

บทที่ 3

ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

ในบทนี้ แสดงการหาตัวควบคุมของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ พารามิเตอร์ของระบบและตัวควบคุมเปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ชุดหนึ่งในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น การแก้ปัญหาใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรเพื่อวางปัญหาในรูปของสมการเชิงเส้นเมทริกซ์ วิธีเปลี่ยนตัวแปรนี้อ้างอิงจากวิทยานิพนธ์ [6] และบทความ [11] และแนวคิดในการหาตัวควบคุมสำหรับระบบในลักษณะนี้ได้มาจากวิทยานิพนธ์ [6] และบทความ [4] ในช่วงท้ายแสดงตัวอย่างการออกแบบและผลการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์กับตัวควบคุมที่ออกแบบไว้สำหรับระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน

3.1 รูปแบบของพลาเน็ตและตัวควบคุม

แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ที่อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = F_u(G, \Theta) \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

หรือ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_\theta w_\theta(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\theta(t) &= C_\theta x(t) + D_{\theta\theta} w_\theta(t) + D_{\theta 1} w(t) + D_{\theta 2} u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{1\theta} w_\theta(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{2\theta} w_\theta(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\ w_\theta(t) &= \Theta(t) z_\theta(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ คือ ตัวแปรสถานะของพลาเน็ต

$w \in \mathbb{R}^{n_w}$ คือ สัญญาณเข้าภายนอก

$u \in \mathbb{R}^{n_u}$ คือ สัญญาณควบคุม

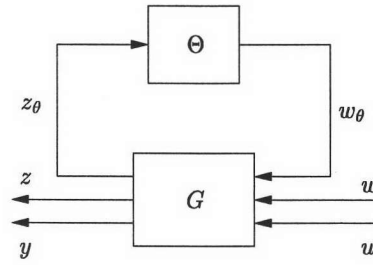
$z \in \mathbb{R}^{n_z}$ คือ สัญญาณที่ต้องการควบคุม

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$ คือ สัญญาณออกที่วัดได้

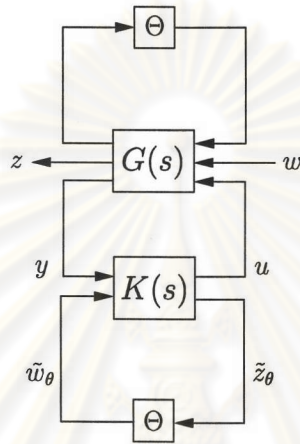
$\Theta(t) \in \bar{\Theta}$ คือ ตัวแปรกำหนดของพลาเน็ตและ $\bar{\Theta}$ มีโครงสร้างตามสมการ (3.3)

$$\bar{\Theta} \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \theta_1(t)I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2(t)I_{m_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_r(t)I_{m_r} \end{bmatrix} : \theta_i(t) \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.3)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการพิสูจน์ ระบบที่ใช้มีข้อกำหนดเพิ่มเติมดังนี้



รูปที่ 3.1: พลาเน็ตที่อยู่ในรูปของการแปลงเชิงเส้นส่วนย่อยบน



รูปที่ 3.2: ระบบวงปิดของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

1. (A, B_2, C_2) สามารถทำเสถียรได้ (stabilizable) และสามารถตรวจจับได้ (detectable)
2. ระบบไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดได้โดยตรง ($D_{22} = 0$)
3. จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกเท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ($n_z = n_w$)

เนื่องจากตัวแปรกำหนดสามารถวัดค่าได้ ดังนั้นกำหนดให้ตัวควบคุมบรรยายได้โดยสมการสถานะ

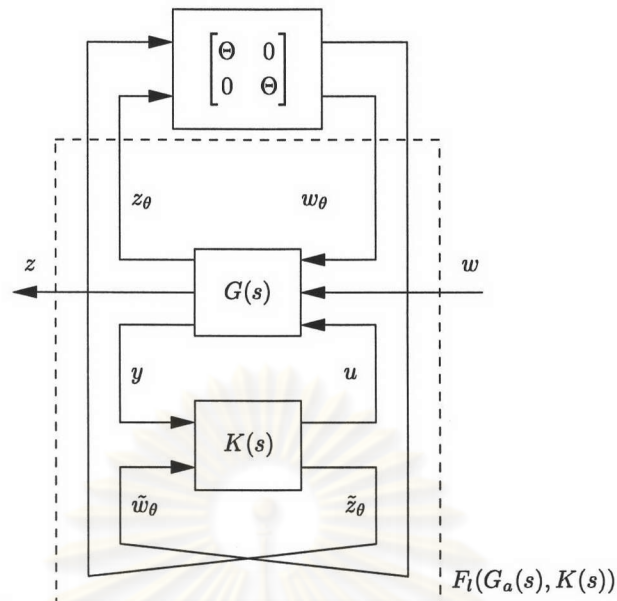
$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_{k1} y(t) + B_{k\theta} \tilde{w}_\theta(t) \\ u(t) &= C_{k1} x_k(t) + D_{k11} y(t) + D_{k1\theta} \tilde{w}_\theta(t) \\ \tilde{z}_\theta(t) &= C_{k\theta} x_k(t) + D_{k\theta 1} y(t) + D_{k\theta\theta} \tilde{w}_\theta(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

และ

$$\tilde{w}_\theta(t) = \Theta(t) \tilde{z}_\theta(t) \quad (3.5)$$

โดย $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ คือตัวแปรสถานะของตัวควบคุม และ $\Theta(t)$ มีโครงสร้างเช่นเดียวกับพลาเน็ตดังสมการ (3.5)

เมื่อรวมพลาเน็ต $G(s)$ ดังสมการที่ (3.2) และตัวควบคุม $K(s)$ ดังสมการที่ (3.4) เข้าด้วยกันจะได้บล็อกไดอะแกรมของระบบวงปิดเป็นดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.3: บล็อกไดอะแกรมของระบบวงปิดที่จัดรูปใหม่

ย้ายบล็อกตัวแปรกำหนดของตัวควบคุมไปรวมกับตัวแปรกำหนดของพลานต์ดังรูปที่ 3.3 และกำหนดพลานต์ที่ถูกต่อเติม (augmented plant) $G_a(s)$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_\theta \\ \dots \\ z_\theta \\ z \\ y \\ \dots \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & G(s) & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_a(s)} \begin{bmatrix} \tilde{w}_\theta \\ \dots \\ w_\theta \\ w \\ u \\ \dots \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

นิยามให้ $\bar{G}(s)$ มีค่าดังนี้

$$\bar{G}(s) \triangleq F_l(G_a(s), K(s)) \tag{3.7}$$

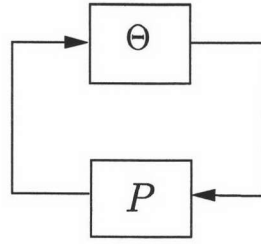
ฟังก์ชันถ่ายโอน T_{zw} จากสัญญาณ w ไปยัง z สามารถพิจารณาเป็นการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นดังนี้

$$T_{zw} = F_u \left(F_l(G_a(s), K(s)), \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \right) \tag{3.8}$$

$$= F_u \left(\bar{G}(s), \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \right) \tag{3.9}$$

3.2 การออกแบบตัวควบคุม

เงื่อนไขที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ระบบวงปิดต้องมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน โดยจะนำทฤษฎีของระบบเชิงเส้นมาประยุกต์ใช้



รูปที่ 3.4: บล็อกไดอะแกรมที่พิจารณาเฉพาะความไม่แน่นอน

3.2.1 เสถียรภาพของระบบวงปิด

เนื่องจากต้องการพิจารณาถึงเสถียรภาพของระบบ ในหัวข้อนี้จึงแยกพิจารณาเฉพาะฟังก์ชันถ่ายโอนส่วนที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณ w_θ และ z_θ เท่านั้น เสถียรภาพของระบบพิจารณาได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

Lemma 3.1 (ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็ก (small gain theorem)) กำหนดให้ $P(s)$ มีเสถียรภาพ และ $\gamma > 0$ สำหรับ $\Theta(s)$ ทุก ๆ ตัวที่มีเสถียรภาพ ที่มีค่า

1. $\|\Theta(s)\|_\infty \leq 1/\gamma$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพภายในก็ต่อเมื่อ $\|P(s)\|_\infty < \gamma$
2. $\|\Theta(s)\|_\infty < 1/\gamma$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพภายในก็ต่อเมื่อ $\|P(s)\|_\infty \leq \gamma$

ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็กแสดงเงื่อนไขจำเป็นและพอเพียง สำหรับระบุว่าระบบที่มีความไม่แน่นอนมีเสถียรภาพหรือไม่ นั่นคือระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อผลคูณของอัตราขยายของระบบกับอัตราขยายของความไม่แน่นอนมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง การออกแบบตัวควบคุมจะใช้ทฤษฎีนี้ในการหาตัวควบคุม แต่ความไม่แน่นอนที่กล่าวถึงในทฤษฎีบทนี้เป็นความไม่แน่นอนใดๆ ซึ่งไม่มีโครงสร้าง เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็กนี้กับระบบที่ตัวแปรกำหนดหรือความไม่แน่นอนที่มีโครงสร้าง ดังเช่นในสมการ (3.3) เงื่อนไขจำเป็นและพอเพียงในทฤษฎีบทจะเหลือเป็นเพียงเงื่อนไขเพียงพอเท่านั้น การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทนี้จึงมีความอนุรักษณ์มากขึ้น เพื่อลดผลของความอนุรักษณ์นี้ วิธีการหนึ่งคือการใช้เมทริกซ์การสเกล

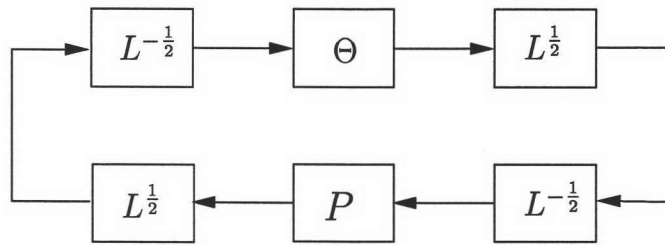
เซตของเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับตัวแปรกำหนดในเซต Θ เป็น

$$L_\Theta = \{ L > 0 : L\Theta = \Theta L, \forall \Theta \in \Theta \} \quad (3.10)$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} \Theta_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\Rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } l > 0 \\ \Theta_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} &\Rightarrow L_2 = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } l_1, l_2 > 0 \\ \Theta_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} &\Rightarrow L_3 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } L_3 > 0 \end{aligned}$$

เราสามารถแทรกบล็อกของ $L^{\frac{1}{2}}$ และ $L^{-\frac{1}{2}}$ ที่บล็อกไดอะแกรมดังรูปที่ 3.5 โดยไม่ทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไป และเนื่องจากถ้า $L \in L_\Theta$ แล้ว $L^{\frac{1}{2}}$ จะสอดคล้องกับ $L^{\frac{1}{2}}\Theta(s) = \Theta(s)L^{\frac{1}{2}}$ และ $L^{\frac{1}{2}} > 0$



รูปที่ 3.5: บล็อกไดอะแกรมเมื่อมีเมทริกซ์การสเกล

ด้วย ทำให้ $\Theta(s) = L^{-\frac{1}{2}}\Theta(s)L^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้นในการหาเสถียรภาพของระบบที่มีความไม่แน่นอนแบบมีโครงสร้างสามารถลดผลของความไม่แน่นอนลงได้ โดยใช้เมทริกซ์การสเกล และเงื่อนไขของเสถียรภาพคงทนจะเป็นดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับตัวแปรกำหนดแบบมีโครงสร้าง $\Theta(s) \in \bar{\Theta}$ ที่มีเสถียรภาพและระบบ $P(s)$ ที่มีเสถียรภาพ สำหรับ $\Theta(s)$ ทุกๆตัวที่มีเสถียรภาพที่มีค่า

1. $\|\Theta(s)\|_{\infty} \leq 1/\gamma$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพภายในก็ต่อเมื่อ $\|L^{\frac{1}{2}}G(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma$
2. $\|\Theta(s)\|_{\infty} < 1/\gamma$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพภายในก็ต่อเมื่อ $\|L^{\frac{1}{2}}G(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} \leq \gamma$

โดย $L \in L_{\infty}$ เป็นเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับ $\Theta \in \bar{\Theta}$

3.2.2 เงื่อนไขสมรรถนะคงทน

การออกแบบตัวควบคุมนอกจากต้องการให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพแล้ว ระบบยังต้องมีสมรรถนะที่ดีด้วยการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบสามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้เลือกการลดผลของสัญญาณเข้าภายนอก w ต่อสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม z โดยวัดจากนอร์มเหนี่ยวนำ (induced norm) ของระบบวงปิดจากสัญญาณเข้าภายนอกไปยังสัญญาณออกที่ต้องการควบคุมให้มีค่าน้อยกว่าค่าค่าหนึ่ง

จุดประสงค์ของการควบคุม คือ

1. ระบบวงปิด T_{zw} มีเสถียรภาพภายในสำหรับตัวแปรกำหนด Θ ทุกตัวที่สอดคล้องกับ $\|\Theta\|_{\infty} \leq 1/\gamma$
2. นอร์มเหนี่ยวนำของ T_{zw} มีค่าน้อยกว่า γ หรือ $\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma$

จากจุดประสงค์ของการควบคุมข้างต้น จุดประสงค์ข้อแรกเพื่อประกันเสถียรภาพของระบบวงปิด ส่วนจุดประสงค์ข้อที่สองเพื่อให้ระบบวงปิดมีสมรรถนะคงทน นอกจากนี้ขนาดของตัวแปรกำหนด และนอร์มเหนี่ยวนำของ T_{zw} ถูกจำกัดให้มีค่าน้อยกว่า γ ค่าเดียวกัน หากพลาเนตที่ต้องการออกแบบขนาดของตัวแปรกำหนด และนอร์มเหนี่ยวนำของ T_{zw} ที่ไม่ใช่ค่าเดียวกัน สามารถทำให้เป็นค่าเดียวกันได้โดยสเกลบางเมทริกซ์ของสมการสถานะ

3.3 การแปลงปัญหาไปสู่สมการเมทริกซ์

จากหัวข้อที่แล้ว การหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน จะสอดคล้องกับการหาตัวควบคุมที่ทำให้

$$\|L^{\frac{1}{2}}\bar{G}(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma \quad (3.11)$$

โดยที่ $L \in L_{\Theta_p}$

อสมการนี้ต้องคำนวณขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนตลอดทุกช่วงความถี่เพื่อหาขนาดที่สูงที่สุด ขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนนี้ขึ้นอยู่กับตัวควบคุมและเมทริกซ์การสเกล การแก้ปัญหาดังกล่าวจึงไม่่ง่ายนัก บทความนี้ค่าจริงมีขอบเขต (Bounded Real Lemma) ที่จะกล่าวต่อไปนี้ แสดงอสมการเมทริกซ์ที่สมมูลกับปัญหานอร์มอนันต์นี้

Lemma 3.2 สำหรับตัวแปรกำหนดใดๆ ที่มีโครงสร้าง Θ_p ที่สอดคล้องกับเซตของเมทริกซ์การสเกล L_{Θ_p} และระบบวงปิดที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $\bar{G}(s) = D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ จะได้ว่าประโยคต่อไปนี้เป็นสมมูลกัน

1. A_{cl} มีเสถียรภาพและมี $L \in L_{\Theta_p}$ ที่ทำให้ $\|L^{\frac{1}{2}}\bar{G}(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma$
2. มีเมทริกซ์บวกแน่นอน P และ $L \in L_{\Theta_p}$ ที่สอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma L & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

จากบทความนี้ ปัญหาหาค่าหาค่าหาค่าของฟังก์ชันถ่ายโอนได้เปลี่ยนไปเป็นการหาเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) 2 เมทริกซ์คือเมทริกซ์ P และเมทริกซ์ $L \in L_{\Theta_p}$ ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์อสมการหนึ่ง แต่อสมการเมทริกซ์นี้ เนื่องจากมีทั้ง L และ L^{-1} อยู่ในอสมการ นอกจากนี้เมทริกซ์ A_{cl} ที่คุณอยู่กับเมทริกซ์ P นั้น มีพารามิเตอร์ของตัวควบคุมซึ่งเป็นตัวแปรของอสมการรวมอยู่ด้วย ในที่นี้จะใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรในการเปลี่ยนอสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.4 แบ่งเมทริกซ์และนิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน

พารามิเตอร์ของระบบวงปิด A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} และ D_{cl} เป็นดังนี้

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_{k11} C_2 & B_2 C_{k1} \\ B_{k1} C_2 & A_k \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_2 D_{k1\theta} & B_\theta + B_2 D_{k11} D_{2\theta} & B_1 + B_2 D_{k11} D_{21} \\ B_{k\theta} & B_{k1} D_{2\theta} & B_{k1} D_{21} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} D_{k\theta1} C_2 & C_{k\theta} \\ C_\theta + D_{\theta2} D_{k11} C_2 & D_{\theta2} C_{k1} \\ C_1 + D_{12} D_{k11} C_2 & D_{12} C_{k1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$D_{cl} = \begin{bmatrix} D_{k\theta\theta} & D_{k\theta1} D_{2\theta} & D_{k\theta1} D_{21} \\ D_{\theta2} D_{k1\theta} & D_{\theta\theta} + D_{\theta2} D_{k11} D_{2\theta} & D_{\theta1} + D_{\theta2} D_{k11} D_{21} \\ D_{12} D_{k1\theta} & D_{1\theta} + D_{12} D_{k11} D_{2\theta} & D_{11} + D_{12} D_{k11} D_{21} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

กำหนดให้

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \bar{Y} \end{bmatrix} > 0, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \bar{X} \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 & 0 \\ L_2^T & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 & 0 \\ J_2^T & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & J_2 & 0 & 0 \\ I & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 & 0 \\ L_3 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง P , P^{-1} , Π_1 และ $\hat{\Pi}_1$ ดังนี้

$$P\Pi_1 = \hat{\Pi}_1$$

หรือ

$$P^{-1}\hat{\Pi}_1 = \Pi_1$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง L , L^{-1} , Π_2 และ $\hat{\Pi}_2$ เป็นดังนี้

$$L\Pi_2 = \hat{\Pi}_2$$

หรือ

$$L^{-1}\hat{\Pi}_2 = \Pi_2$$

นิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน T ดังนี้

$$T = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Pi}_2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ $P\Pi_1 = \hat{\Pi}_1$ และ $L\Pi_2 = \hat{\Pi}_2$ แล้วจึงกำหนดให้เมทริกซ์การแปลง เมื่อคุณด้านหน้าด้วย
อสมการ (3.12) ด้วย T^T และคุณด้านหลังด้วย T จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^T A_{cl}^T \hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_1^T A_{cl} \Pi_1 & \hat{\Pi}_1^T B_{cl} \Pi_2 & \Pi_1^T C_{cl}^T \hat{\Pi}_2 \\ \Pi_2^T B_{cl} \hat{\Pi}_1 & -\gamma \hat{\Pi}_2^T \Pi_2 & \Pi_2^T D_{cl}^T \hat{\Pi}_2 \\ \hat{\Pi}_2^T C_{cl} \Pi_1 & \hat{\Pi}_2^T D_{cl} \Pi_2 & -\gamma \hat{\Pi}_2^T \Pi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

3.5 จัดให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

กำหนดตัวแปรของตัวควบคุมใหม่เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{A} &= YAX + YB_2 D_{k11} C_2 X + NB_{k1} C_2 X + YB_2 C_{k1} M^T + NA_k M^T \\ \hat{B}_1 &= YB_2 D_{k11} + NB_{k1} \\ \hat{B}_\theta &= YB_2 D_{k1\theta} J_2 + NB_{k\theta} J_2 + YB_\theta J_3 + YB_2 D_{k11} D_{2\theta} J_3 + NB_{k1} D_{2\theta} J_3 \\ \hat{C}_1 &= D_{k11} C_2 X + C_{k1} M^T \\ \hat{C}_\theta &= L_2^T D_{k\theta 1} C_2 X + L_3 C_\theta X + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} C_2 X + L_2^T C_{k\theta} M^T + L_3 D_{\theta 2} C_{k1} M^T \\ \hat{D}_{11} &= D_{k11} \\ \hat{D}_{1\theta} &= D_{k1\theta} J_2 + D_{k11} D_{2\theta} J_3 \\ \hat{D}_{\theta 1} &= L_2^T D_{k\theta 1} + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} \\ \hat{D}_{\theta\theta} &= L_2^T D_{k\theta\theta} J_2 + L_3 D_{\theta 2} D_{k1\theta} J_2 + L_2^T D_{k\theta 1} D_{2\theta} J_3 + L_3 D_{\theta\theta} J_3 + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} D_{2\theta} J_3 \end{aligned} \quad (3.18)$$

เมื่อคุณกระจายอสมการที่ (3.17) และแทนค่าตัวแปรในสมการที่ (3.18) จะได้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นต่อไป

$$\begin{bmatrix} AX + B_2 \hat{C}_1 + XA^T + \hat{C}_1^T B_2^T & * & * & * & \dots \\ \hat{A} + A^T + C_2^T \hat{D}_{11} B_2^T & YA + \hat{B}_1 C_2 + A^T Y + C_2^T \hat{B}_1^T & * & * & \dots \\ (B_\theta + B_2 \hat{D}_{11} D_{2\theta})^T & (\hat{B}_1 D_{2\theta} + YB_\theta)^T & -\gamma L_3 & * & \dots \\ (B_2 \hat{D}_{1\theta} + B_\theta J_3)^T & \hat{B}_\theta^T & -\gamma I & -\gamma J_3 & \dots \\ (B_1 + B_2 \hat{D}_{11} D_{21})^T & (\hat{B}_1 D_{21} + YB_1)^T & 0 & 0 & \dots \\ \hat{C}_\theta & \hat{D}_{\theta 1} C_2 + L_3 C_\theta & \hat{D}_{\theta 1} D_{2\theta} + L_3 D_{\theta\theta} & \hat{D}_{\theta\theta} & \dots \\ C_\theta X + D_{\theta 2} \hat{C}_1 & C_\theta + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} C_2 & D_{\theta\theta} + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} D_{2\theta} & D_{\theta 2} \hat{D}_{1\theta} + D_{\theta\theta} J_3 & \dots \\ C_1 X + D_{12} \hat{C}_1 & C_1 + D_{12} \hat{D}_{11} C_2 & D_{1\theta} + D_{12} \hat{D}_{11} D_{2\theta} & D_{12} \hat{D}_{1\theta} + D_{1\theta} J_3 & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots \\ \dots & -\gamma I & * & * & \dots \\ \dots & \hat{D}_{\theta 1} D_{21} + L_3 D_{\theta 1} & -\gamma L_3 & * & * \\ \dots & D_{\theta 1} + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} D_{21} & -\gamma I & -\gamma J_3 & * \\ \dots & D_{11} + D_{12} \hat{D}_{11} D_{21} & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

โดย * คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ที่อยู่ตรงข้ามแนวทแยง (diagonal) อสมการ (3.19) เป็นอสมการเชิงเส้นในตัวแปร $X, Y, L_3, J_3, \hat{A}, \hat{B}_1, \hat{B}_\theta, \hat{C}_1, \hat{C}_\theta, \hat{D}_{11}, \hat{D}_{1\theta}, \hat{D}_{\theta 1}$ และ $\hat{D}_{\theta\theta}$ การแปลงเมทริกซ์ P, P^{-1}, L และ L^{-1} โดยสามารถกำหนดเมทริกซ์ $X, Y, L_3, J_3, M, N, L_2$ และ J_2 ได้นั้นเมทริกซ์ X, Y, L_3, J_3 จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

Lemma 3.3 จะมีเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร $X > 0, Y > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ และ $M, N \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ ที่สอดคล้องกับ

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \hat{Y} \end{bmatrix} > 0, P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \hat{X} \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.20)$$

และ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_k \quad (3.21)$$

จากบทตั้ง 3.3 เงื่อนไขค่าอันดับ (rank) โดยทั่วไปไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ แต่หากตัวควบคุมเป็นแบบเต็มอันดับหรือจำนวนตัวแปรสถานะของตัวควบคุม (n_k) มากกว่าจำนวนตัวแปรสถานะของระบบ (n) เงื่อนไขค่าอันดับนี้ก็สมารถตัดทิ้งได้

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับระบบดังสมการ (3.2) ที่ตัวแปรกำหนดมีโครงสร้างดังสมการที่ (3.3) ซึ่งสอดคล้องกับเซตของเมทริกซ์การสเกล ดังสมการ (3.10) จะมีตัวควบคุมที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ตามพลาเน็ตที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพและสมรรถนะคงทน ถ้ามีเมทริกซ์ $\hat{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_1 \in \mathcal{R}^{n \times n_y}$, $\hat{B}_0 \in \mathcal{R}^{n \times \theta}$, $\hat{C}_1 \in \mathcal{R}^{n_u \times n}$, $\hat{C}_0 \in \mathcal{R}^{n_o \times n}$, $\hat{D}_{11} \in \mathcal{R}^{n_u \times n_y}$, $\hat{D}_{10} \in \mathcal{R}^{n_u \times n_o}$, $\hat{D}_{01} \in \mathcal{R}^{n_o \times n_y}$ และ $\hat{D}_{00} \in \mathcal{R}^{n_o \times n_o}$ และมีเมทริกซ์บวกแน่นอน $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $L_3 \in \mathcal{R}^{n_o \times n_o}$, $J_3 \in \mathcal{R}^{n_o \times n_o}$ ที่สอดคล้องกับอสมการ (3.19) และ (3.20) และตัวควบคุมที่ได้จะมีอันดับเท่ากับ $\text{rank}(I - XY)$

3.6 แปลงตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม

เมื่อแก้สมการเมทริกซ์เชิงเส้นในทฤษฎีบท แล้ว จะได้ค่าของเมทริกซ์บวกแน่นอน X , Y , L_3 , และ J_3 และตัวแปรที่กำหนดขึ้นมาใหม่ \hat{A} , \hat{B}_1 , \hat{B}_0 , \hat{C}_1 , \hat{C}_0 , \hat{D}_{11} , \hat{D}_{10} , \hat{D}_{01} และ \hat{D}_{00} ซึ่งแปลงมาจากพารามิเตอร์ของตัวควบคุม ทั้งนี้ยังขาดอีก 4 ตัวที่จำเป็นต้องใช้ในการหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม คือ เมทริกซ์ M , N , L_2 และ J_2 ซึ่งมีขั้นตอนหา ดังนี้

1. เนื่องจากเมทริกซ์ PP^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังนั้นเมทริกซ์ตำแหน่ง (1,1) ของเมทริกซ์ PP^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ด้วย ซึ่งจะได้ว่า

$$YX + NM^T = I$$

หรือ

$$NM^T = I - YX$$

และจากที่กำหนดให้เมทริกซ์ M และ N เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม ดังนั้นเมทริกซ์ M และ N หาได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐาน (singular value decomposition, SVD) ของ $I - YX$

2. ในทำนองเดียวกัน เมทริกซ์ตำแหน่ง (2,2) ของ เมทริกซ์ LL^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ด้วย นั่นคือ

$$L_2^T J_2 + L_3 J_3 = I$$

หรือ

$$L_2^T J_2 = I - L_3 J_3$$

และจากที่กำหนดให้เมทริกซ์ M และ N เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็ม ดังนั้นเมทริกซ์ L_2 และ J_2 หาได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐานของ $I - L_3 J_3$

เมื่อหาตัวแปรต่างๆได้ครบแล้ว พารามิเตอร์ของตัวควบคุมจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
 D_{k11} &= \hat{D}_{11} \\
 D_{k1\theta} &= (\hat{D}_{1\theta} - D_{k11}D_{2\theta}J_3) J_2^{-R} \\
 D_{k\theta 1} &= (L_2^{-R})^T (\hat{D}_{\theta 1} - L_3D_{\theta 2}D_{k11}) \\
 C_{k1} &= (\hat{C}_1 - D_{k11}C_2X) (M^{-L})^T \\
 C_{k\theta} &= (L_2^{-R})^T (\hat{C}_\theta - L_2^T D_{k\theta 1} C_2 X - L_3 C_\theta X - L_3 D_{\theta 2} D_{k11} C_2 X - L_3 D_{\theta 2} C_{k1} M^T) (M^{-L})^T \\
 B_{k1} &= N^{-L} (\hat{B}_1 - Y B_2 D_{k11}) \\
 B_{k\theta} &= N^{-L} (\hat{B}_\theta - Y B_2 D_{k1\theta} J_2 - Y B_\theta J_3 - Y B_2 D_{k11} D_{2\theta} J_3 - N B_{k1} D_{2\theta} J_3) J_2^{-R} \\
 A_k &= N^{-L} (\hat{A} - Y A X - Y B_2 D_{k11} C_2 X - N B_{k1} C_2 X - Y B_2 C_{k1} M^T) (M^{-L})^T
 \end{aligned}$$

โดยที่ $(M^{-L})^T = M (M^T M)^{-1}$, $N^{-L} = (N^T N)^{-1} N^T$, $J_2^{-R} = J_2^T (J_2 J_2^T)^{-1}$ และ $(L_2^{-R})^T = (L_2 L_2^T)^{-1} L_2$

3.7 การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์

จากภาคผนวก ข กำหนดให้สมการสถานะของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนเป็นดังนี้

$$K\dot{x} = Lx + Mw_\theta + Nu \quad (3.22)$$

เมื่อ

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 & -m_1 l_1 L & -m_2 l_2 L \\ 0 & 0 & 0 & -m_1 l_1 L & J_1 + m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 l_2 L & 0 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(c_0 + \frac{K_m K_k}{R}) & 0 & 0 \\ 0 & m_1 g l_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 g l_2 & 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2m_1 l_1^2 \beta_{1m} \sin \beta_{1m} & -2m_2 l_2^2 \beta_{2m} \sin \beta_{2m} & -m_1 l_1 L \beta_{1m} \sin \beta_{1m} & -m_2 l_2 L \beta_{2m} \sin \beta_{2m} & m_1 l_1^2 \alpha_m \sin \beta_{1m} & m_2 l_2^2 \alpha_m \sin \beta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$w_\theta = \Theta z_\theta$$

เมื่อ

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta'_1}{\beta_{1m} \sin \beta_{1m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta'_2}{\beta_{2m} \sin \beta_{2m}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta'_1}{\beta_{1m} \sin \beta_{1m}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\theta'_2}{\beta_{2m} \sin \beta_{2m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta'_5}{\alpha_m \sin \beta_{1m}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta'_6}{\alpha_m \sin \beta_{2m}} \end{bmatrix}$$

$$z_\theta = [\dot{\alpha} \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\beta}_1 \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\alpha}]$$

เมื่อกำหนดให้

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7.1 เมื่อ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$

กำหนดให้มุมที่เบี่ยงเบนสูงสุดคือ $\beta_{1m} = \beta_{2m} = 65^\circ$ และ $\dot{\alpha}_m = \dot{\beta}_{1m} = \dot{\beta}_{2m} = 360^\circ/s$ และค่า $\gamma = 60$ เนื่องจากพิจารณาปัญหาเสถียรภาพของระบบ จึงกำหนดให้ $w(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ตัวควบคุมที่ทำได้เป็นดังนี้

$$A_k = \begin{bmatrix} 11.015 & 0.908 & -0.482 & -0.274 & 0.049 & -0.088 \\ -190.198 & -13.856 & 11.32 & 2.756 & -0.111 & -0.138 \\ 96.499 & 7.559 & -19.644 & 5.499 & 0.928 & 3.703 \\ 1.521 & 0.298 & -9.621 & 0.86 & 6.473 & 2.885 \\ -126.447 & -9.33 & -5.354 & -1.927 & -55.962 & -4.748 \\ 87100.318 & 6202.896 & 610.646 & 803.637 & -5311.216 & -2194.529 \end{bmatrix}$$

$$B_{k1} = \begin{bmatrix} 20379.595 & 1038915.978 & -1038915.978 \\ -351745.465 & -16670018.459 & 16670018.459 \\ 178601.0378 & 9305958.809 & -9305958.829 \\ 2836.682 & 2408759.018 & -2408758.948 \\ -233866.518 & 3988102.458 & -3988103.789 \\ 161118020.865 & 426540134.106 & -426540137.956 \end{bmatrix}$$

$$B_{k\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.127 & -0.127 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.881 & 1.904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.605 & -0.762 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.013 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.183 & 3.965 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -473.99 & 584.343 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} 0.018 & 0.001 & -0.001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{k\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.418 & 5.06 & -0.666 & 0.83 & 4.078 & 0.025 \\ -0.613 & 7.857 & -1.034 & 1.289 & 6.327 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$D_{k11} = \begin{bmatrix} 32.55 & 1564.232 & -1564.232 \end{bmatrix}$$

$$D_{k1\theta} = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.024 & -0.219 & -0.729 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

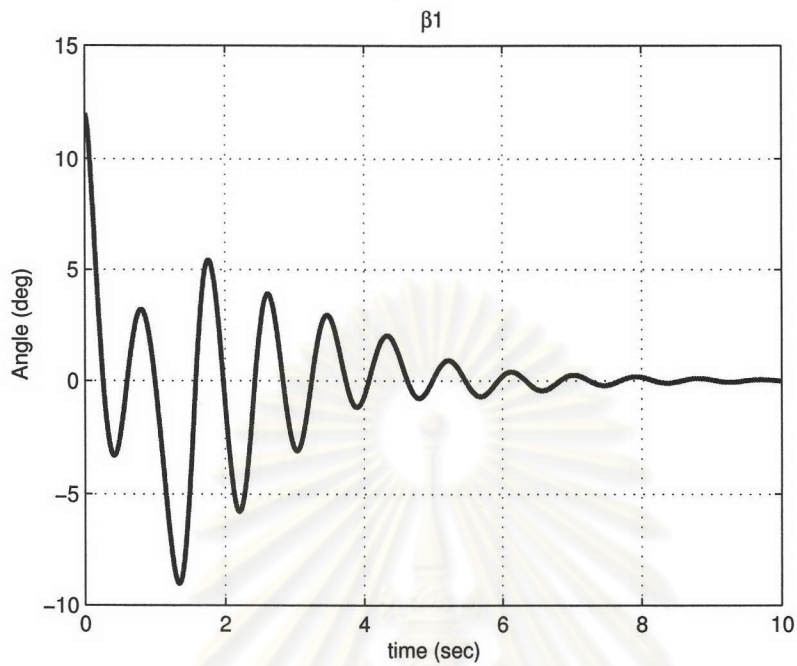
$$D_{k\theta 1} = \begin{bmatrix} -0.004 & -0.0136 & 0.014 \\ -0.005 & -0.017 & 0.017 \\ -0.005 & 0.352 & -0.352 \\ -0.003 & -0.482 & 0.482 \\ -226.876 & -885.87 & 882.745 \\ -286.768 & -1137.308 & 1132.462 \end{bmatrix}$$

$$D_{k\theta\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & 0.003 \end{bmatrix}$$

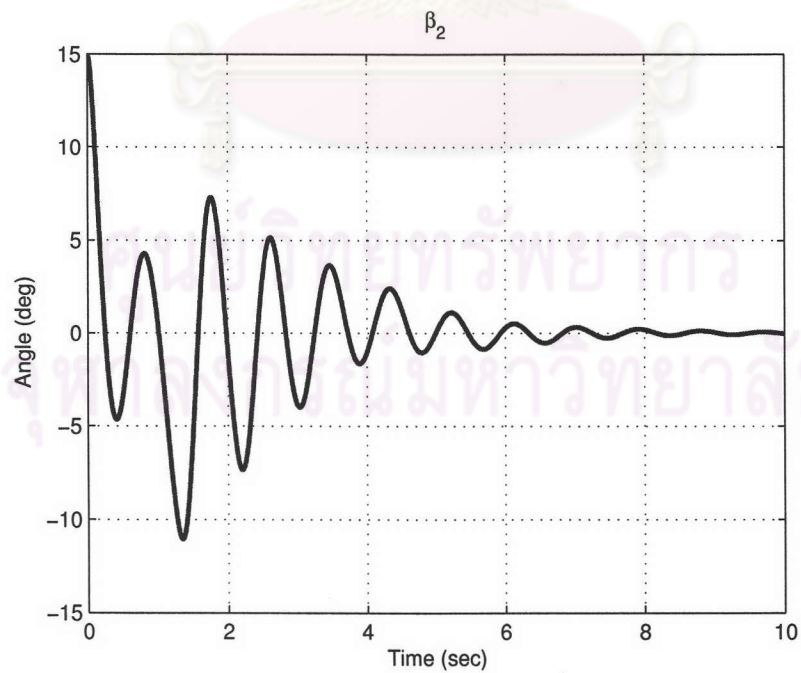
เมื่อนำตัวควบคุมที่หาได้มาจำลองระบบ ผลการจำลองระบบที่มุม $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$ เป็นดังรูปที่ 3.6 - 3.9

เมื่อกำหนดให้สัญญาณ $w(t)$ เป็นสัญญาณพัลส์ในช่วงวินาทีที่ 10 ดังรูปที่ 3.10 เพื่อรบกวนระบบจะได้ผลการจำลองระบบเป็นดังรูปที่ 3.11 - 3.14

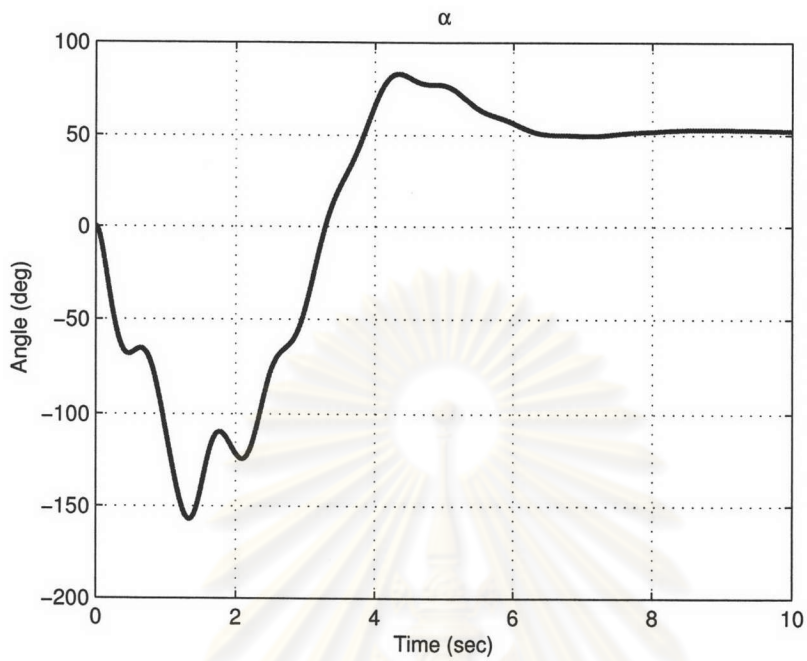
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



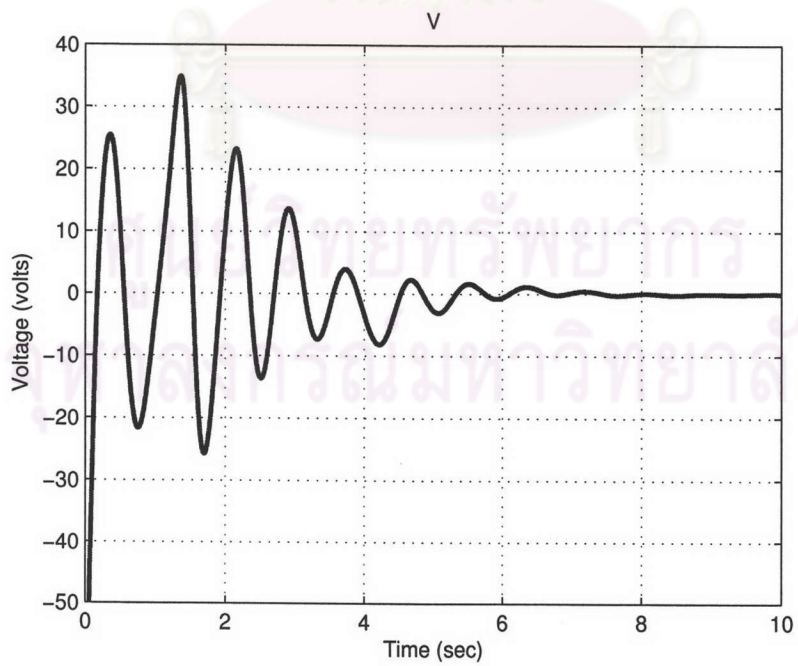
รูปที่ 3.6: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่หนึ่ง เมื่อ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$



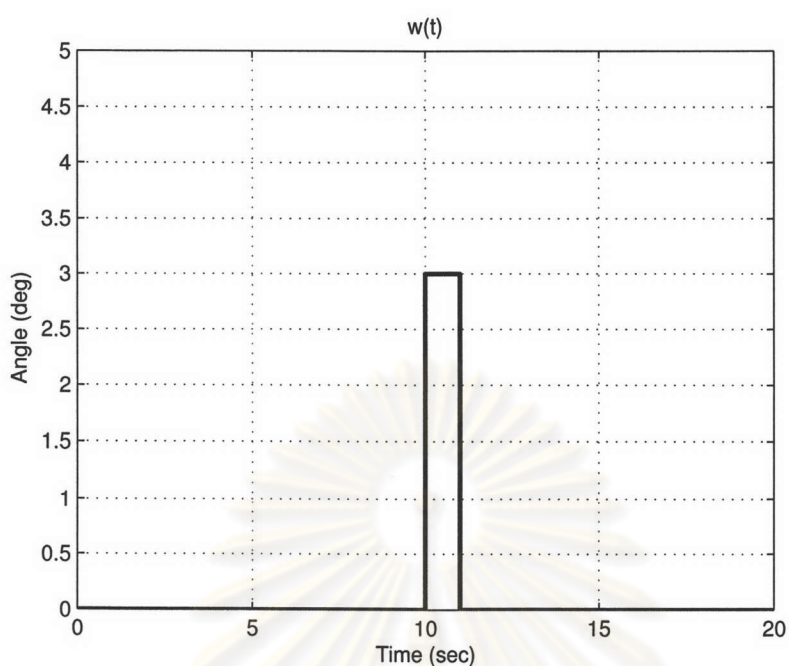
รูปที่ 3.7: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่สอง เมื่อ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$



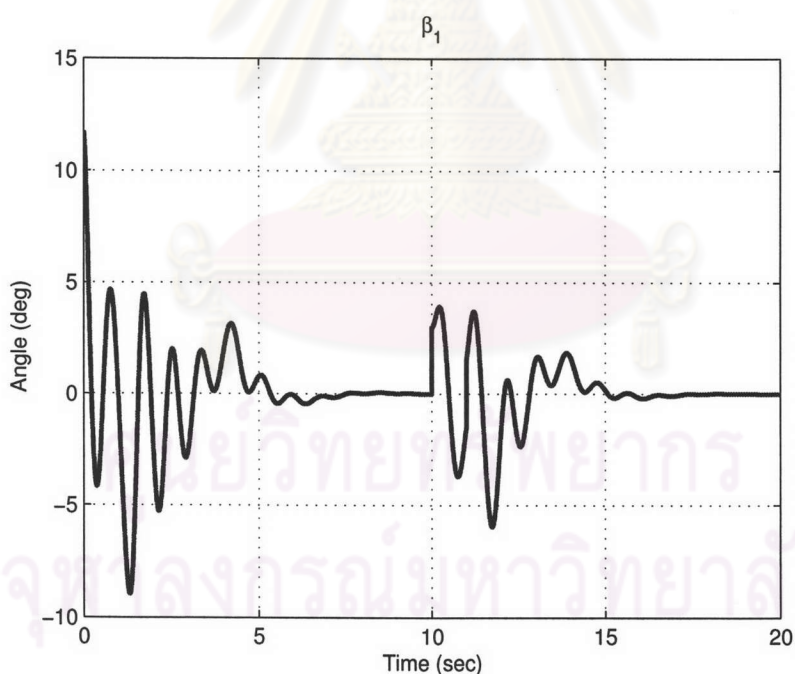
รูปที่ 3.8: มุมที่เบี่ยงเบนไปของจานหมุน เมื่อ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$



รูปที่ 3.9: สัญญาณควบคุม เมื่อ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$

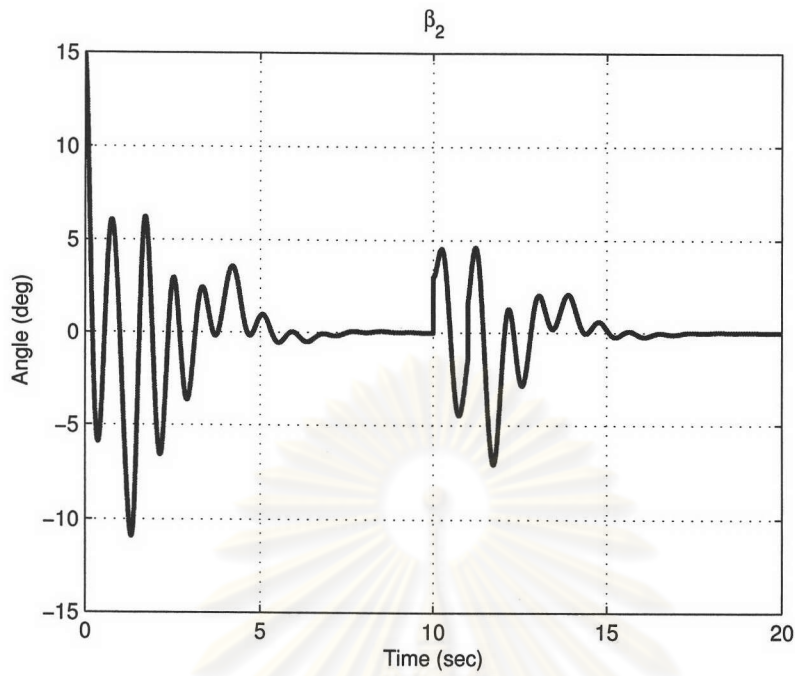


รูปที่ 3.10: สัญญาณรบกวนระบบเป็นสัญญาณพัลส์ $w(t)$ ที่ช่วงวินาทีที่ 10

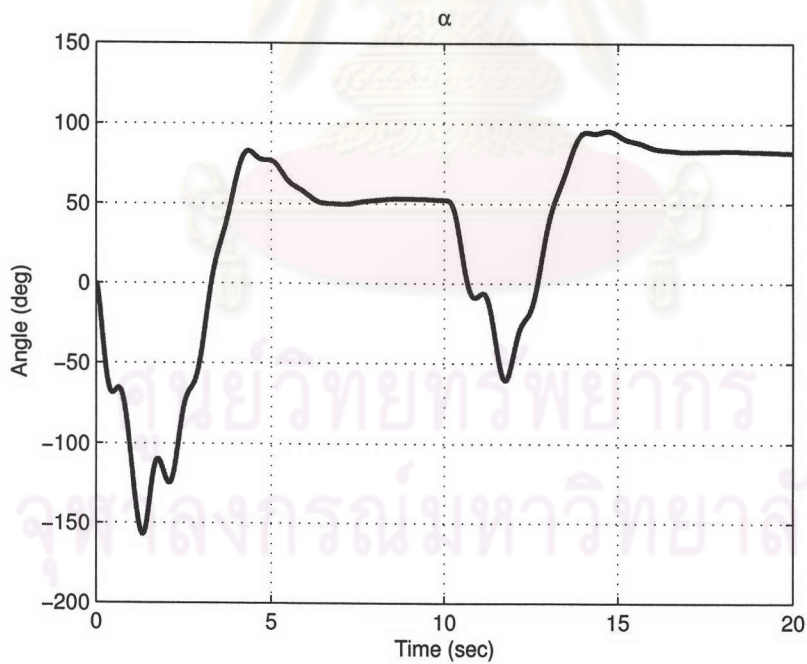


รูปที่ 3.11: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่หนึ่ง เมื่อรบกวนระบบด้วยสัญญาณพัลส์ $w(t)$ ที่วินาทีที่ 10

การออกแบบตัวควบคุมนอกจากต้องการให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพแล้ว ระบบยังต้องมีสมรรถนะที่ดีด้วย การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ ในที่นี้เลือกการลดผลของสัญญาณเข้าภายนอก w ต่อสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม z โดยวัดจากนอร์มนันต์ของระบบวงปิด $\|T_{zw}\|_{\infty}$ ให้มีค่าน้อยกว่า γ เรานิยามให้



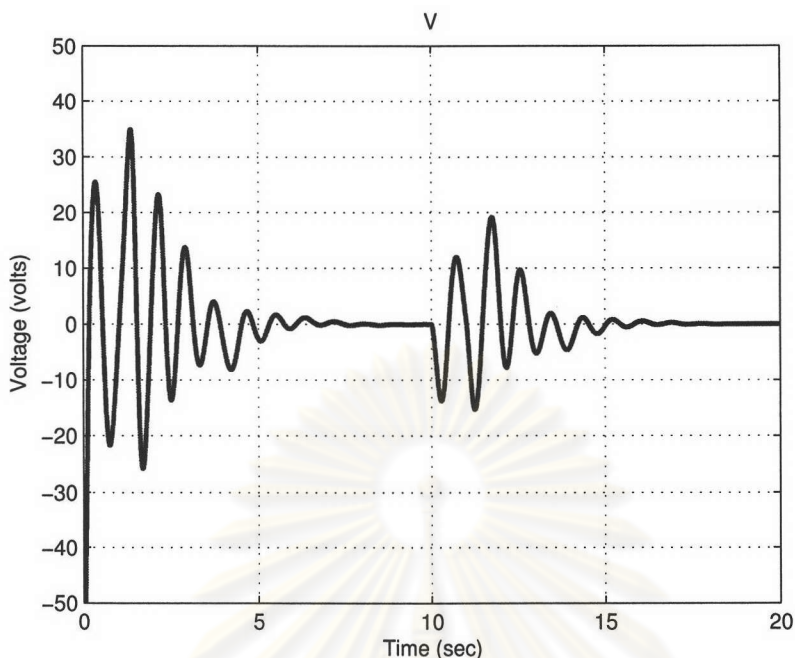
รูปที่ 3.12: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่สอง เมื่อรบกวนระบบด้วยสัญญาณพัลส์ $w(t)$ ที่วินาทีที่ 10



รูปที่ 3.13: มุมที่เบี่ยงเบนไปของจานหมุน เมื่อรบกวนระบบด้วยสัญญาณพัลส์ $w(t)$ ที่วินาทีที่ 10

นอร์มอันต์ของระบบวงปิดจากนอร์มสองเลวสุดเหนี่ยวนำ (induce worst-case 2-norm)

$$\|T_{zw}\|_{\infty} \triangleq \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (3.23)$$



รูปที่ 3.14: สัญญาณควบคุม เมื่อรบกวนระบบด้วยสัญญาณพัลส์ $w(t)$ ที่วินาทีที่ 10

โดยนอร์มสองของสัญญาณนิยามเป็นดังนี้

$$\|u\|_2 \triangleq \sqrt{\int_0^\infty u^2(t)dt}$$

โดย $\|u\|_2$ มีความหมายเป็นรากที่สองของพื้นที่ระหว่างกราฟ $u^2(t)$ กับแกน t หาก $u(t)$ เป็นสัญญาณทางเวลาแบบเวกเตอร์ที่จำนวนสมาชิกเป็น n นอร์มสองของสัญญาณ $\|u(t)\|_2$ นิยามดังนี้

$$\|u\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_0^\infty u_i^2(t)dt}$$

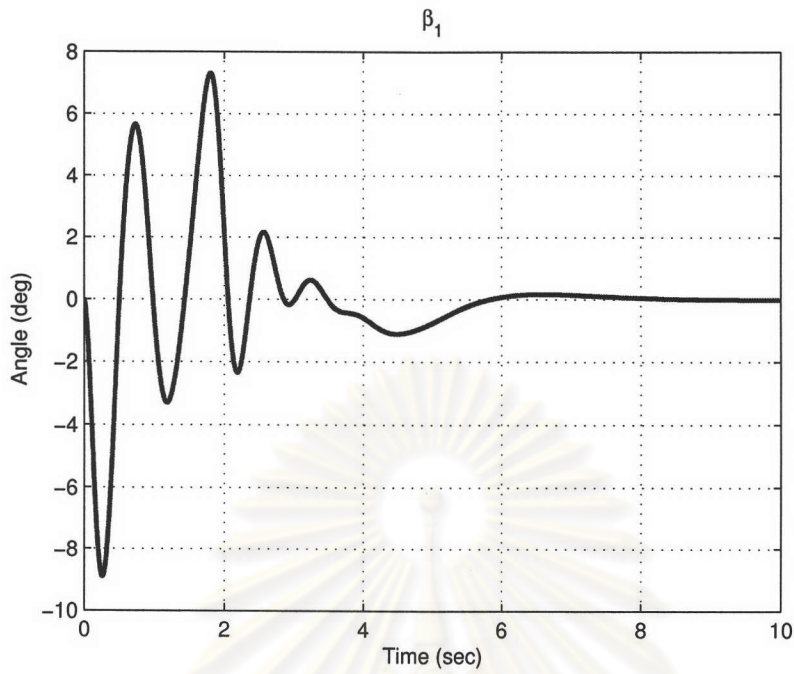
เริ่มต้นให้สถานะเริ่มต้นต่างๆของระบบเป็นศูนย์ จากนั้นก็เพิ่มสัญญาณรบกวนระบบ $w(t)$ เข้าไปวินาทีที่ 10 ดังรูปที่ 3.10 แล้ววัดค่าสัญญาณที่ต้องการควบคุม $z(t)$ และหาค่า $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ ได้เท่ากับ 55 ซึ่งจะเห็นว่า $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$

3.7.2 เมื่อ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$

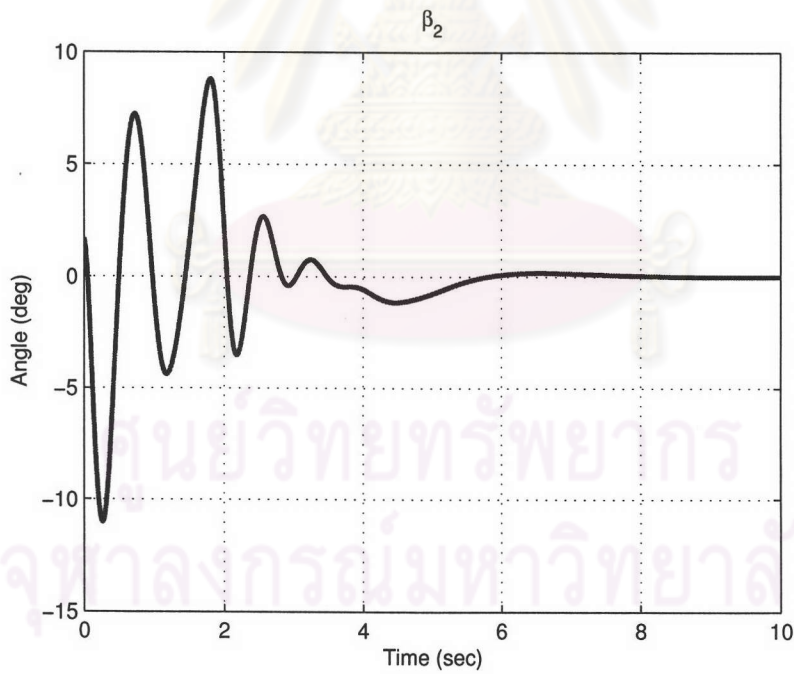
กำหนดให้มุมที่เบี่ยงเบนสูงสุดคือ $\beta_{1m} = \beta_{2m} = 65^\circ$ และ $\dot{\alpha}_m = \dot{\beta}_{1m} = \dot{\beta}_{2m} = 360^\circ/s$ ค่า $\gamma = 62$ เนื่องจากต้องการพิจารณาเฉพาะปัญหาเสถียรภาพของระบบ จึงกำหนดให้ $w(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อนำตัวควบคุมที่หาได้มาจำลองระบบ ผลการจำลองระบบที่มุม $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$ เป็นดังรูปที่ 3.15 - 3.18

3.7.3 เมื่อ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$

กำหนดให้มุมที่เบี่ยงเบนสูงสุดคือ $\beta_{1m} = \beta_{2m} = 65^\circ$ และ $\dot{\alpha}_m = \dot{\beta}_{1m} = \dot{\beta}_{2m} = 360^\circ/s$ ค่า $\gamma = 60$ เนื่องจากพิจารณาปัญหาเสถียรภาพของระบบ จึงกำหนดให้ $w(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อนำตัวควบคุมที่หาได้

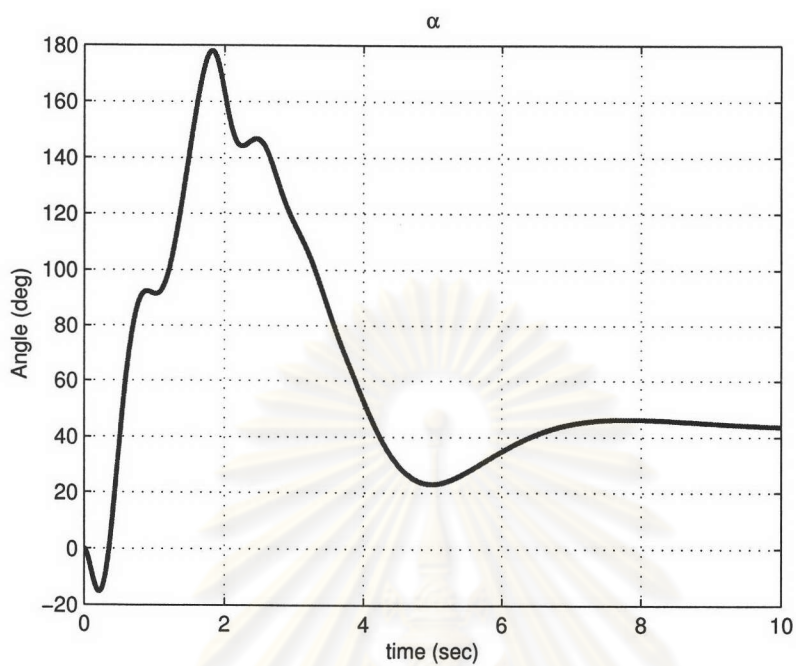


รูปที่ 3.15: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนพन्दูลัมอันที่หนึ่ง เมื่อ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$

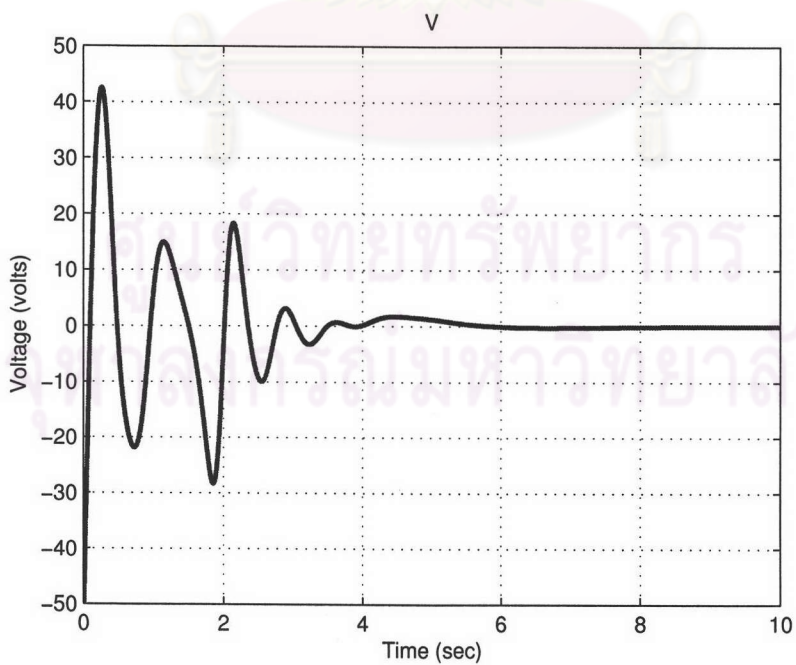


รูปที่ 3.16: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนพन्दูลัมอันที่สอง เมื่อ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$

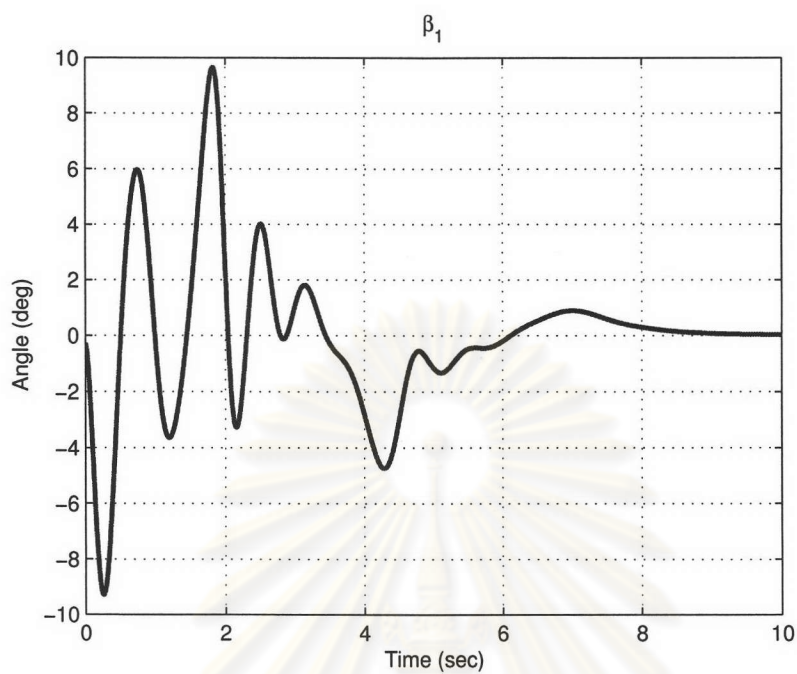
มาจำลองระบบ ผลการจำลองระบบที่มุม $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$ เป็นดังรูปที่ 3.19 - 3.22



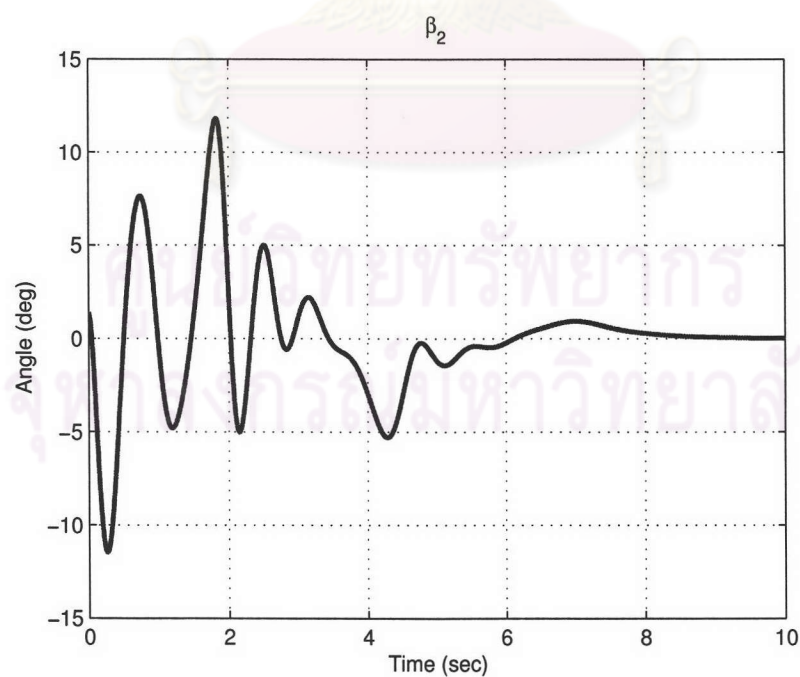
รูปที่ 3.17: มุมที่เบี่ยงเบนไปของจานหมุน เมื่อ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$



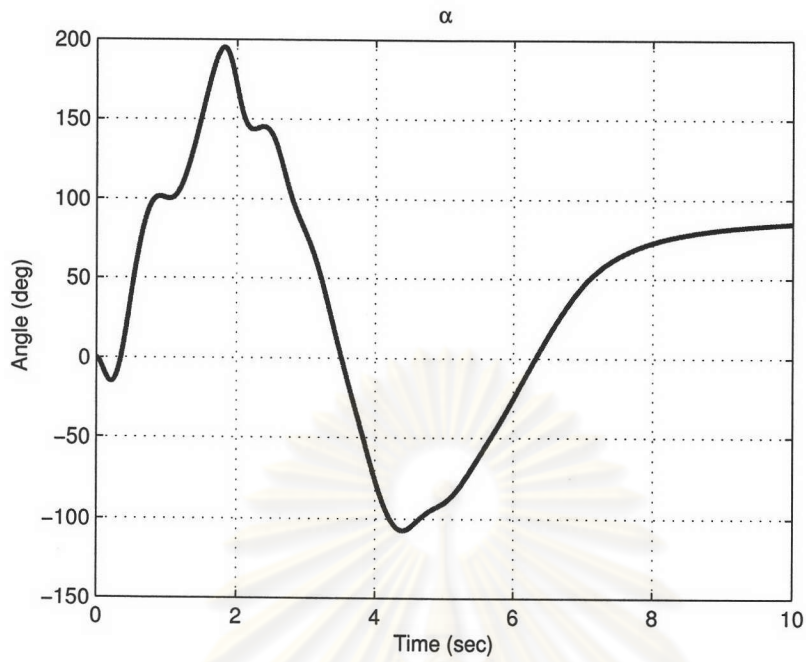
รูปที่ 3.18: สัญญาณควบคุม เมื่อ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$



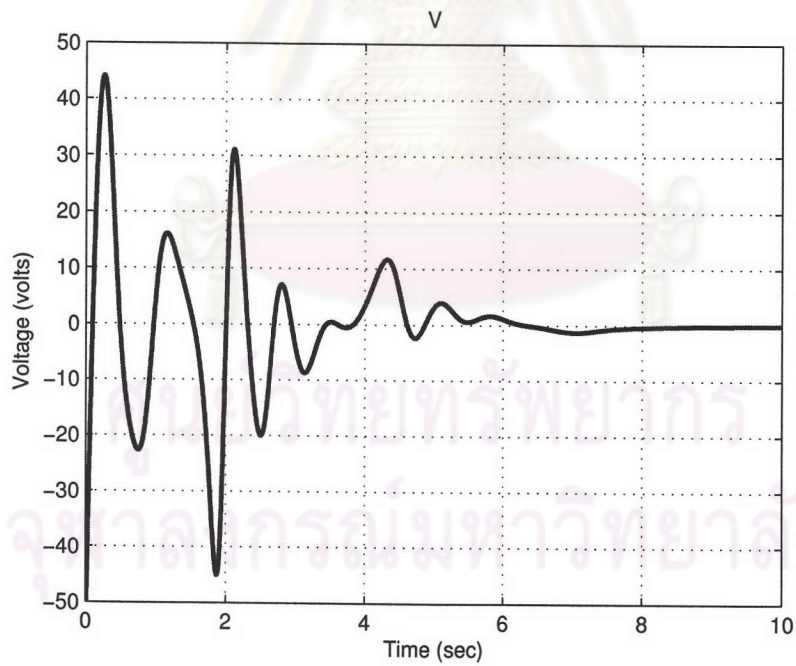
รูปที่ 3.19: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่หนึ่ง เมื่อ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$



รูปที่ 3.20: มุมที่เบี่ยงเบนไปของแขนเพนดูลัมอันที่สอง เมื่อ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$



รูปที่ 3.21: มุมที่เบี่ยงเบนไปของจานหมุน เมื่อ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$



รูปที่ 3.22: สัญญาณควบคุม เมื่อ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$

3.8 สรุป

ในบทนี้แสดงวิธีการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ของระบบเพนดูลัม ผกผันแบบหมุน และจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ จากผลตอบของระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุนพบว่ามุมที่เบี่ยงเบนเริ่มต้นสูงสุดที่ตัวควบคุมที่ออกแบบได้สามารถควบคุมให้แขนของเพนดูลัมสามารถตั้งตรงในแนวตั้งได้พร้อมกันทั้งสองแขน แยกเป็น 3 กรณีดังนี้

1. กรณีที่มุมทั้งสองเป็นบวกทั้งคู่ เท่ากับ $\beta_1(0) = 12^\circ$ และ $\beta_2(0) = 15^\circ$ จะเห็นว่าแขนทั้งสองข้างของเพนดูลัมถ่วงสมดุลย์กันทำให้มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นมีค่ามากที่สุด
2. กรณีที่มุมหนึ่งเท่ากับศูนย์อีกมุมหนึ่งเป็นบวก เท่ากับ $\beta_1(0) = 0^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.75^\circ$ กรณีนี้จะรักษาสมดุลย์ยากกว่ากรณีแรกเนื่องจากแขนของเพนดูลัมไม่ได้ถ่วงสมดุลย์กัน ดังนั้นทำให้มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นสูงสุดที่ได้มีค่าน้อยกว่ากรณีแรก
3. กรณีที่มุมหนึ่งเป็นบวกอีกมุมหนึ่งเป็นลบ เท่ากับ $\beta_1(0) = -0.35^\circ$ และ $\beta_2(0) = 1.4^\circ$ กรณีนี้จะรักษาสมดุลย์ยากที่สุด เนื่องจากแขนของเพนดูลัมเอนตัวไปทิศทางเดียวกัน ดังนั้นมีเบี่ยงเบนสูงสุดที่ได้มีค่าน้อยที่สุด

แต่ขนาดสูงสุดของสัญญาณเข้ามีค่าสูงมากประมาณ 60 โวลต์ ซึ่งเกินค่าพิกัดสูงสุดของมอเตอร์ ทำให้มีปัญหาในการประยุกต์ใช้จริง และ $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = 55$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า γ ซึ่งแสดงว่าระบบวงปิดของระบบมีสมรรถนะคงทน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย