รายการอ้างอิง

Abbo A.J. and Sloan S.W. 1997. A Finite element program for the analysis of elastoplasticity and consolidation Department of Civil, Surveying and Environmental Engineering, University of Newcastle.

Bathe K.J. 1996. Finite element procedures Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Belytschko T., Liu W. K. and Moran B. 2000. Nonlinear finite elements for continua and structures John Wiley & Sons ltd.

Chen W.F. and Mizuno E. 1990. Nonlinear analysis in soil mechanics Elsevier, Amsterdam, the Netherlands.

Haber R. B. 1984. A mixed Eulerian-Lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 43, 277-292.

Herman L. R. 1976. Laplacian-isoparametric grid generation scheme J. Engng. Mech. Div. ASCE., 102, 749-759.

Hinton E. and Canpbell J. S. 1974. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method Int. J. Numer. Methods Engng., 8, 461-480.

Houlsby G.T. and Martin C.M. 2003. Undrained bearing capacity factors for conical footings on clay Geotechnique 53., 5, 513-520.

Ho-Le K. 1988. Finite element mesh generation methods :a review and classification Comput. Aided desg., 20, 27-38.

Hu Y. and Randolph M. F. 1998. A practical numerical approach for large deformation problems in soil Int. J. Num. and Anal. Methods in Geomech.,22,327-350.

Johnston B. P. and Sullivan J. M. 1992. Fully automatic two dimensional mesh generation using normal offsetting Int. J. Num. Meth. Engng., 33, 425-442.

Kelly D.W., J.P. de S.R. Gago, Zienkiewicz O. C. and I. Babuska 1983. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method :part I -error analysis Int. J. num. Meth. engng., 19, 1593-1619.

Liu W. K., Belytschko T. and Chang H. 1986. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for path-dependent materials Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 58, 227-245.

Liu W. K., Chang H., Chen J. S. and Belytschko T. 1988. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 68, 259-310.

Sloan S.W. 1987. A fast algorithm for constructing Delaunay Triangulations in the plane Advances in Engng Software, 9, 34-55.

Sloan S.W. 1993. A fast algorithm for constructing Constrained Delaunay Triangulations Computer & Structures, 47, 441-450.

Smith I. M. and Griffiths D. V. 1998. Programming the finite element method John Wiley & Sons ltd.

Wood D. M. 1990. Soil behaviour and critical state soil mechanics Cambridge University Press, Cambridge, New York.

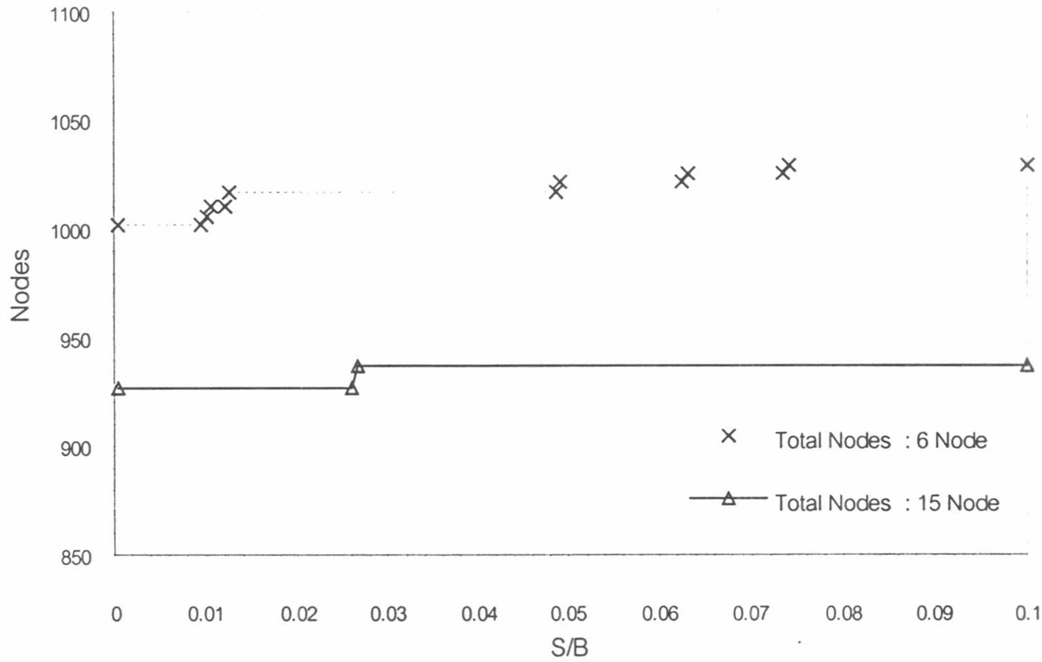
Zienkiewicz O. C. 1977. The finite element method The third, expanded and revised ed. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.

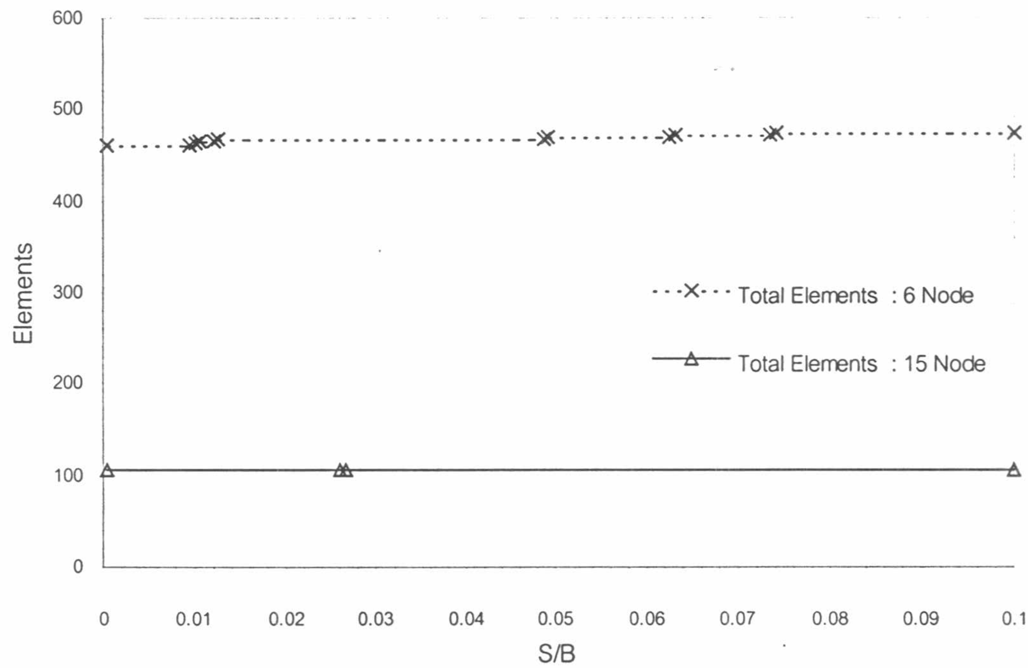
Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. 1992. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 101, 207-224.

Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. 1992. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1:The recovery technique Int. J. Numer. Methods Engng., 33, 1331-1364.

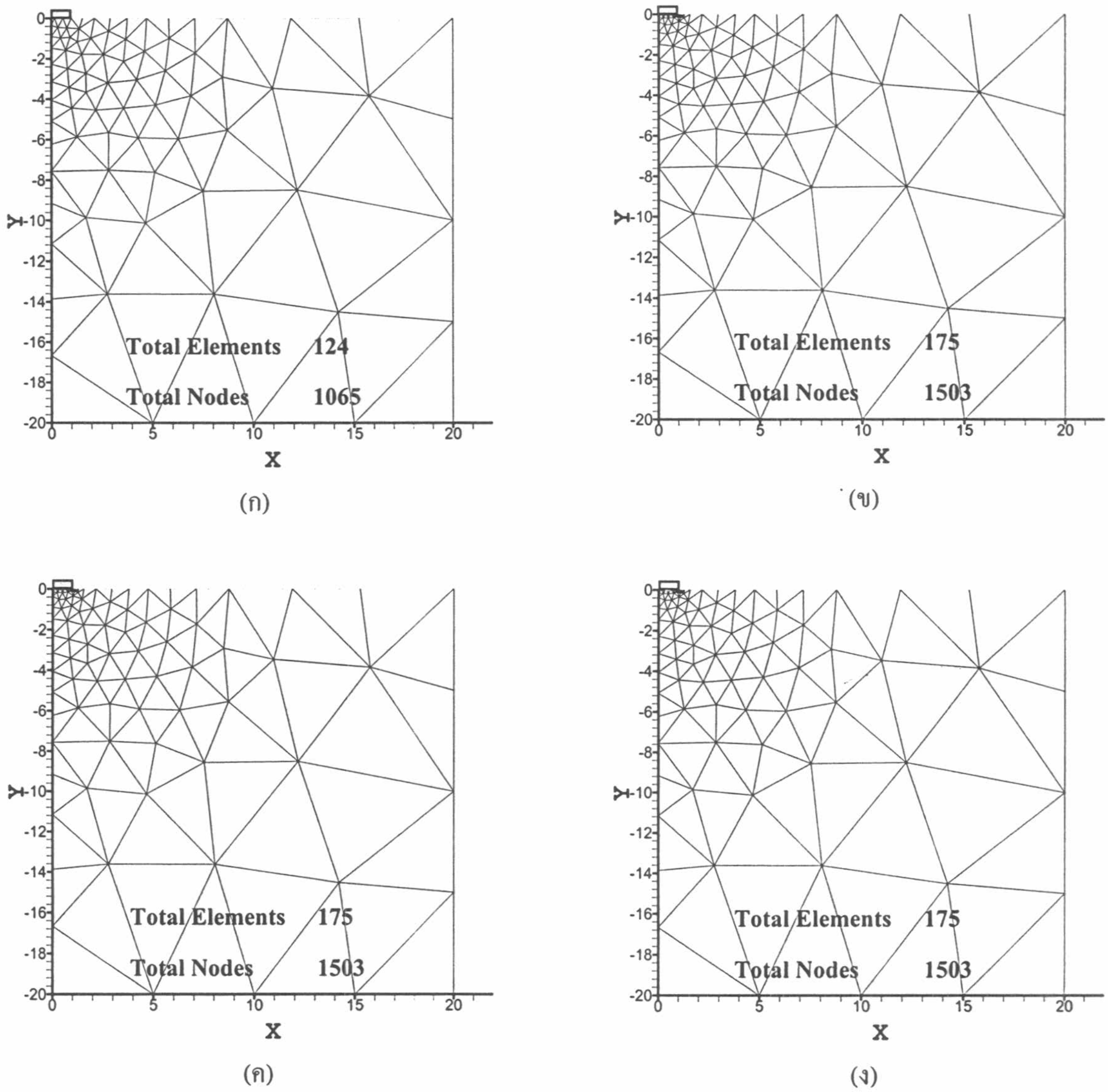
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

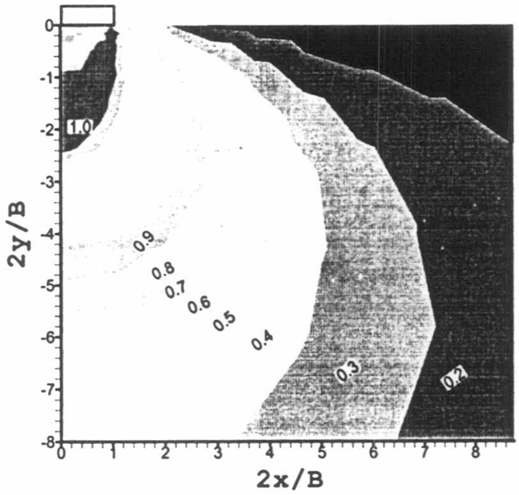




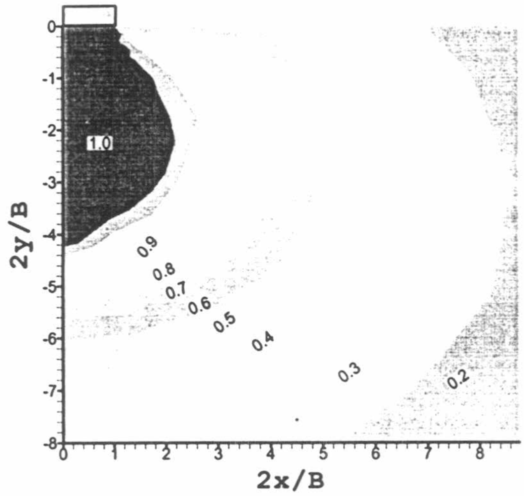
รูปที่ ก.1 เปรียบเทียบจำนวนจุดต่อ และชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง ที่ D/B=0 กรณี Small Strain ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 และ 15 จุดต่อ



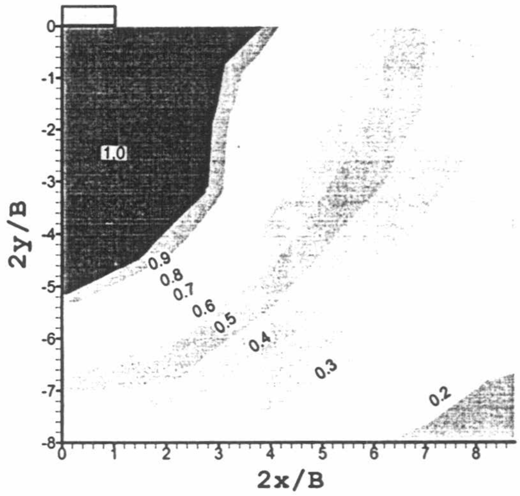
รูปที่ ก.2 การเปรียบเทียบโครงข่ายของชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง D/B = 0 กรณี Small Strain (SSC)
(ก) โครงข่ายของชิ้นส่วนควบคุมโดยสมการความหนาแน่น (ข) โครงข่ายของชิ้นส่วนเริ่มต้น
(ค) โครงข่ายของชิ้นส่วนเมื่อ S/B=0.025 (ง) โครงข่ายของชิ้นส่วนเมื่อ S/B=0.075



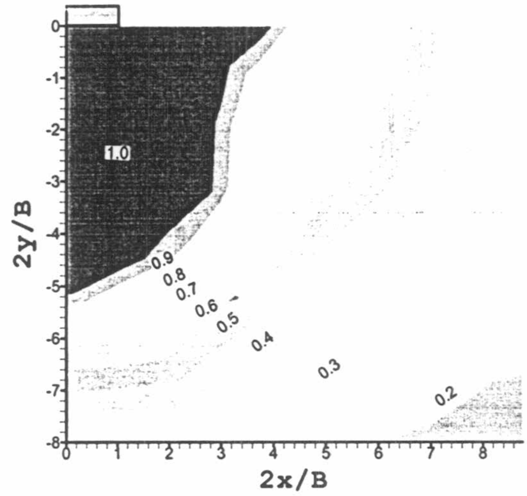
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025



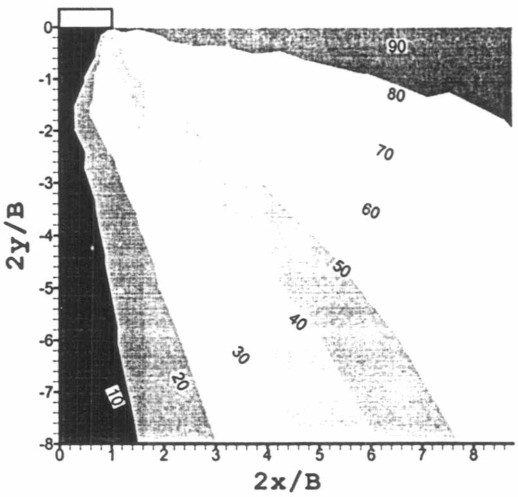
(ค) S/B=0.05



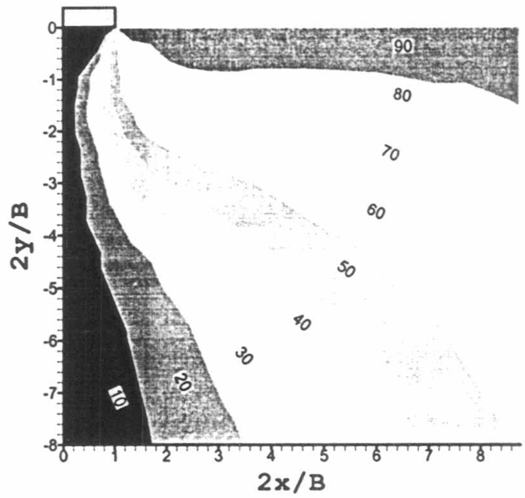
(ง) S/B=0.075

รูปที่ ก.3 Failure zone $(\sigma_1 - \sigma_3) / (2s_u)$ ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=0

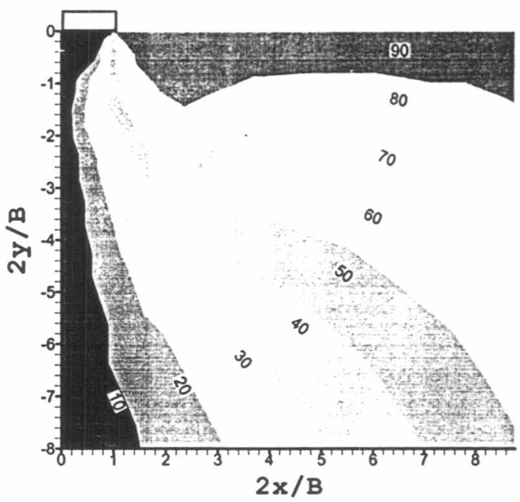
วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



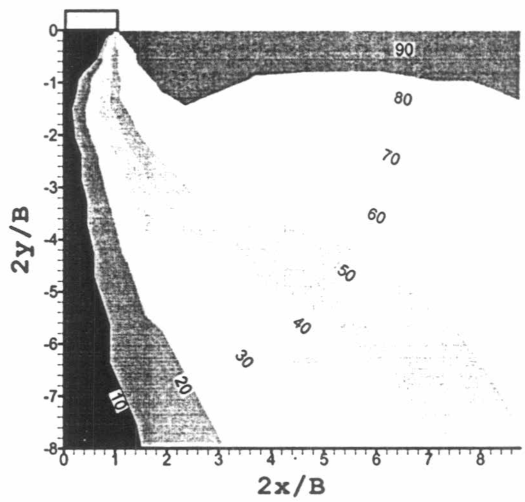
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025

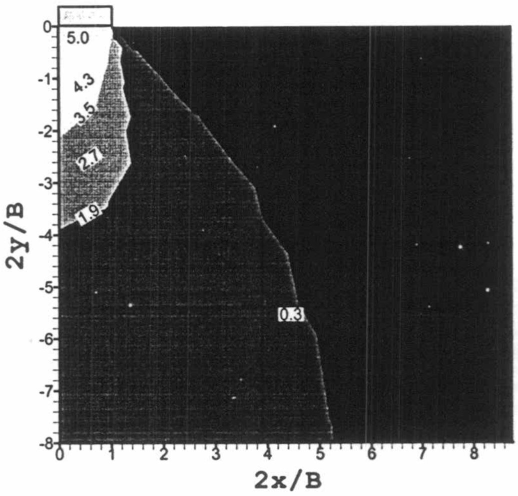


(ค) S/B=0.05

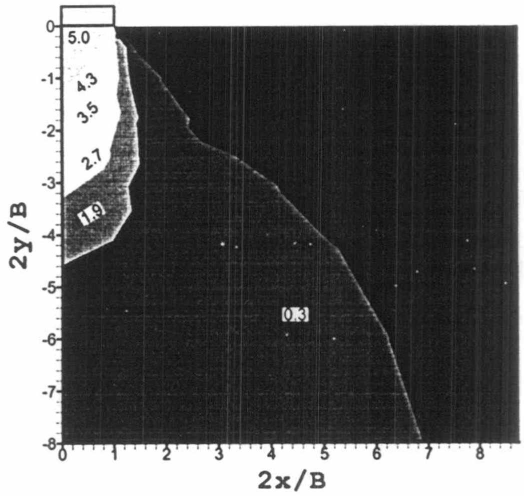


(ง) S/B=0.075

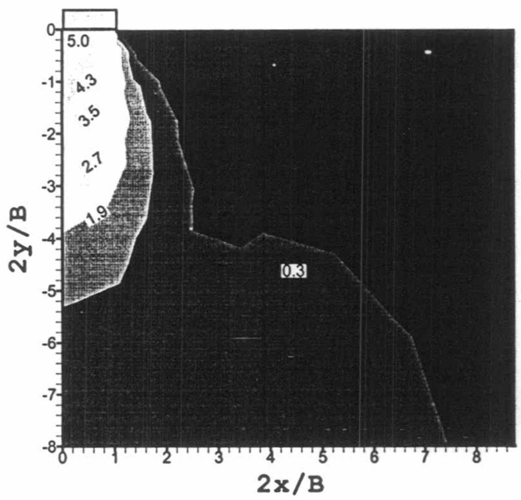
รูปที่ ก.4 ทิศทางของความเค้นหลักเทียบกับแนวแกนดิ่ง (δ ,องศา) ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=0 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



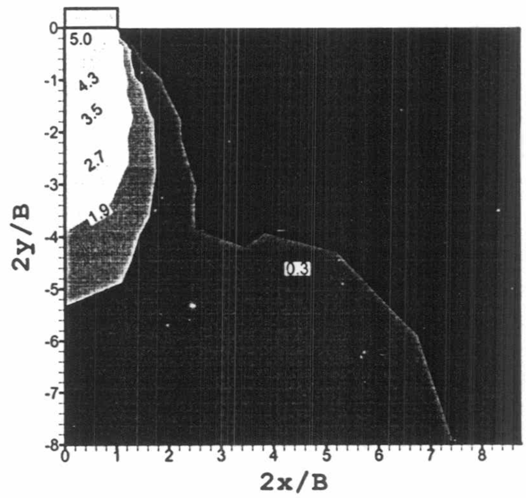
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025

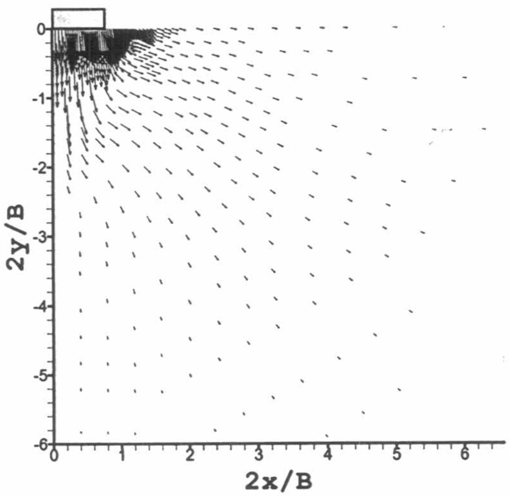


(ค) S/B=0.05

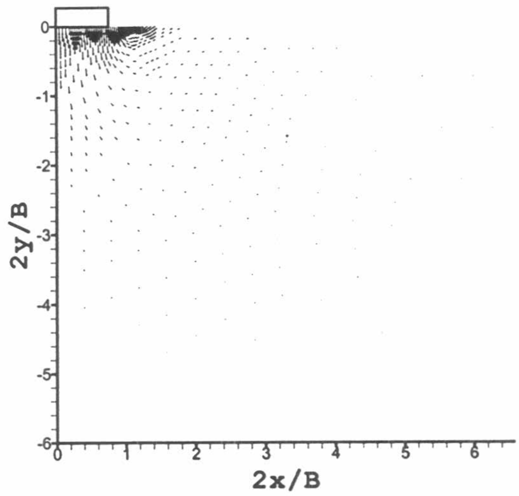


(ง) S/B=0.075

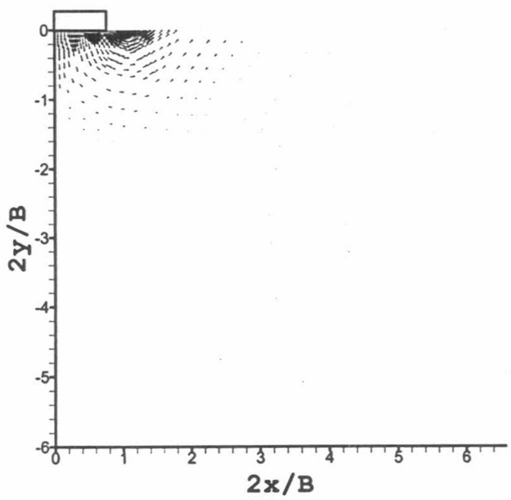
รูปที่ ก.5 กราฟ Contour ของความเค้นแนวแกนดิ่ง (σ_v/s_u)
ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=0 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



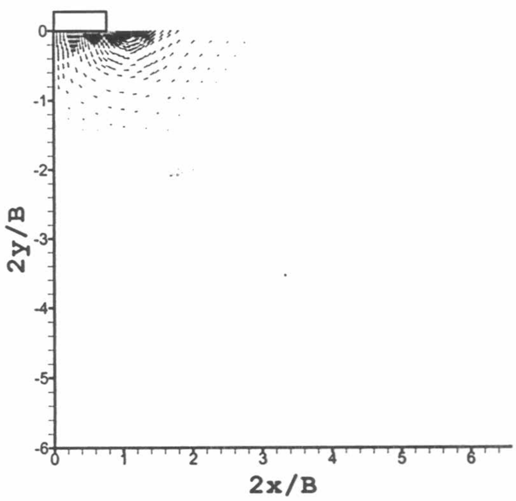
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025

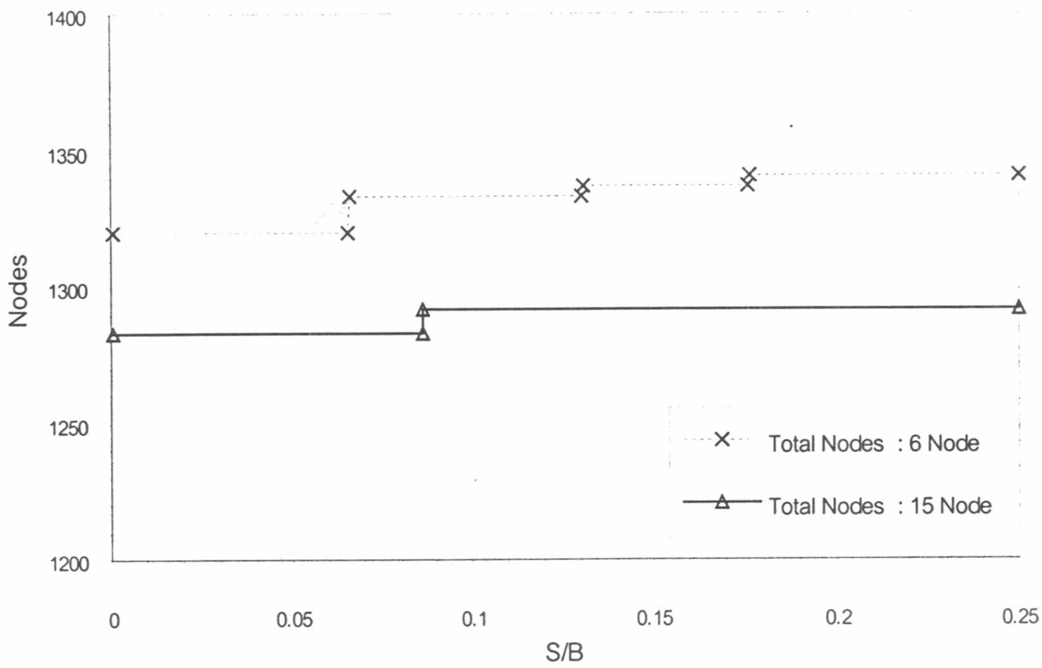


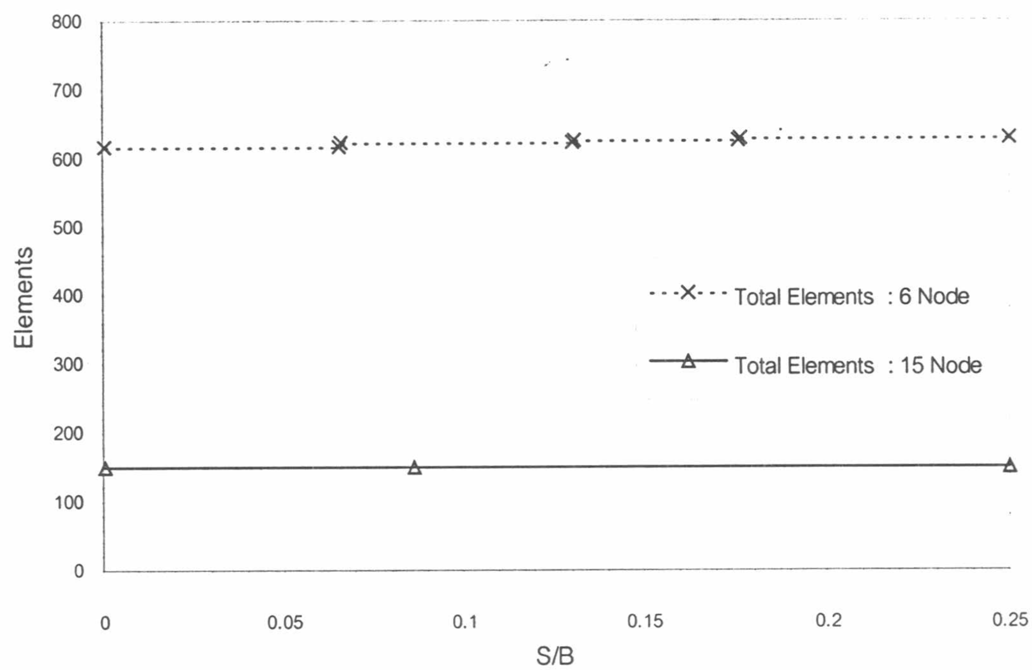
(ค) S/B=0.05



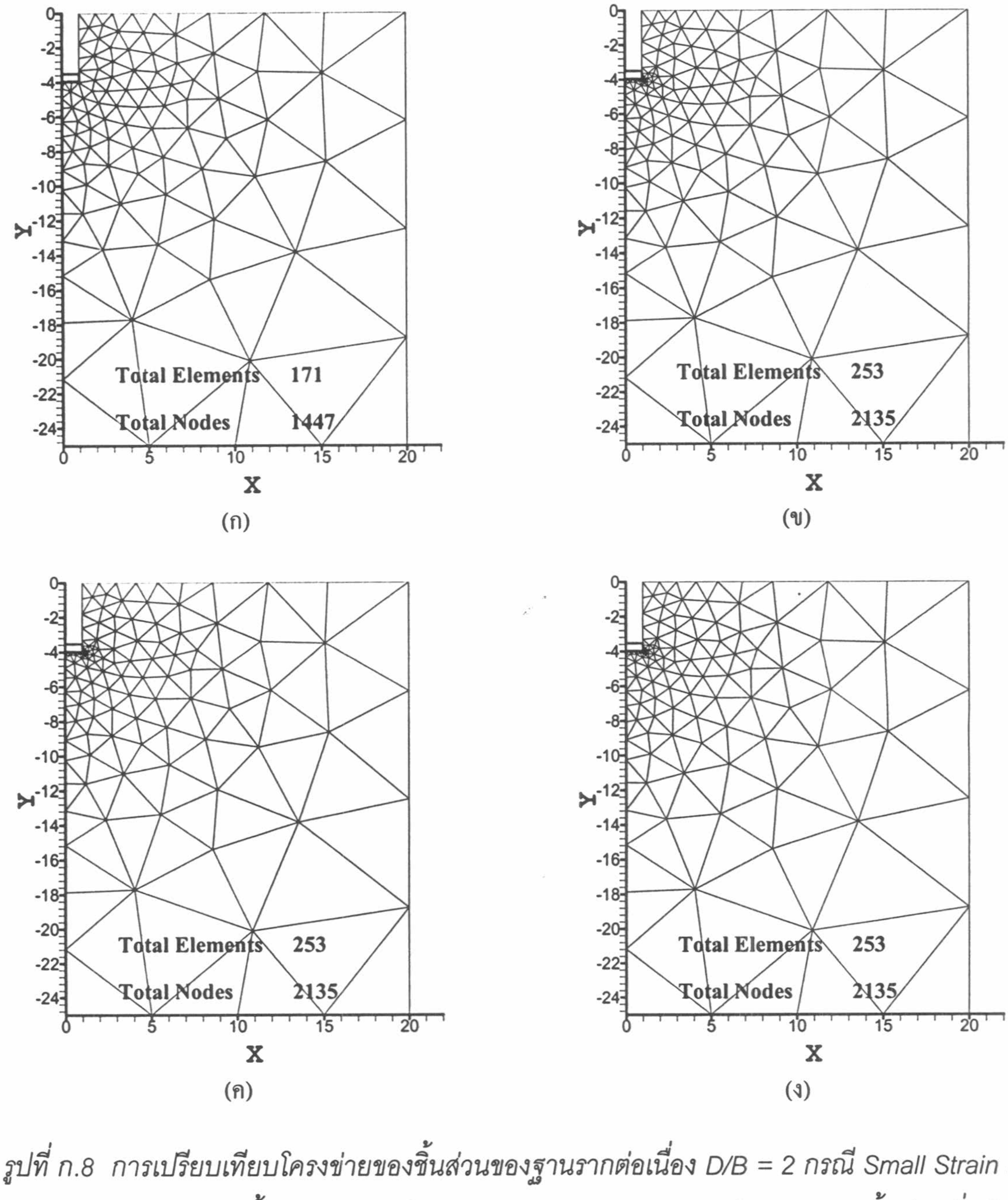
(ง) S/B=0.075

รูปที่ ก.6 ค่าเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของฐานรากต่อเนื่อง D/B=0 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)





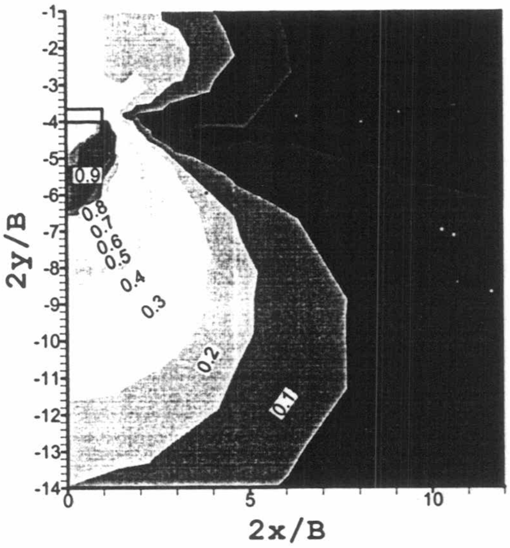
รูปที่ ก.7 เปรียบเทียบจำนวนจุดต่อ และชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง ที่ D/B=2 กรณี Small Strain ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 และ 15 จุดต่อ



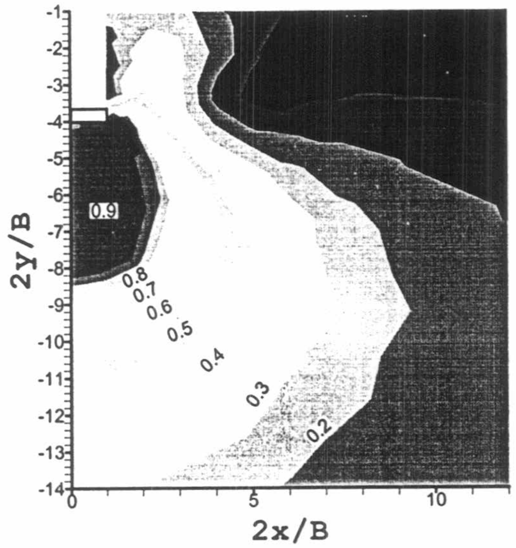
รูปที่ ก.8 การเปรียบเทียบโครงข่ายของชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง D/B = 2 กรณี Small Strain (SSC)

(ก) โครงข่ายของชิ้นส่วนควบคุมโดยสมการความหนาแน่น (ข) โครงข่ายของชิ้นส่วนเริ่มต้น

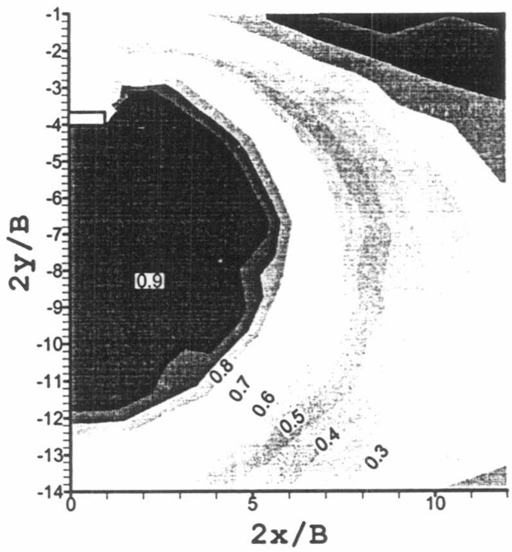
(ค) โครงข่ายของชิ้นส่วนเมื่อ S/B=0.025 (ง) โครงข่ายของชิ้นส่วนเมื่อ S/B=0.25



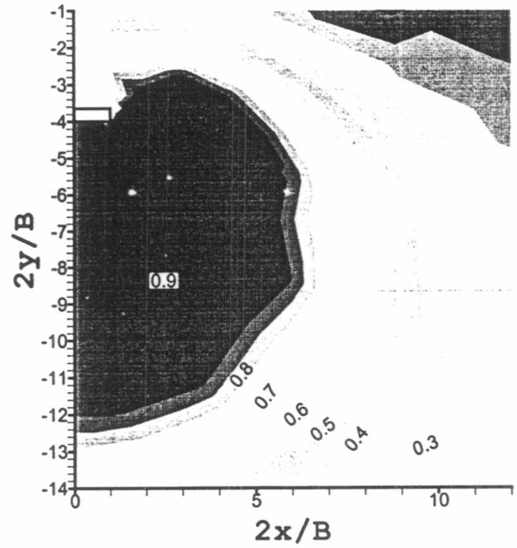
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025

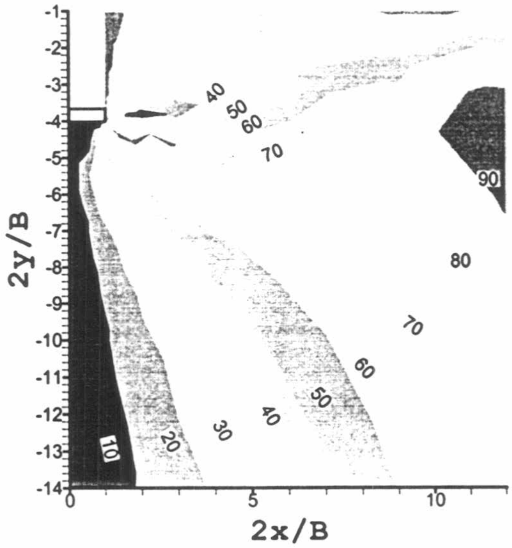


(ค) S/B=0.1

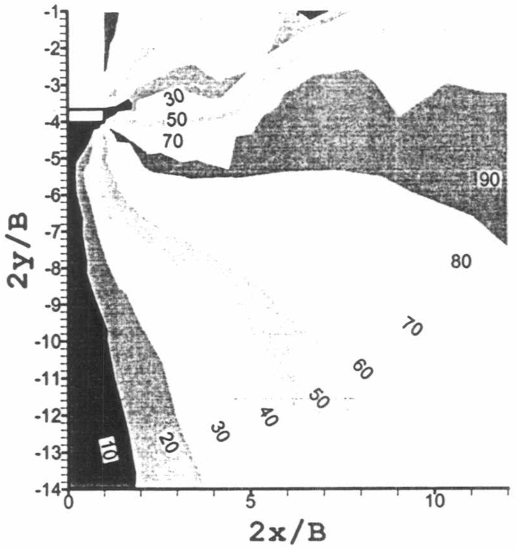


(ง) S/B=0.25

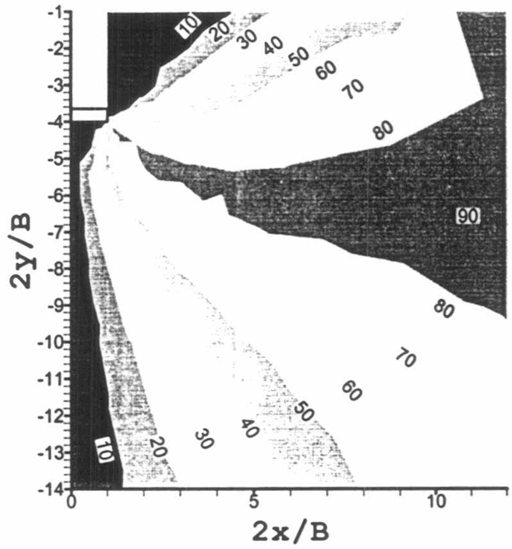
รูปที่ ก.9 Failure zone $(\sigma_1 - \sigma_3) / (2s_u)$ ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=2 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



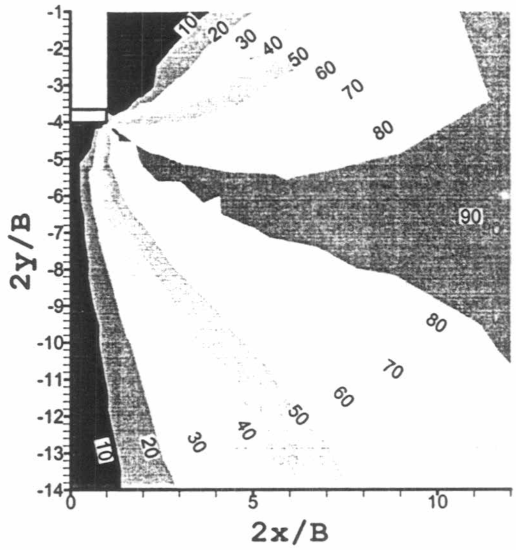
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025

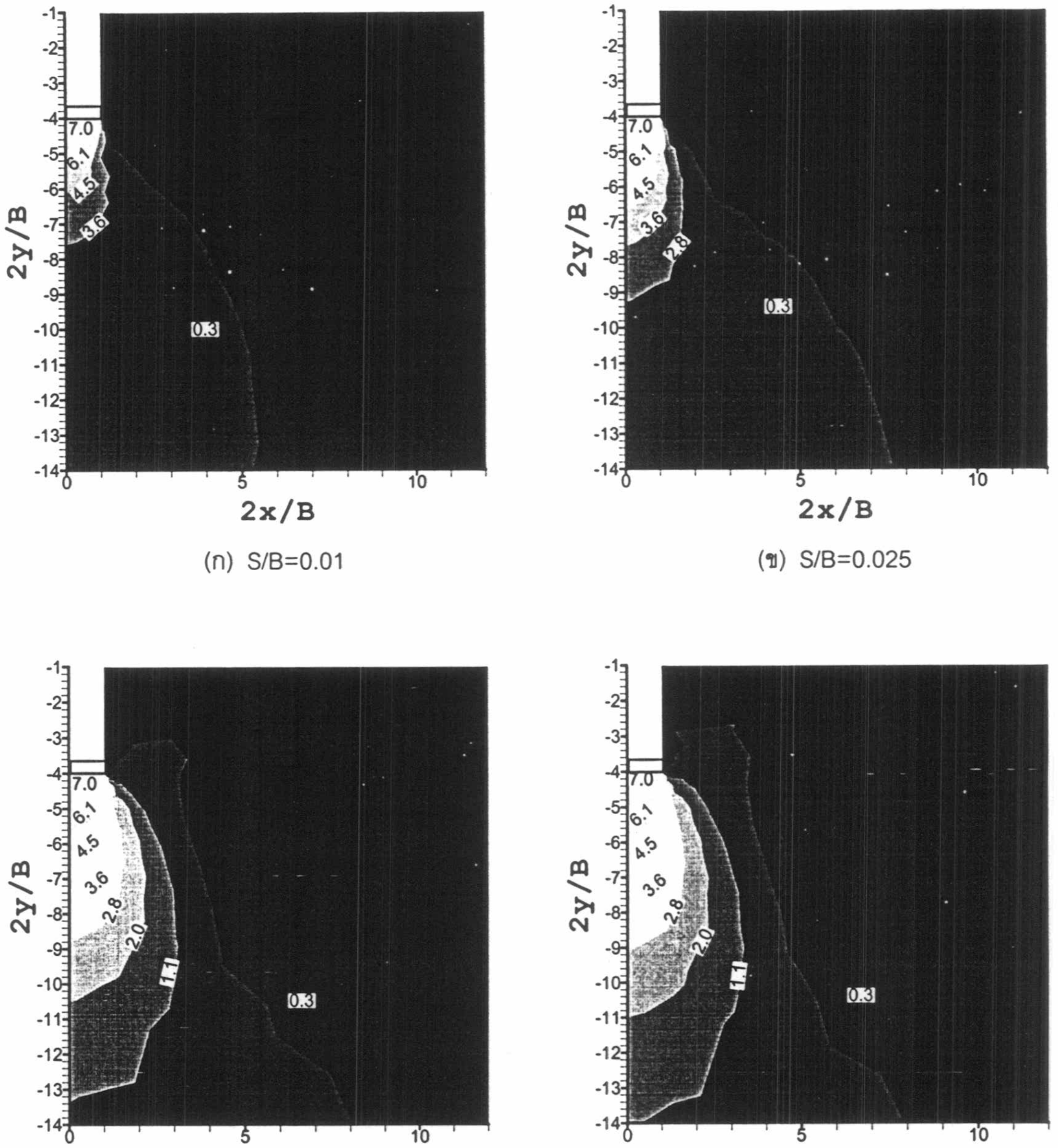


(ค) S/B=0.1



(ง) S/B=0.25

รูปที่ ก.10 ทิศทางของความเค้นหลักเทียบกับแนวแกนดิ่ง (δ ,องศา) ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=2 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



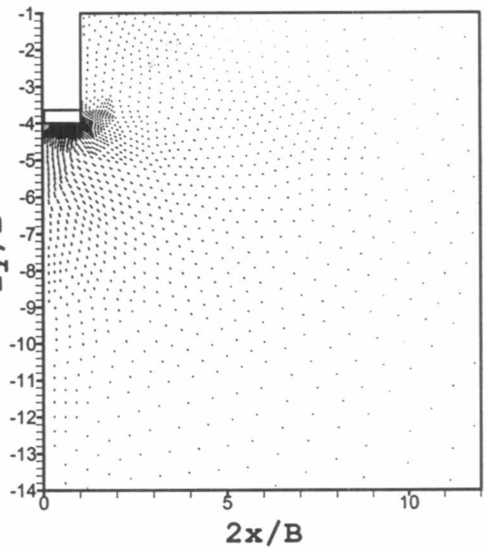
(ก) S/B=0.01

(ข) S/B=0.025

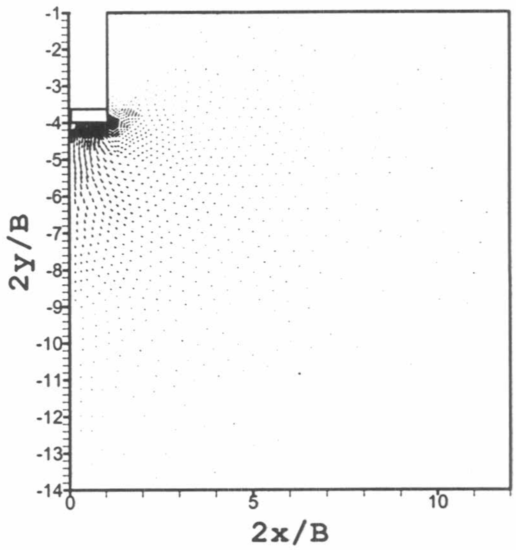
(ค) S/B=0.1

(ง) S/B=0.25

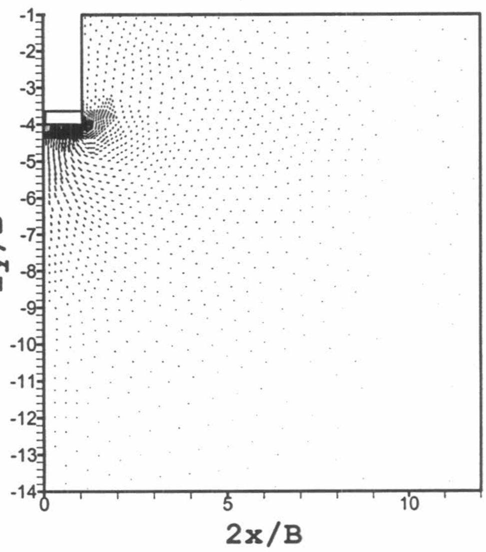
รูปที่ ก.11 กราฟ Contour ของความเค้นแนวแกนดิ่ง (σ_v/s_u)
ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=2 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)



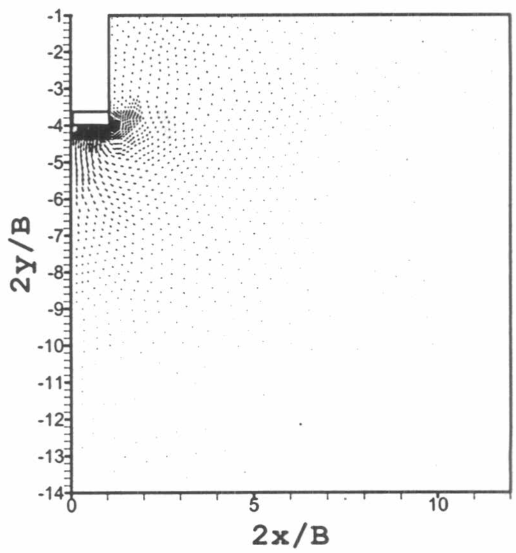
(ก) S/B=0.01



(ข) S/B=0.025



(ค) S/B=0.1

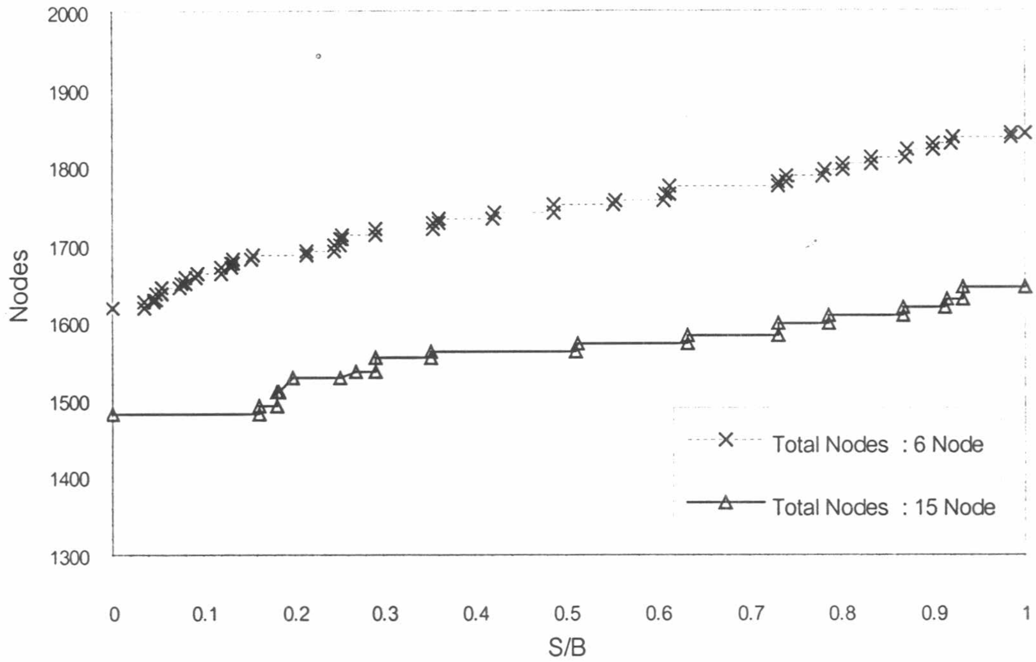


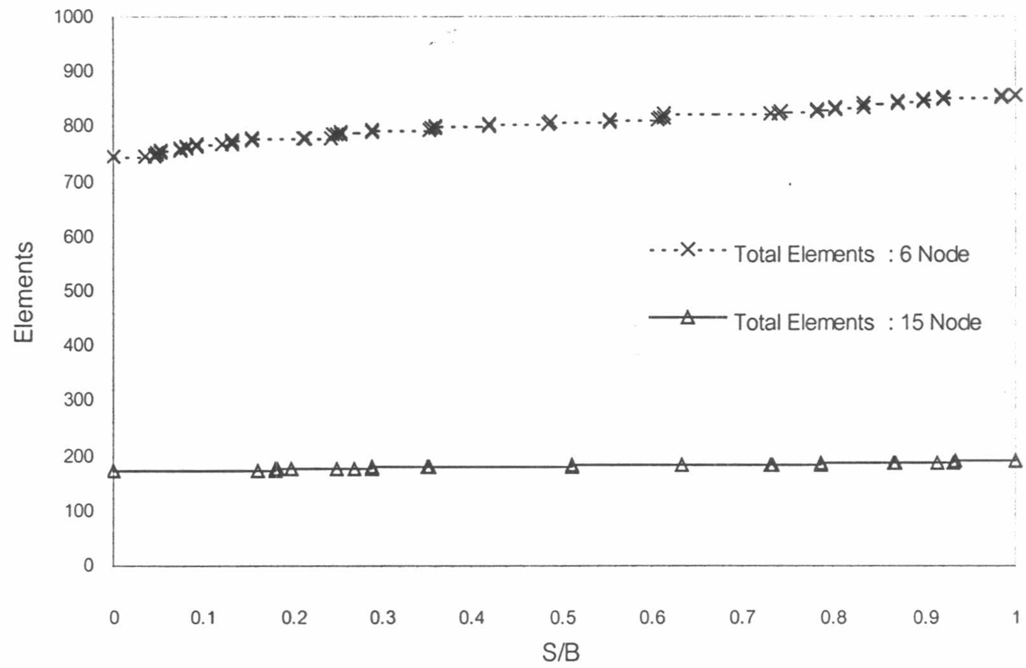
(ง) S/B=0.25

รูปที่ ก.12 ค่าเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของฐานรากต่อเนื่อง D/B=2 วิเคราะห์โดยหลักการของทฤษฎีความเครียดน้อย (SSC)

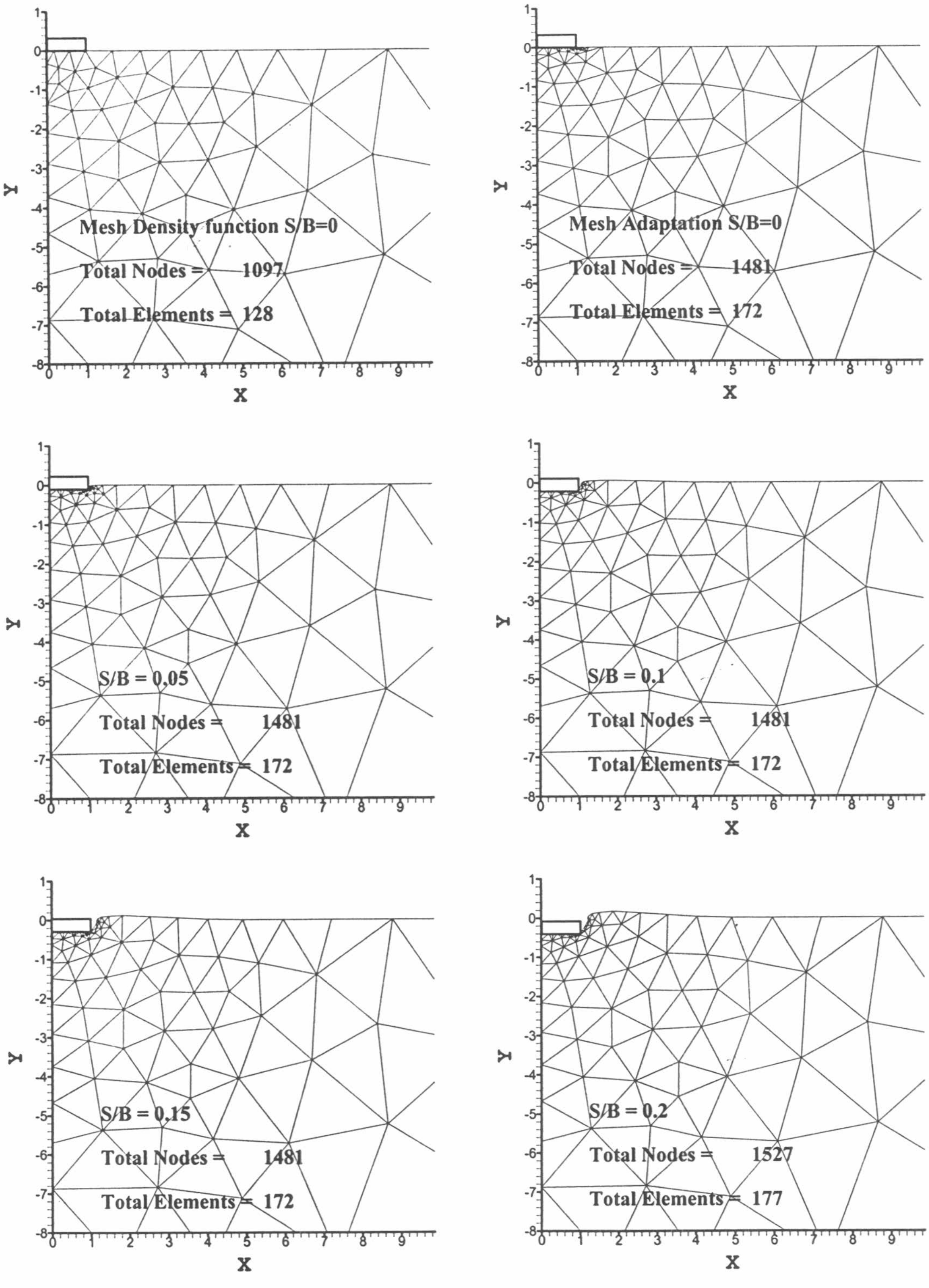
ภาคผนวก

ภาคผนวก ข

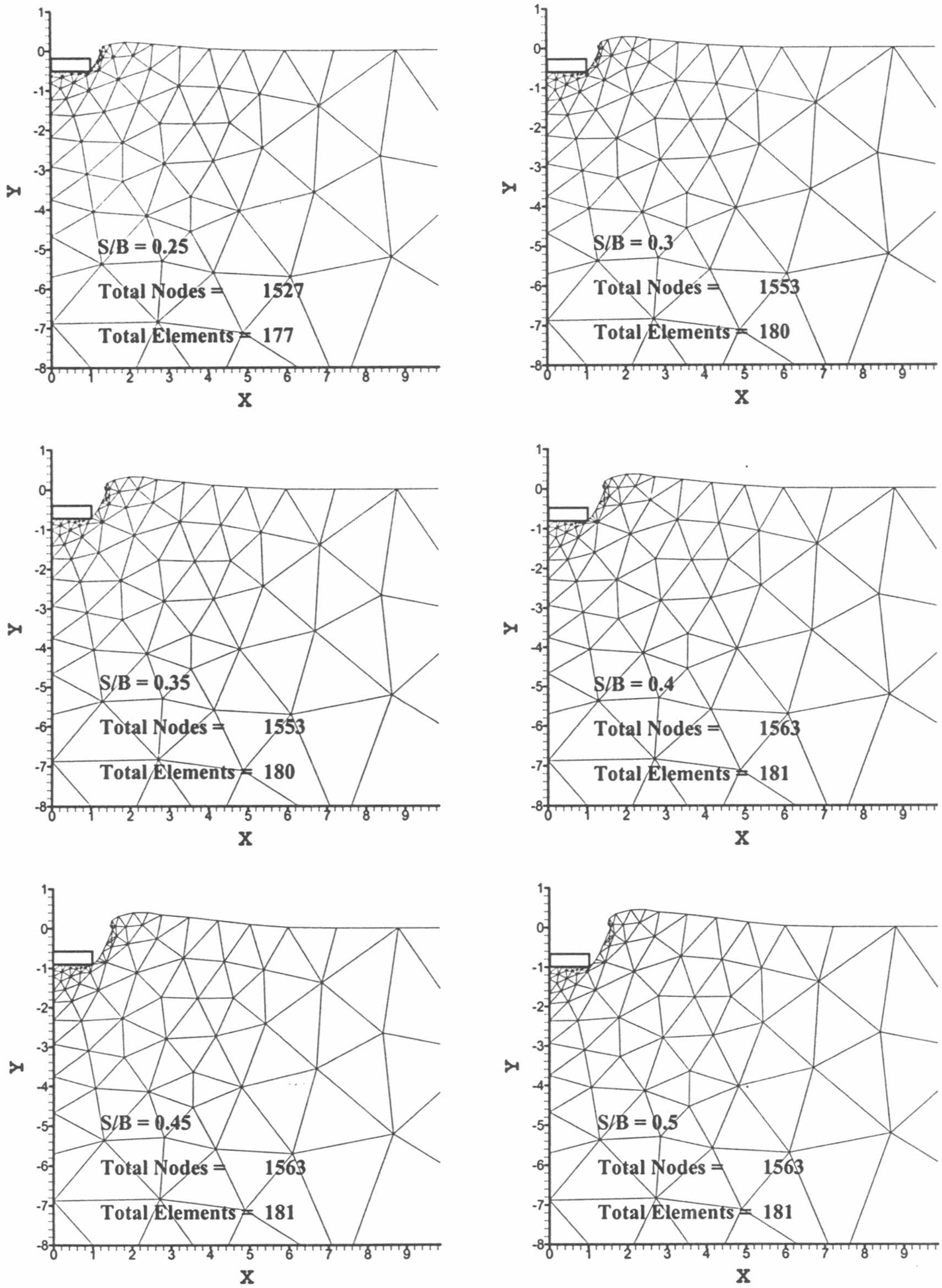




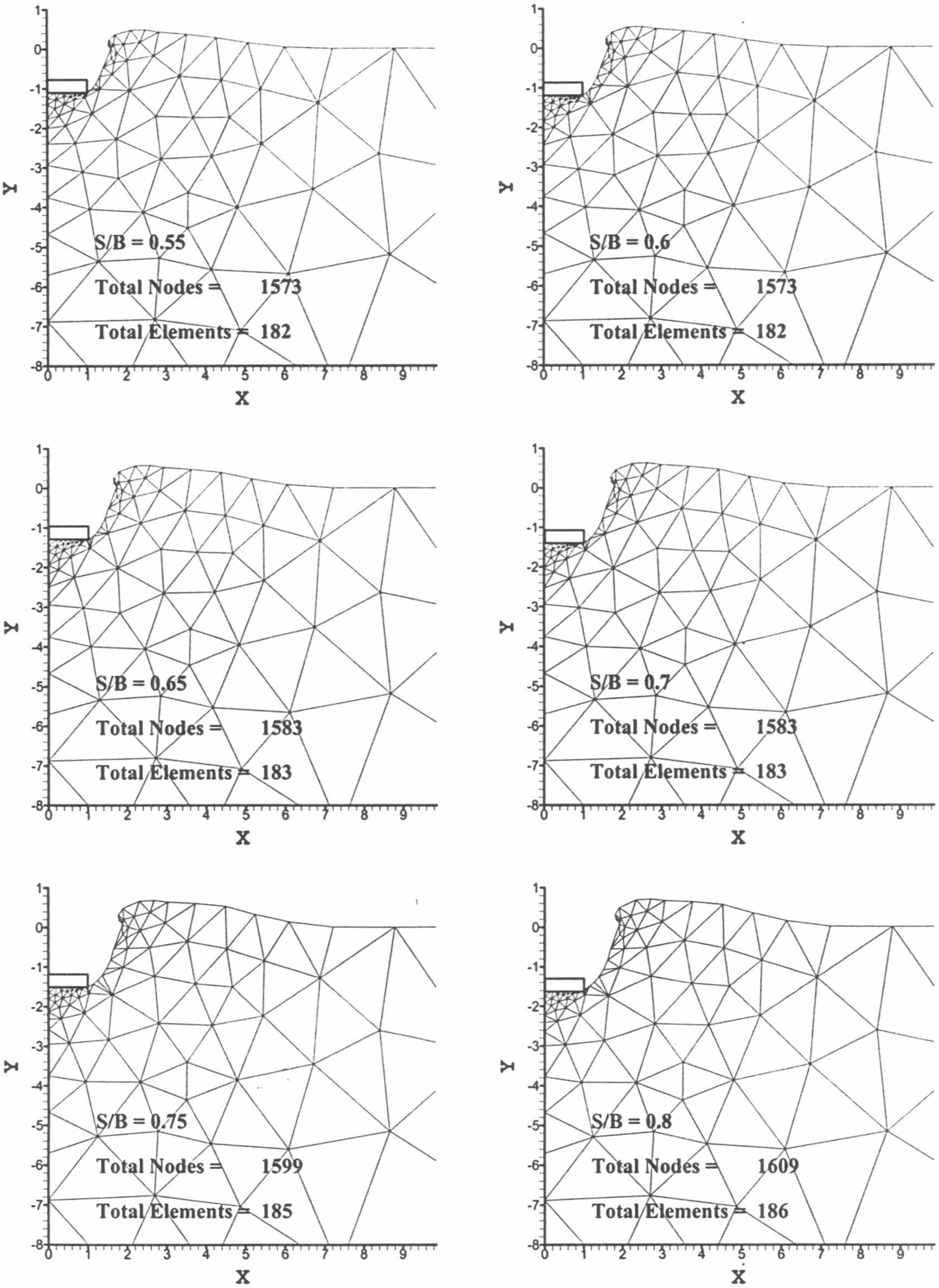
รูปที่ ข.1 เปรียบเทียบจำนวนจุดต่อ และชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง ที่ D/B=0 กรณี Large Strain ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 และ 15 จุดต่อ



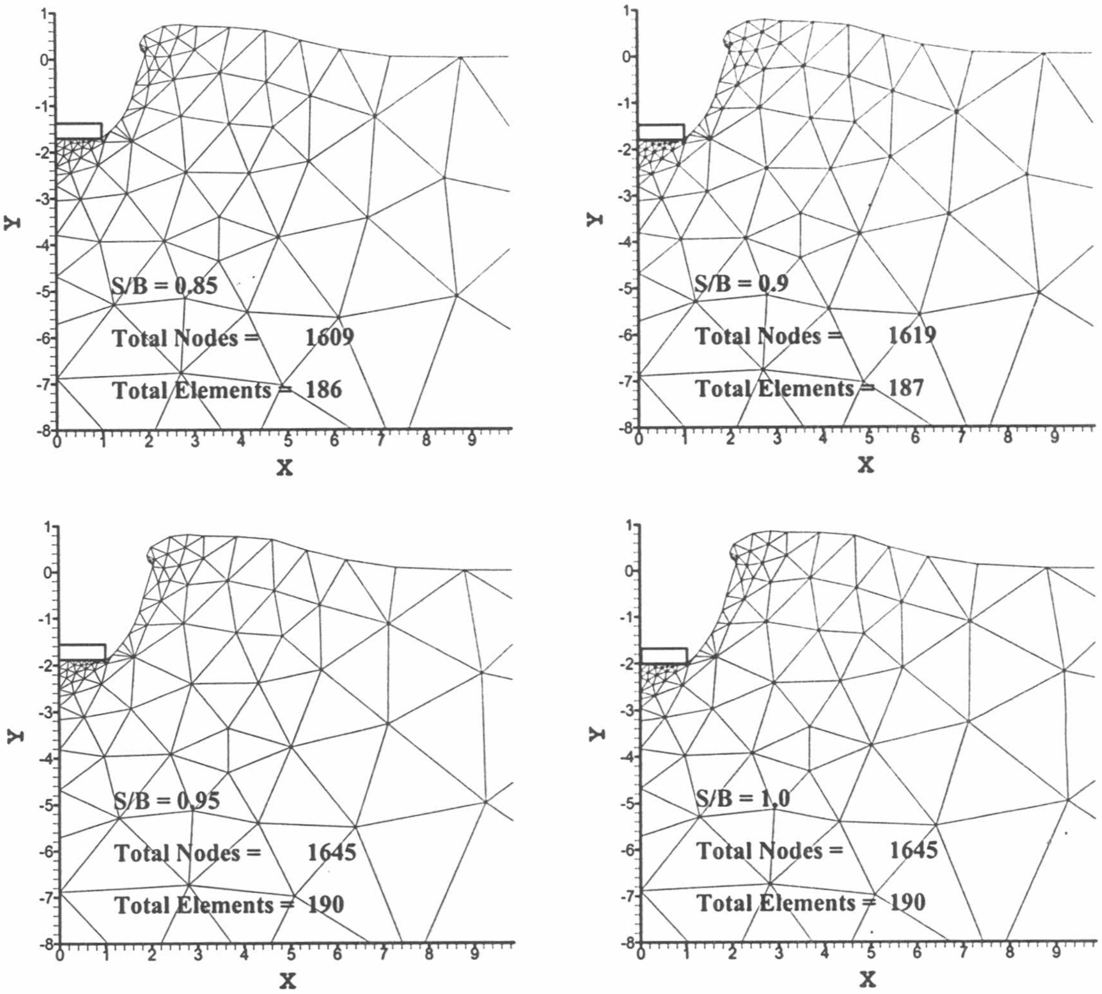
รูปที่ ข.2 โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



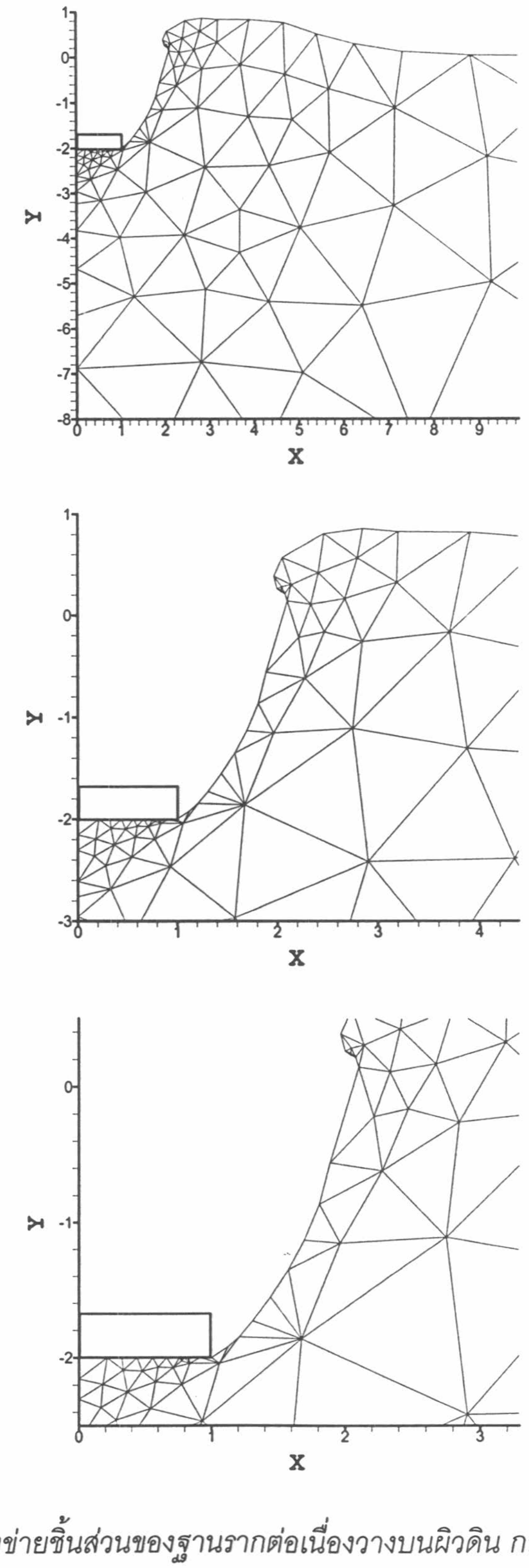
รูปที่ ข.2(ต่อ) โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



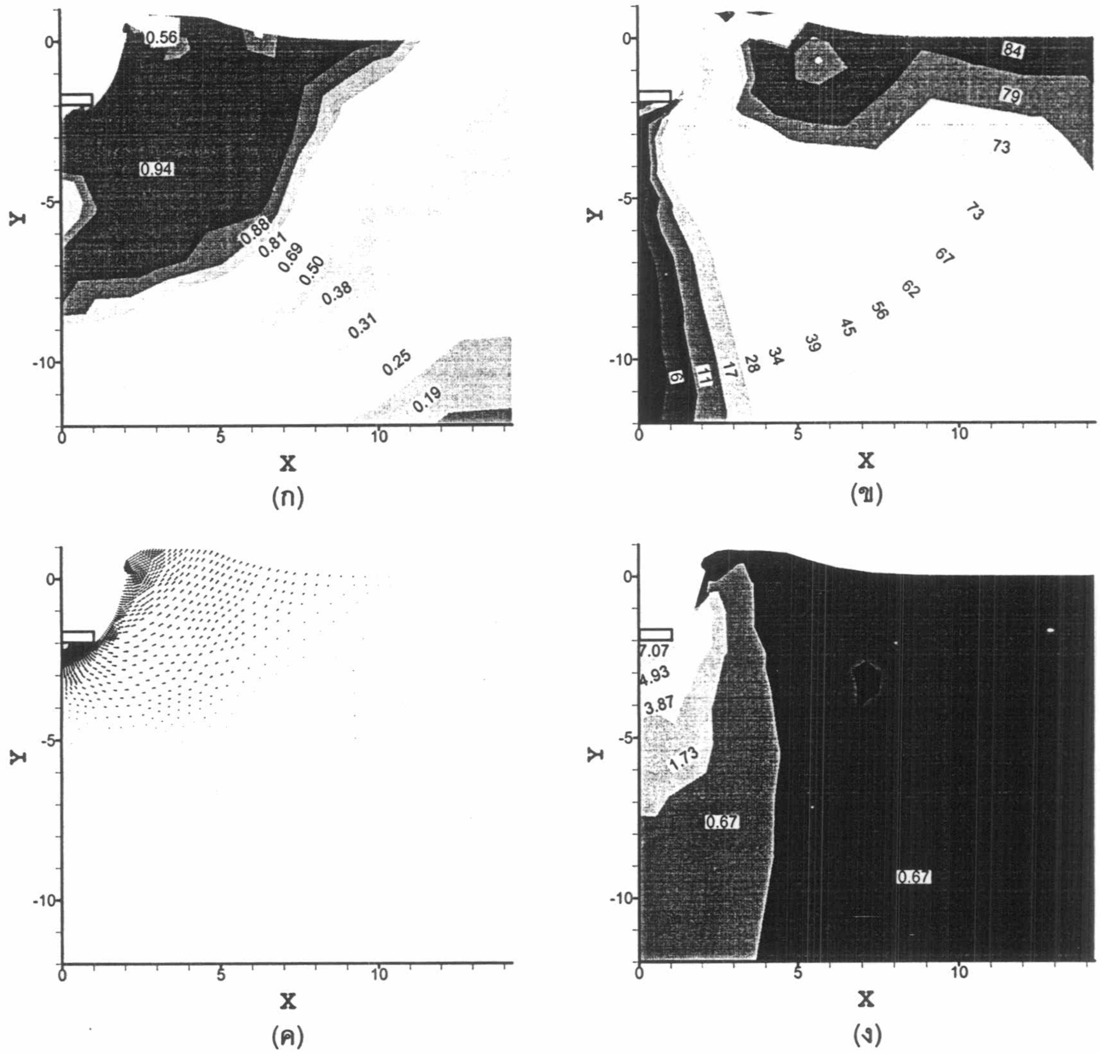
รูปที่ ข.2(ต่อ) โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.2(ต่อ) โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.3 โครงข่ายชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่องวางบนผิวดิน กรณี LSC ที่ S/B=1.0



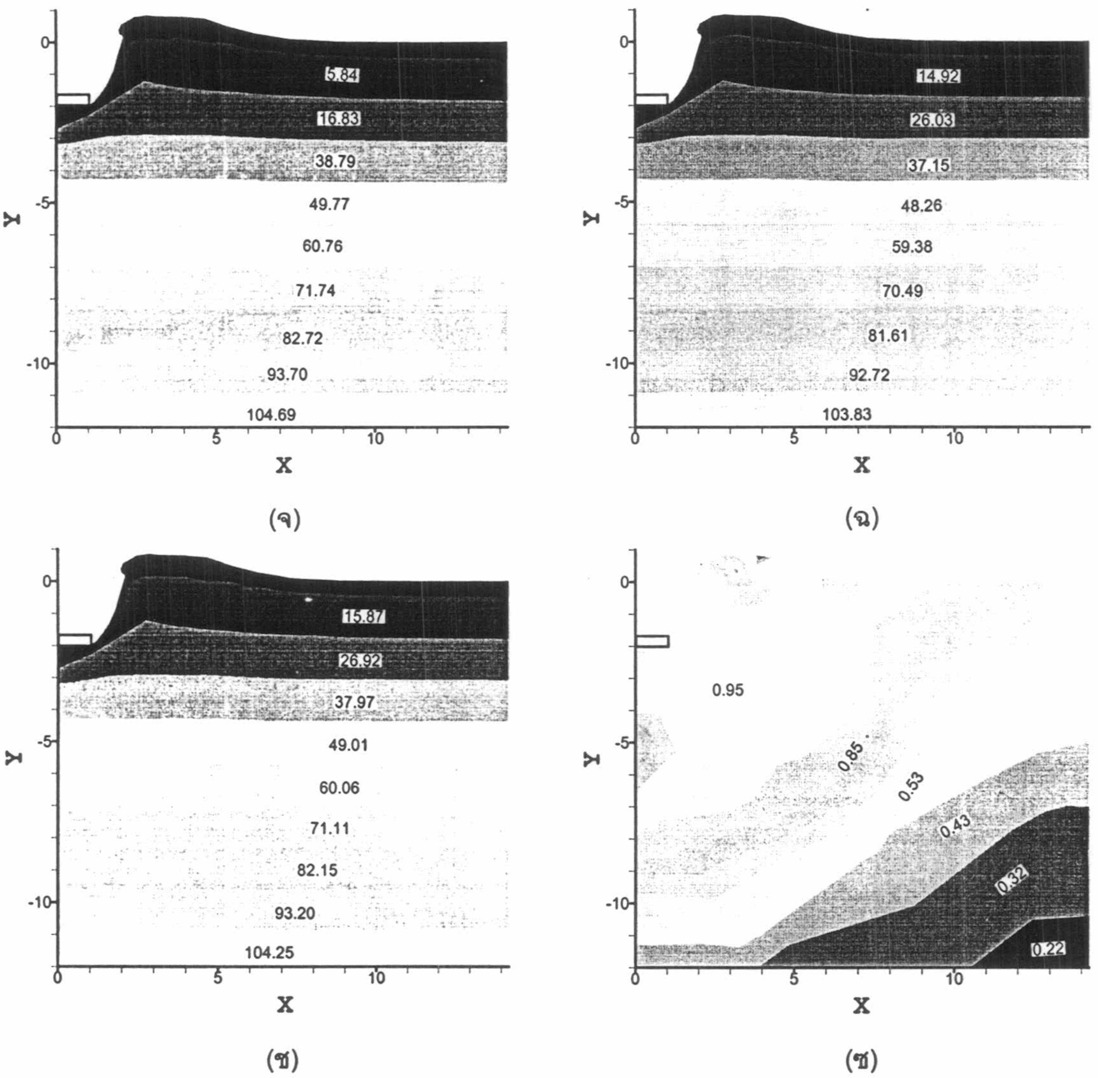
รูปที่ ข.4 ผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของฐานรากต่อเนื่อง วางบนผิวดิน กรณี LSC

(ก) Failure zone $(\sigma_1 - \sigma_3)/(2s_u)$

(ข) ทิศทางของความเค้นหลักเทียบกับแนวแกนดิ่ง (δ *, องศา)*

(ค) ค่าเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของฐานราก

(ง) กราฟ Contour ของความเค้นแนวแกนดิ่ง $\left(\sigma_v / s_u\right)$



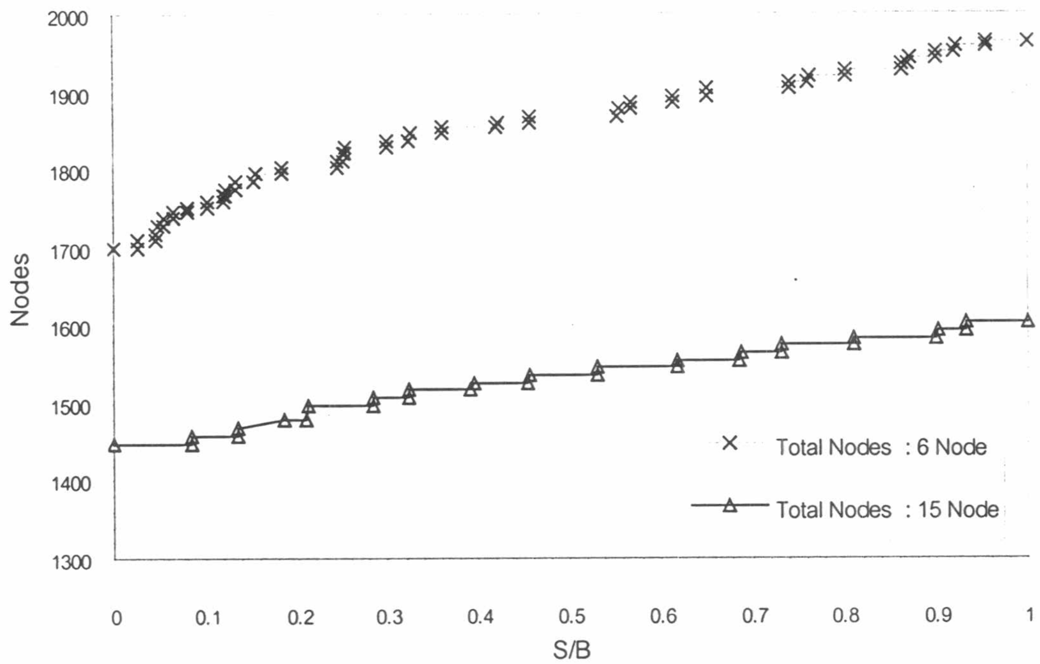
รูปที่ ข.4(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของฐานรากต่อเนื่อง วางบนผิวดิน กรณี LSC

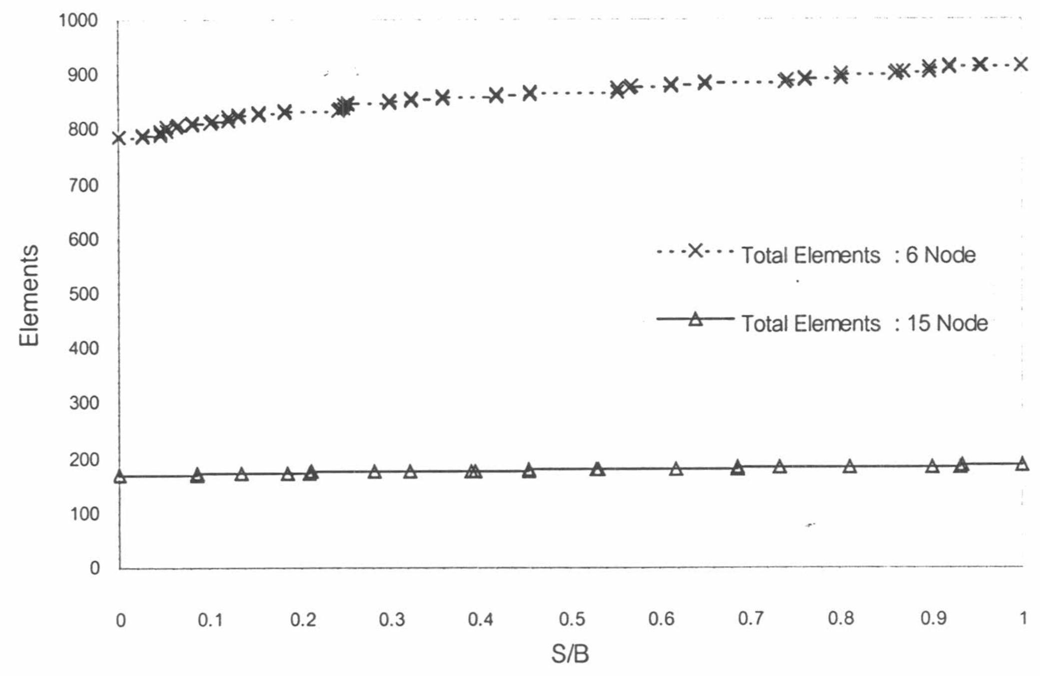
(จ) Major Principle Stress (σ_1 / Su)

(ฉ) Minor Principle Stress (σ_3 / Su)

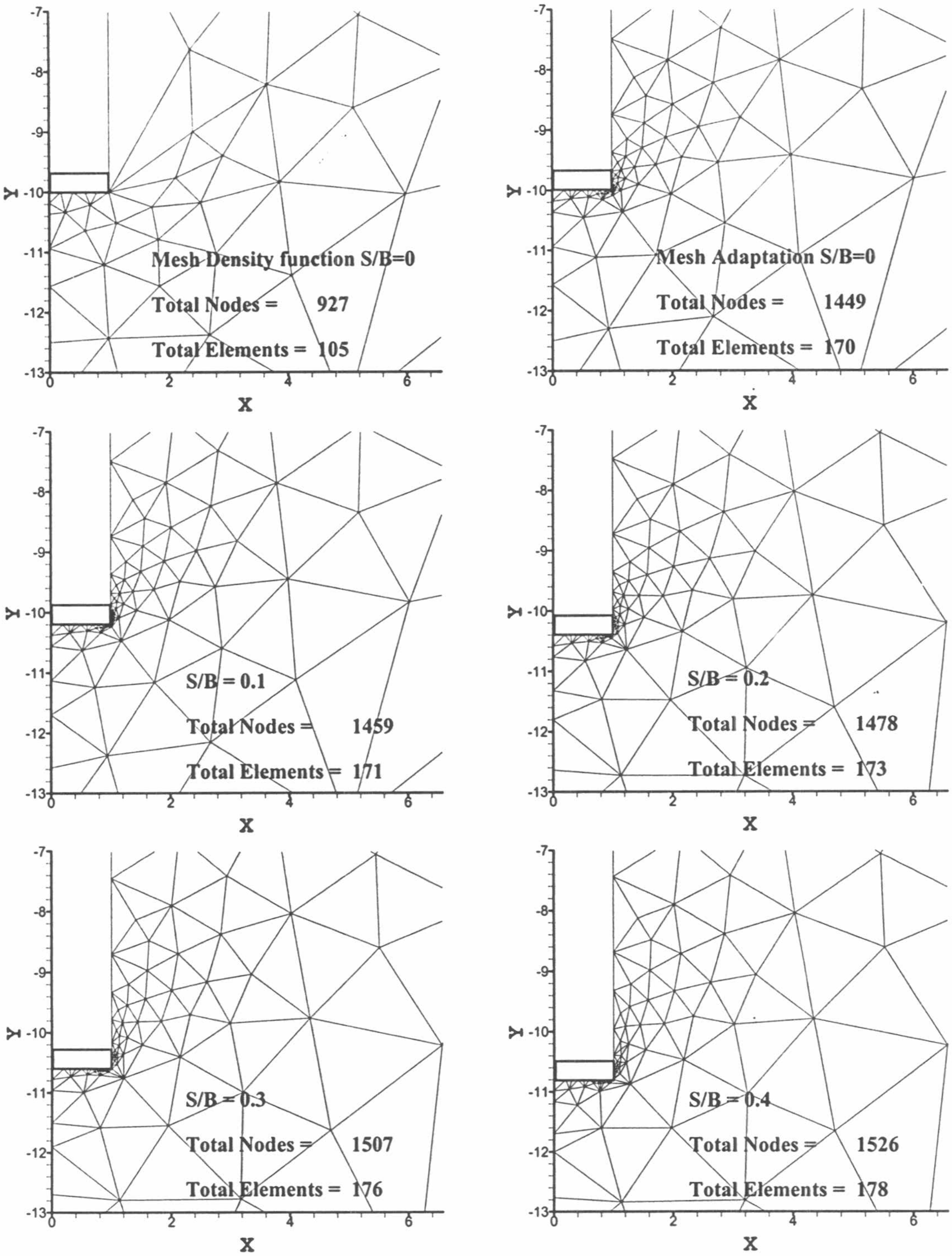
(ช) Maximum Shear Stress (p / Su)

(ซ) Normal Stress (q / Su)

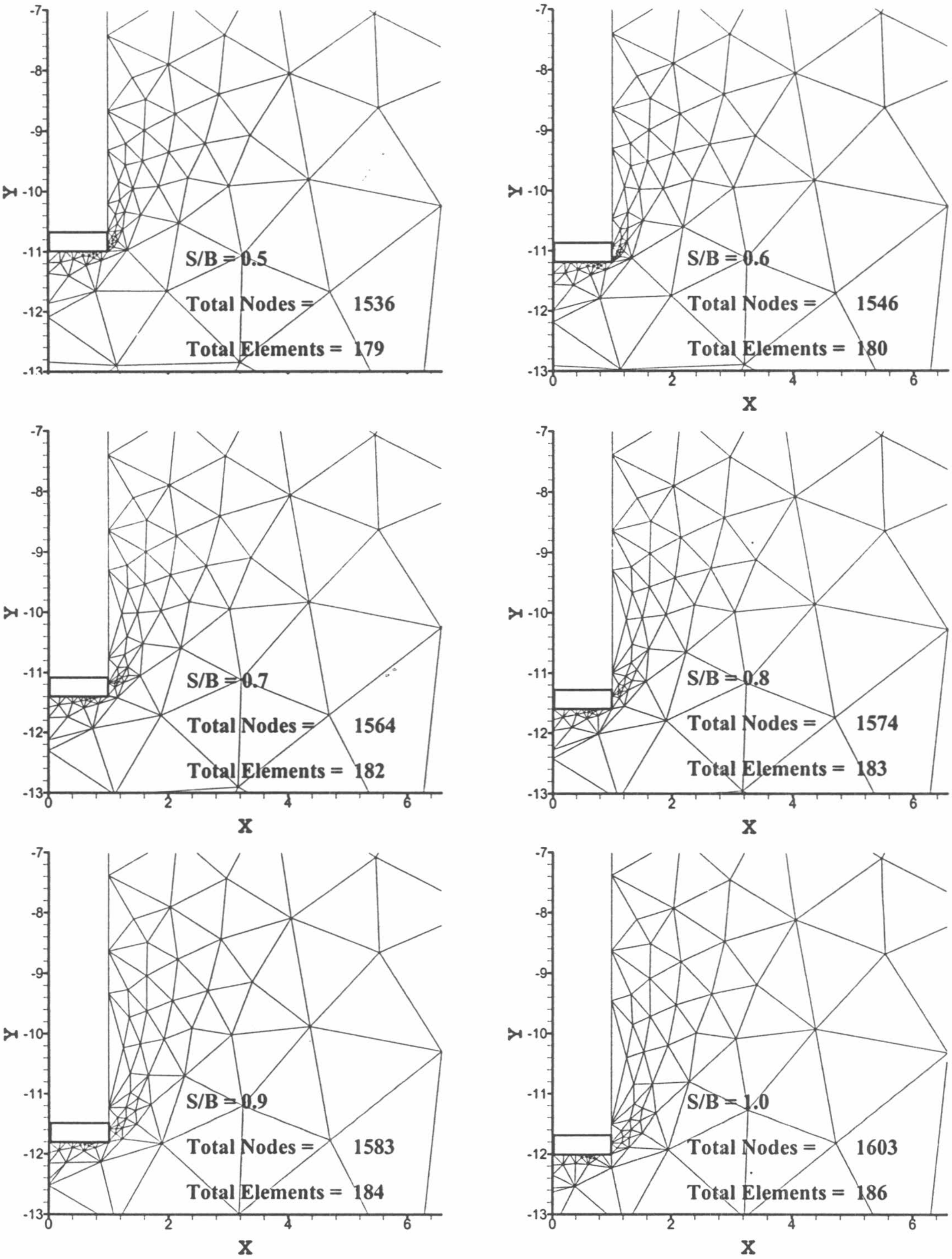




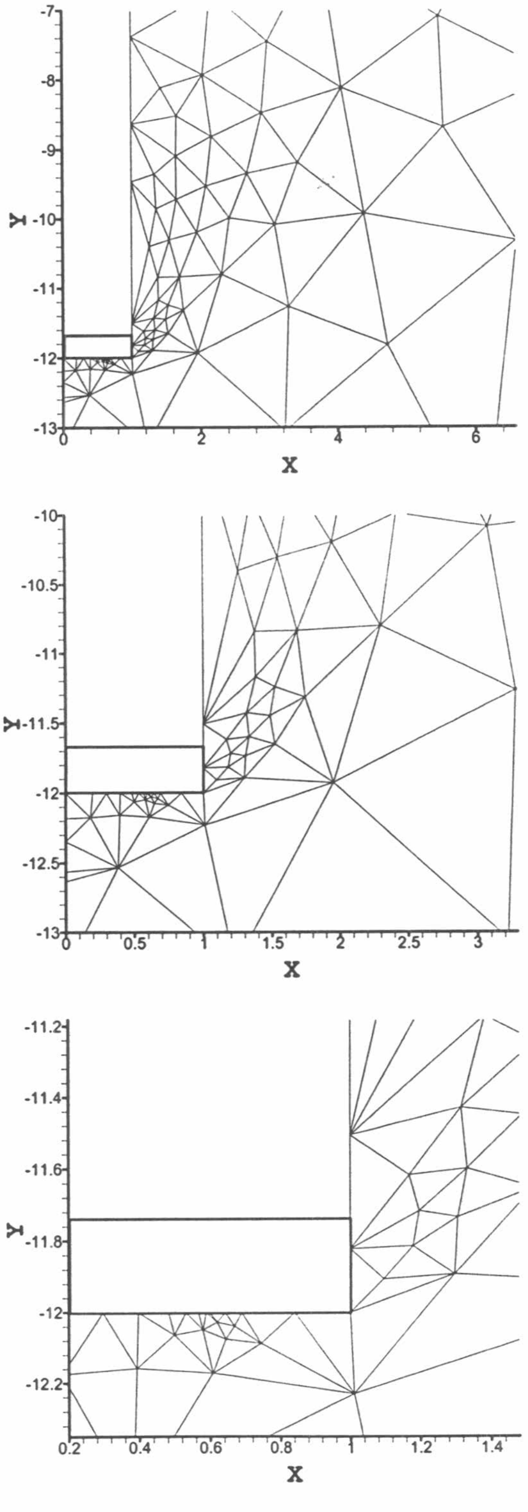
รูปที่ ข.5 เปรียบเทียบจำนวนจุดต่อ และชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง ที่ D/B=5 กรณี Large Strain ระหว่างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 และ 15 จุดต่อ



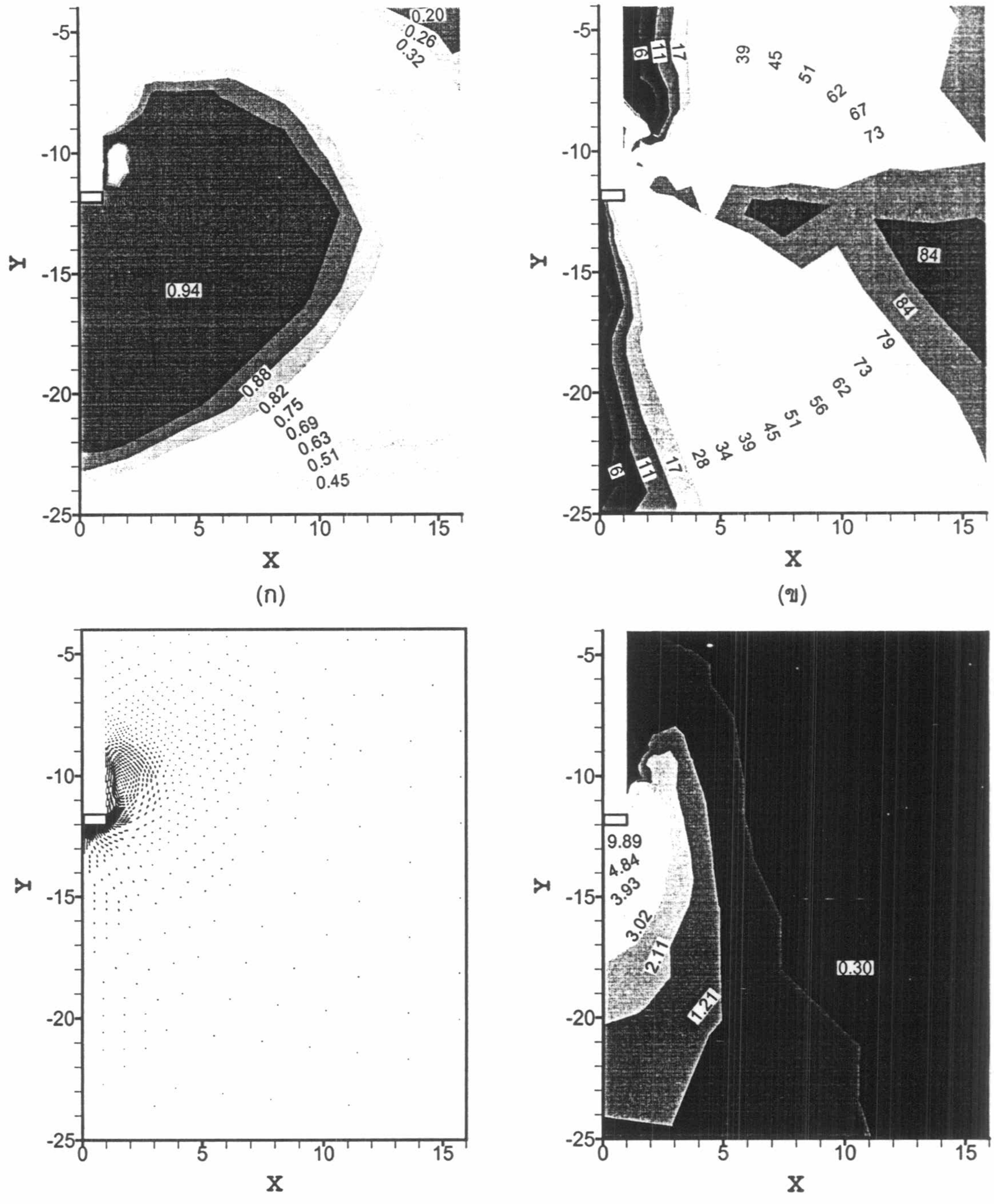
รูปที่ ข.6 โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่อง D/B=5
จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.6(ต่อ) โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่อง D/B=5
จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.7 โครงข่ายชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่อง D/B=5 กรณี LSC ที่ S/B=1.0



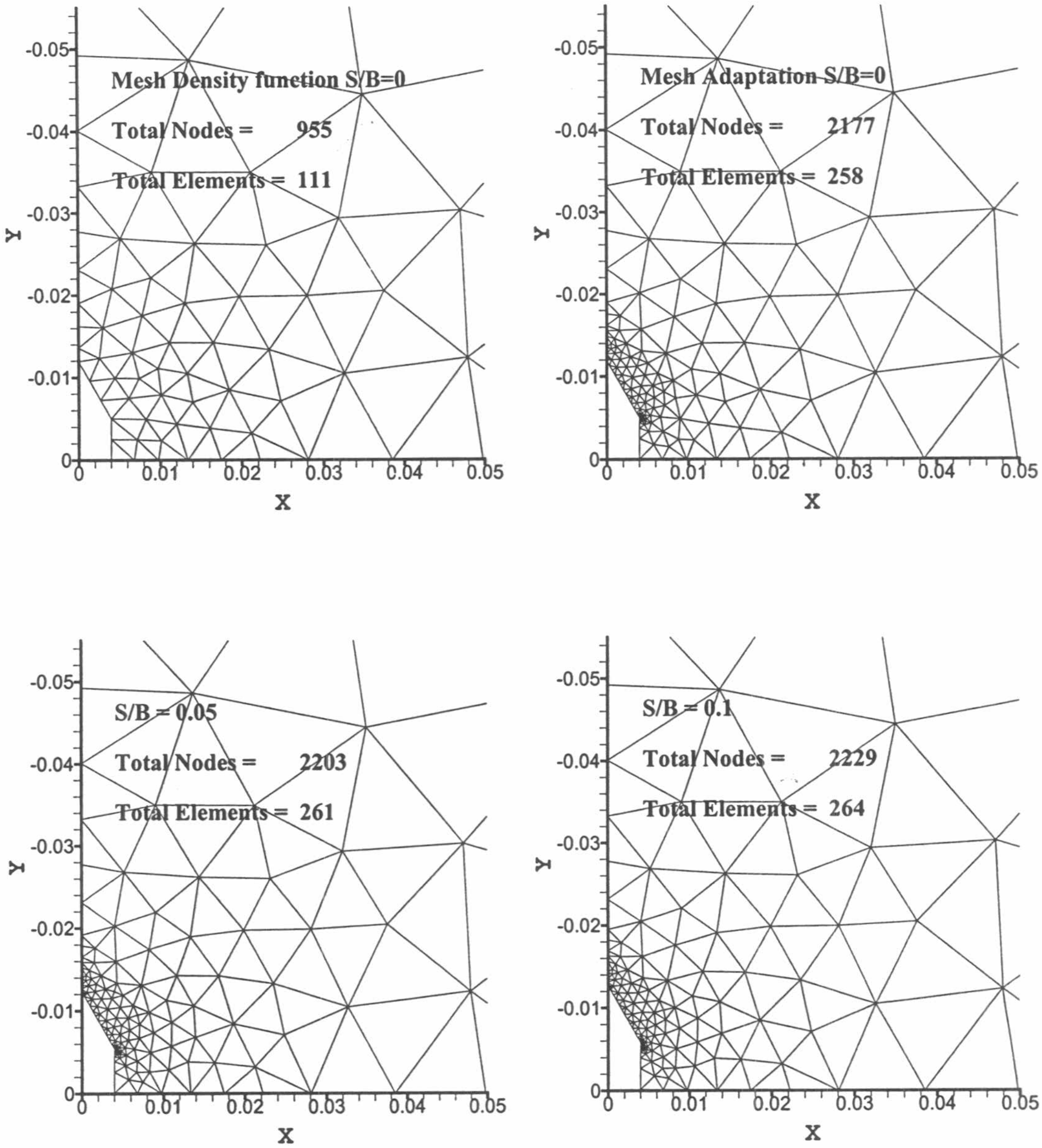
รูปที่ ข.8 ผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของฐานรากต่อเนื่อง D/B=5 กรณี LSC

(ก) Failure zone $(\sigma_1 - \sigma_3) / (2s_u)$

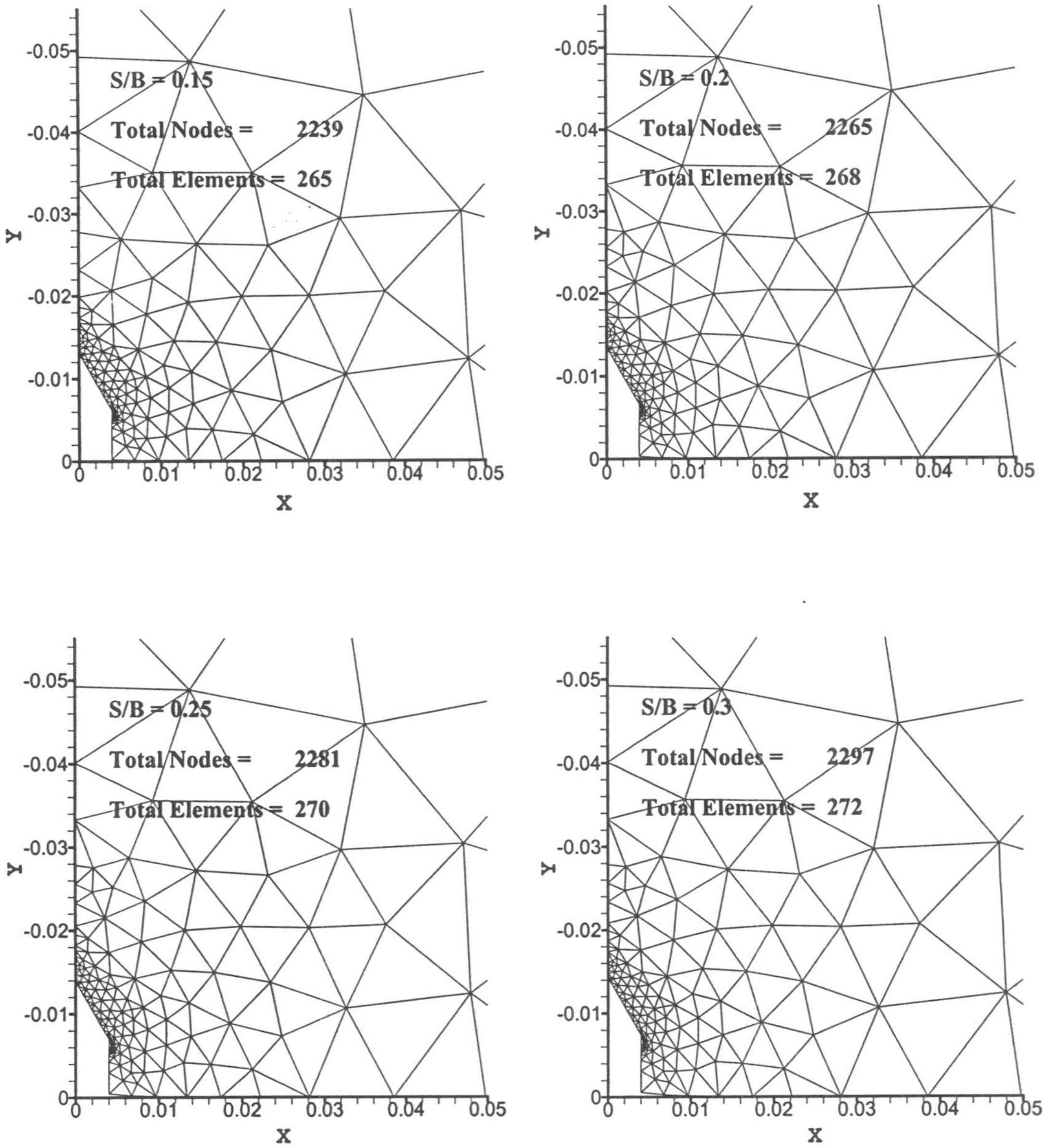
(ข) ทิศทางของความเค้นหลักเทียบกับแนวแกนดิ่ง (δ , องศา),

(ค) ค่าเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของฐานราก

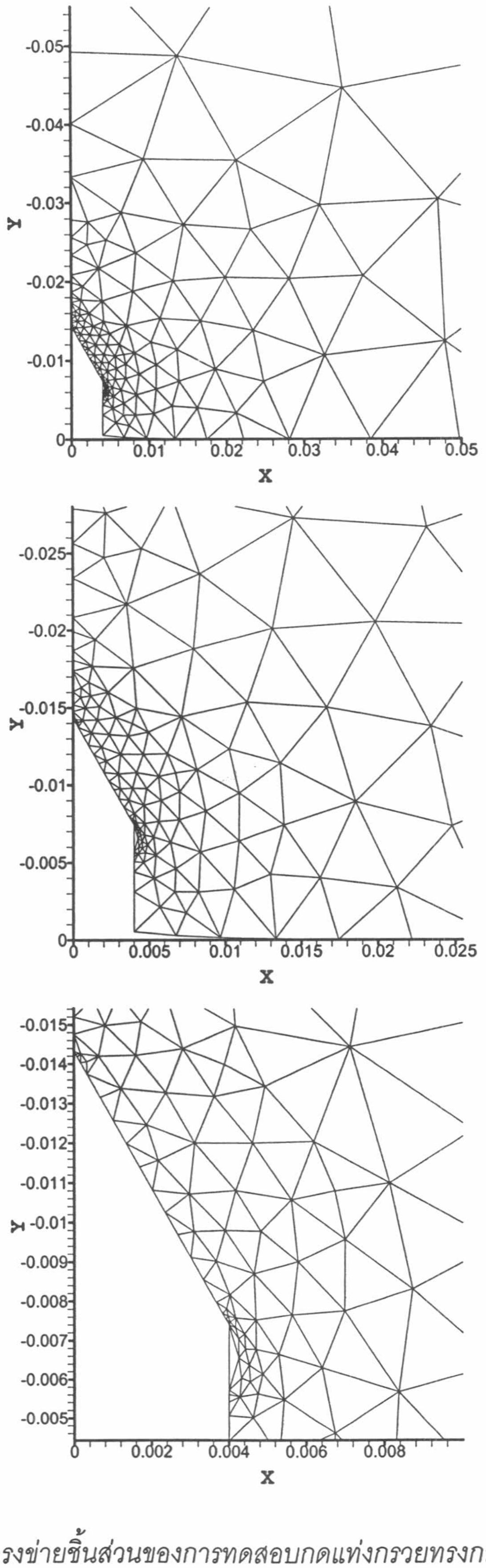
(ง) กราฟ Contour ของความเค้นแนวแกนดิ่ง $\left(\sigma_v / s_u\right)$



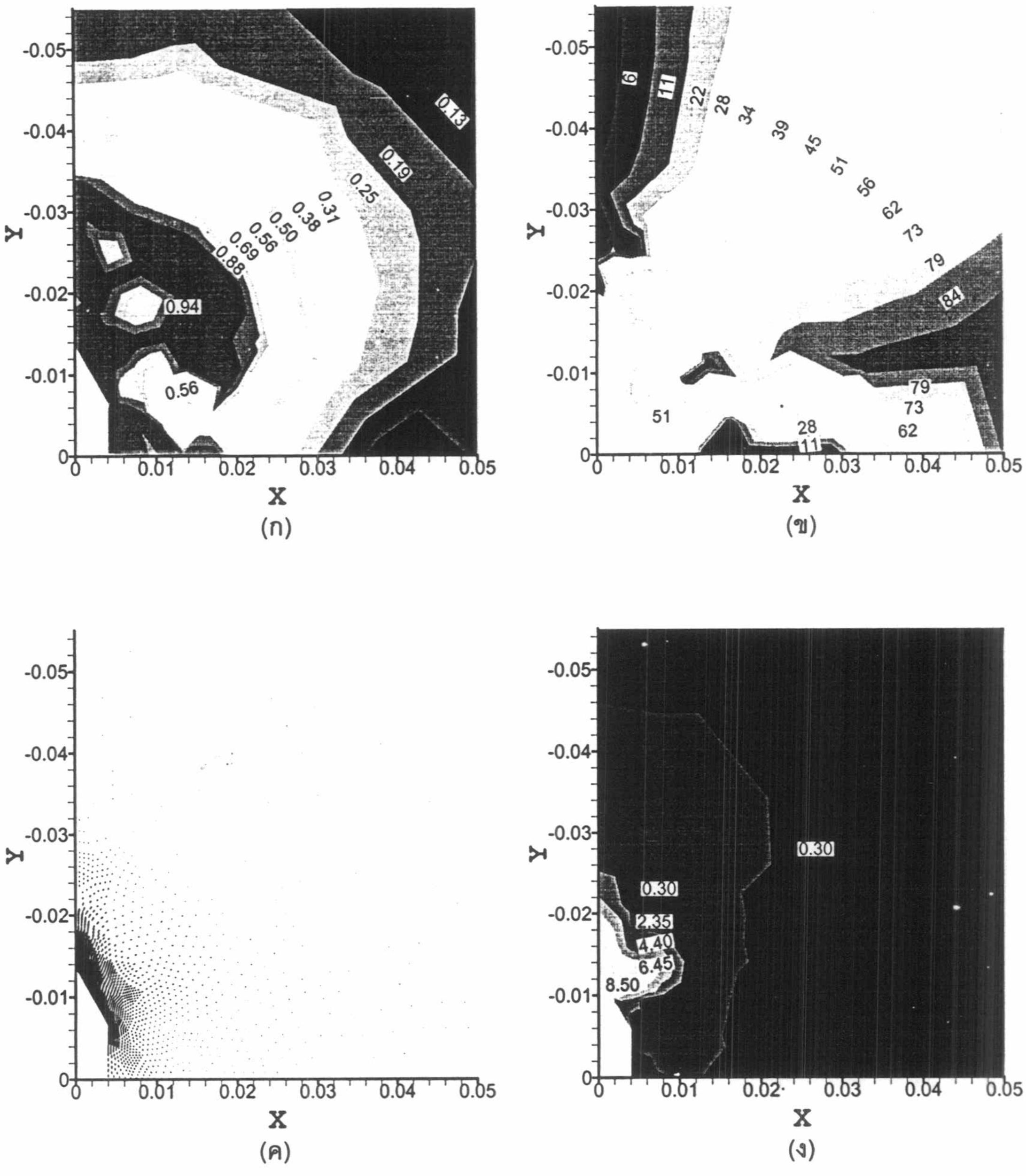
รูปที่ ข.9 โครงข่ายชิ้นส่วนของการทดสอบกดแท่งกรวยทรงกระบอกปลายแหลม จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.9(ต่อ) โครงข่ายชิ้นส่วนของการทดสอบกดแท่งกรวยทรงกระบอกปลายแหลม จากการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวมากของมวลดิน (LSC)



รูปที่ ข.10 โครงข่ายชิ้นส่วนของการทดสอบกดแท่งกรวยทรงกระบอกปลายแหลม กรณี LSC ที่ S/B= 0.3



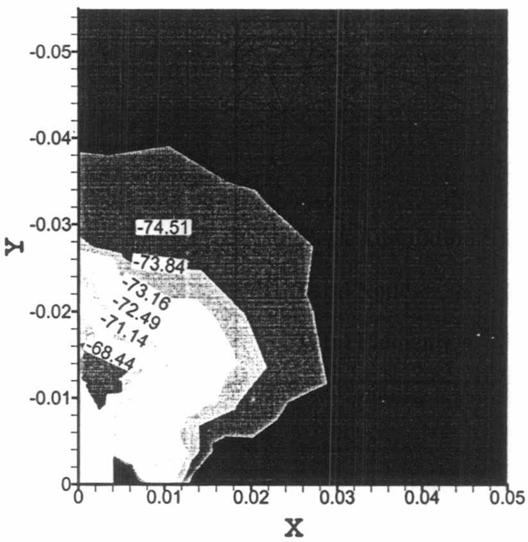
รูปที่ ข.11 ผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของการทดสอบกดแท่งกรวยทรงกระบอกปลายแหลมกรณี LSC

(ก) Failure zone $(\sigma_1 - \sigma_3) / (2s_u)$

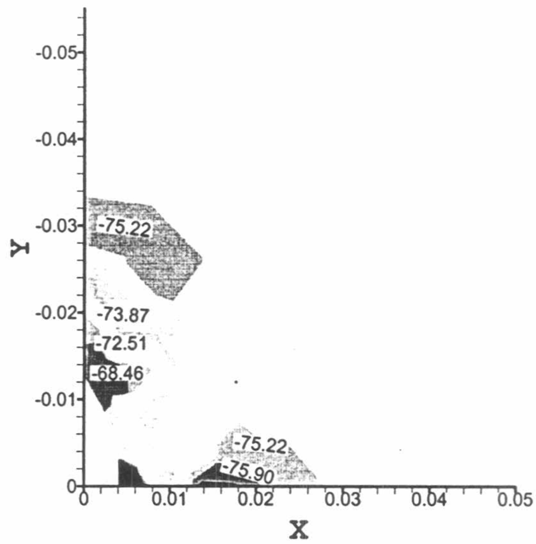
(ข) ทิศทางของความเค้นหลักเทียบกับแนวแกนดิ่ง (δ *, องศา)*

(ค) ค่าเวกเตอร์การเคลื่อนตัวของฐานราก

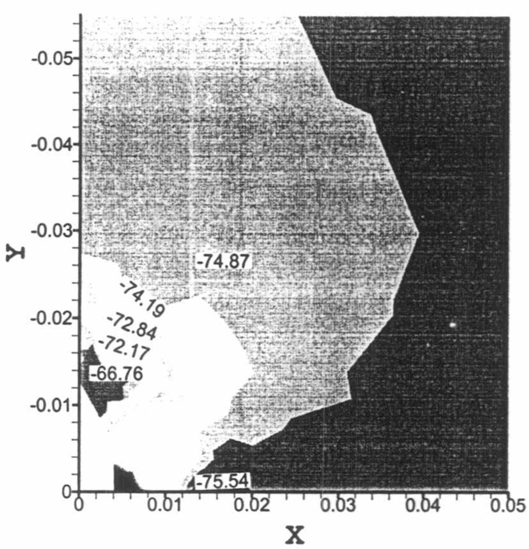
(ง) กราฟ Contour ของความเค้นแนวแกนดิ่ง $\left(\sigma_v / s_u\right)$



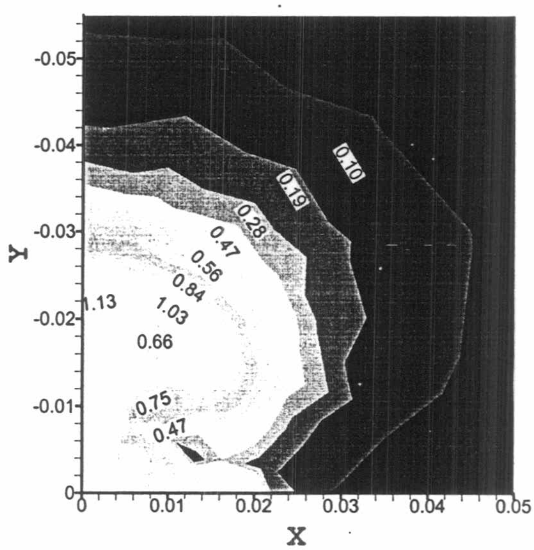
(จ)



(ฉ)



(ช)



(ซ)

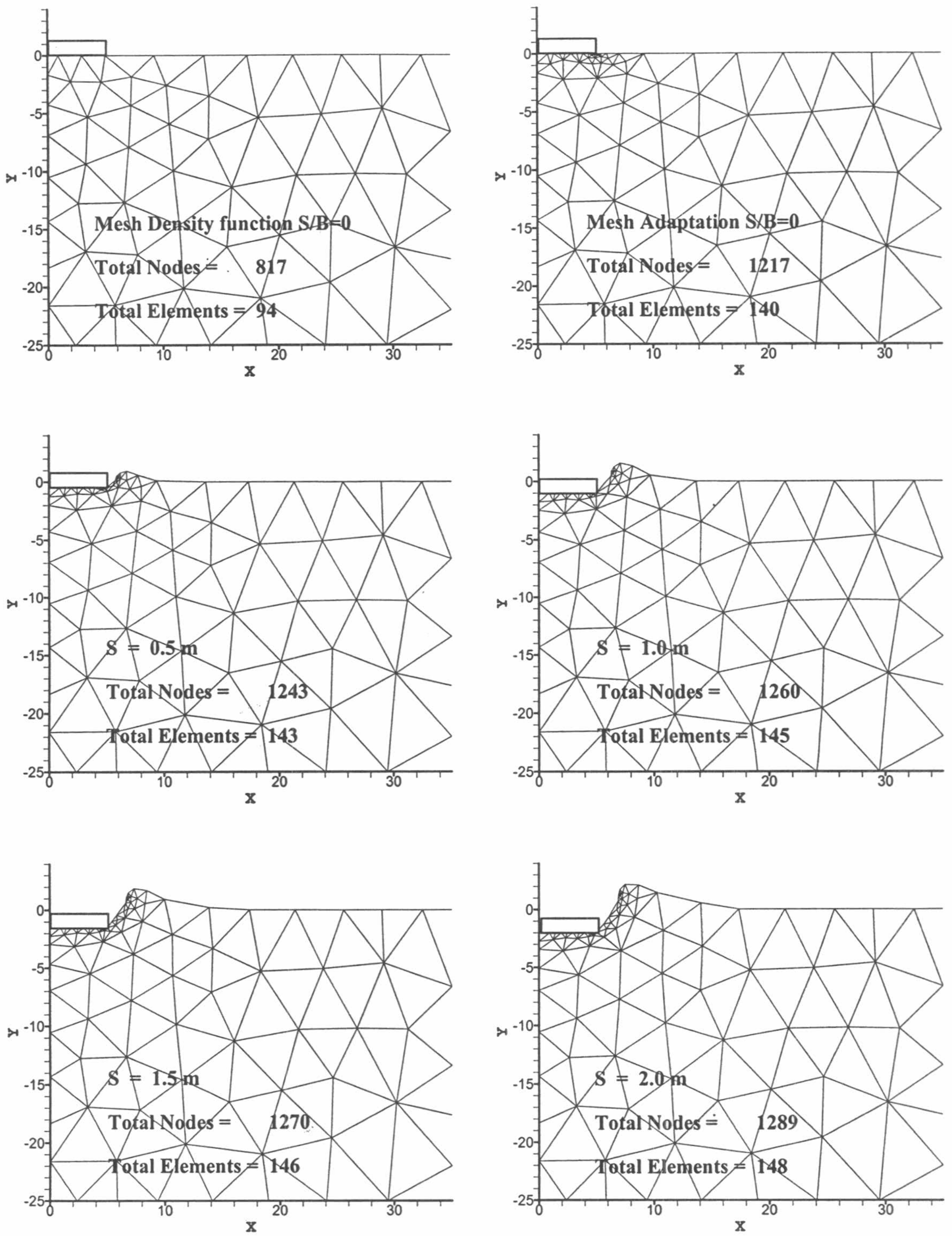
รูปที่ ข.11(ต่อ) ผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ของการทดสอบกดแท่งกรวยทรงกระบอกปลายแหลมกรณี LSC

(จ) Major Principle Stress (σ_1 / Su)

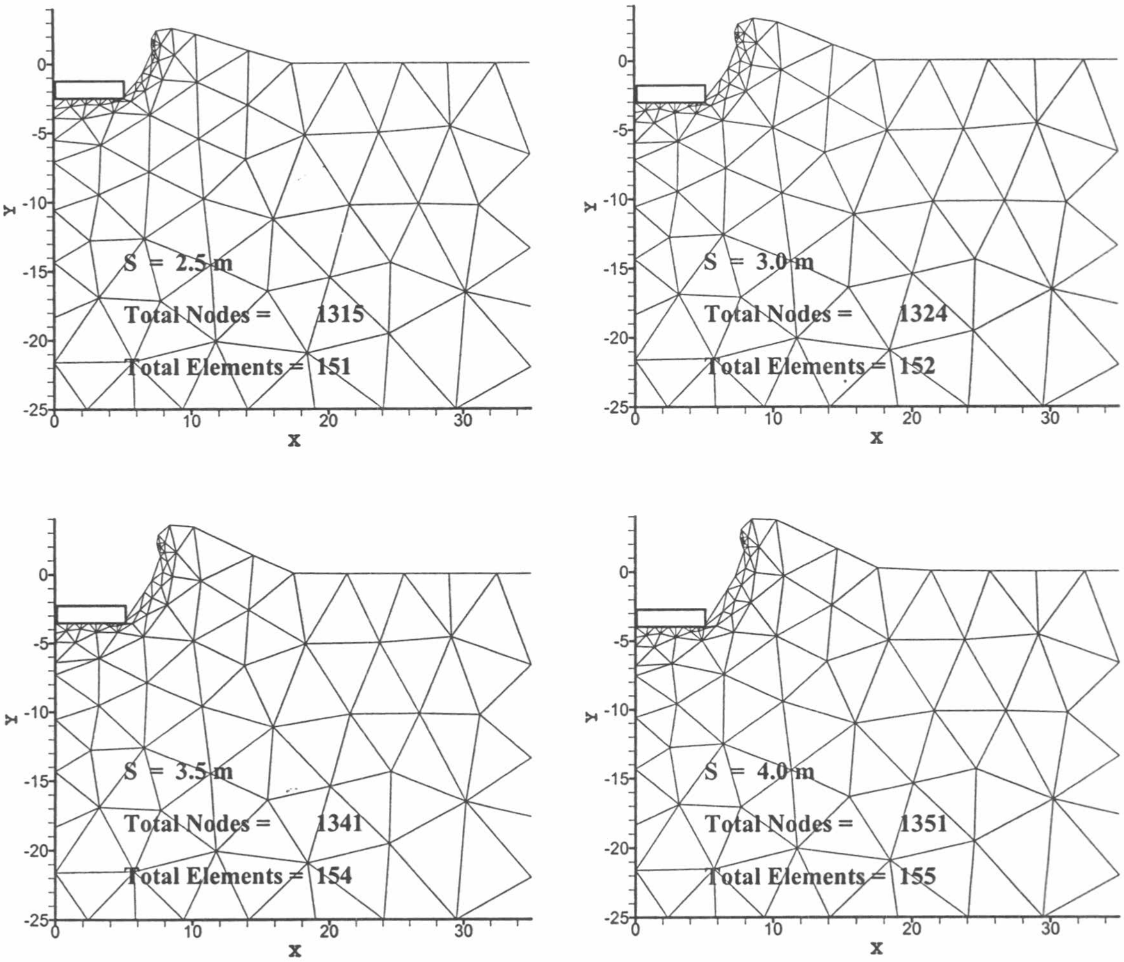
(ฉ) Minor Principle Stress (σ_3 / Su)

(ช) Maximum Shear Stress (p / Su)

(ซ) Normal Stress (q / Su)

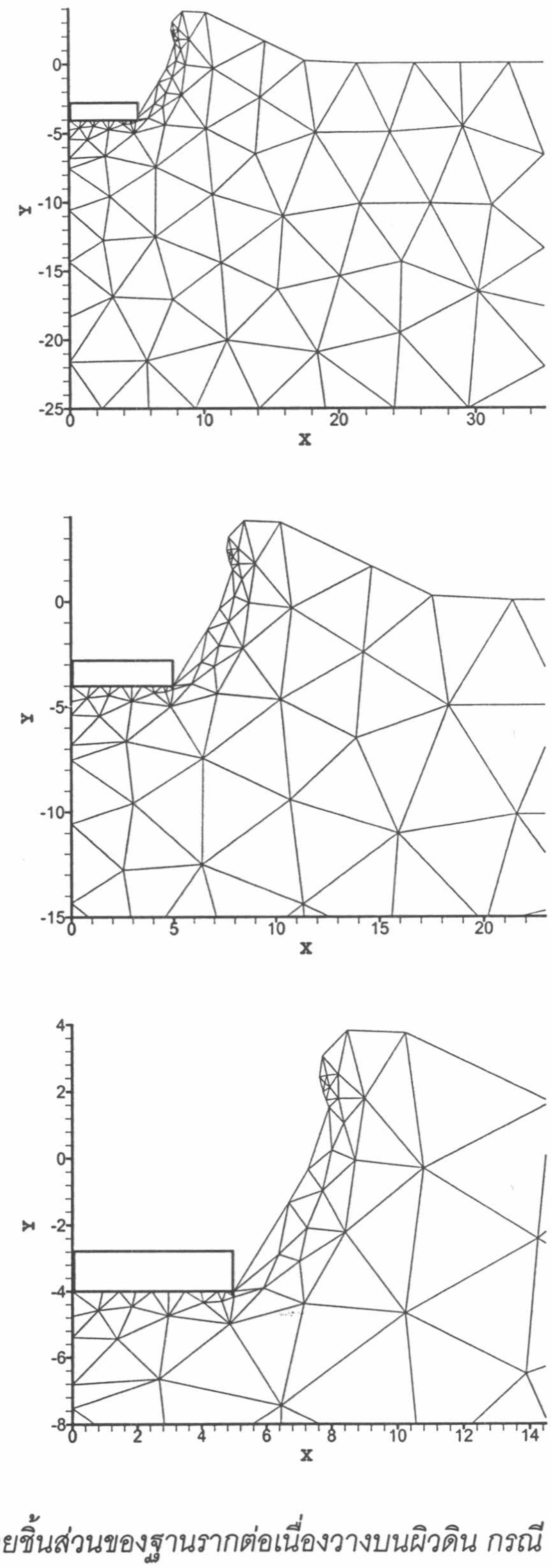


รูปที่ ข.12 โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน กรณี LSC
สำหรับปัญหา Non-Homogeneous ที่ค่า (ρ.B)/Su_0 =20



รูปที่ ข.12(ต่อ) โครงข่ายของชิ้นส่วนฐานรองรับต่อเนื่องวางบนผิวดิน กรณี LSC

สำหรับปัญหา Non-Homogeneous ที่ค่า $(\rho.B)/Su_0 = 20$



รูปที่ ข.13 โครงข่ายชิ้นส่วนของฐานรากต่อเนื่องวางบนผิวดิน กรณี LSC ที่ S= 4.0 เมตร

ปัญหา Non-Homogeneous ที่ค่า $(\rho.\mathrm{B})/\mathrm{Su}_0=20$

ภาคผนวก

ภาคผนวก ค

ค.1 กลศาสตร์สำหรับการเคลื่อนตัวมาก

สำหรับปัญหาทางด้านวิศวกรรมปฐพี อาจมีความเป็นไปได้ที่มวลดินจะเกิดการเคลื่อนตัวมาก (Large Deformation) หรือโดยทั่วไป กำหนดที่ค่าความเครียด (Strain) เกินกว่า 3-5% และมีความจำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear Analysis) โดยลักษณะปัญหาแบบไร้เชิงเส้นสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิดด้วยกัน คือ

1. Material Nonlinearity
2. Geometric Nonlinearity

โดยที่ Material Nonlinearity จะสามารถอธิบายได้โดย สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด (Constitutive Equation) ส่วน Geometric Nonlinearity จะพิจารณาถึงปัญหาที่เกิดค่าความเครียดในปริมาณมาก ๆ (Large Strain)

เมื่อมวลดินมีการเคลื่อนตัวน้อย ๆ เราสามารถใช้ Small Deformation Strain Tensor และ Cauchy Stress Tensor ในการวิเคราะห์ปัญหาได้ เนื่องจากจะสมมุติให้ ปริมาตรของมวลดินไม่เปลี่ยนแปลง แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อมวลดินมีค่าความเครียดเกินกว่า 5% เราจำเป็นจะต้องเลือกใช้ Stress Tensor และ Strain Tensor ที่มีความเหมาะสม โดยจะต้องพิจารณาว่าเมื่อวัตถุเกิดการหมุน (Rigid Body Rotation) จะต้องไม่ส่งผลกระทบต่อค่าความเครียดของวัตถุ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า Stress Tensor ที่จะใช้สำหรับ Constitutive Equation จะต้องไม่เปลี่ยนแปลง ขณะที่วัตถุเกิดการหมุน นั่นเอง

ในการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวมาก ขั้นตอนแรกจำเป็นจะต้องทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างรูปร่างเริ่มต้น (Initial/Reference/Undeformed Configuration) และรูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูป (Deformed Configuration) ดังแสดงในรูปที่ ค.1

โดยที่ รูปร่างเริ่มต้น (Initial/Reference/Undeformed) คือสภาพของวัตถุก่อนที่จะมีแรงมากระทำ
รูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูป (Deformed) คือสภาพของวัตถุภายหลังจากที่แรงมากระทำ

เมื่อวัตถุได้รับแรงกระทำ จะทำให้วัตถุเกิดการเสียรูป โดยอาจแบ่งลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุออกเป็น 2 แบบ คือ

1. เกิดการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body Rotation) และ
2. เกิดค่าความเค้น หรือ วัตถุมีการยืดตัวออก (Strain)

โดยสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของวัตถุ ในสภาพเริ่มต้นและสภาพหลังเกิดการเสียรูป โดยอาศัย เวกเตอร์การกระจัด (Displacement Vector) ได้ดังนี้

$$x_i = X_i + u_i \qquad \text{...... (ค.1)}$$

พิจารณาวัตถุในอนุภาคขนาดเล็ก ๆ และอาศัยกฎลูกโซ่ (Chain Rule) จะได้

$$\partial x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \qquad \text{...... (ค.2)}$$

โดยกำหนดให้ $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ และเรียกว่า Deformation Gradient Tensor แทนค่า F_{ij} ด้วยสมการ (ค.1) จะได้

$$F_{ij} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \qquad \text{...... (ค.3)}$$

นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติอื่น ๆ ของค่า F ซึ่งใช้ในการคำนวณค่าความเค้น ความเครียด สำหรับปัญหามวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวมาก ดังนี้

1st Invariant หรือ Trace of F : $F_{11} + F_{22} + F_{33} = F_{ij}\delta_{ij}$

2st Invariant : $\frac{1}{2}(F_{ij}F_{ij} - F_{ii}F_{jj})$

3st Invariant : $\det F = J$

สำหรับคุณสมบัติต่าง ๆ ของค่า F ดังกล่าว สามารถนำมาใช้ในการเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง ปริมาตร และพื้นที่ ของวัตถุในสภาวะเริ่มต้น และวัตถุในสภาวะภายหลังเกิดการเสียรูป ได้ดังนี้

$$dV = J d\mathring{V} \qquad \text{...... (ค.4)}$$

$$dAn_i = J\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) d\mathring{A} N_k \qquad \text{...... (ค.5)}$$

โดยที่ $d\mathring{V}$, dV = ปริมาตรของวัตถุในสภาวะเริ่มต้น และสภาวะภายหลังเกิดการเสียรูปตามลำดับ

$d\mathring{A}$, dA = พื้นที่ผิวของวัตถุในสภาวะเริ่มต้น และสภาวะภายหลังเกิดการเสียรูป ตามลำดับ

N_k , n_i = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $d\mathring{A}$ และ dA ตามลำดับ

ค.2 การวัดปริมาณความเครียดสำหรับการเคลื่อนตัวมาก (Large Deformation Strain Measures)

ถึงแม้ว่าค่า Deformation Gradient Tensor , F ดังที่ได้กล่าวข้างต้น จะบ่งบอกถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุภายหลังจากที่มีแรงมากระทำ แต่อย่างไรก็ตาม ยังไม่สามารถใช้ค่า F ในการคำนวณปริมาณความเครียดได้โดยตรง เนื่องจากยังมีส่วนที่เกิดการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body rotation) รวมอยู่ด้วย ดังนั้นในการคำนวณปริมาณความเครียด โดยไม่รวมเอาส่วนที่เป็นการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งเข้ามาเกี่ยวข้อง จะทำได้โดยการพิจารณาถึงการเปลี่ยนแปลงของความยาวกำลังสองของทิศทางในวัตถุ จากรูปร่างเริ่มต้น ไปยังรูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูป โดยที่ค่าความยาวกำลังสองของทิศทางในรูปร่างเริ่มต้น สามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

$$(d\mathring{s})^2 = dX_i dX_i \qquad \text{...... (ค.6)}$$

และเขียนให้อยู่ในรูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูปได้ดังนี้

$$(ds)^2 = dx_i dx_i \qquad \text{...... (ค.7)}$$

ดังนั้นสามารถหาค่า Strain Tensor , E_{ij} ได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$(ds)^2 - (d\mathring{s})^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i \qquad \text{...... (ค.8)}$$

$$= 2dX_i E_{ij} dX_j \qquad \text{...... (ค.9)}$$

แปลงค่า dx_i โดยใช้ Deformation Gradient Tensor สามารถจัดรูปสมการ (ค.8) ได้ดังนี้

$$(ds)^2 - (d\mathring{s})^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j\right) - dX_i \delta_{ij} dX_j$$

$$= (F_{ki} dX_i)(F_{kj} dX_j) - dX_i \delta_{ij} dX_j$$

$$= dX_i\left(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}\right)dX_j \qquad \text{...... (ค.10)}$$

จากความสัมพันธ์ของสมการ (ค.9) และ (ค.10) จะได้

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}\right) \qquad \text{...... (ค.11)}$$

ค่า Strain Tensor ที่ได้นี้ จะไม่รวมผลของการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง และยังสามารถใช้ได้กับปัญหาการเคลื่อนตัวของมวลดิน ที่มีขนาดของการเคลื่อนตัวไม่จำกัด โดยที่ Strain Tensor นี้ มีชื่อเรียกว่า Green-Lagran Strain Tensor

สำหรับความแตกต่างระหว่าง Green-Lagran Strain Tensor และ Small Deformation Strain Tensor สามารถพิจารณาได้โดย ทำการแทนสมการ (ค.3) ลงในสมการ (ค.11) และจัดรูปใหม่ จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \qquad \text{...... (ค.12)}$$

จากสมการข้างบน จะสังเกตได้ว่า สำหรับ Large Deformation Strain Tensor จะมีพจน์กำลังสองเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งหมายความว่า ในการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวมาก จะเป็นแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear) เมื่อเปรียบเทียบกับ Small Deformation Strain Tensor ดังแสดงต่อไปนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \qquad \text{...... (ค.13)}$$

จะกล่าวได้ว่า ถ้าสมมุติให้การเคลื่อนตัวของมวลดินมีขนาดน้อย ๆ จะตัดพจน์กำลังสองออกจาก Green-Lagran Strain Tensor และทำให้ผลการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่มีการเคลื่อนตัวน้อย ๆ เป็นแบบเส้นตรง (Linear)

นอกจากนั้น จะเห็นว่าค่า Displacement Gradient , $\partial u_i/\partial X_j$ ใน Green-Lagran Strain Tensor จะอ้างอิงจากรูปร่างเริ่มต้น (Initial Configuration) ดังนั้นในการวัดปริมาณความเครียด ก็จะคำนวณมาจากรูปร่างเริ่มต้น เช่นเดียวกัน

ค.3 การวัดปริมาณความเค้นสำหรับการเคลื่อนตัวมาก (Large Deformation Stress Measures)

ในการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวมาก โดยส่วนใหญ่จะใช้ Green-Lagran Strain Tensor ในการวัดปริมาณความเครียด (Strain Measures) ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องหาการวัดปริมาณความเค้น (Stress Measures) ที่เหมาะสมในการใช้ร่วมกับ Strain Tensor ดังกล่าว โดยที่ Stress Tensor ชนิดนี้ จะต้องมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อวัตถุเกิดการหมุน (Rigid Body Rotation)

ก่อนอื่นจะพิจารณาถึง Cauchy Stress Tensor ซึ่งใช้สำหรับวัดปริมาณความเค้นในการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่มีการเคลื่อนตัวน้อย ๆ โดยสามารถหาได้จาก แรงต่อพื้นที่ภายหลังเกิดการเสียรูป (Force / Unit Deformed Area) และการวัดปริมาณความเครียด (Strain Measures) ที่เหมาะสมในการใช้ร่วมกับ Cauchy Stress Tensor ก็คือ Small Deformation Strain Tensor แต่อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดในการใช้ Stress tensor นี้ ในการวิเคราะห์ปัญหามวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวมากนั้น ก็คือ เราจะไม่ทราบพื้นที่ของวัตถุในรูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูปแล้วนั่นเอง ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องหาการวัดปริมาณความเค้นแบบใหม่ ซึ่งสามารถใช้อ้างอิงได้กับรูปร่างเริ่มต้น

พิจารณาแรง dP_j ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของวัตถุภายหลังเกิดการเสียรูป $dA_i = dAn_i$ โดยที่ n_i คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ dA ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ของ Stress Tensor ที่ได้มาจากการอ้างอิงถึงวัตถุในรูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูป ได้ดังนี้

$$dP_j = \sigma_{ij} dAn_i \qquad \text{...... (ค.14)}$$

โดยที่ σ_{ij} เรียกว่า Cauchy Stress Tensor และเป็นเมตริกซ์สมมาตร , $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ นอกจากนั้น Cauchy Stress Tensor ยังเป็น Real Stress เนื่องจากว่าหามาจาก แรงต่อพื้นที่ภายหลังเกิดการเสียรูป ซึ่งต่างจาก Pseudo Stress ที่หามาจาก แรงต่อพื้นที่ของวัตถุในสภาพเริ่มต้น (Force / Unit Undeformed Area)

ต่อไปพิจารณาถึง Stress Tensor , T_{ij} แบบใหม่ ที่ได้มาจากการอ้างอิงถึงพื้นที่ผิวของวัตถุในรูปร่างเริ่มต้น $d\mathring{A}_i = d\mathring{A}N_i$ โดยที่ N_i คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $d\mathring{A}$ ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรง dP_j ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของวัตถุภายหลังเกิดการเสียรูป เช่นเดียวกัน ในรูปของ Stress Tensor แบบใหม่ได้ดังนี้

$$dP_j = T_{ij} d\mathring{A} N_i \qquad \text{...... (ค.15)}$$

โดยเรียก Stress Tensor , T_{ij} แบบใหม่นี้ว่า 1st Piola-Kirchoff Stress Tensor และเป็น Pseudo Stress เนื่องจากว่า หามาจาก แรงต่อพื้นที่ของวัตถุในสภาพเริ่มต้น

จากนั้น แทนความสัมพันธ์ระหว่าง dA กับ $d\mathring{A}$ ในสมการ (ค.5) ซึ่งก็คือ $dAn_i = J\left(\partial X_k/\partial x_i\right) d\mathring{A} N_k$ ลงในสมการ (ค.14) ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสมการ (ค.14) และ (ค.15) ได้ดังนี้

$$\sigma_{ij} J\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) d\mathring{A} N_k = T_{ij} d\mathring{A} N_i \qquad \text{...... (ค.16)}$$

ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$\left(\sigma_{ij} J \frac{\partial X_k}{\partial x_i} - T_{kj}\right) d\mathring{A} N_k = 0 \qquad \text{...... (ค.17)}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง 1st Piola-Kirchoff Stress Tensor และ Cauchy Stress Tensor ดังต่อไปนี้

$$T_{kj} = J \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \sigma_{ij}$$

หรือ

$$T_{ij} = J \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \qquad \text{...... (ค.18)}$$

อย่างไรก็ตาม 1st Piola-Kirchoff Stress Tensor ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่ 2 ประการ ดังนี้คือ

1. Stress Tensor ชนิดนี้ ไม่เหมาะสมในการใช้ร่วมกับ Green-Lagran Strain Tensor เนื่องจาก ผลคูณระหว่าง 1st Piola-Kirchoff Stress Tensor กับ Green-Lagran Strain Tensor จะให้ผลลัพธ์เป็น ความหนาแน่นของพลังงานความเครียด (Strain Energy Density) ที่มีค่าไม่เท่ากับ ผลคูณระหว่าง Cauchy Stress Tensor กับ Small Deformation Strain Tensor

2. Stress Tensor ชนิดนี้ จะไม่สมมาตร จึงทำให้เป็นการยากในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในลำดับต่อไปจะกล่าวถึง Stress Tensor , S_{ij} อีกชนิดหนึ่ง โดยแทนที่จะพิจารณาถึงแรง dP_j ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของวัตถุภายหลังเกิดการเสียรูป แต่จะทำการแปลงกลับไปให้เป็นแรง $d\overline{P}_j$ ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของวัตถุในสภาพเริ่มต้น โดยอาศัย Inverse ของ Deformation Gradient Tensor ดังนี้

$$d\overline{P}_j = F^{-1}_{jk} dP_k = \frac{\partial X_j}{\partial x_k} dP_k \qquad \text{...... (ค.19)}$$

ถ้าเรากำหนดให้ Stress Tensor , S_{ij} ชนิดใหม่นี้ พิจารณาถึงแรง $d\overline{P}_j$ ที่กระทำบนพื้นที่ผิวของวัตถุในสภาพเริ่มต้น รวมทั้งยังอ้างอิงถึงพื้นที่ผิวของวัตถุในรูปร่างเริ่มต้น เช่นเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$d\overline{P}_j = S_{ij} N_i d\mathring{A} \qquad \text{...... (ค.20)}$$

โดยเรียก Stress Tensor , S_{ij} ชนิดใหม่นี้ว่า 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor และเป็น Pseudo Stress เนื่องจากว่า หามาจาก แรงต่อพื้นที่ของวัตถุในสภาพเริ่มต้น นอกจากนั้น เมตริกซ์ที่ได้ยังมีความสมมาตร , $S_{ij} = S_{ji}$ อีกด้วย

จากสมการ (ค.5) และ (ค.14) จะได้ว่า

$$dP_k = \sigma_{ik} J \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) d\mathring{A} N_j \qquad \text{...... (ค.21)}$$

แทนสมการ (ค.21) ลงในสมการ (ค.19) ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสมการ (ค.19) และ (ค.20) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} \sigma_{ik} J \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) d\mathring{A} N_j = S_{ij} N_i d\mathring{A} \qquad \text{...... (ค.22)}$$

ทำการจัดรูปใหม่ จะได้

$$\left(J\sigma_{jk} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) - S_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) d\mathring{A} N_i = 0 \qquad \text{...... (ค.23)}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor และ Cauchy Stress Tensor ดังต่อไปนี้

$$S_{ij} = J\sigma_{kl}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial X_j}{\partial x_l} \qquad \text{...... (ค.24)}$$

และจากสมการ (ค.18) จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor และ 1^{st} Piola-Kirchoff Stress Tensor ได้ดังนี้

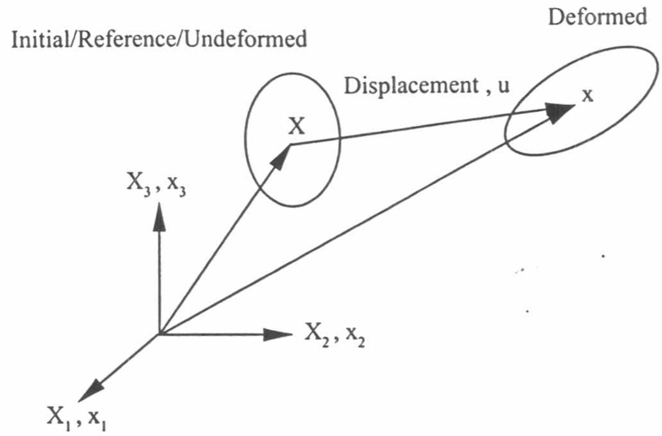
$$S_{ij} = T_{ik}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} \qquad \text{...... (ค.25)}$$

เมื่อทำการวิเคราะห์มวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวน้อย ๆ (Small Deformation) จะได้ว่า Cauchy Stress Tensor , 1^{st} Piola-Kirchoff Stress Tensor และ 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor จะประมาณให้มีค่าเท่ากัน เนื่องจาก $J \cong 1$ และ $\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \cong \delta_{ij}$

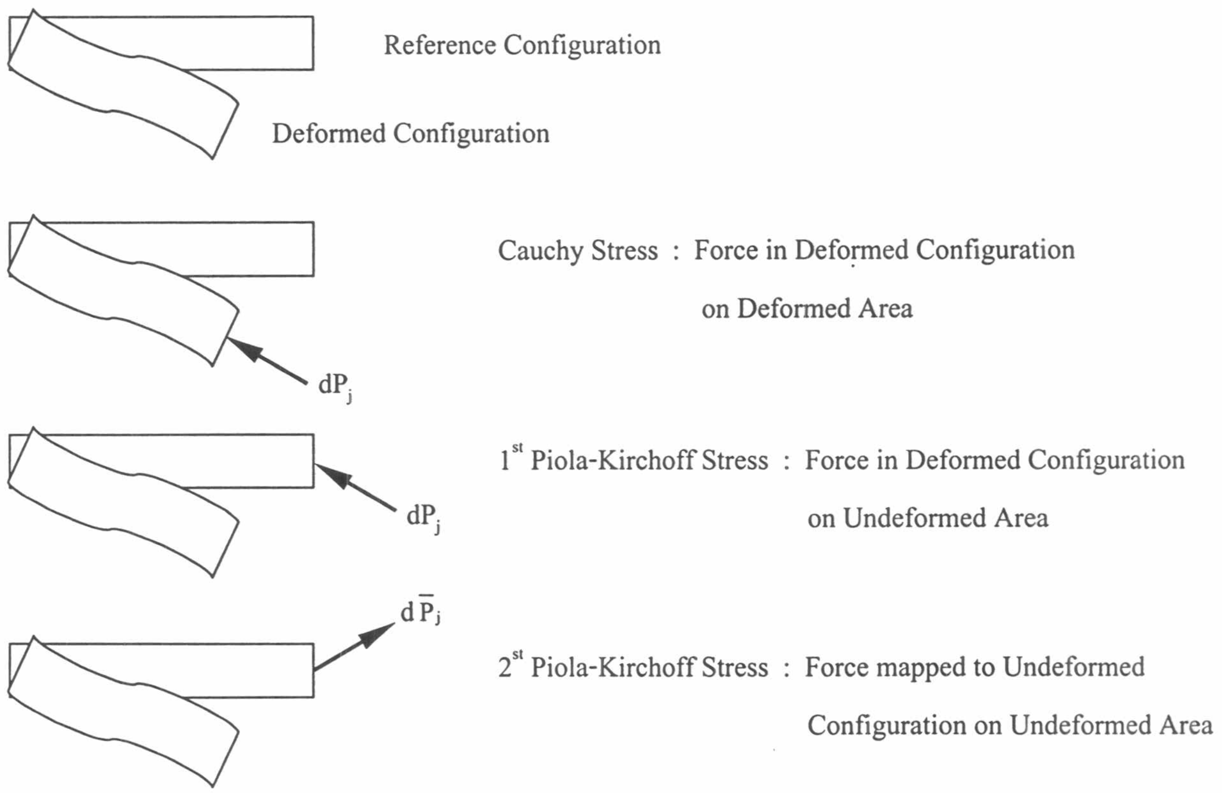
สำหรับ 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อวัตถุเกิดการหมุน (Rigid Body Rotation) หรือกล่าวได้ว่า การหมุนของวัตถุ ไม่มีผลต่อค่าความเครียด ส่วน Cauchy Stress Tensor และ 1^{st} Piola-Kirchoff Stress Tensor จะเกิดการเปลี่ยนแปลง นอกจากนั้น ความหนาแน่นของพลังงานความเครียด (Strain Energy Density) ที่คำนวณจาก 2^{nd} Piola-Kirchoff Stress Tensor กับ Green-lagran Strain Tensor ยังมีค่าเท่ากับ ที่คำนวณจาก Cauchy Stress Tensor กับ Small Deformation Strain Tensor ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = S_{ij}E_{ij} \qquad \text{...... (ค.26)}$$

สำหรับความหมายในเชิงฟิสิกส์ (Physical Meaning) สำหรับ Stress Tensor ทั้งสามนี้ สามารถอธิบายได้ดังรูปที่ ค.2



รูปที่ ค.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง รูปร่างเริ่มต้น และ รูปร่างภายหลังเกิดการเสียรูป



รูปที่ ค.2 Physical Meaning สำหรับ Stress Tensor ชนิดต่าง ๆ

ภาคผนวก

ภาคผนวก ง

ง.1 วิธีหาค่าหน่วยแรงรวมใต้ฐานรองรับ (F_{net} and F_{Total})

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกำหนดให้มีการหาค่าหน่วยแรงรวมภายใต้ฐานรองรับใน 2 ลักษณะด้วยกัน คือ

(1) ค่าหน่วยแรงรวมสุทธิภายใต้ฐานรองรับ หรือ F_{net} หมายถึง การรวมค่าหน่วยแรงภายใต้ฐานรองรับ โดยจะไม่พิจารณารวมผลของค่าหน่วยแรงเริ่มต้น (Initial Body Force) เข้ามาเกี่ยวข้อง

(2) ค่าหน่วยแรงรวมทั้งหมดใต้ฐานรองรับ หรือ F_{Total} ซึ่งจะหมายถึง การรวมค่าหน่วยแรงภายใต้ฐานรองรับ ที่พิจารณารวมผลของค่าหน่วยแรงเริ่มต้นเข้าไปด้วย

ซึ่งในการหาค่าหน่วยแรงรวมภายใต้ฐานรองรับทั้ง 2 ลักษณะดังกล่าว จะพิจารณาจากผลของการวิเคราะห์ปัญหา ทั้งในแบบที่พิจารณาผลของหน่วยน้ำหนัก ($\gamma \neq 0$ kN/m^3) และไม่พิจารณาผลของหน่วยน้ำหนัก (γ =0 kN/m^3) ดังที่แสดงไว้ในตารางที่ ง.1 และ ง.2 ตามลำดับ

สำหรับการคำนวณหาค่า F_{net} จะกระทำได้โดยการนำค่า Incremental Stress หรือ ค่า $\Delta\sigma_n$ (แสดงไว้ในคอลัมน์ที่ 2 จากตารางที่ ง.1 และ ง.2) ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในแต่ละวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัว มาทำการอินทิเกรตสำหรับทุก ๆ จุดต่อทั้งหมด ที่อยู่ภายใต้ฐานรองรับ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าแรงรวมที่เพิ่มขึ้น ΔF_{net} สำหรับวงรอบการคำนวณที่พิจารณา จากสมการดังต่อไปนี้

$$\Delta F^n_{net} = \int \Delta\sigma_n . dL \qquad \text{...... (ง.1)}$$

โดยที่ ΔF^n_{net} คือ ค่าแรงรวมสุทธิที่เพิ่มขึ้น สำหรับวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัวที่ n
$\Delta\sigma_n$ คือ ค่าหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้นที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัวที่ n

ดังนั้นจะสามารถหาค่า F_{net} ได้จากการรวมค่า ΔF_{net} สำหรับแต่ละวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัว ที่คำนวณได้ดังกล่าว จากสมการดังนี้

$$F_{net} = \Delta F^1_{net} + \Delta F^2_{net} + \ldots + \Delta F^n_{net} \qquad \text{...... (ง.2)}$$

เนื่องจากค่า F_{net} ที่คำนวณได้ จะไม่พิจารณารวมผลของค่าหน่วยแรงเริ่มต้นเข้ามาเกี่ยวข้อง เนื่องจากเป็นค่าแรงรวมสุทธิที่ได้จากการอินทิเกรตเฉพาะค่าหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้น ดังนั้นจากผลการวิเคราะห์ปัญหาสำหรับค่า γ ต่าง ๆ กัน พบว่า ค่า F_{net} ที่คำนวณได้ก็จะให้ค่าที่เท่ากัน

การคำนวณหาค่า F_{Total} จะกระทำได้โดยการนำค่า Cumulative Stress หรือ ค่า σ_n (แสดงไว้ในคอลัมน์ที่ 3 จากตารางที่ ง.1 และ ง.2) ซึ่งเป็นค่าหน่วยแรงที่ได้จากการบวกสะสมค่าหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้น $\Delta\sigma_n$ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในแต่ละวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัว รวมทั้งผลของค่าหน่วยแรงเริ่มต้น, γZ เข้าไว้ด้วยกัน มาทำการอินทิเกรตสำหรับทุก ๆ จุดต่อทั้งหมด ที่อยู่ภายใต้ฐานรองรับ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าแรงรวมทั้งหมดภายใต้ฐานรองรับ F_{Total} จากสมการดังต่อไปนี้

$$F_{Total} = \int \sigma_n . dL \qquad \text{...... (ง.3)}$$

โดยที่ F_{Total} คือ ค่าแรงรวมทั้งหมดภายใต้ฐานรองรับ

σ_n คือ ค่าหน่วยแรงสะสม ที่รวมผลของค่าหน่วยแรงเริ่มต้น สำหรับวงรอบของการเพิ่มค่าการทรุดตัวที่ n

จากนั้นนำค่าหน่วยแรงรวมภายใต้ฐานรองรับที่คำนวณได้ ทั้งในแบบ F_{Net} และ F_{Total} มาหารด้วยขนาดความกว้างของฐานรองรับ, B ซึ่งจะได้เป็นค่ากำลังรับน้ำหนักของมวลดิน และค่าที่ได้จะบันทึกลงในแฟ้มข้อมูล “Bearing Data” สำหรับแต่ละวงรอบของการคำนวณ

ตารางที่ ง.1 การรวมค่าหน่วยแรงที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ กรณีที่ไม่พิจารณาค่าหน่วยน้ำหนัก

Loop	Incremental Stress (จาก FEM)	Cumulative Stress
0	Initial Stress = γZ	γZ
1	$\Delta\sigma_1$	$\sigma_1 = \gamma Z + \Delta\sigma_1$
2	$\Delta\sigma_2$	$\sigma_2 = \gamma Z + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2$
3	$\Delta\sigma_3$	$\sigma_3 = \gamma Z + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\Delta\sigma_n$	$\sigma_n = \gamma Z + \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \ldots + \Delta\sigma_n$

ตารางที่ ง.2 การรวมค่าหน่วยแรงที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ กรณีที่พิจารณาค่าหน่วยน้ำหนัก

Loop	Incremental Stress (จาก FEM)	Cumulative Stress
0	Initial Stress = 0	0
1	$\Delta\sigma_1$	$\sigma_1 = \Delta\sigma_1$
2	$\Delta\sigma_2$	$\sigma_2 = \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2$
3	$\Delta\sigma_3$	$\sigma_3 = \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\Delta\sigma_n$	$\sigma_n = \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \ldots + \Delta\sigma_n$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย ธเนศ สุทธิวราภิรักษ์ เกิดวันที่ 5 ธันวาคม 2523 ที่จังหวัดกรุงเทพฯ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2544