บทที่ 2

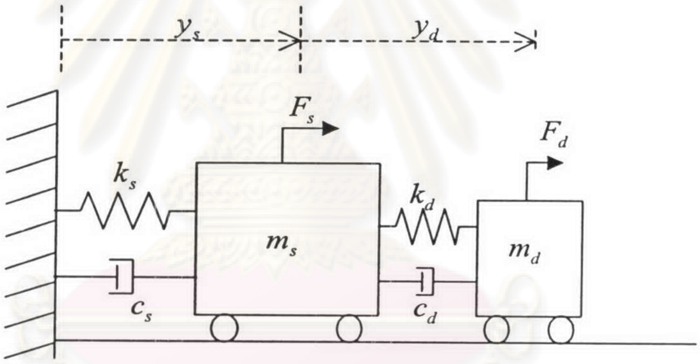
หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบต่าง ๆ

ในที่นี้จะพิจารณาระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีเดี่ยว ที่ทำการติดตั้งระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบต่าง ๆ

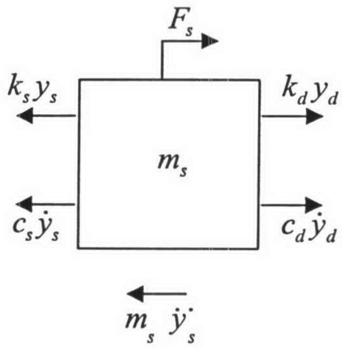
2.1.1 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

วิธีการของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟเป็นวิธีการที่เป็นที่ยอมรับอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน โดยวิธีการดังกล่าวจะใช้ระบบมวลย่อยหรือที่เรียกว่าระบบมวลหน่วงเป็นตัวช่วยในการสลายพลังงานของโครงสร้าง ซึ่งสามารถแสดงดังรูปที่ 2.1

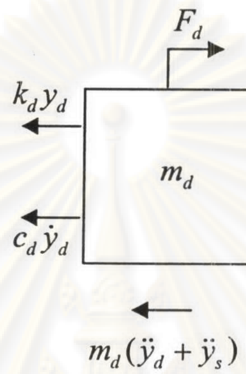


รูปที่ 2.1 แสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว พลังงานบางส่วนของโครงสร้างถูกจะถ่ายทอดสู่ระบบมวลย่อยซึ่งจะทำให้มวลย่อยสั่น ดังนั้นจึงเป็นการทำให้พลังงานการสั่นของโครงสร้างลดลง ระบบมวลหน่วงจึงถือว่าได้ช่วยลดพลังงานการสั่นของโครงสร้างทำให้โครงสร้างมีการสั่นน้อยลง ขั้นตอนการวิเคราะห์วิธีการควบคุมแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟนี้สามารถทำได้โดยวิเคราะห์จากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 แสดงแผนภาพอิสระของโครงสร้าง



รูปที่ 2.3 แสดงแผนภาพอิสระของมวลหน่วง

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งโครงสร้างและมวลย่อยสามารถหาได้จากแผนภาพอิสระของโครงสร้างและมวลหน่วงซึ่งจะได้ว่า

$$m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s - c_d \dot{y}_d - k_d y_d = F_s \tag{2.1}$$

$$m_d \ddot{y}_s + m_d \ddot{y}_d + c_d \dot{y}_d + k_d y_d = F_d \tag{2.2}$$

โดยที่ m_s เป็นขนาดมวลของโครงสร้าง

c_s เป็นค่าความหน่วงของโครงสร้าง

k_s เป็นค่าสติฟเนสของโครงสร้าง

y_s เป็นระยะการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเทียบกับตำแหน่งอ้างอิง

F_s เป็นแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

m_d เป็นขนาดมวลของระบบมวลหน่วง

c_d เป็นค่าความหน่วงของระบบมวลหน่วง

k_d เป็นค่าสติฟเนสของระบบมวลหน่วง

y_d เป็นระยะการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของระบบมวลหน่วงเทียบกับตำแหน่งของโครงสร้าง

F_d เป็นแรงที่กระทำต่อระบบมวลหน่วง

จากสมการการเคลื่อนที่ (2.1) และ (2.2) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการทางเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ m_d & m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_d \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

หรือ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{P} \quad ; \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix}, \ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} = \mathbf{W} \tag{2.4}$$

จากสมการที่ (2.4) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในลักษณะของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อที่จะทำการแก้สมการได้ง่ายกว่าดังต่อไปนี้

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

โดยที่

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_s m_d} \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ -m_d & m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix}$$

ให้ $\mu = m_d / m_s$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_s^2 & -\mu\omega_d^2 \\ 0 & \omega_d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 & -\mu\omega_d^2 \\ -\omega_s^2 & (1+\mu)\omega_d^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/m_s & 0\\ 0 & 1/m_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_s & -\boldsymbol{c_d}\\ 0 & \boldsymbol{c_d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\xi_s\omega_s & -2\mu\xi_d\omega_d\\ 0 & 2\xi_d\omega_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\xi_s\omega_s & -2\mu\xi_d\omega_d\\ -2\xi_s\omega_s & 2(1+\mu)\xi_d\omega_d\end{bmatrix}$$

สำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเนื่องจากลมเท่านั้นจะได้ว่า

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/\boldsymbol{m_s} & 0\\ 0 & 1/m_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_s\\ F_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/m_s & 0\\ -1/m_s & 1/m_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_s\\ F_d\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

เมื่อแทนค่าข้างต้นไปในสมการที่ (2.6) จะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_s\\ \dot{y}_d\\ \ddot{y}_s\\ \ddot{y}_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\omega_s^2 & \mu\omega_d^2 & -2\xi_s\omega_s & 2\mu\xi_d\omega_d\\ \omega_s^2 & -(1+\mu)\omega_d^2 & 2\xi_s\omega_s & -2(1+\mu)\xi_d\omega_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_s\\ y_d\\ \dot{y}_s\\ \dot{y}_d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

หรือ

$$\dot{\mathbf{Z}}=\mathbf{A}\mathbf{Z}+\mathbf{B}_{\mathbf{w}}\mathbf{W}\ ; \qquad \dot{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}y_s\\ y_d\\ \dot{y}_s\\ \dot{y}_d\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

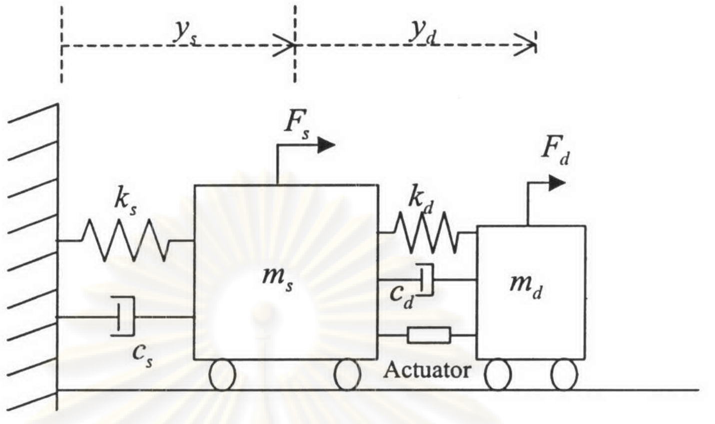
โดยที่

$$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1/m_s & 0\\ -1/m_s & 1/m_d\end{bmatrix},\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}F_s\\ F_d\end{bmatrix}$$

สมการที่ (2.9) เป็นสมการหลักที่ใช้ในการวิเคราะห์การสั่นไหวโดยวิธีการลดการสั่นไหวแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ แต่เนื่องจากว่าค่าพารามิเตอร์ของระบบมวลหน่วงในวิธีแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟนี้มีค่าคงที่ ดังนั้นในบางกรณีที่แรงที่กระทำมีความถี่และลักษณะที่เปลี่ยนไปจากที่คาดการณ์ไว้ในการวิเคราะห์หรือการหาค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างมีความคลาดเคลื่อน จะพบว่าทำให้ประสิทธิภาพของมวลหน่วงในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างจะลดลงอย่างมากเมื่อเทียบกับวิธีการแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟและระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟ

2.1.2 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟเป็นระบบที่ใช้ควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างโดยการให้แรงภายนอกที่เหมาะสมกระทำต่อโครงสร้างโดยตัวออกแรงดังแบบจำลองที่ได้แสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

การวิเคราะห์การสั่นไหวของระบบที่ใช้ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟนี้คล้ายคลึงกับขั้นตอนที่ได้แสดงไว้แล้วในส่วนที่เป็นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ โดยแรงที่กระทำต่อโครงสร้างและมวลหน่วงนอกจากผลของแรงลมแล้วยังคำนึงถึงแรงที่กระทำโดยตัวออกแรง $u(t)$ ที่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นเมตริกซ์ของแรงที่กระทำ ($\mathbf{P}$) จะมีพจน์ของ $u(t)$ และ $-u(t)$ เพิ่มขึ้นมาตามลำดับ ซึ่งจะได้ว่า

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_s \\ P_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} F_s + u(t) \\ F_d - u(t) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_s + u(t) \\ F_d - u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ -1/m_s & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_s + u(t) \\ F_d - u(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ -1/m_s & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ -1/m_s & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ -1/m_s & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m_s \\ -(m_s + m_d)/m_s m_d \end{bmatrix} u(t)
\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งตาม**สมการที่** (2.11)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \\ \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ -\omega_s^2 & \mu\omega_d^2 & -2\xi_s\omega_s & 2\mu\xi_d\omega_d \\ \omega_s^2 & -(1+\mu)\omega_d^2 & 2\xi_s\omega_s & -2(1+\mu)\xi_d\omega_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \\ \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

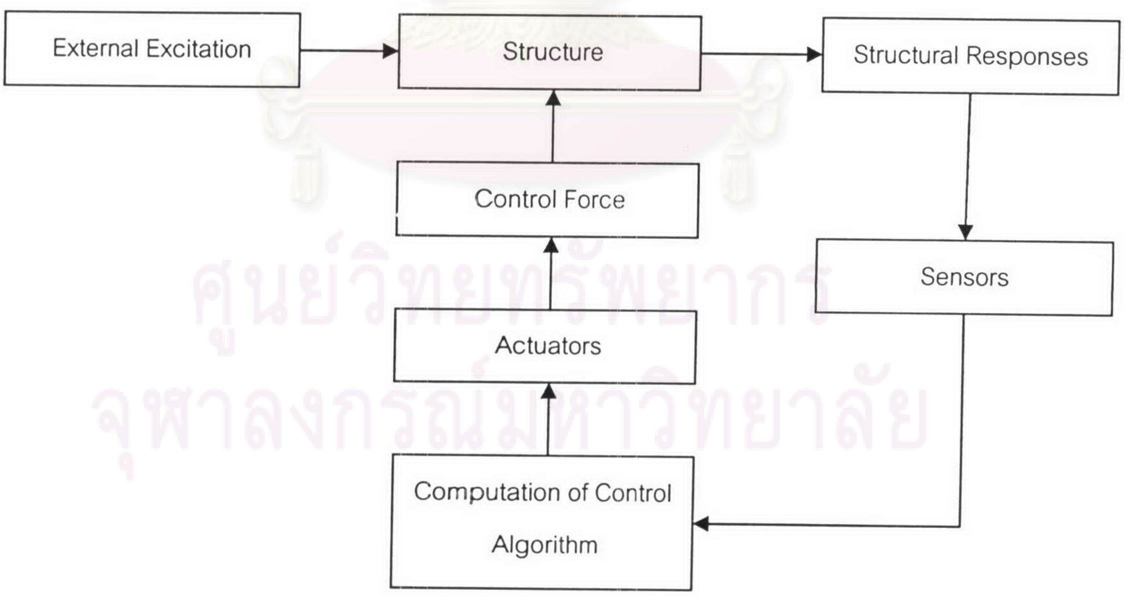
หรือ

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{B_w W} + \mathbf{B_u}u(t) \tag{2.12}$$

โดยที่

$$\mathbf{B_w} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} \\ 1/m_s & \mathbf{0} \\ -1/m_s & \mathbf{1/m_d} \end{bmatrix}, \; \mathbf{W} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix}, \; \mathbf{B_u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_s \\ -(m_s + m_d)/m_s m_d \end{bmatrix}$$

แรงที่กระทำต่อโครงสร้างเมื่อพิจารณาจากสมการที่ (2.12) จะพบว่าค่าแรงที่กระทำนี้มีผลต่อการสั่นของโครงสร้างโดยตรง ทั้งนี้การให้แรงดังกล่าวสามารถทำให้โครงสร้างมีค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนไปได้ทั้งด้านความถี่และความหน่วง การให้แรงที่เหมาะสมจะทำให้โครงสร้างมีการสั่นที่น้อยลงได้ โดยค่าแรงที่เหมาะสมนี้จะคำนวณจากสภาพการสั่นไหวของโครงสร้างในขณะนั้น ๆ ด้วยแอลกอรึทึมที่มีการติดตั้งไว้ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แผนผังขั้นตอนการทำงานในระบบควบคุมแบบแอกทีฟ

อุปกรณ์และขั้นตอนที่เป็นพื้นฐานของวิธีการควบคุมแบบแอกทีฟนี้ได้แก่

1. ตัววัดสัญญาณ (Sensor) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดการสั่นไหว (Response) ของโครงสร้าง
2. เครื่องมือที่รับสัญญาณการสั่นไหวมาจากตัววัดสัญญาณแล้วคำนวณค่าของแรงที่เหมาะสมตามแอลกอรีทึมควบคุมที่ได้ติดตั้งไว้
3. ตัวออกแรง (Actuator) เป็นตัวที่ใช้สร้างแรงกระทำต่อโครงสร้างตามแรงที่คำนวณได้

แอลกอรีทึมที่ใช้ในระบบควบคุมแบบแอกทีฟนี้มีหลายวิธีการแต่ในการศึกษานี้จะใช้วิธีการควบคุมแบบควอดราติกเชิงเส้น (Linear quadratic Control) ซึ่งการวิเคราะห์สร้างแอลกอริทึมควบคุมจะเลือกดัชนีสมรรถนะ (Performance index, J) เป็นพลังงานที่ถ่ายเทเข้าสู่โครงสร้างเนื่องจากการเกิดการสั่นไหวและพลังงานที่ต้องให้เพื่อควบคุมการสั่นไหวที่เกิดขึ้นนับตั้งแต่เวลาที่เริ่มพิจารณา นั่นคือจะพยายามให้มีพลังงานการสั่นไหวของโครงสร้างน้อยที่สุดพร้อม ๆ กับใช้ที่พลังงานน้อยที่สุดในการควบคุมการสั่นไหว ดังนั้นค่าดัชนีสมรรถนะสามารถเขียนได้เป็น

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(t) + ru^2(t)]\, dt \tag{2.13}$$

โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็นเมตริกซ์น้ำหนัก (weight matrix) สำหรับการตอบสนองของโครงสร้าง

r เป็นเมตริกซ์น้ำหนัก (weight matrix) สำหรับพลังงานที่ใช้ในการควบคุมการสั่นไหว

t_0, t_f เป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุดการควบคุมการสั่นไหว ตามลำดับ

จากหลักการของวิธี Linear Optimal Control สามารถหาค่าคำตอบของแรงควบคุม $u(t)$ ได้จากผลคูณของค่าการตอบสนองของระบบ $\mathbf{Z}(t)$ กับเมตริกซ์ผล (Gain matrix, $\mathbf{G}$) [Hart and Wong (1999)] ดังแสดงในสมการที่ (2.14) ดังนี้

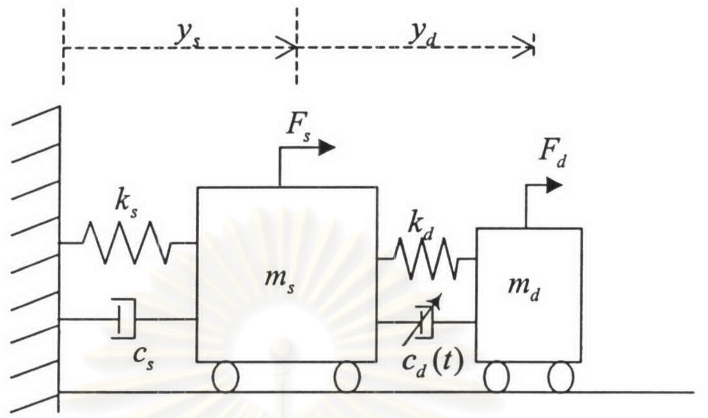
$$u(t) = \mathbf{G}\mathbf{Z}(t) = -\frac{1}{r}\mathbf{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Z}(t) \tag{2.14}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\mathbf{P}$ เป็นเมตริกซ์คำตอบที่ได้จากสมการที่มีรูปแบบของสมการริกกาติ (Riccati equation) ดังนี้

$$\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathrm{u}}\frac{1}{r}\mathbf{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

2.1.3 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟ

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟเป็นระบบที่ค่าพารามิเตอร์ของตัวหน่วงสามารถปรับค่าได้ดังแสดงในรูปที่ (2.6)



รูปที่ 2.6 แสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟ

ตัวหน่วงที่มีความสามารถในการปรับค่าความหน่วงของตัวเองจะทำหน้าที่ปรับเปลี่ยนสภาพของตัวเองให้มีความหน่วงที่เหมาะสมซึ่งค่าดังกล่าวมีสภาพเป็นเหมือนการให้แรงกระทำต่อโครงสร้างเพราะค่าความหน่วงในส่วนนี้เมื่อคูณกับความเร็วสัมพัทธ์ของระบบย่อยเทียบกับระบบโครงสร้างก็จะกลายเป็นแรงที่กระทำทั้งต่อระบบโครงสร้างและระบบย่อยซึ่งเป็นหลักการของวิธีการแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟ เพียงแต่ว่าค่าแรงดังกล่าวนี้มีข้อจำกัดคือ ทิศทางของแรงที่กระทำขึ้นอยู่กับทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์นั้น ๆ ทั้งนี้เพราะแรงนี้เป็นผลเนื่องมาจากผลคูณระหว่างค่าความหน่วงของตัวหน่วงปรับค่ากับค่าความเร็วสัมพัทธ์ นอกจากนี้อุปกรณ์ที่ใช้เป็นตัวหน่วงแม้จะสามารถปรับค่าความหน่วงได้แต่ก็มีขอบเขตในการปรับค่าคือสามารถปรับได้อยู่ในช่วง [$c_{d,\min}$ - $c_{d,\max}$] ดังนั้นจะได้ค่าความหน่วงที่เป็นฟังก์ชันกับเวลา $c_d(t)$ คือ

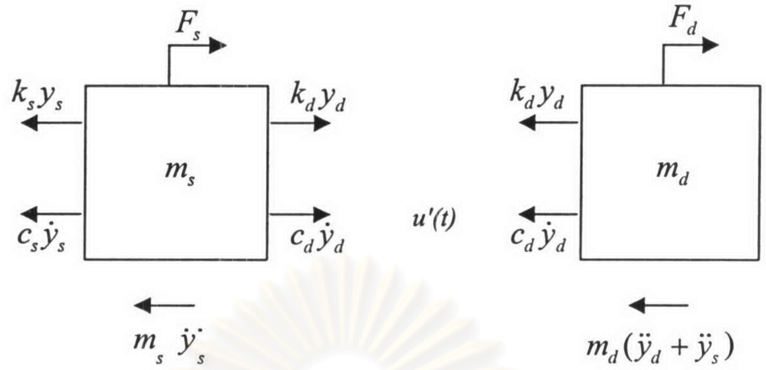
$$c_d(t) = \begin{cases} c_{d,max} & ; \quad c'_d(t) \geq c_{d,max} \\ c_d'(t) & ; \quad c_{d,min} < c'_d(t) < c_{d,max} \\ c_{d,min} & ; \quad c'_d(t) \leq c_{d,min} \end{cases} \tag{2.16}$$

โดยที่ $$c'_d(t) = \frac{u(t)}{\dot{y}_d(t)} \qquad ; \quad \dot{y}_d(t) \neq 0$$

$u(t)$ = ค่าแรงควบคุมที่ได้จากการคำนวณตามสมการที่ (2.14)

เช่นเดียวกับกรณีของการควบคุมแบบแอกทีฟ

ดังนั้นจะสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่เพื่อใช้วิเคราะห์ในระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟดังนี้



รูปที่ 2.7 แสดงแผนภาพอิสระของโครงสร้างและมวลหน่วงในวิธีการควบคุมแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟ

จากแผนภาพอิสระที่แสดงในรูปที่ 2.7 สามารถเขียนสมการสมดุลได้ดังสมการที่ (2.17) และ (2.18) ดังนี้

$$m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s - u'(t) - k_d y_d = F_s \tag{2.17}$$

$$m_d \ddot{y}_s + m_d \ddot{y}_d + u'(t) + k_d y_d = F_d \tag{2.18}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ (2.17) และ (2.18) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการทางเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ m_d & m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u'(t) \tag{2.19}$$

หรือ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{W} + \mathbf{C_u} u'(t) = \mathbf{P} \; ; \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

จากสมการที่ (2.20) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในลักษณะของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อที่จะทำการแก้สมการได้ง่ายกว่าทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

หรือ

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B_w}\mathbf{W} + \mathbf{B_u} u'(t) \tag{2.22}$$

โดยที่ $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_s^2 & \mu\omega_d^2 & -2\xi_s\omega_s & 0 \\ \omega_s^2 & -(1+\mu)\omega_d^2 & 2\xi_s\omega_s & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_s & 0 \\ -1/m_s & 1/m_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_s \\ -(m_s + m_d)/m_s m_d \end{bmatrix}$$

และค่าแรงควบคุมเป็น

$$u'(t) = c_d(t)\dot{y}_d \tag{2.23}$$

โดยที่ค่า $c_d(t)$ ที่เหมาะสมจะคำนวณได้จากสมการที่ (2.16)

2.1.4 การคำนวณหาผลตอบสนอง

จากสมการการเคลื่อนที่ที่ (2.9) (2.12) และ (2.22) ซึ่งเป็นสมการต่อเนื่องในโดเมนของเวลาสามารถแปลงเป็นสมการระดับขั้นของเวลา [Leonard (1990)] ได้เป็น

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{A_d}\mathbf{Z}_k + \mathbf{B_{dw}}\mathbf{W}_k + \mathbf{B_{du}}u_k \tag{2.24}$$

โดยที่ $$\mathbf{A_d} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$$

$$\mathbf{B_{dw}} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{B_w}$$

$$\mathbf{B_{du}} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{B_u}$$

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

สมการที่ (2.24) เป็นสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์การสั่นไหว โดยแรงควบคุม $u(t)$ ที่ระดับขั้นเวลา k คำนวณจากผลการตอบสนองของระบบที่เวลาก่อนหน้าดังแสดงในสมการที่ (2.25)

$$u_k = \mathbf{G}\mathbf{Z}_{k-1} \tag{2.25}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\mathbf{G}$ เป็นเมตริกซ์ค่าคงที่ที่ได้จากวิธีการควบคุมแบบควอดราติกเชิงเส้นซึ่งคำนวณได้จากพารามิเตอร์ $\mathbf{A}$ $\mathbf{B_u}$ $\mathbf{Q}$ และ r

จากหลักการดังกล่าวจะพบได้ว่าการใช้ตัวหน่วงที่ปรับค่าได้นี้มิได้เป็นการใช้แรงกระทำต่อโครงสร้างโดยตรงแต่สามารถสร้างแรงที่เหมาะสมกระทำต่อโครงสร้างได้จากผลตอบสนองของโครงสร้างเอง ซึ่งโดยปกติแล้วถ้าหากว่าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่ามาก จำเป็นจะต้องใช้แรงจำนวนมากในระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ แต่สำหรับระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟแล้วถ้าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่ามาก ค่าแรงที่เกิดจากตัวหน่วงปรับค่าก็จะมีค่ามากตามไปด้วย และถ้าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่าน้อย แรงที่ตัวหน่วงปรับค่าก็จะมีค่าน้อยเหมาะสมกันพอดี ดังนั้นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบเซมิแอกทีฟจึงมีเสถียรภาพมากกว่าระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ นอกจากนั้นหลักการนี้ยังแสดงให้เห็นด้วยว่าแม้ว่าระบบควบคุมการทำงานของตัวหน่วงปรับค่าไม่ทำงานแต่สภาพโดยรวมของระบบก็จะมีสภาพเป็นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟระบบหนึ่งทั้งนี้เพราะตัวหน่วงปรับค่าจะมีสภาพเป็นตัวหน่วงคงที่ตัวหนึ่งเท่านั้น

2.2 การลดลำดับของแบบจำลอง [Wu J. C. และคณะ (1998)]

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบโครงสร้างอาคารสูง N ชั้น (N ระดับขั้นความเสรี) ซึ่งเป็นระบบสมการที่ยังไม่ได้ทำการลดลำดับ หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ระบบที่มีลำดับเต็ม (Full-Order System)

$$\mathbf{M_S}\ddot{\mathbf{X}}(t)+\mathbf{C_S}\dot{\mathbf{X}}(t)+\mathbf{K_S}\mathbf{X}(t)=\mathbf{H}\mathbf{U}(t)+\mathbf{W}(t) \tag{2.26}$$

โดยที่ $\mathbf{X}(t)=\left[X_1(t),X_2(t),X_3(t),............,X_N(t)\right]^T$

$X_i(t)$ คือ ระยะการเคลื่อนที่ของชั้นที่ i

$\mathbf{U}(t)=\left[u_1(t),u_2(t),u_3(t),............,u_R(t)\right]^T$ เป็นเวคเตอร์แสดงตัวให้แรงควบคุม

R คือ จำนวนตัวให้แรง

$\mathbf{W}(t)=\left[W_1(t),W_2(t),W_3(t),............,W_N(t)\right]^T$ เป็นเวคเตอร์แสดงแรงลมที่กระทำ

$W_i(t)$ คือ แรงลมที่กระทำที่ชั้นที่ i

$\mathbf{M_S}$ $\mathbf{C_S}$ และ $\mathbf{K_S}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $N\times N$ ของมวล ความหน่วง และสติฟเนสของโครงสร้าง ตามลำดับ

$\mathbf{H}$ เป็นเมตริกซ์แสดงตำแหน่งของตัวให้แรงควบคุมขนาด $N\times R$

การใช้สมการ State Space จะสามารถจัดรูปสมการที่ (2.26) ให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งมีจำนวนตัวแปรเท่ากับ $2N$ ได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{AZ}(t) + \mathbf{BU}(t) + \mathbf{EW}(t) \tag{2.27}$$

โดยที่ $\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \dot{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix}_{2N \times 1}$ เป็นเวคเตอร์ของตัวแปร ซึ่งประกอบด้วยระยะการเคลื่อนที่และความเร็วของแต่ละชั้น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_S^{-1}\mathbf{K}_S & -\mathbf{M}_S^{-1}\mathbf{C}_S \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_S^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}_{2N \times R}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_S^{-1} \end{bmatrix}_{2N \times N}$$

เวคเตอร์ที่แสดงผลตอบสนองของโครงสร้าง (เวคเตอร์ $\mathbf{y}$) ตามตำแหน่งการตรวจจับของตัววัดค่า (sensor) m ตัว สามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mathbf{y} = \mathbf{CZ}(t) \tag{2.28}$$

โดยที่ $\mathbf{C}$ เป็น Observation Matrix ซึ่งมีขนาด $m \times 2N$

ทำการพิจารณาลดระบบสมการจาก $2N$ ระดับขั้นความเสรี ให้เหลือ K ระดับขั้นความเสรี โดยวิธีการลดลำดับของแบบจำลอง (State Reduce-Order) จากสมการที่ (2.27) จะสามารถจัดระบบสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_C(t) \\ \dot{\mathbf{Z}}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_C & \mathbf{A}_{CR} \\ \mathbf{A}_{RC} & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_C(t) \\ \mathbf{Z}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C \\ \mathbf{B}_R \end{bmatrix} \mathbf{U}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_C \\ \mathbf{E}_R \end{bmatrix} \mathbf{W}(t) \tag{2.29}$$

โดยที่ $\mathbf{Z}_C(t) = \left[\, Z_1(t)\ ,\ Z_2(t),\ Z_3(t)\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ ,\ Z_K(t) \right]^T \quad ; K \le 2N$

เป็นเวคเตอร์ของตัวแปร ซึ่งประกอบด้วยระยะการเคลื่อนที่และความเร็วของชั้นที่ทำการเลือกจำนวน $K/2$ ชั้น

สับสคริปต์ **c** แสดงถึงตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับชั้นที่ทำการเลือก

สับสคริปต์ **R** แสดงถึงตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับชั้นที่ไม่ได้ทำการเลือก

จากระบบสมการที่ (2.29) เมตริกซ์ $\mathbf{C}$ ในสมการที่ (2.28) สำหรับระบบที่ทำการลดลำดับ (Reduce-Order System) จะกลายเป็น $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C_K} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ โดยที่ $\mathbf{C_K}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $m\times K\,;(K\geq m)$

ให้ $\mathbf{Y}$ คือ พิกัดทั่วไปของระบบ (Generalize Coordinate) และ $\mathbf{\Gamma}=[\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2,\mathbf{\Gamma}_3,\dots\dots\dots,\mathbf{\Gamma}_{2N}]$ คือ ไอเกนเวคเตอร์เมตริกซ์ (eigenvector matrix) ของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่สอดคล้องกัน สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\mathbf{Z}(t)=\mathbf{\Gamma}\mathbf{Y}(t) \tag{2.30}$$

แทนสมการที่ (2.30) และใช้คุณสมบัติของไอเกนเวคเตอร์ คือ $\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}[\Lambda_1,\Lambda_2,\dots,\Lambda_N]$ โดยที่ Λ_i เป็น ไอเกนแวลู (eigenvalue) ที่ i ของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ ลงในสมการที่ (2.27) จะสามารถจัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}(t)+\mathbf{\Gamma}^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(t)+\mathbf{E}\mathbf{W}(t)] \tag{2.31}$$

ให้ $\mathbf{S}_i$ เป็นเวคเตอร์ตามแถวที่ i ของเมตริกซ์ $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ แล้ว ผลเฉลยของค่า Y_i จะมีค่าเป็น

$$Y_i^F(t)=\int_0^t e^{\Lambda_i(t-\tau)}\mathbf{S}_i[\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)+\mathbf{E}\mathbf{W}(\tau)]d\tau \quad ;\ i=1,2,3,\dots\dots\dots\dots,2N \tag{2.32}$$

จากสมการที่ (2.30) สามารถจัดระบบสมการใหม่ที่แยกตัวแปรที่ทำการเลือกได้เป็น

$$\mathbf{Z}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{Z_C}(t)\\ \mathbf{Z_R}(t)\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{2N}\mathbf{\Gamma}_i Y_i(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma_C} & \mathbf{\Gamma_{CR}}\\ \mathbf{\Gamma_{RC}} & \mathbf{\Gamma_R}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{Y_C}(t)\\ \mathbf{Y_R}(t)\end{bmatrix} \tag{2.33}$$

สมมติให้ผลตอบสนองของโครงสร้างส่วนใหญ่มาจากผลของโหมดแรก ๆ จะสามารถประมาณผลตอบสนองได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z_C}(t)\\ \mathbf{Z_R}(t)\end{bmatrix}\approx\sum_{i=1}^{K}\mathbf{\Gamma}_i Y_i(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma_C}\\ \mathbf{\Gamma_{RC}}\end{bmatrix}\mathbf{Y_C}(t) \tag{2.34}$$

จากสมการที่ (2.34) จะแยกออกมาเขียนได้เป็น

$$\mathbf{Y_C}(t)=\mathbf{\Gamma_C^{-1}Z_C}(t) \tag{2.35}$$

$$\mathbf{Z_R}(t)=\mathbf{\Gamma_{RC}Y_C}(t)=\mathbf{\Gamma_{RC}\Gamma_C^{-1}Z_C}(t) \tag{2.36}$$

แทน $\mathbf{Z_R}$ ที่ได้ในสมการที่ (2.36) ลงในระบบสมการแรกของสมการที่ (2.29) จะได้

$$\dot{\mathbf{Z}}_\mathbf{C}(t)=\mathbf{A_C^{*}Z_C}(t)+\mathbf{B_C U}(t)+\mathbf{E_C W}(t) \tag{2.37}$$

โดยที่ $\mathbf{A_C^{*}}=\mathbf{A_C}+\mathbf{A_{CR}\Gamma_{RC}\Gamma_C^{-1}}$

เพื่อที่จะได้คำตอบ Y_i ที่ถูกต้องโดยปราศจากการสมมติใด ๆ จะต้องทำการปรับค่า $\mathbf{B_C}$ และ $\mathbf{E_C}$ เป็น $\mathbf{B_C^{*}}$ และ $\mathbf{E_C^{*}}$ ตามลำดับ ดังนั้นสมการที่ (2.37) จะกลายเป็น

$$\dot{\mathbf{Z}}_\mathbf{C}(t)=\mathbf{A_C^{*}Z_C}(t)+\mathbf{B_C^{*}U}(t)+\mathbf{E_C^{*}W}(t) \tag{2.38}$$

ในการหาค่า $\mathbf{B_C^{*}}$ และ $\mathbf{E_C^{*}}$ ทำได้โดยการสมมติให้ $\mathbf{\Gamma}_C=\left[\mathbf{\Gamma}_{C1},\mathbf{\Gamma}_{C2},\mathbf{\Gamma}_{C3},\ldots\ldots\ldots\ldots,\mathbf{\Gamma}_{CK}\right]$ เป็น eigenvector matrix ของ $\mathbf{A_C^{*}}$ แล้วจะสามารถหาผลเฉลยจากสมการที่ (2.38) ได้เป็น

$$Y_i^R(t)=\int_0^t e^{\Lambda_i(t-\tau)}\mathbf{S}_i^{*}\left[\mathbf{B}_\mathbf{C}^{*}\mathbf{U}(\tau)+\mathbf{E_C^{*}W}(\tau)\right]d\tau \quad ;\ i=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,K \tag{2.39}$$

โดยที่ $\mathbf{S}^{*}=\mathbf{\Gamma_C^{-1}}=\left[\mathbf{S}_1^{*T},\ \mathbf{S}_2^{*T},\ \mathbf{S}_3^{*T},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \mathbf{S}_K^{*T}\right]$

นำสมการที่ (2.39) จับเท่ากับสมการที่ (2.32) จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$\mathbf{S}_i^{*}\left[\mathbf{B_C^{*}U}(\tau)+\mathbf{E_C^{*}W}(\tau)\right]=\mathbf{S}_i\left[\mathbf{BU}(\tau)+\mathbf{EW}(\tau)\right] \quad ;\ i=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,K \tag{2.40}$$

จากสมการที่ (2.40) จะสามารถหาค่า $\mathbf{B_C^{*}}$ และ $\mathbf{E_C^{*}}$ ได้เป็น

$$\mathbf{B_C^{*}}=\mathbf{\Gamma_C}\left[\mathbf{S}_1^T,\ \mathbf{S}_2^T,\ \mathbf{S}_3^T,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\mathbf{S}_K^T\right]^T\mathbf{B} \tag{2.41}$$

$$\mathbf{E_C^{*}}=\mathbf{\Gamma_C}\left[\mathbf{S}_1^T,\mathbf{S}_2^T,\mathbf{S}_3^T,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\mathbf{S}_K^T\right]^T\mathbf{E} \tag{2.42}$$