

## บทที่ 2

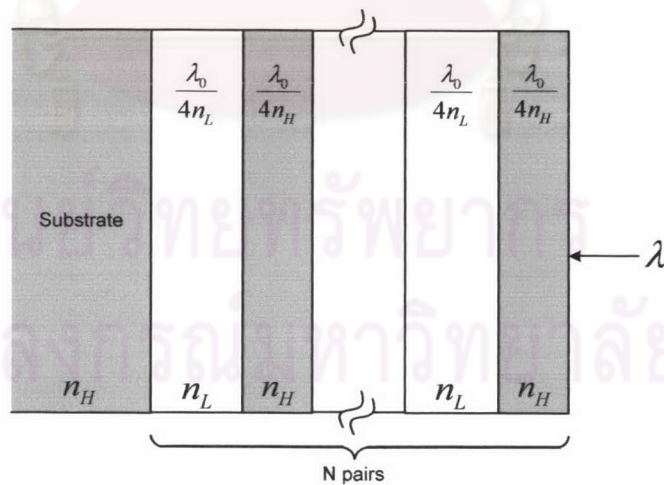
### ทฤษฎี

#### 2.1 แบริกร์เฟกเตอร์

แบริกร์เฟกเตอร์เป็น โครงสร้างที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในสิ่งประดิษฐ์ทางแสงต่างๆ เช่น ออปติคัลฟิลเตอร์ (optical filter), เลเซอร์ชนิดเปล่งแสงที่ผิว (surface-emitting lasers) เป็นต้น เนื่องจากสามารถสร้างรวมเข้ากับสิ่งประดิษฐ์อื่นๆ ได้ง่าย และสามารถกำหนดค่าการสะท้อนและค่าการส่งผ่านได้ โดยการออกแบบลักษณะโครงสร้างและเลือกชนิดของสารกึ่งตัวนำที่ใช้ โครงสร้างแบริกร์เฟกเตอร์ประกอบขึ้นด้วยชั้นของสารกึ่งตัวนำสองชนิดที่มีดัชนีหักเหต่างกันมา เรียงสลับกันหลายๆ ชั้น โดยแต่ละชั้นมีความหนา ( $d$ ) เป็น [1]

$$d = \frac{\lambda_0}{4n} \quad (1)$$

โดย  $\lambda_0$  เป็นค่าความยาวคลื่นใช้งานในสุญญากาศ ในวิทยานิพนธ์นี้  $\lambda_0$  มีค่าเท่ากับ 1.3  $\mu\text{m}$  และ  $n$  เป็นค่าดัชนีหักเหของสารกึ่งตัวนำที่ความยาวคลื่นใช้งาน โครงสร้างพื้นฐานของแบริกร์เฟกเตอร์แสดงดังในรูปที่ 2.1 โดยมีคลื่นแสงเดินทางมาตกกระทบจากทางด้านขวามือดังแสดงด้วยลูกศร



รูปที่ 2.1 โครงสร้างแบริกร์เฟกเตอร์พื้นฐานจำนวน N คู่

การวิเคราะห์โครงสร้างแบริกร์เฟกเตอร์ในงานนี้ใช้หลักการสะท้อนและส่งผ่านของคลื่น บริเวณผิวระนาบมาคำนวณหาค่าการสะท้อนที่ความยาวคลื่นต่างๆ ดังจะได้กล่าวต่อไป

## 2.2 ดัชนีหักเหของตัวกลาง

เมื่อแสงแพร่ผ่านตัวกลางชนิดต่างๆ ค่าความเร็วของแสงในตัวกลางแต่ละชนิดนี้จะแตกต่างกันไปด้วย ค่าอัตราส่วนค่าความเร็วของแสงในสุญญากาศต่อค่าความเร็วของแสงในตัวกลางใดๆ เรียกว่าดัชนีหักเห ( $n$ ) ของตัวกลางนั้น ค่าดัชนีหักเหของตัวกลางมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามความยาวคลื่นของแสงที่ตกกระทบ สำหรับ InP, GaAs และ InAlGaAs สามารถประมาณค่าดัชนีหักเหได้จากสมการ Sellmeier อันดับหนึ่ง [1] คือ

$$n^2 = A + \frac{B\lambda^2}{\lambda^2 - C^2} \quad (2)$$

โดยสัมประสิทธิ์  $A$ ,  $B$  และ  $C$  เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลางดังในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 สัมประสิทธิ์ของสมการ Sellmeier สำหรับ InP, GaAs และ InAlGaAs

	$(\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52})_X(\text{Ga}_{0.47}\text{In}_{0.53})_{1-X}$ As [1]	InP [2]	GaAs [3]
$A$	9.689-1.012X	7.283	8.950
$B$	1.590-0.376X	2.337	2.054
$C$	$1102.4-702.0X+330.4X^2$	$0.622 \times 10^3$	$0.390 \times 10^3$

สำหรับ GaAlAs จะใช้สมการ Sellmeier ในอีกรูปแบบหนึ่ง [3] คือ

$$n^2 = A + \frac{C_0}{(E_0^2 - E^2)} + \frac{C_1}{(E_1^2 - E^2)} \quad (3)$$

โดย  $E$  เป็นค่าพลังงานของแสงหรือโฟตอนที่ตกกระทบ  $A$ ,  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $C_0$  และ  $C_1$  เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลาง ซึ่งในกรณีของ  $\text{Ga}_{1-X}\text{Al}_X\text{As}$  จะมีค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ คือ

$$A = A_0 - 16.159X + 43.511X^2 - 71.317X^3 + 57.535X^4 - 17.451X^5$$

$$A_0 = 5.9613 + 7.178 \times 10^{-4}T - 0.953 \times 10^{-6}T^2$$

$$E_0 = E_{\Gamma\text{GaAs}} + 1.1308X + 0.1436X^2$$

$$E_{\Gamma\text{GaAs}}(T) = E_{\Gamma}(0) + 28.62 \times 10^{-3} \left[ 1 - \coth\left(\frac{92.259}{T}\right) \right]$$

$$+ 36.96 \times 10^{-3} \left[ 1 - \coth\left(\frac{194.962}{T}\right) \right]$$

$$E_1^2 = E_{10}^2 + 11.006X - 3.08X^2$$

$$E_{10}^2(T) = 4.7171 - 3.237 \times 10^{-4}T - 1.358 \times 10^{-6}T^2$$

$$\frac{1}{C_0} = 50.535 - 150.7X - 62.209X^2 + 797.16X^3 - 1125X^4 + 503.79X^5$$

$$C_1 = 21.5647 + 113.74X - 122.5X^2 + 108.401X^3 - 47.318X^4$$

โดย  $T$  เป็นอุณหภูมิในหน่วยเคลวิน และ  $X$  เป็นเศษส่วนโมลของ Al ใน GaAlAs

### 2.3 การสะท้อนของคลื่นระนาบจากตัวกลางที่เป็นชั้น [4]

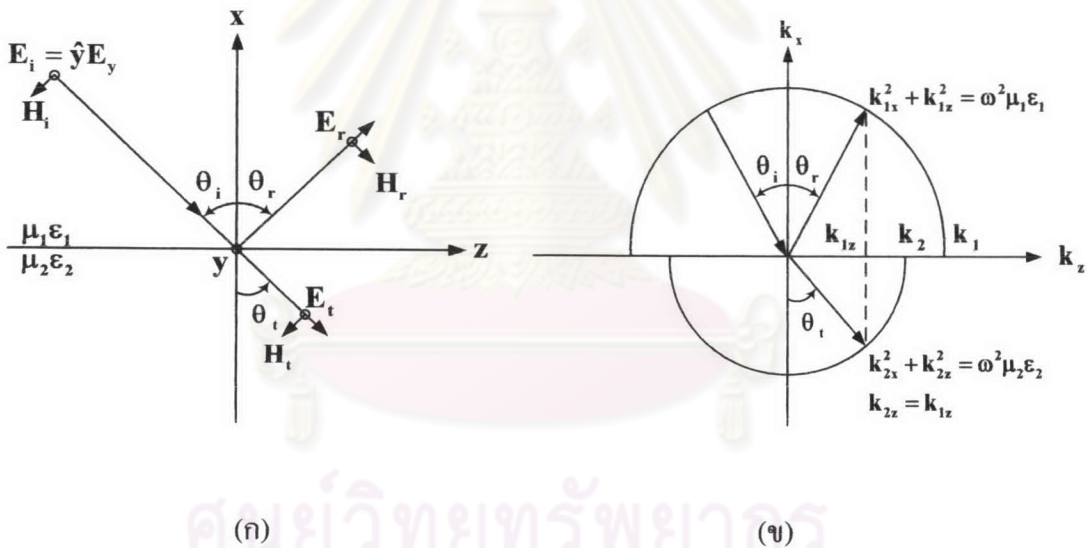
#### 2.3.1 โพลาริเซชันแบบ TE

พิจารณาคลื่นระนาบตกกระทบลงบนบริเวณรอยต่อระนาบดังแสดงในรูปที่ 2.2 (ก) โดยสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{E}_i = \hat{y}E_y = \hat{y}E_0 e^{-ik_{1x}x + ik_{1z}z} \quad (4)$$

และสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \frac{1}{i\omega\mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_i \\ &= \frac{-1}{i\omega\mu_1} (k_{1z}\hat{x} + k_{1x}\hat{z}) E_0 e^{-ik_{1x}x + ik_{1z}z} \end{aligned} \quad (5)$$



(ก)

(ข)

รูปที่ 2.2 (ก) คลื่นระนาบสะท้อนจากผิวระนาบ

(ข) รูปแบบ phase-matching สำหรับคลื่นสะท้อนและส่งผ่าน

โดยองค์ประกอบของเวกเตอร์คลื่นเป็นไปตามความสัมพันธ์ดิสเพอร์ชัน (Dispersion) คือ

$$k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 = k_0^2 n_1^2 \quad (6)$$

ซึ่ง  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$  คือเลขคลื่นในสุญญากาศ และ  $n_1 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1 / (\mu_0 \epsilon_0)}$  คือดัชนีหักเหของวัสดุ โดยทั่วไปสำหรับสารไดอิเล็กทริก  $\mu_1 = \mu_0$

คลื่นสะท้อนจะมีค่าสนามไฟฟ้าและค่าสนามแม่เหล็กเท่ากับ

$$\mathbf{E}_r = \hat{y}rE_0 e^{ik_{1x}^r x + ik_{1z}^r z} \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{\omega\mu_1} (-k'_{1z}\hat{x} + k'_{1x}\hat{z}) r E_0 e^{ik'_{1x}x + ik'_{1z}z} \quad (8)$$

ส่วนคลื่นส่งผ่านจะมีค่าสนามไฟฟ้าและค่าสนามแม่เหล็กเท่ากับ

$$\mathbf{E}_t = \hat{y} t E_0 e^{-ik_{2x}x + ik_{2z}z} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{-1}{\omega\mu_2} (k_{2z}\hat{x} + k_{2x}\hat{z}) t E_0 e^{-ik_{2x}x + ik_{2z}z} \quad (10)$$

โดยที่

$$k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 = k_0^2 n_2^2 \quad (11)$$

$$\text{และ } n_2 = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2 / (\mu_0 \epsilon_0)}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามไฟฟ้าในทิศตั้งฉาก ( $E_y$ ) ต่อเนื่องที่  $x=0$  จะได้ว่า

$$E_0 e^{ik_{1z}z} + r E_0 e^{ik'_{1z}z} = t E_0 e^{ik_{2z}z} \quad (12)$$

สำหรับทุกค่าของ  $z$  จะได้

$$k_{1z} = k'_{1z} = k_{2z} \quad (13)$$

$$1 + r = t \quad (14)$$

สมการ (13) คือกฎของสเนลล์ หรือเงื่อนไขของ phase-matching (รูปที่ 2.2 (ข)) ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปใหม่ได้ว่า

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (15)$$

หรือ

$$\theta_i = \theta_r \text{ และ } n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (16)$$

$$\text{ซึ่ง } k_i = \omega \sqrt{\mu_i \epsilon_i} = k_0 n_i, i=1,2$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตอื่นๆ ซึ่งสนามแม่เหล็กตั้งฉาก ( $H_z$ ) ต่อเนื่องที่  $x=0$  จะได้ว่า

$$1 - r = \frac{\mu_1 k_{2x} t}{\mu_2 k_{1x}} \quad (17)$$

แก้สมการ (14) และ สมการ (17) เพื่อหา  $r$  และ  $t$  ซึ่งได้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน (reflection coefficient) ตามสมการ

$$r = \frac{1 - P_{12}}{1 + P_{12}} \text{ เมื่อ } P_{12} = \frac{\mu_1 k_{2x}}{\mu_2 k_{1x}} \quad (18)$$

และค่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่าน (transmission coefficient)

$$t = \frac{2}{1 + P_{12}} \quad (19)$$

สำหรับสนามไฟฟ้า

ในกรณีที่เป็นการสะท้อนตั้งฉาก  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $k_{2z} = k_2 = k_0 n_2$  และ  $k_{1z} = k_1 = k_0 n_1$  จะได้สัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่านเป็น



$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{และ} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (20)$$

### 2.3.2 โพลาริเซชันแบบ TM

ผลของโพลาริเซชันแบบ TM สามารถหาได้จากหลักการคู่ (Duality) โดยการเปลี่ยนปริมาณทางฟิสิกส์ในสมการที่ 17 ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \hat{y}H_y \\ &= \hat{y}H_0 e^{-ik_1 x + ik_1 z} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_r = \hat{y}r_{\text{TM}} H_0 e^{+ik_1 x + ik_1 z} \quad (22)$$

$$\mathbf{H}_t = \hat{y}t_{\text{TM}} H_0 e^{-ik_2 x + ik_2 z} \quad (23)$$

โดยที่  $k_{2z} = k_{1z}$  และ

$$r_{\text{TM}} = \frac{1 - P_{12}}{1 + P_{12}} \quad \text{เมื่อ} \quad P_{12} = \frac{\epsilon_1 k_{2x}}{\epsilon_2 k_{1x}} \quad (24)$$

$$t_{\text{TM}} = \frac{2}{1 + P_{12}} \quad (25)$$

**2.3.3 การวิเคราะห์ที่โปรปากชันเมทริกซ์ (Propagation matrix approach) สำหรับการสะท้อนของคลื่นระนาบจากตัวกลางหลายชั้น**

ถ้าตัวกลางไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (Inhomogeneous) ในทิศทาง  $x$  ซึ่ง  $\epsilon = \epsilon(x)$  และ  $\mu = \mu(x)$  จะสามารถแบ่งค่าเพอร์มิตติวิตี (Permittivity) และเพอร์มีบิลิตี (Permeability) ออกเป็นช่วงๆ และใช้วิธีโพรปากชันเมทริกซ์ (Propagation matrix method) ได้ว่า

$$\mu_\ell = \mu(x_\ell) \quad (26)$$

$$\epsilon_\ell = \epsilon(x_\ell) \quad (27)$$

สำหรับ  $-d_{\ell-1} \geq x \geq -d_\ell$  ดังในรูปที่ 2.3 ในกรณีของคลื่นตกกระทบแบบ TE

$$\mathbf{E}_i = \hat{y}E_0 e^{-ik_0 x + ik_0 z} \quad (28)$$

จะได้คลื่นสะท้อน

$$\mathbf{E}_r = \hat{y}rE_0 e^{ik_0 x + ik_0 z} \quad (29)$$

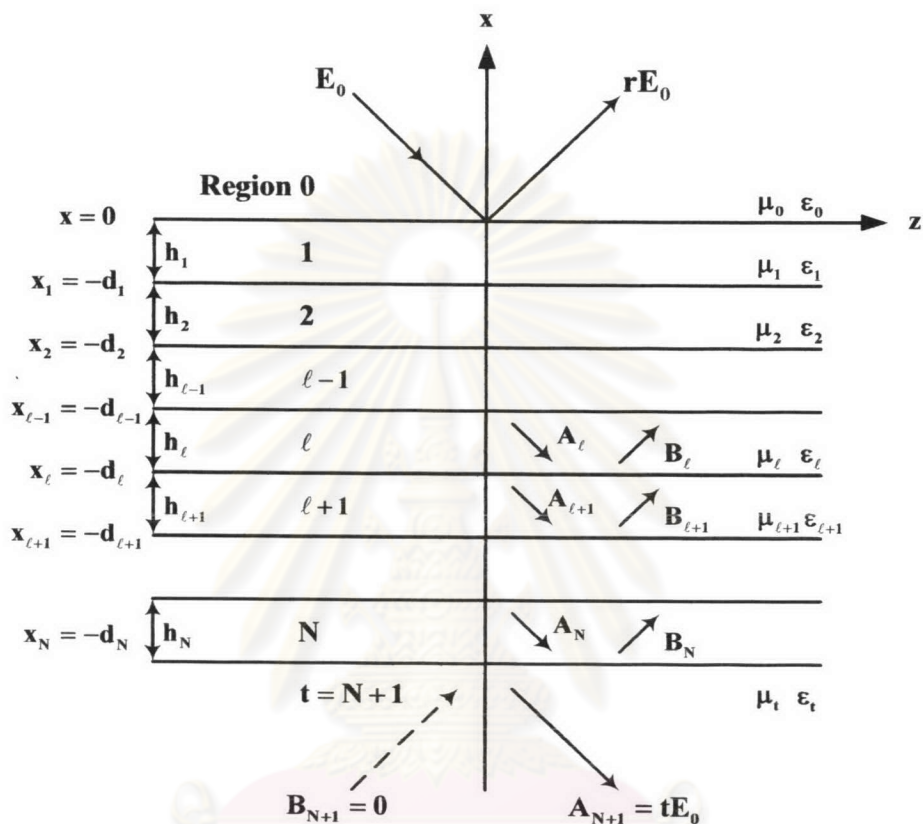
ในชั้นที่  $\ell$ ,  $x_{\ell-1} \geq x \geq x_\ell$ , สนามไฟฟ้ามีค่าเป็น  $\mathbf{E}_\ell = \hat{y}E_y^\ell$  ซึ่ง

$$E_y^\ell = \left( A_\ell e^{-ik_{\ell x}(x+d_\ell)} + B_\ell e^{+ik_{\ell x}(x+d_\ell)} \right) e^{ik_{\ell z} z} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} H_z^\ell &= \frac{1}{i\omega\mu_\ell} \frac{\partial}{\partial x} E_y^\ell \\ &= \frac{-k_{\ell x}}{\omega\mu_\ell} \left( A_\ell e^{-ik_{\ell x}(x+d_\ell)} - B_\ell e^{+ik_{\ell x}(x+d_\ell)} \right) e^{ik_{\ell z} z} \end{aligned} \quad (31)$$

และ  $k_{lx} = \sqrt{\omega^2 \mu_l \epsilon_l - k_{0z}^2}$ ,  $k_{lz} = k_{0z}$  สำหรับทุกค่า  $l$  เงื่อนไขขอบเขตคือ  $E_y$  และ  $H_z$  ที่มีความต่อเนื่องที่  $x = -d_l$  ได้

$$A_l + B_l = A_{l+1} e^{-ik_{(l+1)x}(-d_l+d_{l+1})} + B_{l+1} e^{ik_{(l+1)x}(-d_l+d_{l+1})} \quad (32)$$



รูปที่ 2.3 คลื่นระนาบที่มีโพลาไรเซชันแบบ TE  $\mathbf{E} = \hat{y}E_y = \hat{y}E_0 e^{-ik_{0x}x + ik_{0z}z}$

ตกกระทบบนตัวกลางหลายชั้น

$$A_l - B_l = \frac{\mu_l k_{(l+1)x}}{\mu_{l+1} k_{lx}} \left( A_{l+1} e^{-ik_{(l+1)x}(-d_l+d_{l+1})} - B_{l+1} e^{ik_{(l+1)x}(-d_l+d_{l+1})} \right) \quad (33)$$

ในทำนองเดียวกันกับการแผ่ของคลื่นใน 1 มิติ เรานิยาม

$$P_{l(l+1)} = \frac{\mu_l k_{(l+1)x}}{\mu_{l+1} k_{lx}} \quad (34)$$

และความหนาของชั้นที่  $l+1$  มีค่า

$$h_{l+1} = d_{l+1} - d_l \quad (35)$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} = \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{l(l+1)} \begin{bmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

ซึ่งไปปรากฏชั้นเมทริกซ์ย้อนกลับ (Backward-propagation matrix)  $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_{\ell(\ell+1)}$  นิยามว่า

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_{\ell(\ell+1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + P_{\ell(\ell+1)})e^{-ik_{(\ell+1)}x^{h_{\ell+1}}} & (1 - P_{\ell(\ell+1)})e^{ik_{(\ell+1)}x^{h_{\ell+1}}} \\ (1 - P_{\ell(\ell+1)})e^{-ik_{(\ell+1)}x^{h_{\ell+1}}} & (1 + P_{\ell(\ell+1)})e^{ik_{(\ell+1)}x^{h_{\ell+1}}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ขนาดของคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนนี้มีความสัมพันธ์กับขนาดของคลื่นส่งผ่านในชั้นที่  $N+1$  ตามสมการ

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ rE_0 \end{bmatrix} = \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{01} \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{12} \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{23} \cdots \bar{\bar{\mathbf{B}}}_{N(N+1)} \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tE_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$B_{N+1} = 0$  เนื่องจากไม่มีคลื่นตกกระทบจากชั้นล่างสุดในรูปที่ 2.3 เราได้ค่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่านของตัวกลางหลายชั้นตามสมการ

$$t = \frac{1}{b_{11}} \quad (40)$$

และค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของตัวกลางหลายชั้น

$$r = \frac{b_{21}}{b_{11}} \quad (41)$$

และมีค่าการสะท้อนเป็น

$$R = |r|^2 \quad (42)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย