

## บทที่ 2

### แนวคิดและทฤษฎี

#### 2.1 อันตรกิริยานิวตรอน<sup>[7]</sup>

นิวตรอนเป็นอนุภาคไม่มีประจุ เนื่องจากการที่ภายในแกนปฏิกรณ์มีนิวตรอนเกิดขึ้นเป็นจำนวนมาก เมื่อนิวตรอนเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางซึ่งเป็นเชื้อเพลิงและส่วนประกอบต่าง ๆ นอกจากนิวตรอนจะเข้าทำอันตรกิริยาการแตกตัวกับนิวเคลียสของเชื้อเพลิงแล้ว นิวตรอนยังสามารถเกิดอันตรกิริยาอื่น ๆ กับนิวเคลียสของเชื้อเพลิงและส่วนประกอบภายในแกนปฏิกรณ์ได้ ดังแสดงในรูป 2.1

##### 2.1.1 การกระเจิงแบบยืดหยุ่น

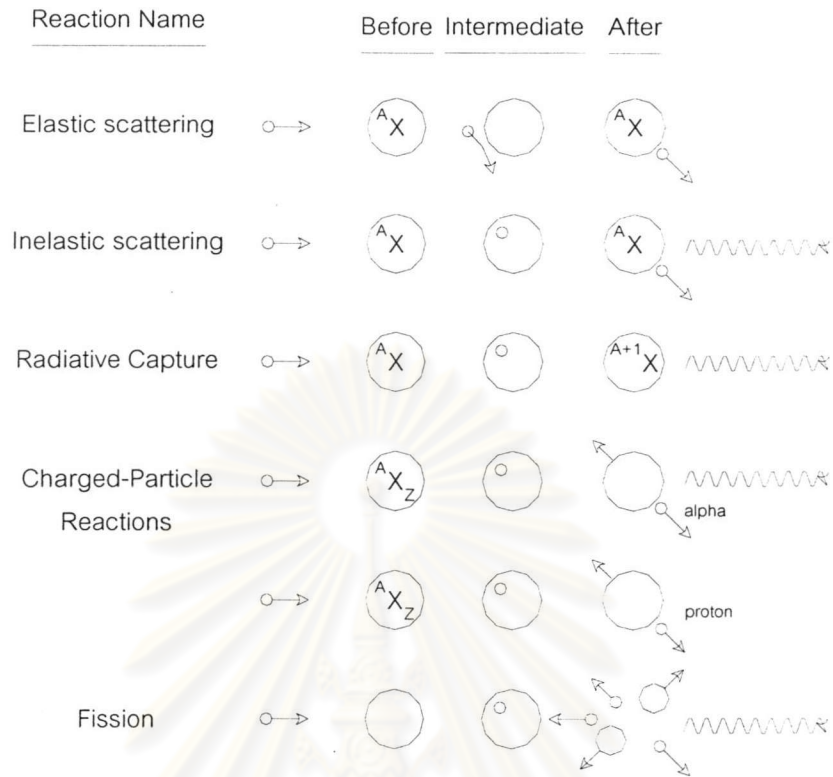
อันตรกิริยาระหว่างนิวตรอนและนิวเคลียสในลักษณะนี้ เป็นเพียงการแลกเปลี่ยนโมเมนตัมเท่านั้น นิวเคลียสที่เกิดอันตรกิริยายังคงอยู่ในสถานะพื้นฐาน (ground state) ส่วนนิวตรอนและนิวเคลียสก่อนและหลังอันตรกิริยาจะมีผลรวมพลังงานเท่ากัน

##### 2.1.2 การกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น

อันตรกิริยาของนิวตรอนกับนิวเคลียสของอะตอมตัวกลางลักษณะนี้ มีผลให้นิวตรอนรวมเข้ากับนิวเคลียสที่ถูกชนเกิดเป็นนิวเคลียสประกอบ (compound nucleus) ก่อนจะปลดปล่อยนิวตรอนกลับออกมา นิวเคลียสหลังการเกิดอันตรกิริยาจะอยู่ในสถานะถูกกระตุ้น (excited state) ซึ่งจะปลดปล่อยรังสีแกมมาออกมาเพื่อลดระดับพลังงานลงสู่สถานะปกติ อันตรกิริยาลักษณะนี้พลังงานจลน์รวมของนิวเคลียสก่อนและหลังอันตรกิริยาจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยที่พลังงานจลน์รวมหลังการเกิดอันตรกิริยามีค่าลดลงเนื่องจากสูญเสียพลังงานจลน์ส่วนหนึ่งไปในรูปการปลดปล่อยรังสีแกมมา

##### 2.1.3 อันตรกิริยาจับนิวตรอน (radiative capture)

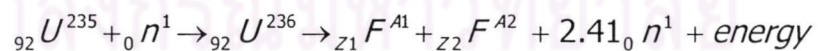
อันตรกิริยาจับนิวตรอน (radiative capture interaction) หรือปฏิกิริยาการดูดกลืนนิวตรอน (neutron absorption reaction) เป็นอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นเมื่อนิวตรอนชนนิวเคลียสแล้วถูกนิวเคลียสจับไว้ กระบวนการดังกล่าวมีผลให้เลขมวลของนิวเคลียสมีค่าเพิ่มขึ้นจาก  $A$  เป็น  $A + 1$  โดยที่นิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้นจะอยู่ในสถานะที่ถูก กระตุ้น ซึ่งจะลดระดับพลังงานลงสู่สถานะปกติ โดยการปลดปล่อยรังสีแกมมา



รูปที่ 2.1 อันตรกิริยานิวตรอนลักษณะต่างๆ

#### 2.1.4 อันตรกิริยาการแตกตัว

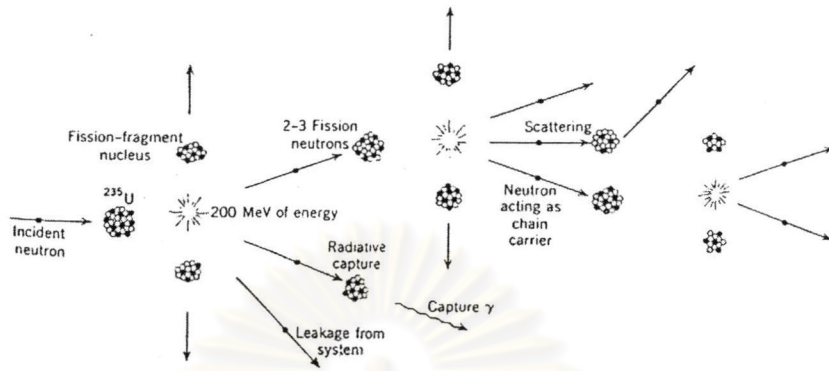
อันตรกิริยาการแตกตัว (fission reaction) เกิดขึ้นเมื่อนิวตรอนรวมตัวกับนิวเคลียสของธาตุหนักบางชนิดเกิดเป็นนิวเคลียสประกอบ ซึ่งเป็นไอโซโทปของนิวเคลียสเดิม นิวเคลียสประกอบที่เกิดขึ้นมีค่าพลังงานยึดเหนี่ยวต่ำ ทำให้ไม่มีเสถียรภาพและเกิดการแตกตัวเป็นนิวเคลียสใหม่ที่มีเลขมวลประมาณครึ่งหนึ่งของนิวเคลียสเดิมและปล่อยพลังงานออกมาประมาณ 200 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ พร้อมกับมีการปลดปล่อยอนุภาคนิวตรอน 2-3 ตัวออกมา เช่น เมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียสของยูเรเนียม 235 อันตรกิริยาการแตกตัวหนึ่งที่เกิดขึ้นได้ คือ



${}_{Z_1}\text{F}^{A_1}$  และ  ${}_{Z_2}\text{F}^{A_2}$  เป็นไอโซโทปที่เกิดขึ้นเมื่อยูเรเนียมแตกตัว ผลผลิตที่เกิดขึ้นนี้จะเปลี่ยนแปลงจากค่า  $Z$  เท่ากับ 30 (Zinc) จนถึง 65 (Terbium) และค่า  $A$  จาก 70 ถึงประมาณ 160

นิวตรอนที่ได้จากปฏิกิริยาการแตกตัวนั้นสามารถถูกดูดกลืนโดยนิวเคลียสของธาตุหนักอันเป็นเชื้อเพลิงตัวอื่นก่อให้เกิดปฏิกิริยาการแตกตัวออกไปได้อีก เกิดเป็นปฏิกิริยาลูกโซ่

(chain reaction) ดังแสดงในรูป 2.2 ซึ่งปฏิกิริยาดังกล่าวนี้เป็นปฏิกิริยาให้พลังงานสำหรับเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ที่ใช้อยู่ในปัจจุบัน



รูปที่ 2.2 ปฏิกิริยาลูกโซ่<sup>[2]</sup>

### 2.1.5 อันตรกิริยาปลดปล่อยอนุภาคมีประจุ

อันตรกิริยานี้เกิดขึ้นเมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียสของธาตุบางชนิดเกิดเป็นนิวเคลียสประกอบ ภายหลังจากเกิดนิวเคลียสประกอบแล้วจะปล่อยอนุภาคที่มีประจุออกมา เช่น อนุภาคอัลฟา โปรตรอน ซึ่งจะทำให้เกิดธาตุใหม่ เช่น  ${}^1_0n + {}^{10}_5B \rightarrow {}^7_3Li + {}^4_2He$

### 2.1.6 อันตรกิริยาผลิตนิวตรอน

อันตรกิริยาแบบนี้เกิดกับนิวตรอนพลังงานสูง และเป็นอันตรกิริยาแบบลูกกลิ้ง พลังงานผลของปฏิกิริยาที่ได้ก็คือจะได้นิวตรอนออกมามากกว่า 1 ตัว เช่นปฏิกิริยา  $(n,2n)$  ปฏิกิริยา  $(n,3n)$  เช่น  ${}^{27}_{13}Al (n,2n) {}^{26}_{13}Al$

## 2.2 ผลกระทบของผลิตภัณฑ์จากอันตรกิริยานิวตรอน<sup>[1,2,7,8]</sup>

เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียส 2 กระบวนการคือ การดูดกลืน และการกระเจิง การดูดกลืนนิวตรอนอาจทำให้เกิดกระบวนการแตกตัว หรือกระบวนการจับนิวตรอน เกิดเป็นไอโซโทปกัมมันตรังสี (radioisotope) หรือการปลดปล่อยอนุภาคมีประจุออกมา สำหรับการดูดกลืนนิวตรอนเทอร์มัลในนิวไคลด์ฟิสไซล์ (fissile nuclide) อันได้แก่  ${}^{233}U, {}^{235}U, {}^{239}Pu$  และ  ${}^{241}Pu$  ส่วนใหญ่จะทำให้เกิดอันตรกิริยาการแตกตัว ขณะที่การดูดกลืนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในวัสดุควบคุม (control material) เช่น แคดเมียมและโบรอน และโดยผลผลิตจากปฏิกิริยาการแตกตัว (fission product) เช่น  ${}^{135}Xe$  และ  ${}^{149}Sm$  จะเป็นอันตรกิริยาดูดกลืนนิวตรอนอย่างเดี่ยว สำหรับกระบวนการกระเจิงนิวตรอนนั้นอาจมีอันตรกิริยากับนิวเคลียสได้ 2 ทางคือ การกระเจิงแบบยืดหยุ่น และการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น ในส่วนอันตรกิริยาการแตกตัวภายในเครื่อง

ปฏิกรณ์แบบเทอร์มัลนั้นจำเป็นต้องทำให้นิวตรอนลดความเร็ว (slow down neutron) ผู้ระดับพลังงานเทอร์มัลโดยการชนกับนิวเคลียสของวัสดุตัวกลาง ซึ่งประกอบด้วยนิวเคลียสของธาตุเบา เช่น น้ำธรรมดา (light water) และน้ำมวลหนัก (heavy water) เป็นต้น การกระเจิงกับนิวเคลียสเหล่านี้จะมีผลให้พลังงานของนิวตรอนลดลง (moderation) ในกรณีนี้เรียกนิวเคลียสเหล่านี้ว่า moderator

การที่นิวตรอนจะเกิดอันตรกิริยาในลักษณะใดกับนิวเคลียส สามารถพิจารณาได้จากค่าภาคตัดขวางของนิวตรอน ซึ่งบอกถึงความน่าจะเป็นที่นิวเคลียสจะเกิดอันตรกิริยาที่กำหนดกับนิวตรอนหนึ่ง ๆ ค่าภาคตัดขวางอาจแบ่งพิจารณาตามลักษณะการใช้งานดังนี้

- $\sigma$  (microscopic cross section) เป็นพื้นที่หน้าตัดต่อนิวเคลียสที่นิวตรอนสามารถเข้าทำอันตรกิริยา

ค่า  $\sigma$  มีหน่วยเป็นพื้นที่ ตารางเซนติเมตร หรือใช้ บาร์น (barn) =  $10^{-24} \text{ cm}^2$

- $\Sigma$  (macroscopic cross section) มีค่าเท่ากับ  $N\sigma$  ซึ่งมีหน่วยเป็น  $\text{cm}^{-1}$

$\Sigma$  คือความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจะทำปฏิกิริยากับนิวเคลียสต่อระยะทางที่นิวตรอนเคลื่อนที่

$N$  คือค่าความหนาแน่นของนิวเคลียสของตัวกลางซึ่งจะเกิดอันตรกิริยากับนิวตรอน ( $\text{nuclei} / \text{cm}^3$ )

ค่ารีแอกติวิตี ( $\rho$ ) ประมาณได้ว่าเป็นค่าสัดส่วนที่บอกถึงปริมาณของนิวตรอนที่ผลิตขึ้นที่นำไปสู่อันตรกิริยาการแตกตัวในลำดับต่อไป (นิวตรอนที่ผลิตขึ้นลบนิวตรอนที่สูญเสียไป) ต่อนิวตรอนที่ผลิตขึ้นทั้งหมด

$$\rho = \frac{v\bar{\Sigma}_f - \bar{\Sigma}_a}{v\bar{\Sigma}_f} \equiv \frac{k - 1}{k} \quad (2.1)$$

โดยที่  $\rho$  คือ ค่ารีแอกติวิตี

$v$  คือ จำนวนนิวตรอนที่ผลิตออกมาจากการแตกตัวหนึ่งครั้ง

$\bar{\Sigma}_f$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการแตกตัวเฉลี่ย

$\bar{\Sigma}_a$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืนเฉลี่ย

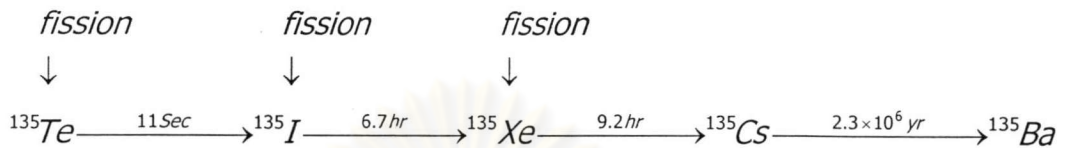
$k$  คือ ค่าวิกฤต

### 2.2.1 ผลกระทบจากอันตรกิริยากับนิวตรอนที่มีผลให้ค่ารีแอกติวิตีเป็นลบ

ผลกระทบที่เกิดขึ้นจากอันตรกิริยาการแตกตัว (ดูความสามารถในการแตกตัวได้จาก  $\sigma_f$  ค่าภาคตัดขวางในการแตกตัว) บางตัว มีความสำคัญมากเพราะค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนนิวตรอนของนิวเคลียสผลิตภัณฑ์มีขนาดใหญ่มาก ซึ่งจะสามารถแย่งดูดกลืนนิวตรอนทำให้เหลือ

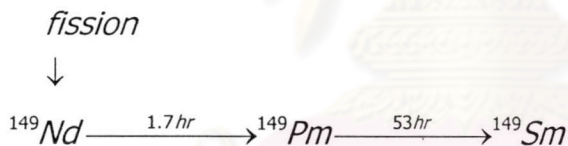
นิวตรอนที่อาจเกิดอันตรกิริยาการแตกตัวน้อยลง ดังจะยกตัวอย่างนิวเคลียสของผลิตภัณฑ์ที่สำคัญได้ดังต่อไปนี้

- Xenon-135 มีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนนิวตรอนช่วงเทอร์มัล  $2.65 \times 10^6$  บาร์น โดยขบวนการของการเกิดขึ้นของ  $^{135}\text{Xe}$  เป็นดังนี้



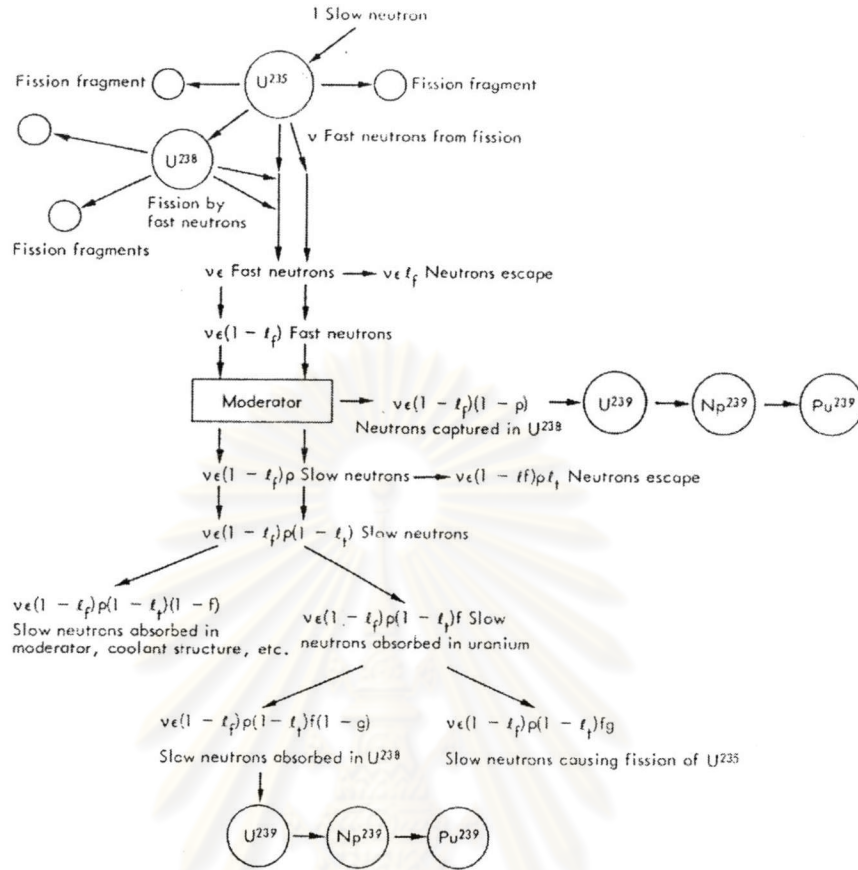
ความสำคัญของ  $^{135}\text{Xe}$  มิได้มีเพียงค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนที่ใหญ่มากเท่านั้น แต่ยังมีเนื่องจากการที่  $^{135}\text{Xe}$  ไม่ได้เพียงเกิดขึ้นจากการอันตรกิริยาการแตกตัวโดยตรง แต่ยังเกิดขึ้นได้เนื่องจากผลของสลายตัวแบบเบตาของ  $^{135}\text{I}$  และการที่  $^{135}\text{Xe}$  อาจสลายตัวได้เองอีก ลักษณะดังกล่าวนี้มีผลให้  $^{135}\text{Xe}$  สามารถส่งผลกระทบต่อคาร์ีแอกติวิตีได้ในหลายลักษณะและด้วยระดับที่แตกต่างกัน

- Samarium-149 มีค่าภาคตัดขวางในการดูดกลืนนิวตรอนช่วงเทอร์มัล  $4.10 \times 10^4$  บาร์น โดยขบวนการของการเกิดขึ้นของซามาเรียมเป็นดังนี้



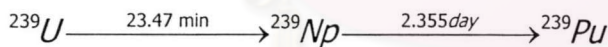
### 2.2.2 ผลิตภัณฑ์จากอันตรกิริยากับนิวตรอนที่มีผลให้คาร์ีแอกติวิตีเป็นบวก

ผลิตภัณฑ์ที่เกิดขึ้นจากอันตรกิริยาจับนิวตรอน (ดูความสามารถในการจับนิวตรอนได้จาก  $\sigma_c$  ค่าภาคตัดขวางในการจับนิวตรอน) บางตัวเมื่อมีการจับนิวตรอนแล้วจะสลายตัวเป็นนิวเคลียสที่มีค่าภาคตัดขวางการแตกตัวสูง ทำให้ได้นิวเคลียสซึ่งเป็นเสมือนเชื้อเพลิงเพิ่มขึ้น เช่น  $^{238}\text{U}$  จับนิวตรอนเกิดเป็น  $^{239}\text{U}$  ซึ่งจะสลายตัวโดยการปล่อยรังสีเบตาเกิดเป็น  $^{239}\text{Pu}$  ซึ่งเป็นฟิชไซล์ ดังแสดงในรูป 2.3



รูปที่ 2.3 วงจรนิวตรอนในปฏิกิริยาลูกโซ่ของการแตกตัวของยูเรเนียมโดยเทอร์มัลนิวตรอน<sup>[8]</sup>

การสลายตัวของ <sup>239</sup>U เป็น <sup>239</sup>Pu แสดงได้ดังนี้



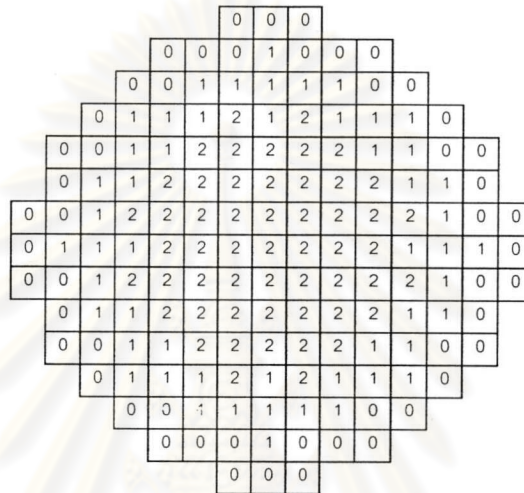
โดยที่ <sup>239</sup>Pu มีค่าภาคตัดขวางในการแตกตัว 750 บาร์น

### 2.3 การบรรจุเชื้อเพลิง<sup>[11]</sup>

การบรรจุเชื้อเพลิง (fuel loading) นั้นจะมีการแบ่งเชื้อเพลิงเป็นกลุ่ม ซึ่งภายในกลุ่มเดียวกันจะถูกปฏิบัติเหมือนกันคือจะมีการเปลี่ยนที่หรือนำออกจากแกนปฏิกรณ์ในเวลาเดียวกันจะเรียกกลุ่มนี้ว่า แบตช์ (batch) ลักษณะการบรรจุนี้อาจแบ่งคร่าว ๆ เป็น 3 แบบดังนี้

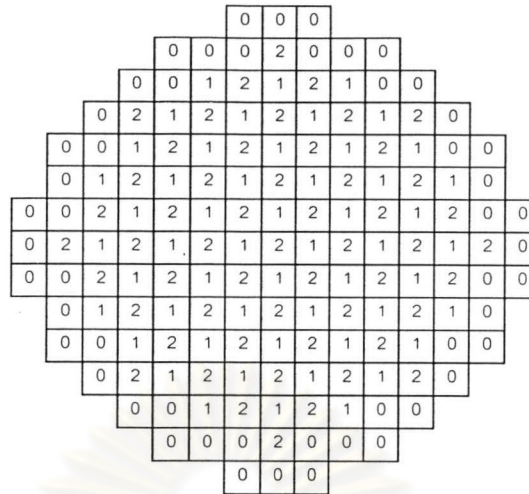
- Out-In Loading คือจะเป็นการบรรจุเชื้อเพลิงใหม่ลรอบนอกหรือที่แบตช์ 0 และเลื่อนเชื้อเพลิงที่ใช้แล้วเข้าภายใน เชื้อเพลิงที่ถูกใช้นานที่สุดจะอยู่แกนกลางปฏิกรณ์ในการเปลี่ยนเชื้อเพลิงครั้งต่อไปเชื้อเพลิงกลางแกนปฏิกรณ์จะถูกดึงออกจากแกนปฏิกรณ์ การจัดเรียงเชื้อเพลิงมีลักษณะดังแสดงในรูป 2.4 ข้อดีในการบรรจุแบบนี้คือมีการถ่ายโอนค่ากำลังสูงสุด (power

peak) จากแกนปฏิกรณ์ผู้ชอบของแกนปฏิกรณ์ทำให้อัตราส่วนของค่ากำลังสูงสุดต่อค่าเฉลี่ยของกำลัง (peak to average ratio) ลดลง ส่วนข้อเสียในการบรรจุลักษณะนี้มีสองประการคือ ประการแรกเนื่องจากการนำเชื้อเพลิงใหม่บรรจุลงบริเวณขอบแกนทำให้บริเวณขอบแกนมีค่าการเผาผลาญสูงขึ้น ขณะที่แกนกลางปฏิกรณ์ค่าการเผาผลาญจะต่ำ ซึ่งอาจทำให้ค่ากำลัง ณ บริเวณดังกล่าวมีค่าน้อยกว่าค่ากำลังเฉลี่ย ประการที่สองการนำเชื้อเพลิงใหม่ใส่เข้าที่ขอบแกนปฏิกรณ์ทำให้เกิดการเล็ดลอดของนิวตรอนมากขึ้น(neutron leakage)



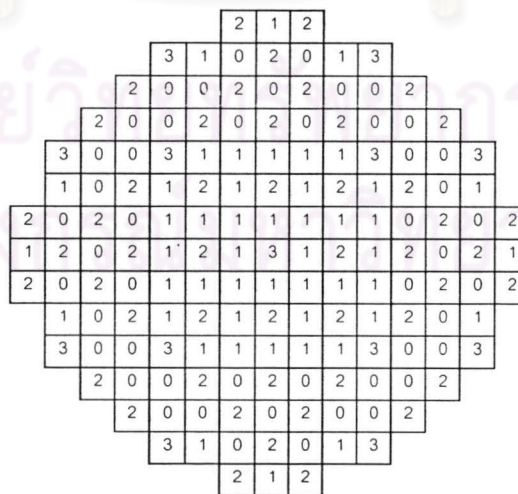
รูปที่ 2.4 แผนภาพการจัดการแกนกลางแบบ Out-In Loading

- In-Scatter Loading คือแกนปฏิกรณ์จะถูกแบ่งเป็นเขตเล็ก ๆ โดยที่แต่ละเขตจะประกอบไปด้วย 4-6 มัดเชื้อเพลิงของแบบที่แตกต่างกัน เมื่อถึงเวลาการจัดเปลี่ยนเชื้อเพลิงครั้งใหม่ จะพิจารณาแต่ละเขตว่าภายในเขตนั้นมัดเชื้อเพลิงแห่งใดมีความหนาแน่นน้อยที่สุดจะถูกดึงออกแล้วทำการเปลี่ยนเชื้อเพลิงใหม่เข้าแทน ดังแสดงในรูป 2.5 ข้อดีของการบรรจุแบบนี้คือ การกระจายของค่ากำลังจะค่อนข้างสม่ำเสมอทั่วทั้งแกนปฏิกรณ์ ทั้งนี้เนื่องจากการเปลี่ยนเชื้อเพลิงที่เหมาะสมออกจากแกนปฏิกรณ์แล้วแทนที่ด้วยเชื้อเพลิงใหม่ อย่างไรก็ตามอัตราการเล็ดลอดของนิวตรอนออกจากปฏิกรณ์ยังคงมีสูงอยู่ การบรรจุเชื้อเพลิงแบบนี้จะใช้เวลาน้อยกว่าเพราะไม่ต้องทำการบรรจุใหม่ทั้งแกนปฏิกรณ์



รูปที่ 2.5 แผนภาพการจัดแกนกลางแบบ In-Scatter Loading

• Low Leakage Core Loading เนื่องจากสัดส่วนของนิวตรอนที่ผลิตขึ้นจากปฏิกิริยาการแตกตัวมีการรั่วไหลออกจากแกนปฏิกรณ์นิวตรอนที่รั่วไหลออกมาสามารถสร้างความเสียหายให้กับผนังของถังความดัน (pressure vessel) ซึ่งบรรจุแกนปฏิกรณ์ได้ การที่มีนิวตรอนฟลักซ์สูงบริเวณขอบของแกนปฏิกรณ์นั้นจะยิ่งทำความเสียหายกับถังความดันมากขึ้นเพื่อจะลดความเสียหายดังกล่าว จึงต้องลดอัตราการรั่วไหลนิวตรอนลงให้เหลือน้อยที่สุด สำหรับแกนปฏิกรณ์แบบ PWR นั้นความเสียหายกับผนังของถังความดันเนื่องจากการรั่วไหลของนิวตรอนมีความสำคัญอย่างยิ่ง แต่สำหรับแกนปฏิกรณ์แบบ BWR นั้น ความเสียหายจากนิวตรอนต่อถังความดันมีน้อยกว่าเพราะแกนปฏิกรณ์ทำงานในสถานะที่แรงดันต่ำกว่าการบรรจุเชื้อเพลิงในกรณีนี้มีเป้าหมายเพื่อลดอัตราการรั่วไหลของนิวตรอนเป็นหลัก ลักษณะการบรรจุเป็น ดังแสดงในรูป 2.6



รูปที่ 2.6 แผนภาพการจัดแกนกลางแบบ Low Leakage Core Loading



## 2.4 การคำนวณนิวตรอนฟลักซ์และค่าวิกฤต<sup>[2]</sup>

ในการเดินเครื่องปฏิกรณ์นั้นจะมีค่าที่บอกถึงสถานะของเครื่องปฏิกรณ์อยู่หลายค่าด้วยกัน แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงค่าที่มีความสำคัญต่องานวิจัยนี้คือ

### 2.4.1 การแพร่นิวตรอนฟลักซ์

สมการทั่วไปสำหรับการแพร่นิวตรอนฟลักซ์ (neutron diffusion equation) ที่ค่าพลังงานเดียวสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot D \bar{\nabla} \phi + (v \Sigma_f - \Sigma_a) \phi \quad (2.2)$$

โดยทั่วไปอัตราการเปลี่ยนแปลงของนิวตรอนฟลักซ์ค่อนข้างช้า ดังนั้นจึงสมมุติได้ว่า  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  เข้าใกล้ศูนย์ ทำให้สมการการแพร่ของนิวตรอนฟลักซ์ไม่ขึ้นกับเวลาและเขียนได้ใหม่เป็น

$$\bar{\nabla} \cdot D \bar{\nabla} \phi + (v \Sigma_f - \Sigma_a) \phi = 0 \quad (2.3)$$

สมการข้างต้นให้ค่านิวตรอนฟลักซ์ชั่วระยะเวลาหนึ่ง ๆ ภายใต้งเงื่อนไขว่านิวตรอนฟลักซ์มีค่าคงที่ในระยะเวลาดังกล่าว การเผาผลาญเชื้อเพลิงและการเกิดขึ้นของนิวเคลียสผลิตภัณฑ์จะสามารถคำนวณได้จากข้อมูลขนาดของฟลักซ์ที่คำนวณได้

ในกรณีที่กำหนดความหนาแน่นกำลังเทอร์มัล (thermal power) ถ้าให้ค่า  $\omega_f$  เป็นค่าพลังงานที่ผลิตได้ต่อการแตกตัวหนึ่งครั้ง (โดย  $\omega_f$  มีค่าเท่ากับ 200 MeV) จะสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนาแน่นกำลังเทอร์มัลและฟลักซ์เทอร์มัลได้เป็น

$$p(\vec{r}) = \omega_f \Sigma_f \phi(\vec{r}) \quad (2.4)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการสำหรับค่าความหนาแน่นกำลังเทอร์มัล ณ ตำแหน่งรัศมี  $r$  ในแกนปฏิกรณ์ เพราะฉะนั้นกำลังรวมที่ผลิตได้ในแกนปฏิกรณ์ต้องทำการรวมค่าความหนาแน่นกำลังทั้งปริมาตรของแกนปฏิกรณ์จะได้ว่า

$$P = \int_V d^3r \omega_f \Sigma_f \phi(\vec{r}) \quad (2.5)$$

### 2.4.2 ค่าวิกฤต<sup>[2]</sup>

ในการควบคุมเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ ปริมาณสำคัญซึ่งต้องพิจารณาคือค่าวิกฤต ( $k$ ) ของระบบ สำหรับงานวิจัยนี้การคำนวณค่า  $k$  กระทำได้โดยการตัดแปลงสมการการแพร่ของนิวตรอนที่กลุ่มพลังงานเดียวกันนี้

$$\bar{\nabla} \cdot D\bar{\nabla}\phi + \left( \frac{\nu}{k} \Sigma_f - \Sigma_a \right) \phi = 0 \quad (2.6)$$

โดยการกำหนดลักษณะการจัดการเชื้อเพลิง การควบคุมปริมาณนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์โดยอาศัยแท่งควบคุม (control rod) และเคมีคอลซิม (chemical shim) จะสามารถควบคุมเครื่องปฏิกรณ์ให้อยู่ในภาวะวิกฤต ( $k = 1$ ) ได้

สำหรับแกนปฏิกรณ์แบบเนื้อเดียว (Homogeneous) ซึ่งมีค่า  $\nu$ ,  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_a$  และ  $D$  เป็นค่าคงที่ ค่าวิกฤตของแกนปฏิกรณ์สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการ 2.5 ดังนี้

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} \cdot \left( \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \right) \quad (2.7)$$

เมื่อ  $B_g^2$  คือค่า geometry buckling ซึ่งบ่งบอกผลกระทบอันเนื่องจากรูปทรงและขนาดของแกนปฏิกรณ์ (ค่า geometry buckling ในรูปแบบต่าง ๆ สามารถดูได้ตามตาราง 2.1) ในขณะที่  $L^2$  เป็นผลกระทบโดยตรงจากส่วนประกอบทางวัสดุ

โดยที่

$$L = D / \Sigma_a \quad (2.8)$$

สำหรับสมการ 2.2 ถึง 2.8 ตัวแปรและค่าต่าง ๆ ที่ใช้นิยามคือ

$k$  คือ ค่าวิกฤต

$D$  คือค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ (diffusion coefficient) มีหน่วยเป็นระยะทาง


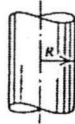

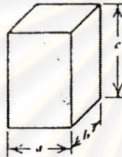
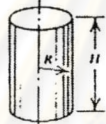
$\nu$  คือ จำนวนนิวตรอนที่ปลดปล่อยออกมาหลังจากเกิดปฏิกิริยาแตกตัว

$\Sigma_f$  คือ ภาคตัดขวางมหภาคการแตกตัว (macroscopic fission cross section)

$\Sigma_a$  คือ ภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืน (macroscopic absorption cross section)

$\phi$  คือ นิวตรอนฟลักซ์มีหน่วยเป็นจำนวนนิวตรอนต่อหน่วยพื้นที่ต่อหน่วยเวลา

ตารางที่ 2.1 Geometric Bucklings และ Critical Flux Profile ของแกนปฏิกรณ์ในรูปแบบต่าง ๆ<sup>[2]</sup>

		Geometric Buckling $B_g^2$	Flux profile
Slab		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos \frac{\pi x}{a}$
Infinite Cylinder		$\left(\frac{\nu_0}{R}\right)^2$	$J_0\left(\frac{\nu_0 r}{R}\right)$
Sphere		$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$r^{-1} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$
Rectangular Parallelepiped		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$
Finite Cylinder		$\left(\frac{\nu_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$J_0\left(\frac{\nu_0 r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$

สำหรับค่า  $D$  สามารถประมาณได้คือ

$$D = \frac{1}{3\Sigma_t(1 - \bar{\mu}) \left( 1 - \frac{4\Sigma_a}{5\Sigma_t} + \dots \right)} \quad (2.9)$$

หากพิจารณาว่า  $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} \ll 1$  ดังนั้น

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad (2.10)$$

โดยที่  $\lambda_{tr}$  เรียกว่า ทางอิสระเฉลี่ยของการนำส่ง (transport mean free path) และเท่ากับ

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}} = \frac{1}{\Sigma_s(1 - \bar{\mu})} \quad (2.11)$$

$\Sigma_{tr}$  เรียกว่า ค่าภาคตัดขวางมหภาคการนำส่ง (macroscopic transport cross section)

$\Sigma_a$  เรียกว่า ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืน (macroscopic absorption cross section)

$\Sigma_s$  เรียกว่า ค่าภาคตัดขวางมหภาคการกระเจิง (macroscopic scattering cross section)

โดยที่  $\bar{\mu}$  คือ ค่าเฉลี่ย cosine ของมุมกระเจิงของนิวตรอนภายในตัวกลางหนึ่ง ๆ ใน Laboratory coordinate system และสามารถคำนวณได้คือ

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3A} \quad (2.12)$$

โดยที่  $A$  คือเลขมวลอะตอมตัวกลาง

## 2.5 การวิเคราะห์การหมดไปของเชื้อเพลิง<sup>91</sup>

อันตรกิริยาที่เกิดในเครื่องปฏิกรณ์ มีผลเปลี่ยนแปลงส่วนประกอบของเชื้อเพลิง เช่นการสูญเสียวัสดุที่สามารถเกิดอันตรกิริยาการแตกตัว (fissionable material) การเกิดขึ้นและการสลายตัวของผลผลิตการแตกตัวและการเปลี่ยนแปลงค่าของวัสดุอื่น ๆ ในเครื่องปฏิกรณ์เนื่องจากการดูดจับนิวตรอน จำนวนของนิวเคลียสของธาตุและไอโซโทปในเครื่องปฏิกรณ์จะเปลี่ยนแปลงไปตามระยะเวลาที่เดินเครื่อง

การวิเคราะห์การหมดไปของเชื้อเพลิง (fuel depletion analysis) มีความสำคัญ 3 ประการต่อวิศวกรรมเชื้อเพลิงนิวเคลียร์

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงรีแอกติวิตีอันเนื่องมาจากการหมดไปของเชื้อเพลิง การเกิดขึ้นของผลิตภัณฑ์จากอันตรกิริยาในแกนปฏิกรณ์ และพลังงานที่คาดว่าจะผลิตได้ระหว่างรอบก่อนการเปลี่ยนเชื้อเพลิง (cycle)
2. การเปลี่ยนแปลงในการกระจายกำลัง (power distribution) อันเนื่องจากการหมดไปของเชื้อเพลิงรวมทั้งผลกระทบจากการปรับค่าควบคุมเพื่อรักษาค่าความวิกฤต
3. การเปลี่ยนแปลงของส่วนประกอบเชื้อเพลิง โดยเฉพาะตัวที่มีความสำคัญที่มีค่าในเชิงเศรษฐกิจ

### 2.5.1 สมการพื้นฐานของการเปลี่ยนแปลงนิวเคลียสไอโซโทปเนื่องจากอันตรกิริยากับนิวตรอนและการสลายตัว

ระหว่างการเดินเครื่องปฏิกรณ์เพื่อผลิตกำลัง วัสดุภายในเครื่องปฏิกรณ์จะมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเกิดอันตรกิริยากับนิวตรอน ถ้าทำการพิจารณานิวเคลียสหนึ่ง ๆ ณ ตำแหน่งหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์โดยพิจารณานิวตรอนฟลักซ์ที่หนึ่งกลุ่มพลังงาน จะสามารถเขียนสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{dN^i}{dt} = \overbrace{\lambda^j N^j + \sigma_c^k \phi N^k + \gamma^i \sum_f \phi}^{\text{Production modes}} - \overbrace{\lambda^i N^i + \sigma_a^i \phi N^i}^{\text{Loss modes}} \quad (2.13)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาของความหนาแน่นของไอโซโทป  $i$  ในสมการที่ 2.14 สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

1. เทอมแรกด้านขวามือของสมการแทนการผลิตโดยการสลายตัวของนิวเคลียส  $N^j$  ด้วยค่าการสลายตัว  $\lambda^j$  การผลิตนี้ สามารถมาจากการสลายตัวของนิวเคลียสมากกว่าหนึ่งชนิด เช่น  $^{238}\text{Pu}$  สามารถผลิตได้จากการสลายตัวแบบอัลฟาของ  $^{242}\text{Cm}$  หรือ การสลายเบตาของ  $^{238}\text{Np}$

2. เทอมที่สองแทนการผลิตโดยการเกิดอันตรกิริยากับนิวตรอนของนิวเคลียส  $N^k$  โดยอันตรกิริยาการจับนิวตรอนด้วยค่าภาคตัดขวางการจับนิวตรอน  $\sigma_c^k$  การผลิตในลักษณะนี้อาจเกิดได้จากนิวเคลียสก่อนหน้ามากกว่าหนึ่งชนิด เช่น  $^{237}\text{U}$  สามารถได้มาจากอันตรกิริยา  $(n, \gamma)$  ของ  $^{236}\text{U}$  และ อันตรกิริยา  $(n, 2n)$  ของ  $^{238}\text{U}$

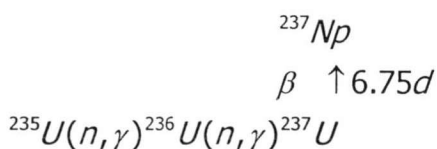
3. เทอมที่สามแทนการผลิตเนื่องจากอันตรกิริยาการแตกตัว โดยที่สัดส่วนของการผลิตเนื่องจากการแตกตัว (fission yield)  $\gamma^i$  ขึ้นกับทั้งไอโซโทปที่แตกตัวและพลังงานของนิวตรอนที่ทำให้เกิดการแตกตัว

4. เทอมที่สี่แทนการสลายตัวของไอโซโทป  $i$  จากค่าการสลายตัว

5. เทอมสุดท้ายแทนการสูญเสียนิวเคลียส  $i$  เนื่องจากอันตรกิริยาการดูดกลืนนิวตรอนโดยมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืน  $\sigma_a^i$

#### 2.5.1.1 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ $^{235}\text{U}$

สำหรับการดูดกลืนนิวตรอนใน  $^{235}\text{U}$  มีน้อยกว่า 20 เปอร์เซ็นต์ที่เปลี่ยนเป็น  $^{236}\text{U}$  และเนื่องจาก  $^{236}\text{U}$  เป็นไอโซโทปที่เสถียรมากคือมีค่าครึ่งชีวิต  $2.4 \times 10^7$  ปี และมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนต่ำ การเกิดขึ้นของ  $^{236}\text{U}$  จึงแทบไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของคาร์ีแอกติวิตี การเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้ของ  $^{235}\text{U}$  ดังแสดงในรูป 2.7 มีผลน้อยมาก จึงไม่นำมาพิจารณา



รูปที่ 2.7 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ  $^{235}\text{U}$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ 2.14 สามารถเขียนเป็นสมการของ  $^{235}\text{U}$  ได้ว่า

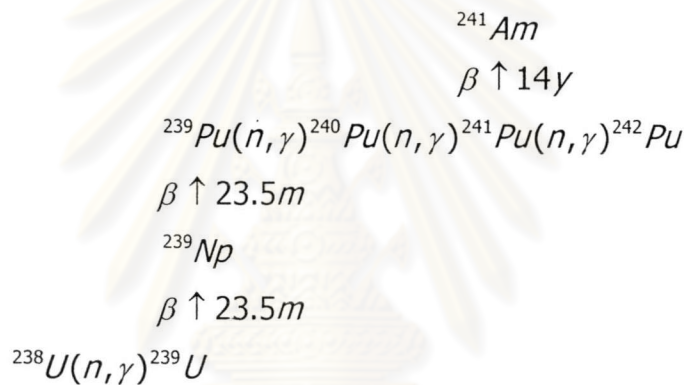
$$\frac{dN^{U235}}{dt} = -\sigma_a^{U235} \phi N^{U235} \quad (2.14)$$

สามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์(analytical solution) ได้ว่า

$$N^{U235} = N_0^{U235} e^{-\sigma_a^{U235} \phi t} \quad (2.15)$$

### 2.5.1.2 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ $^{238}\text{U}$

การดูดกลืนนิวตรอนของ  $^{238}\text{U}$  มีอนุกรมการเปลี่ยนธาตุของ  $^{238}\text{U}$  ดังแสดงในรูป 2.8



รูปที่ 2.8 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ  $^{238}\text{U}$

จากอนุกรมดังกล่าวสามารถเขียนออกมาเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{dN^{U238}}{dt} = -\sigma_a^{U238} \phi N^{U238} \quad (2.16)$$

$$\frac{dN^{U239}}{dt} = \sigma_c^{U238} \phi N^{U238} - \lambda^{U239} N^{U239} \quad (2.17)$$

$$\frac{dN^{Np239}}{dt} = \lambda^{U239} N^{U239} - \lambda^{Np239} N^{Np239} \quad (2.18)$$

$$\frac{dN^{Pu239}}{dt} = \lambda^{U239} N^{U239} - \sigma_a^{Pu239} \phi N^{Pu239} \quad (2.19)$$

$$\frac{dN^{Pu240}}{dt} = \sigma_c^{Pu239} \phi N^{Pu239} - \sigma_a^{Pu240} \phi N^{Pu240} \quad (2.20)$$

$$\frac{dN^{Pu241}}{dt} = \sigma_c^{Pu240} \phi N^{Pu240} - (\sigma_a^{Pu241} \phi + \lambda^{Pu241}) N^{Pu241} \quad (2.21)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 242}}{dt} = \sigma_c^{Pu\ 241} \phi N^{Pu\ 241} - \sigma_a^{Pu\ 242} \phi N^{Pu\ 242} \quad (2.22)$$

เมื่อพิจารณาสมการ 2.16 ถึง 2.22 สมการ 2.17 และ 2.18 นั้นสามารถพิจารณาได้ว่าการดูดกลืนนิวตรอนโดย  $^{239}U$  และ  $^{239}Np$  สามารถละไว้ได้โดยไม่ต้องคำนวณ เนื่องจากค่าครึ่งชีวิตสั้นและมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนต่ำ ดังนั้นจะประมาณว่า  $^{239}Pu$  ถูกผลิตขึ้นมาโดยตรงจากการจับนิวตรอนของ  $^{238}U$  ซึ่งจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dN^{Pu\ 239}}{dt} = \sigma_c^{U\ 238} \phi N^{U\ 238} - \sigma_a^{Pu\ 239} \phi N^{Pu\ 239} \quad (2.23)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta = \int_0^t \phi(t) dt \quad (2.24)$$

จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dN^{U\ 238}}{d\theta} = -\sigma_a^{U\ 238} N^{U\ 238} \quad (2.25)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 239}}{d\theta} = \sigma_c^{U\ 238} N^{U\ 238} - \sigma_a^{Pu\ 239} N^{Pu\ 239} \quad (2.26)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 240}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu\ 239} N^{Pu\ 239} - \sigma_a^{Pu\ 240} N^{Pu\ 240} \quad (2.27)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 241}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu\ 240} N^{Pu\ 240} - \sigma_a^{Pu\ 241} N^{Pu\ 241} - \frac{\lambda^{Pu\ 241}}{\phi} N^{Pu\ 241} \quad (2.28)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 242}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu\ 241} N^{Pu\ 241} - \sigma_a^{Pu\ 242} N^{Pu\ 242} \quad (2.29)$$

สำหรับการคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงส่วนประกอบของเชื้อเพลิงภายในเครื่องปฏิกรณ์นั้น เมื่อพิจารณาเทอมสุดท้ายของสมการที่ 2.28 อาจพิจารณาได้ว่ามีค่าเข้าใกล้ศูนย์และอาจตัดทิ้งไป ไม่ต้องนำมาประกอบในการคำนวณ ส่วนไอโซโทปทุกตัวของพลูโทเนียมไม่เสถียรและสลายตัวให้กัมมันตภาพรังสี โดยมีค่าครึ่งชีวิตอยู่ในช่วงที่ควรพิจารณา (ยกเว้น  $^{241}Pu$  ค่าครึ่งชีวิต 14 ปี) สำหรับไอโซโทปที่เกิดขึ้นหลังจากนี้ในอนุกรมของ  $^{238}U$  เราจะไม่นำมาพิจารณา

### 2.5.2 ผลผลิตการแตกตัว

นิวเคลียสผลผลิตจากการแตกตัว (fission products) บางนิวเคลียสมีผลทำให้การเปลี่ยนแปลงรีแอกติวิตีเป็นลบ ในกรณีนี้สามารถประมาณค่ารีแอกติวิตีที่เปลี่ยนไปได้โดยการพิจารณาค่าการใช้งานนิวตรอนเทอร์มัล (thermal utilization)  $f$  โดยที่

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M + \Sigma_a^P} \quad (2.30)$$

ซึ่งจะสามารถคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงรีแอกติวิตีได้

$$\Delta\rho \equiv \rho(\Sigma_a^P) - \rho(\Sigma_a^P = 0) = \rho' - \rho \quad (2.31)$$

จากสูตรการคำนวณค่ารีแอกติวิตี

$$\rho = \frac{k - 1}{k} \quad (2.32)$$

โดยที่

$$k = \eta p f \varepsilon P_{FNL} P_{TNL} \quad (2.33)$$

และ

$$P_{TNL} = \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \quad (2.34)$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}\Sigma_a} \quad (2.35)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\Delta\rho = \frac{f' - f}{f} + \frac{P'_{TNL} - P_{TNL}}{P'_{TNL}} \quad (2.36)$$

จากสมการ (2.30) และ (2.36) จะได้สมการ

$$\frac{f' - f}{f'} = - \frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M} \quad (2.37)$$

และ

$$\frac{P'_{TNL} - P_{TNL}}{P'_{TNL}} = \frac{L^2 B_g^2}{1 + L^2 B_g^2} \left[ \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} + \frac{\Sigma_{tr}^P}{\Sigma_{tr}} \right] \quad (2.38)$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta\rho = - \frac{\Sigma_a^P}{\Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_g^2} \left[ 1 - L^2 B_g^2 \frac{\Sigma_{tr}^P / \Sigma_a^P}{\Sigma_{tr} / \Sigma_a} \right] \cong \frac{- \Sigma_a^P / \Sigma_a}{1 + L^2 B_g^2} \quad (2.39)$$



สำหรับสมการข้างต้นนั้น เทอมที่ 2 ในเครื่องหมายก้ามปูปกติแล้วจะมีค่าน้อยมาก  $<10^{-3}$  สามารถตัดทิ้งได้

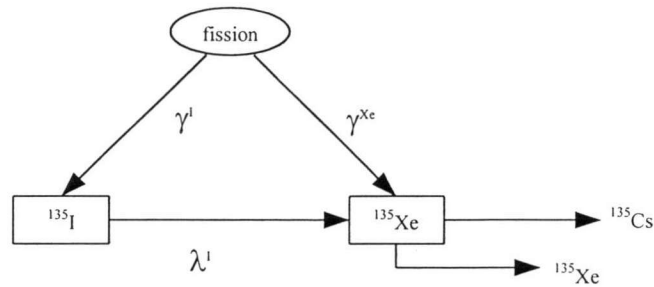
สำหรับสมการ 2.30 ถึง 2.39 ตัวแปรและค่าต่าง ๆ ที่ใช้นิยามคือ

- $f$  คือ ค่าการใช้งานเทอร์มัล
- $\Sigma_a^F$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืนในตัวกลางที่เป็นเชื้อเพลิง
- $\Sigma_a^M$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืนในตัวกลางที่เป็นตัวหน่วงนิวตรอน
- $\Sigma_a^P$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืนในตัวกลางที่เป็นผลผลิตจากการแตกตัว
- $\rho$  คือ ค่ารีแอกติวิตี
- $k$  คือ ค่าวิกฤต
- $\eta$  คือ ค่าจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นจากการแตกตัวต่อการดูดกลืนในเชื้อเพลิง
- $p$  คือ ค่าความน่าจะเป็นที่นิวตรอนหนีออกจากช่วงเรโซแนนซ์ได้
- $\epsilon$  คือ ค่าสัดส่วนนิวตรอนของการแตกตัวที่พลังงานสูง
- $P_{FNL}$  คือ ค่าความน่าจะเป็นที่นิวตรอนที่พลังงานสูงไม่รั่วไหลออกจากแกนปฏิกรณ์
- $P_{TNL}$  คือ ค่าความน่าจะเป็นที่นิวตรอนที่พลังงานเทอร์มัลไม่รั่วไหลออกจากแกนปฏิกรณ์
- $L$  คือ ค่าความยาวของการแพร่นิวตรอน
- $B_g$  คือ ค่า geometry buckling
- $D$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่นิวตรอน
- $\Sigma_a$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการดูดกลืน
- $\Sigma_{tr}$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการนำส่ง
- $\Sigma_{tr}^F$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการนำส่งในตัวกลางที่เป็นเชื้อเพลิง
- $\Sigma_{tr}^P$  คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการนำส่งในตัวกลางที่เป็นผลผลิตจากการแตกตัว

นิวไคลด์ผลผลิตจากการแตกตัวที่มีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนเทอร์มัลนิวตรอนสูงมากซึ่งจะมีผลต่อการคำนวณอย่างมากคือ  $^{135}\text{Xe}$  และ  $^{149}\text{Sm}$

#### 2.5.2.1 ซีนอนจากการแตกตัว

$^{135}\text{Xe}$  เป็นผลผลิตจากการแตกตัวที่มีความสำคัญมากที่สุดเพราะว่ามีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนนิวตรอนใหญ่มากและมีค่าสัดส่วนจากการแตกตัว (fission yield) ค่อนข้างสูง นอกจากนี้  $^{135}\text{Xe}$  ไม่ได้เกิดจากการแตกตัวโดยตรงเพียงอย่างเดียวแต่สามารถเกิดได้จากการสลายตัวแบบเบตาของ  $^{135}\text{I}$  แผนผังอย่างง่ายแสดงการเกิดของ  $^{135}\text{Xe}$  อาจแสดงได้ดังรูป 2.9 และจะสามารถเขียนสมการการเปลี่ยนแปลงของ  $^{135}\text{I}$  และ  $^{135}\text{Xe}$  ได้ดังสมการ 2.40 และ 2.41

รูปที่ 2.9 แผนผังการสลายตัวอย่างง่ายของ  $^{135}\text{Xe}$ 

ไอโอดีน

$$\frac{\partial N^I}{\partial t} = \gamma^I \Sigma_f \phi - \lambda^I N^I \quad (2.40)$$

ซีนอน

$$\frac{\partial N^X}{\partial t} = \gamma^X \Sigma_f \phi + \lambda^I N^I - \lambda^X N^X - \sigma_a^X \phi N^X \quad (2.41)$$

ถ้าเริ่มการเดินเครื่องปฏิกรณ์จากระบบที่ไม่มีผลผลิตจากการแตกตัวอยู่เลยจะสามารถหาระดับความเข้มข้นของ  $^{135}\text{I}$  และ  $^{135}\text{Xe}$  ได้ตามสมการต่อไปนี้

$$N^I = \frac{\gamma^I \Sigma_f \phi_0}{\lambda^I} \quad (2.42)$$

$$N^X = \frac{(\gamma^I + \gamma^X) \Sigma_f \phi_0}{\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0} \left[ 1 - e^{-(\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0) t} \right] + \frac{(\gamma^I \Sigma_f \phi_0)}{\lambda^X - \lambda^I + \sigma_a^X \phi_0} \left[ e^{-(\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0) t} - e^{-\lambda^I t} \right] \quad (2.43)$$

สมการข้างต้นสามารถใช้ได้ในกรณีเริ่มต้นเดินเครื่องปฏิกรณ์จากการที่ไม่มีผลผลิตจากการแตกตัวอยู่ในระบบ แล้วหลังจากนั้นระดับความเข้มข้นของ  $^{135}\text{I}$  และ  $^{135}\text{Xe}$  จะเคลื่อนเข้าสู่ระดับสภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไปและจะบรรจบได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$N_\infty^I = \frac{\gamma^I \Sigma_f \phi_0}{\lambda^I} \quad (2.44)$$

$$N_\infty^X = \frac{(\gamma^I + \gamma^X) \Sigma_f \phi_0}{\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0} \quad (2.45)$$

ระดับความเข้มข้นที่สภาวะสมดุล  $N_\infty^X$  เป็นตัวที่น่าพิจารณาเพราะเมื่อนำไปแทนในสมการ 2.39 จะได้ค่ารีแอกติวิตีที่เป็นลบของซีนอนที่จะเกิดขึ้นเมื่อค่ากำลังคงที่

$$\Delta\rho \cong -\frac{\Sigma_a^X}{\Sigma_a} = -\frac{\sigma_a^X (\gamma^I + \gamma^X) \Sigma_f \phi_0}{\Sigma_a (\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0)} \quad (2.46)$$

### 2.5.2.2 ซามาเริ่มจากการแตกตัว

$^{149}\text{Sm}$  เป็นผลผลิตจากการแตกตัวที่มีสัดส่วนในการแตกตัวสูง (ดูจากตาราง 2.2) และมีค่าภาคตัดขวางจุดภาคก่อนข้างใหญ่ การเกิด  $^{149}\text{Sm}$  สมมติให้เกิดจากสัดส่วนในการแตกตัวของ  $^{149}\text{Pm}$  โดยตรง จะบรรยายได้ดังสมการ 2.47 และ 2.48

ตารางที่ 2.2 ตารางค่าสัดส่วนในการแตกตัวและค่าคงที่การสลายตัว

Fission Product Yields	$^{235}\text{U}$	$^{239}\text{U}$	$^{241}\text{Pu}$	Decay constants (1/hr)
$\gamma^I$	6.386	6.100	7.694	0.1035
$\gamma^{\text{Xe}}$	0.228	1.087	0.255	0.0753
$\gamma^{\text{Pm}}$	1.130	1.900	0	0.0128

โพรมะเริ่ม

$$\frac{\partial N^P}{\partial t} = \gamma^P \Sigma_f \phi - \lambda^P N^P \quad (2.47)$$

ซามาเริ่ม

$$\frac{\partial N^S}{\partial t} = \lambda^P N^P - \sigma_a^S \phi N^S \quad (2.48)$$

ความระดับความเข้มข้นที่สภาวะสมดุลคือ  $\partial N^P / \partial t = 0 = \partial N^S / \partial t$  จะได้

$$N_\infty^P = \frac{\gamma^P \Sigma_f \phi_0}{\lambda^P} \quad (2.49)$$

$$N_\infty^S = \frac{\gamma^P \Sigma_f}{\sigma_a^S} \quad (2.50)$$

ค่ารีแอกติวิตีที่เป็นลบเมื่อซามาเริ่มอยู่ในสภาวะสมดุลมีค่าเท่ากับ

$$\Delta\rho \cong -\frac{\gamma^P}{\nu} \quad (2.51)$$

## 2.6 ระเบียบเชิงตัวเลข

การศึกษาและการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ รวมทั้งทางด้านคณิตศาสตร์ ในปัจจุบันต้องการความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข เพื่อนำมาแก้ไขปัญหาที่มีความซับซ้อนมาก

### 2.6.1 ระเบียบการแยกแบบแอลยู

แอลยู (LU decomposition method) เป็นระเบียบวิธีการหนึ่งทีนิยมใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น หลักการของระเบียบวิธีการนี้กล่าวคือ สมมุติว่ามีสมการเชิงเส้นชุดหนึ่งดังรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
 \vdots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

ระบบประกอบไปด้วยสมการ  $n$  สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า  $n$  จำนวน แทนโดย  $x_j$  เมื่อ  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  โดยมี  $a_{ij}$  เป็นสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  และ  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  ส่วน  $b_i$  จะเรียกว่าค่าคงที่ ระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ เพื่อแก้ปัญหาก็เป็น

$$A \cdot X = B \tag{2.53}$$

เมื่อ  $A$  คือเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ มีขนาดเป็น  $n \times n$  และ  $X$  คือเมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า ซึ่ง มีขนาดเป็น  $n \times 1$  ส่วน  $B$  คือ เมตริกซ์ของค่าคงที่ ซึ่งมีขนาดเป็น  $n \times 1$  นั่นคือ

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_n
 \end{bmatrix}
 \tag{2.54}$$

ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นนั้น ถ้าสมมุติว่าสมการสามารถเขียนเมตริกซ์  $A$  เป็นผลของสองเมตริกซ์ คือ

$$L \cdot U = A \tag{2.55}$$

โดยที่  $L$  คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) และ  $U$  คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) โดยทั้ง  $L$  และ  $U$  ในกรณีของเมตริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  สมการข้างต้นจะมีลักษณะดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

สามารถใช้การแยกส่วนประกอบสมการข้างต้น เพื่อแก้ปัญหาเชิงเส้นได้คือ

$$A \cdot X = (L \cdot U) \cdot X = L \cdot (U \cdot X) = B \quad (2.57)$$

โดยในการแก้ปัญหาแรกพิจารณา สำหรับเวกเตอร์  $Y = U \cdot X$  จะได้ว่า

$$L \cdot Y = B \quad (2.58)$$

เมื่อทราบค่า  $Y$  จะสามารถคำนวณค่า  $X$  ได้จากสมการ

$$U \cdot X = Y \quad (2.59)$$

สมการแรกสามารถแก้ปัญหาได้โดยการแทนค่าไปข้างหน้า (forward substitution) ซึ่งเป็นไปตามสมการดังนี้

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad (2.60)$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right] \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.61)$$

ในขณะที่สมการที่สองสามารถแก้ปัญหาได้โดย การแทนค่ากลับ (back substitution) นั่นคือ

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad (2.62)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right] \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (2.63)$$

เมื่อกำหนดค่าสมาชิกแต่ละตำแหน่งในเมทริกซ์  $L$  และ  $U$  จากสมการข้างต้นทั้งสองจะสามารถหาคำตอบ  $X$  ของชุดสมการเชิงเส้นได้

## 2.6.2 วิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ และมีเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ซับซ้อนอาจสามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ซับซ้อน ขึ้นกับตัวแปรจำนวนมากหรือสัมประสิทธิ์มีค่าไม่คงที่ การหาคำตอบของสมการจะมีความยุ่งยาก ซึ่งการแก้ปัญหาดังกล่าวอาจทำได้โดยกระบวนการเชิงตัวเลข ในกระบวนการดังกล่าวจะต้องเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของพีชคณิต วิธีการหนึ่งก็คือการแทนสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของสมการการประมาณด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method) เพื่อพิจารณาสมการเชิง

อนุพันธ์ด้วยวิธีดังกล่าว หากกำหนดให้  $\phi$  เป็นฟังก์ชันที่ต้องทราบค่าเริ่มต้น และใช้อนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series) เพื่อประมาณค่า  $\phi(x_{i+1})$  โดยที่  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  จะได้

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i + \Delta x) = \phi(x_i) + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_i} + O(\Delta x^2) \quad (2.64)$$

โดยที่  $O(\Delta x^2)$  คือความคลาดเคลื่อนของการประมาณ ซึ่งอยู่ในอันดับของ  $\Delta x^2$  นั่นคือ

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i + O(\Delta x^2) \quad (2.65)$$

ดังนั้น

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad (2.66)$$

รูปแบบข้างต้นเรียกว่า การประมาณค่าผลต่างก้าวหน้า (forward difference approximation) ของอนุพันธ์อันดับแรกของฟังก์ชัน ซึ่งจะประมาณได้ว่า

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (2.67)$$

ความคลาดเคลื่อนของการประมาณนี้ก็คือค่า  $O(\Delta x^2)$

ในลักษณะเดียวกันอนุกรมของเทย์เลอร์สามารถใช้ประมาณค่า  $\phi_{i+1}$  ดังนี้

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i + O(\Delta x^2) \quad (2.68)$$

นั่นคือ

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad (2.69)$$

และสามารถสร้างการประมาณค่าผลต่างย้อนหลัง (backward difference approximation) ได้เป็น

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.70)$$

การประมาณค่าผลต่างแบบเดินหน้าและการประมาณค่าผลต่างแบบถอยหลังมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นในลักษณะและในอันดับเดียวกัน

ถ้าแทนส่วนขยายของสมการ 2.77 และ 2.78 ในรูป

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i + O(\Delta x^3) \quad (2.71)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i - O(\Delta x^3) \quad (2.72)$$

แล้วนำสมการ 2.78 ลบจากสมการ 2.77 จะได้ว่า

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2\Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i + O(\Delta x^3) \quad (2.73)$$

ทั้งนี้ความคลาดเคลื่อนของการประมาณอยู่ในอันดับของ  $O(\Delta x^3)$  จากสมการข้างต้น ทำให้ได้การประมาณค่าผลต่างแบบกึ่งกลาง (central difference approximation) นั่นคือ

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.74)$$

ซึ่งจะมีความคลาดเคลื่อนของการประมาณอยู่ในอันดับ  $O(\Delta x^3)$  หากพิจารณาว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของ  $\phi$  ถูกรู้แล้ว ลำดับของความคลาดเคลื่อน  $O$  ย่อมลดลงตามลำดับของ  $\Delta x$  ดังนั้นการประมาณผลต่างแบบกึ่งกลาง จึงมีลำดับของความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการประมาณผลต่างก้าวหน้าและการประมาณย้อนหลัง ในลักษณะเดียวกันนี้ เมื่อพิจารณาผลรวมของสมการข้างต้นทั้งสอง ทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

$$\left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} - O(\Delta x^3) \quad (2.75)$$

ดังนั้น สามารถประมาณอนุพันธ์อันดับ 2 ได้ว่า

$$\left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.76)$$

โดยมีความคลาดเคลื่อนของการประมาณอยู่ในอันดับที่  $O(\Delta x^3)$

อาศัยกระบวนการผลต่างสืบเนื่องและการแก้สมการโดยระเบียบการแยกแบบ  
 แอลยู การแก้สมการแพร่ตลอดจนการคำนวณค่าวิกฤตจะสามารถกระทำได้ ดังจะได้นำเสนอในบท  
 ถัดไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย