บทที่ 4

การจำลองแบบ

บทนี้กล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม การหาผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว และขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมจำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม

แบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลมนี้ จะประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบพาหะลม ซึ่งเสนอโดย Shigeru Matsumoto และ David C. T. Pei [9] ตัวแปรที่สำคัญประกอบด้วย อุณหภูมิของก๊าซ (T_a) ความชื้นของก๊าซ (H) อุณหภูมิของวัสดุ (T_s) ความชื้นของวัสดุ (W) ความเร็ววัสดุ (u_s) อัตราการป้อนวัสดุ (m_s) อัตราการไหลของก๊าซ (m_a) และอัตราการอบแห้ง (R_d)

โดยพิจารณาทั้งกลไกการอบแห้งและการเคลื่อนที่ของอนุภาค ประกอบด้วย สมดุลมวลของน้ำทั้งของก๊าซร้อนและวัสดุ สมดุลพลังงานทั้งของก๊าซร้อนและวัสดุ และการเคลื่อนที่ของอนุภาควัสดุ แบบจำลองประกอบด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) ของอัตราการเปลี่ยนแปลงความชื้นของวัสดุ ความชื้นของก๊าซร้อน อุณหภูมิของก๊าซร้อน อุณหภูมิของวัสดุ และความเร็วของวัสดุ ตามความยาวท่ออบแห้ง

สมมติฐานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1. พิจารณาปริมาตรควบคุมเป็นแบบ Steady-state
2. พิจารณาอนุภาคของวัสดุชื้นเป็นทรงกลมและมีขนาดสม่ำเสมอ
3. อนุภาคของวัสดุชื้นมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดของท่ออบแห้ง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

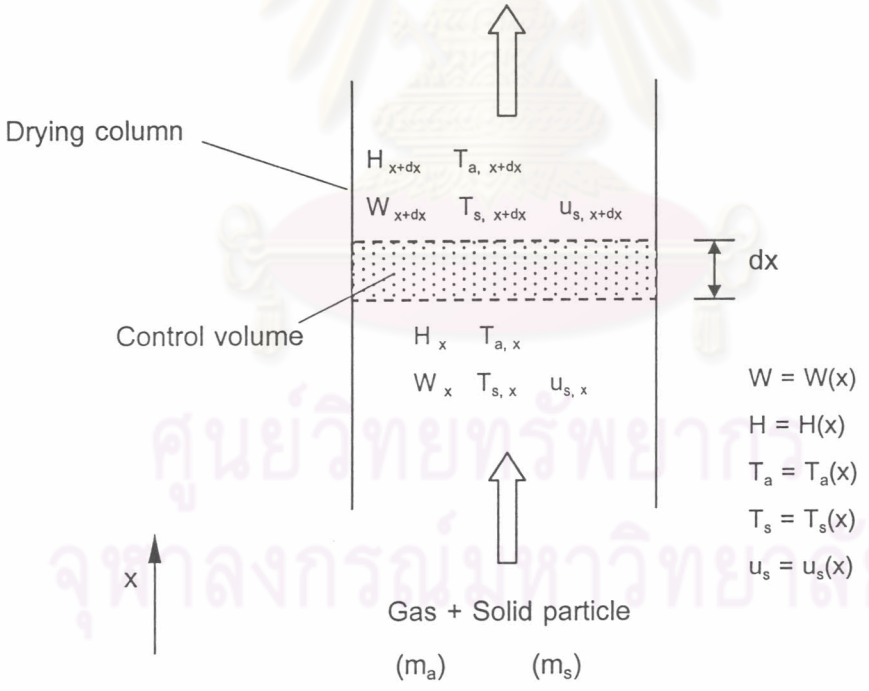
4. อุณหภูมิและความชื้นของก๊าซร้อนมีค่าสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดของท่ออบแห้ง แต่เปลี่ยนแปลงตามความยาวของท่ออบแห้ง

5. ท่ออบแห้งไม่มีสูญเสียพลังงานความร้อนออกสู่สิ่งแวดล้อม

6. ก๊าซและอนุภาควัสดุไหลขนานกันไปตามท่ออบแห้ง

7. การอบแห้งทั้งหมดเกิดขึ้นในช่วงอัตราการอบแห้งคงที่ (Constant drying rate) โดยถือว่าช่วงอัตราการอบแห้งลดลงนั้นสั้นมาก

8. ก๊าซร้อนมีพฤติกรรมเป็นก๊าซในอุดมคติ



รูปที่ 4.1 ปริมาตรควบคุมเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมดุลความชื้นของวัสดุ

$$\left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลออก}\\ \text{ของน้ำ}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลเข้า}\\ \text{ของน้ำ}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการระเหยของน้ำ}\\ \text{จากวัสดุ}\end{array}\right]$$

$$m_s W_{x+dx} - m_s W_x = - R_d a_v A dx \qquad (4.1)$$

เนื่องจาก $W_{x+dx} = W_x + \frac{dW}{dx} dx$ ทำการแทนค่าลงในสมการที่ 4.1 แล้วหารตลอดด้วย dx จะได้ว่า

$$\frac{dW}{dx} = - \frac{R_d a_v A}{m_s} \qquad (4.2)$$

โดย a_v คือ พื้นที่ผิวของวัสดุทั้งหมดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรท่ออบแห้ง

$$a_v = \frac{\text{The amount of grains in the element x Surface area of each grain}}{\text{The volume of the element}}$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{dx}{u_s} m_s \Big/ \frac{\pi}{6} d_p^{\,2} \rho_s\right) \pi d_p^{\,2}}{\frac{\pi}{4} D^2 dx}\right] = \frac{24 m_s}{\pi \rho_a u_s d_p D^2}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมดุลไอน้ำของก๊าซร้อน

$$\left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลออก}\\ \text{ของไอน้ำ}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลเข้า}\\ \text{ของไอน้ำ}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการระเหยของน้ำ}\\ \text{จากวัสดุ}\end{array}\right]$$

$$m_a H_{x+dx} - m_a H_x = R_d a_v A dx \qquad (4.3)$$

เนื่องจาก $H_{x+dx} = H_x + \frac{dH}{dx} dx$ ทำการแทนค่าลงในสมการที่ 4.3 แล้วหารตลอดด้วย dx จะได้ว่า

$$\frac{dH}{dx} = \frac{R_d a_v A}{m_a} \qquad (4.4)$$

และ

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{m_s}{m_a} \frac{dW}{dx} \qquad (4.5)$$

สมดุลพลังงานของก๊าซร้อน

$$\left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลเข้า}\\ \text{ของพลังงาน}\\ \text{กับไอน้ำ}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการถ่ายเท}\\ \text{ความร้อน}\\ \text{แก่วัสดุ}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลออก}\\ \text{ของพลังงาน}\\ \text{กับลมร้อน}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{อัตราการไหลเข้า}\\ \text{ของพลังงาน}\\ \text{กับลมร้อน}\end{array}\right]$$

$$\{R_d(h_{fg,\,0} + C_v T_a) - h_c(T_a - T_s)\} a_v A dx = m_a h_{a,\,x+dx} - m_a h_{a,\,x}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$m_a \frac{dh_a}{dx} = (- h_c(T_a-T_s) - R_d(h_{fg,\,0} + C_vT_a))a_vA \qquad (4.6)$$

เนื่องจากเอนทัลปีของลมร้อนสามารถมีค่าเท่ากับ

$$h_a = (C_a + C_vH)T_a + h_{fg,\,0}H$$

ดังนั้น

$$dh_a = (C_a + C_vH)dT_a + (h_{fg,\,0} + C_vT_a)dH$$

แทนลงในสมการที่ 4.6 จะได้

$$(C_a + C_vH)\frac{dT_a}{dx} = - h_c(T_a-T_s)\frac{a_vA}{m_a} \qquad (4.7)$$

พิจารณาสมดุลพลังงานของวัสดุ

$$\begin{bmatrix}\text{อัตราการถ่ายเท}\\ \text{ความร้อน}\\ \text{จากลมร้อน}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{พลังงานความร้อน}\\ \text{ใช้เพื่อระเหย}\\ \text{น้ำในวัสดุ}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{อัตราการไหลออก}\\ \text{ของพลังงาน}\\ \text{กับวัสดุ}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{อัตราการไหลเข้า}\\ \text{ของพลังงาน}\\ \text{กับวัสดุ}\end{bmatrix}$$

$$\{h_c(T_a-T_s) - R_d(C_v(T_a - T_s) + h_{fg,\,s} + C_wT_s)\}a_vAdx = m_sh_{s,\,x+dx} - m_sh_{s,\,x}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$m_s \frac{dh_s}{dx} = \{h_c(T_a-T_s) - R_d(C_v(T_a - T_s) + h_{fg,\,s} + C_wT_s)\}a_vA \qquad (4.8)$$

เนื่องจากเอนทัลปีของวัสดุมีค่าเท่ากับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$h_s = (C_s + C_w W)T_s$$

ดังนั้น

$$dh_s = (C_s + C_w W)dT_s + C_w T_s dW$$

แทนลงในสมการที่ 4.8 จะได้

$$(C_s + C_w W)\frac{dT_s}{dx} = \{ h_c(T_a - T_s) - R_d(h_{fg,s} + C_v(T_a - T_s)) \}\frac{a_v A}{m_s} \qquad (4.9)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาควัสดุ

$$\begin{bmatrix} \text{มวล} \\ \text{ของวัสดุ} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ความเร่ง} \\ \text{ของวัสดุ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{แรงเสียดทาน} \\ \text{กระทำต่อวัสดุ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{น้ำหนัก} \\ \text{ของวัสดุ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{แรงลอยตัว} \\ \text{กระทำต่อวัสดุ} \end{bmatrix}$$

$$\rho_s(1+W)V_P\frac{du_s}{dt} = C_D\frac{1}{2}\rho_a(u_a - u_s)^2\frac{\pi d_p^2}{4} - \rho_s(1+W)V_P g + \rho_a V_P g \qquad (4.10)$$

เนื่องจาก $\rho_a/\rho_s << 1$ ดังนั้นสมการที่ 4.10 ลดรูปเป็น

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{3}{4}\frac{\rho_a}{d_p\rho_s(1+W)}C_D(u_a - u_s)^2 - g$$

แต่ $u_s = dx/dt$ จะได้ว่า

$$u_s\frac{du_s}{dx} = \frac{3}{4}\frac{\rho_a}{d_p\rho_s(1+W)}C_D(u_a - u_s)^2 - g \qquad (4.11)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัตราการอบแห้ง (Drying rate)

จากสมมุติฐานของแบบจำลอง พิจารณาการอบแห้งทั้งหมดเกิดขึ้นในช่วงอัตราการอบแห้งคงที่ (Constant drying rate) โดยถือว่าช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงนั้นสั้นมาก ในช่วงนี้อัตราการระเหยของน้ำจากผิววัสดุมีค่าน้อยกว่าอัตราการแพร่ของน้ำภายในวัสดุ ดังนั้นอัตราการ อบแห้งมีค่าเท่ากับอัตราการระเหยของน้ำจากผิววัสดุ

$$R_d = k_H(H_{sat} - H) \qquad (4.12)$$

สรุปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบพาหะลม

ประกอบด้วย 5 สมการ คือ

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{R_d a_v A}{m_s}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{m_s}{m_a}\frac{dW}{dx}$$

$$(C_a + C_v H)\frac{dT_a}{dx} = -h_c(T_a - T_s)\frac{a_v A}{m_a}$$

$$(C_s + C_w W)\frac{dT_s}{dx} = \{h_c(T_a - T_s) - R_d(h_{fg,s} + C_v(T_a - T_s))\}\frac{a_v A}{m_s}$$

$$u_s\frac{du_s}{dx} = \frac{3}{4}\frac{\rho_a}{d_p \rho_s (1+W)} C_D(u_a - u_s)^2 - g$$

โดยที่อัตราการอบแห้งมีค่าเท่ากับ

$$R_d = k_H(H_{sat} - H)$$

เมื่อ

Drag Coefficient (C_D) หาจากความสัมพันธ์ดังนี้

$$C_D = \begin{cases} 24/Re_p, & Re_p \leq 5 \quad \text{(Stoke's law)} \\ 10/\sqrt{Re_p}, & 5 < Re_p < 500 \quad \text{(Allen's law)} \\ 0.44, & 500 \leq Re_p \quad \text{(Newton's law)} \end{cases} \tag{4.13}$$

Heat and Mass Transfer Coefficient h_c (Nu) and k_H (Sh) หาจากความสัมพันธ์

$$Nu = 2 + 0.6(Re_p^{1/2}.Pr^{1/3}) \tag{4.14}$$

$$Sh = 2 + 0.6(Re_p^{1/2}.Sc^{1/3}) \tag{4.15}$$

สมการทั้ง 5 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปไร้มิติ (dimensionless form) โดยกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$$X = x / D$$

$$U_s = u_s / u_{a,0}$$

$$U_a = u_a / u_{a,0}$$

ระบบสมการสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{dW}{dX} = -K_0 \frac{Sh}{U_s} \psi_\mu (H_{sat} - H) \tag{4.16}$$

$$\frac{dH}{dX} = -m \frac{dW}{dX} \tag{4.17}$$

$$\left(1 + \frac{C_v}{C_a} H\right) \frac{dT_a}{dX} = -K_0 m \frac{Sc}{Pr} \frac{Nu}{U_s} \psi_\mu (T_a - T_s) \tag{4.18}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\left(\frac{C_s}{C_w}+W\right)\frac{dT_s}{dX} = -\frac{1}{m}\left(1+\frac{C_v}{C_a}H\right)\frac{C_a}{C_w}\frac{dT_a}{dX} - \frac{1}{m}\left(\frac{C_v}{C_w}(T_a-T_s)+\frac{h_{fg,s}}{C_w}\right)\frac{dH}{dX} \quad (4.19)$$

$$U_s\frac{dU_s}{dX} = K_1\frac{\Psi\rho}{(1+W)}C_D(U_a-U_s)^2 - Fr_0^{-2} \quad (4.20)$$

U_a สามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชั่นของ T_a และ H

$$U_a = (T_a/T_{a,0})(1 + H(M_a/M_{H2O})) \quad (4.21)$$

สรุปพารามิเตอร์ซึ่งควบคุมระบบสมการประกอบด้วย K_0 K_1 m และ Fr_0

โดย

$$m = m_s/m_a \quad (4.22)$$

$$K_0 = 6(D/d_p)^2(\rho_{a,0}/\rho_s)Re_0^{-1}Sc^{-1} \quad (4.23)$$

$$K_1 = (3/4)(D/d_p)(\rho_{a,0}/\rho_s) \quad (4.24)$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (X = 0) ดังต่อไปนี้

$$H = H_0$$
$$W = W_0$$
$$T_a = T_{a,0}$$
$$T_s = T_{s,0}$$
$$U_s = U_{s,0}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.2 การจำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม

การหาผลเฉลยโดยประมาณของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) ซึ่งประกอบด้วย 5 สมการหลัก เพื่อจำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลมนี้ จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบรังกัตตาอันดับสี่ (Fourth-Order Runge-Kutta method) เขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม โดยมีขั้นตอนและแผนผังการทำงาน (flow chart) ดังนี้

<u>ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม</u> (Algorithm)

1. Input data

ข้อมูลที่ต้องใช้ในการจำลองแบบเครื่องอบแห้งกากอ้อยแบบพาหะลม ประกอบด้วย

Dryer configuration

- ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่ออบแห้ง

Operating condition

- อัตราการไหลของลมร้อน
- อัตราการป้อนกากอ้อย

Inlet conditions

- ความชื้นของลมร้อน
- ความชื้นของกากอ้อย
- อุณหภูมิของลมร้อน
- อุณหภูมิของกากอ้อย

2. เลือกการคำนวณที่ต้องการระหว่าง

2.1 คำนวณความชื้นของกากอ้อยที่ความยาวท่ออบแห้งที่ต้องการ
2.2 คำนวณความยาวของท่ออบแห้งที่ความชื้นของกากอ้อยที่ต้องการ

3. คำนวณข้อมูลต่างๆที่จำเป็นในการจำลองแบบ

4. พิมพ์ค่าเงื่อนไขที่ทางเข้าท่ออบแห้งไปเก็บไว้ที่แฟ้มข้อมูล (file)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I21049506

5. หาผลเฉลยของระบบสมการโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ 4^{th}- Order Runge Kutta

6. พิมพ์ผลการจำลองแบบไปเก็บไว้ที่แฟ้มข้อมูล (file)

7. ตรวจสอบเงื่อนไขการทำงาน (การคำนวณที่เลือกในขั้นตอนที่ 2)

7.1 คำนวณความชื้นของกากอ้อยที่ความยาวท่ออบแห้งที่ต้องการ

7.1.1 ถ้าความยาวท่ออบแห้งมากกว่าหรือเท่ากับความยาวที่ต้องการ ให้ไปขั้นตอนที่ 8

7.1.2 ถ้าความยาวท่ออบแห้งน้อยกว่าความยาวที่ต้องการ ให้กลับไปทำงานในขั้นตอนที่ 5 ใหม่

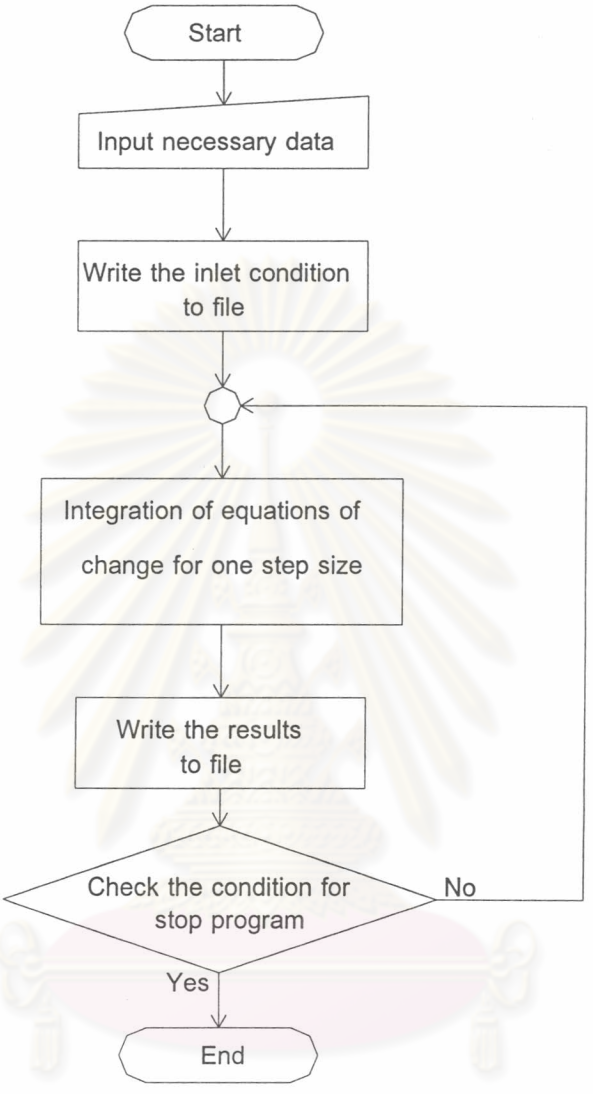
7.2 คำนวณความยาวท่ออบแห้งที่ความชื้นของกากอ้อยที่ต้องการ

7.2.1 ถ้าความชื้นของกากอ้อยน้อยกว่าความชื้นของกากอ้อยที่ต้องการ ให้ไปขั้นตอนที่ 8

7.2.2 ถ้าความชื้นของกากอ้อยมากกว่าความชื้นของกากอ้อยที่ต้องการ ให้กลับไปทำงานในขั้นตอนที่ 5 ใหม่

8. หยุดการทำงาน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.2 Flow chart

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย