นคือ

$$ar = o \quad (2.12)$$

แต่สมการที่ (2.12) เราไม่สามารถหาคำตอบได้เว้นเสียแต่โครงสร้างเกิดกลไกวิบัติแล้วเท่านั้น และถ้าพิจารณาในแง่พีชคณิตเชิงเส้นสมการที่ (12) ก็ไม่สามารถหาคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์หมดได้เช่นกัน เพราะมีจำนวนสมการ (3m) มากกว่าจำนวนตัวไม่ทราบค่า (n)

2.3.1 <u>รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน</u>

เนื่องจากกลไกวิบัติจะเกิดขึ้นไม่ได้ ถ้าไม่เกิดจุดหมุนพลาสติก หรือการวิบัติ

โดยแรงในแนวแกน ดังนั้นจึงใส่จุดหมุนที่แต่ละปลายของทุกชิ้นส่วนในโครงสร้าง และตัดขาดชิ้นส่วนออกจากกัน (ในกรณีเฉพาะการวิบัติโดยแรงในแนวแกน) (9) ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ซึ่งเป็นการปลดการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วนด้วย) ดังนั้นชิ้นส่วนย่อยในโครงสร้างจะเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งและหมุนรอบจุดหมุนของแต่ละปลาย และยืดหรือหดตามแนวแกนชิ้นส่วนเมื่อกลไกวิบัติถูกค้นพบ

ในการทำให้ชิ้นส่วนเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งเป็นระบอบนั้น แต่ละชิ้นส่วนย่อยจะถูกปลด 3 ตัว คือใส่จุดหมุนแต่ละปลายของชิ้นส่วนและตัดขาดชิ้นส่วน (ในทิศทางแรงในแนวแกน) ข้างปลายด้านไกล (ปลาย j) ออกจากข้อต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4 ค พึงสังเกตุว่าการปลดจะเท่ากับการเพิ่มระดับขั้นความเสรีพิเศษของชิ้นส่วนด้วย

รวมสมการที่ (2.6) และ (2.7) เข้าด้วยกันจะได้

$$\bar{v} = Q\bar{\bar{v}} = Q\bar{\bar{\bar{a}}}r = Gr \qquad (2.13)$$

โดยที่

$$G = Q\bar{\bar{\bar{a}}} \qquad (2.14)$$

การปลดจะทำในระบบพิกัดเฉพาะที่ดังนี้ ให้แถวของเมตริกซ์ G ของแต่ละชิ้นส่วนซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่ง $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$ และ $\bar{v}_6$ (ดูรูปที่ 2.1) ถูกแทนที่ด้วยศูนย์ซึ่งเท่ากับปลดให้สอดคล้องกับระดับขั้นความเสรี และเพิ่มแนวตั้งของเมตริกซ์ G โดยใส่หนึ่งตรงแถวซึ่งถูกแทนที่ด้วยศูนย์ ดังนั้นเมตริกซ์ r จะขยายเพิ่มขึ้นด้วยตามแนวตั้งที่เพิ่มให้กับเมตริกซ์ G ซึ่งเท่ากับเป็นการบังคับระดับขั้นความเสรีในการปลดชิ้นส่วน ให้ไปรวมกับระดับขั้นความเสรีภายนอก (9)

ตัวอย่างเมื่อมีการปลดในชิ้นส่วนโดยรวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกนด้วย เมื่อทำตามหลักการที่กล่าวมา สมการที่ (2.11) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0^* & 0^* & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0^* & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0 & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 0^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{\bar{v}}_1 \\ \bar{\bar{v}}_2 \\ \bar{\bar{v}}_3 \\ \hdashline \bar{\bar{v}}_4 \\ \bar{\bar{v}}_5 \\ \bar{\bar{v}}_6 \end{array}\right] \qquad (2.15)$$

โดยเครื่องหมาย * หมายถึง ตัวที่เปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับสมการที่ (2.11) และจะได้ระดับขั้นความเสรีพิเศษที่เพิ่มขึ้นสัมพันธ์กับการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วนดังนี้

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

ให้เมตริกซ์ G ที่ดัดแปลงและขยายเพิ่มเป็น G_1 และเมตริกซ์ r ที่ขยายเพิ่มขึ้นเป็น r_e แทนค่าเมตริกซ์ G_1 และ r_e ในสมการที่ (2.9) จะได้

$$v = \bar{a}G_1 r_e = a_1 r_e \qquad (2.17)$$

โดยที่เมตริกซ์ r_e คือ ระดับขั้นความเสรีภายนอกบวกด้วยจำนวนการปลดในชิ้นส่วน (สามเท่าของชิ้นส่วน)

จากสมการที่ (2.17) ขณะนี้สามารถให้ v เท่ากับศูนย์และหาคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์หมดของ r_e ได้ นั้นคือ

$$a_1 r_e = 0 \qquad (2.18)$$

โดยที่ขนาดของเมตริกซ์ a_1 คือ (3m) x (n + 3m) พึงสังเกตุว่ามีจำนวนตัวไม่ทราบค่า

(n + 3m) มากกว่าจำนวนสมการ (3m)

2.3.2 ไม่รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน

ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงเหล็กข้อแข็งในระนาบโดยวิธีพลาสติกส่วนใหญ่จะไม่คิดกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน ดังนั้นจึงกำจัดระดับขั้นความเสรีพิเศษซึ่งสอดคล้องกับกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน (9) หลักการจะเหมือนข้างต้นทุกประการ ยกเว้นเพียงการปลดในชิ้นส่วน โดยปลดเฉพาะการหมุนที่ปลายของชิ้นส่วนซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่ง v_3 และ v_6 เท่านั้น (ดูรูปที่ 2.1) ดังนั้นเมตริกซ์ a_1 จะเปลี่ยนไปและลดขนาดเป็น (3m) x (n + 2m) และสมการที่ (2.15) และ (2.16) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0^* & (-\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0 & (-\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{\bar{v}}_1 \\ \bar{\bar{v}}_2 \\ \bar{\bar{v}}_3 \\ \hdashline \bar{\bar{v}}_4 \\ \bar{\bar{v}}_5 \\ \bar{\bar{v}}_6 \end{array}\right] \qquad (2.19)$$

และ

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

ในการศึกษานี้จะไม่คำนึงถึงกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน

2.4 การหาผลเฉลยของสมการ

จากสมการที่ (2.18) เมตริกซ์สดมภ์ r_e มีชื่อว่า เคอเนล (Kernel) ของเมตริกซ์ a_1 โดยที่เมตริกซ์สดมภ์ r_e สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฐานอิสระได้ หรือคำตอบของ r_e สามารถหาได้จากการรวมกันเชิงเส้นของฐานอิสระ หลักการหาฐานอิสระ (รายละเอียดได้แสดง

ในภาคผนวก ก) ทำได้โดยการกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน จน a_1 อยู่ในแบบมาตรฐาน เว้นเสีย แต่เป็นการกระทำตามแนวตั้ง แทนการกระทำตามแถว โดยจำนวนฐานอิสระจะเท่ากับจำนวนกลไกวิบัติแบบอิสระ ซึ่งเท่ากับผลต่างของจำนวนตัวไม่ทราบค่าและจำนวนสมการ ซึ่งเท่ากับ (n + 2m) - (3m) = n - m (กรณีไม่รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน) และสามารถเขียนได้ว่า

$$r_e = E_1 r_x \tag{2.21}$$

โดยที่ E_1 คือเมตริกซ์ฐานอิสระหรือคือเมตริกซ์การเกิดกลไกลวิบัติ มีขนาด (n + 2m) x (n - m) โดยที่แต่ละแนวตั้งแทนการเกิดกลไกวิบัติแบบอิสระ และ r_x คือเมตริกซ์สดมภ์ของขนาดการเปลี่ยนรูปร่างกลไกวิบัติ (Column Matrix of Mechanism Deformation Amplitudes) จากสมการที่ (2.18) และ (2.21) สามารถเขียนได้ว่า

$$a_1 E_1 = 0 \tag{2.22}$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า ไม่มีชิ้นส่วนใด ๆ ในโครงสร้างซึ่งมีการปลดมีการเปลี่ยนรูปร่างจากกลไกวิบัติแบบอิสระ (9)

เนื่องจากระดับขั้นความเสรีภายนอก (r) เป็นเซตย่อยของระดับขั้นความเสรีซึ่งขยายออก (r_e) ดังนั้นแถวของ E_1 ซึ่งสอดคล้องกันสามารถตัดตอนมาเฉพาะระดับขั้นความเสรีภายนอกในการอธิบายกลไกวิบัติ ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$r = E r_x \tag{2.23}$$

ซึ่งกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดในวงกว้าง สามารถจะหาได้จากการรวมกันเชิงเส้นของเวกเตอร์อิสระซึ่งสัมประสิทธิ์สอดคล้องกับ r_x (2, 8)

2.5 การคำนวนงานภายนอกและงานภายใน

หลักการของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมุติ กล่าวว่า โครงสร้างอยู่ในสถานะสมดุลย์ภายใต้แรงกระทำที่กำหนด ถ้าในการขยับให้โครงสร้างเคลื่อนที่ด้วยระยะสมมุติใด ๆ dU ออกไปจากสถานะการเปลี่ยนรูปร่าง ซึ่งสอดคล้องทางเรขาคณิตแล้ว งาน (สมมุติ) ภายนอกเท่ากับงาน (สมมุติ) ภายใน (พลังงานความเครียดสมมุติ) ทฤษฎีของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมุติให้เงื่อนไขของการสมดุลย์ของโครงสร้างโดยไม่ขึ้นกับชนิดของวัสดุ (11)

2.5.1 งานภายนอก

งานกระทำโดยแรงภายนอกระหว่างเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งของกลไกวิบัติแบบอิสระ สามารถหาได้ดังนี้

$$\text{งานภายนอก} = p^t r = P^t E r_x \qquad (2.24)$$

โดยที่ P เท่ากับเมตริกซ์สดมภ์ของแรงภายนอก ซึ่งสอดคล้องกับระดับขั้นความเสรีภายนอก

2.5.2 งานภายใน

ก่อนจะหางานกระทำโดยแรงภายใน จะต้องกำหนดให้มีการเปลี่ยนรูปร่างของแต่ละชิ้นส่วนในโครงสร้างซึ่งไม่มีการปลด จากการรวมกันเชิงเส้นของกลไกวิบัติแบบอิสระในสมการที่ (2.9) และ (2.23) สามารถเขียนได้ว่า

$$v = ar = aEr_x = C^t r_x \qquad (2.25)$$

โดยที่ $C^t = aE$ คือ เมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระ โดยที่แต่ละแนวตั้งคือกลไกวิบัติแบบอิสระ 1 กลไก สมการที่ 2.25 สามารถอธิบายเมตริกซ์การเปลี่ยนรูปร่าง (v) ในระบบพิกัดในวงกว้างได้ว่า เกิดจากผลคูณของเมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระ (C^t) และเมตริกซ์สดมภ์ของขนาดการ

เปลี่ยนรูปร่างกลไกวิบัติ (r_x) (2, 8)

อนึ่ง เนื่องจากการศึกษานี้ไม่คำนึงถึงกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน ดังนั้น เมตริกซ์การเปลี่ยนรูปร่าง (v) ในสมการที่ (2.25) จะมีเฉพาะการหมุนที่ปลายแต่ละข้างของชิ้นส่วน และเมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระ (C^t) จะมีเฉพาะจุดหมุนพลาสติกที่ปลายแต่ละข้างของชิ้นส่วน

ให้ M เท่ากับ เมตริกซ์สดมภ์ของแรงดัดภายใน ที่ปลายแต่ละข้างของชิ้นส่วน สามารถหางานภายในได้ดังนี้

$$\text{งานภายใน} = M^t v = M^t aEr_x \tag{2.26}$$

จากหลักการของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมุติเราจะได้

$$\text{งานภายนอก} = \text{งานภายใน}$$

$$P^t Er_x = M^t aEr_x$$

หรือ $$P^t E = M^t aE \tag{2.27}$$

ให้ $P_e^t = P^t E$ และจาก $C^t = aE$

จะได้สมการที่ (2.27) เป็น

$$P_e^t = M^t C^t$$

หรือ $$P_e = CM \tag{2.28}$$

สมการที่ (2.27) และ (2.28) คือ สมการของการสมดุลย์ โดยที่ P_e^t คือ เมตริกซ์งานภายนอก $= P^t E$, C^t คือเมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระหรือคือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการสมดุลย์ โดยที่แต่ละชิ้นส่วนขึ้นกับรูปร่างของโครงสร้างเดิม แต่ละแนวตั้งของ C^t

(แต่ละแถวของ C) แทนสัมประสิทธิ์ของสมการสมดุลย์ซึ่งสอดคล้องกับกลไกวิบัติแบบอิสระ 1 กลไก