รายการอ้างอิง

[1] Andreasson, N., Evgrafov, A., Patriksson, M. An Introduction to Optimization. (n.p.), 2004.

[2] Basaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty, C.M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. New York: John Wiley & Sons, 1993.

[3] Bertsekas, D. P. Nonlinear Programming. 2^{nd}ed. Bellmont : Althena Scientific, 1999.

[4] Frank, M., and Wolfe, P. An Algorithm for Quadratic Programming. Naval Research Logistics Quarterly 3 (1956): 95-110.

[5] Gass, S. L. Linear programming method and applications. Singapore: McGraw-Hill, 2001.

[6] Griewank, A., Juedes, D., Mitey, H., Utke, J., Vogel, O., and Walther, A. ADOL-C: A Package for the Automatic Differentiation of Algorithms Written in C/C++. Dresden: Institute of Science Computing, Technical University Dresden, Germany, 1996. (Unpublished Manuscript)

[7] Hillier, F. S., and Lieberman, G. J. Introduction to Mathematical Programming. Singapore: McGraw-Hill, 1990.

[8] Li, X., Zhong, W., Shao, Z., and Qian, J. Applying Extended Automatic Differentiation Technique to Process System Optimization Problem. Proceedings of the American Control Conference, pp. 25-27. America 2001.

[9] Makhorin, A. GNU Linear Programming Kit. Moscow: Department for Applied Informatics, Moscow Aviation Institute, Russia, 2002. (Unpublished Manuscript)

[10] Patriksson, M. Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems: A Unified Approach. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[11] Peressini, A. L., Sullivan, F.E., and Uhl, J. J. The Mathematics of Nonlinear Programming. New York: Springer-Verlag, 1988.

[12] Winston, W. L. Operations Research. Toronto: Wadsworth, 1998.

[13] Wright, S. J., and Nocedal, J. Numerical Optimization. New York: Spinger-Verlag, 1999.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ในภาคผนวกนี้แสดงรายละเอียดผลการใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างขึ้นหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นโดยมีการเรียกใช้วิธีการค้นตามเส้นทั้งสามวิธีพิจารณาหาผลเฉลยพร้อมทั้งผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้โปรแกรม General Algebraic Modeling System (GAMS) ดังรายละเอียดของแต่ละตัวอย่างดังนี้

<u>ปัญหา **NLP1**</u> **:**

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 6x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (0,0)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \le 0.001$

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **golden section** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(6.00,5.00)	(2.00,0.00)	0.374981	(0.75,0.00)	0.749962
2	(0.75,0.00)	2.25	(0.00,7.25)	(0.00,1.50)	0.439374	(0.42,0.66)	0.988575
3	(0.42,0.66)	4.64	(4.61,2.31)	(2.00,0.00)	0.200175	(0.74,0.53)	0.448116
4	(0.74,0.53)	5.22	(1.69,4.05)	(0.00,1.50)	0.188124	(0.60,0.71)	0.321599
5	(0.60,0.71)	5.47	(3.35,2.53)	(2.00,0.00)	0.116960	(0.76,0.63)	0.247030
6	(0.76,0.63)	5.64	(1.79,3.52)	(1.00,1.00)	1.000000	(1.00,1.00)	0.610879
7	(1.00,1.00)	7.00	(1.00,2.00)	(0.00,1.50)	0.000000	(1.00,1.00)	0.000000

optimal value $z = 7.000000$ at point :(1.000000,1.000000)
relative error = 0.000000 %
accuracy = 100.000000 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยกฎของ **Armijo** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(6.00,5.00)	(2.00,0.00)	0.200000	(0.40,0.00)	0.400000
2	(0.40,0.00)	1.76	(2.80,6.20)	(0.00,1.50)	0.200000	(0.32,0.30)	0.380000
3	(0.32,0.30)	3.03	(4.34,4.16)	(2.00,0.00)	0.200000	(0.66,0.24)	0.396000
4	(0.66,0.24)	3.71	(1.47,5.53)	(0.00,1.50)	0.200000	(0.52,0.49)	0.383200
5	(0.52,0.49)	4.56	(3.28,3.62)	(1.00,1.00)	1.000000	(1.00,1.00)	0.983200
6	(1.00,1.00)	7.00	(1.00,2.00)	(0.00,1.50)	0.000000	(1.00,1.00)	0.000000

optimal value z = 7.000000 at point :(1.000000,1.000000)
relative error = 0.000000 % accuracy = 100.000000 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **bisection** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(6.00,5.00)	(2.00,0.00)	0.500000	(1.00,0.00)	1.000000
2	(1.00,0.00)	2.00	(-2.00,8.00)	(0.00,1.50)	0.459015	(0.54,0.69)	1.147537
3	(0.54,0.69)	5.21	(3.74,2.49)	(2.00,0.00)	0.144318	(0.75,0.59)	0.309927
4	(0.75,0.59)	5.48	(1.76,3.72)	(0.00,1.50)	0.152100	(0.64,0.73)	0.252849
5	(0.64,0.73)	5.64	(3.09,2.55)	(2.00,0.00)	0.098053	(0.77,0.66)	0.204976
6	(0.77,0.66)	5.76	(1.80,3.37)	(1.00,1.00)	1.000000	(1.00,1.00)	0.572798
7	(1.00,1.00)	7.00	(1.00,2.00)	(0.00,1.50)	0.000000	(1.00,1.00)	0.000000

optimal value z = 7.000000 at point :(1.000000,1.000000)
relative error = 0.000000 % accuracy = 100.000000 %

เมื่อใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลยปัญหา NLP1 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
          SOLVE     SUMMARY
   MODEL   MFD              OBJECTIVE  z
   TYPE   NLP               DIRECTION  MAXIMIZE
   SOLVER  CONOPT           FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              7.0000
----   35 VARIABLE x.L  independent variable
1  1.000,   2    1.000
```

จากตาราง จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 7.0000$ ที่จุด (1.000 , 1.000)

<u>**ปัญหา NLP2**</u> **:**

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 10x_1 - 5x_2$

ภายใต้เงื่อนไข
$$x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$5x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (0,0)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \le 0.001$

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **golden section** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(-10.00,-5.00)	(2.00,5.00)	1.000000	(2.00,5.00)	7.000000
2	(2.00,5.00)	-30.50	(-8.00,0.00)	(3.00,0.00)	0.307711	(2.31,3.46)	1.846267
3	(2.31,3.46)	-31.73	(-7.69,-1.54)	(2.00,5.00)	0.000041	(2.31,3.46)	0.000075

optimal value z = -31.730769 at point :(2.307699,3.461507)
relative error = 0.000771 % accuracy = 99.999229 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยกฎของ **Armijo** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(-10.00,-5.00)	(2.00,5.00)	1.000000	(2.00,5.00)	7.000000
2	(2.00,5.00)	-30.50	(-8.00,0.00)	(3.00,0.00)	0.200000	(2.20,4.00)	1.200000
3	(2.20,4.00)	-31.58	(-7.80,-1.00)	(3.00,0.00)	0.200000	(2.36,3.20)	0.960000
4	(2.36,3.20)	-31.70	(-7.64,-1.80)	(2.00,5.00)	0.200000	(2.29,3.56)	0.432000
5	(2.29,3.56)	-31.73	(-7.71,-1.44)	(3.00,0.00)	0.040000	(2.32,3.42)	0.170880
6	(2.32,3.42)	-31.73	(-7.68,-1.58)	(2.00,5.00)	0.040000	(2.30,3.48)	0.075955
7	(2.30,3.48)	-31.73	(-7.70,-1.52)	(3.00,0.00)	0.008000	(2.31,3.45)	0.033417
8	(2.31,3.45)	-31.73	(-7.69,-1.55)	(2.00,5.00)	0.008000	(2.31,3.47)	0.014851
9	(2.31,3.47)	-31.73	(-7.69,-1.53)	(3.00,0.00)	0.001600	(2.31,3.46)	0.006654
10	(2.31,3.46)	-31.73	(-7.69,-1.54)	(2.00,5.00)	0.001600	(2.31,3.46)	0.002957
11	(2.31,3.46)	-31.73	(-7.69,-1.54)	(3.00,0.00)	0.000320	(2.31,3.46)	0.001330
12	(2.31,3.46)	-31.73	(-7.69,-1.54)	(2.00,5.00)	0.000320	(2.31,3.46)	0.000591

optimal value z = -31.730769 at point :(2.307654,3.461728)
relative error = 0.004655 % accuracy = 99.995345 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **bisection** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(-10.00,-5.00)	(2.00,5.00)	1.000000	(2.00,5.00)	7.000000
2	(2.00,5.00)	-30.50	(-8.00,0.00)	(3.00,0.00)	0.307678	(2.31,3.46)	1.846069
3	(2.31,3.46)	-31.73	(-7.69,-1.54)	(3.00,0.00)	0.000031	(2.31,3.46)	0.000127

optimal value z = -31.730769 at point :(2.307699,3.461503)
relative error = 0.000864 % accuracy = 99.999136 %

เมื่อใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลยของปัญหา NLP2 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
                 SOLVE     SUMMARY

   MODEL   MFD              OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP              DIRECTION  MINIMIZE
   SOLVER  CONOPT           FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE             -31.7308

----    35 VARIABLE x.L  independent variable

1  2.308,    2  3.462
```

จากตาราง จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = -31.7308$ ที่จุด $(2.308\ ,\ 3.462)$

<u>ปัญหา NLP3</u>:

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (1,0,2)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \leq 0.001$

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **golden section** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00,2.00)	2.00	(2.00,3.00,1.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.357162	(0.64,1.07,1.29)	2.142971
2	(0.64,1.07,1.29)	2.89	(2.36,1.93,1.71)	(3.00,0.00,0.00)	0.153840	(1.01,0.91,1.09)	0.725251
3	(1.01,0.91,1.09)	2.99	(1.99,2.09,1.91)	(0.00,3.00,0.00)	0.045077	(0.96,1.00,1.04)	0.188725
4	(0.96,1.00,1.04)	3.00	(2.04,2.00,1.96)	(3.00,0.00,0.00)	0.019672	(1.00,0.98,1.02)	0.080257
5	(1.00,0.98,1.02)	3.00	(2.00,2.02,1.98)	(0.00,3.00,0.00)	0.009292	(0.99,1.00,1.01)	0.037514
6	(0.99,1.00,1.01)	3.00	(2.01,2.00,1.99)	(3.00,0.00,0.00)	0.004490	(1.00,1.00,1.00)	0.018042
7	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.002225	(1.00,1.00,1.00)	0.008918
8	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.001105	(1.00,1.00,1.00)	0.004423
9	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000519	(1.00,1.00,1.00)	0.002078
10	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.000280	(1.00,1.00,1.00)	0.001120
11	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000132	(1.00,1.00,1.00)	0.000529

optimal value z = 3.000000 at point :(0.999891,0.999963,1.000146)

relative error = 0.010718 %

accuracy = 99.989282 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยกฎของ **Armijo** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00,2.00)	2.00	(2.00,3.00,1.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.200000	(0.80,0.60,1.60)	1.200000
2	(0.80,0.60,1.60)	2.72	(2.20,2.40,1.40)	(0.00,3.00,0.00)	0.200000	(0.64,1.08,1.28)	0.960000
3	(0.64,1.08,1.28)	2.89	(2.36,1.92,1.72)	(3.00,0.00,0.00)	0.200000	(1.11,0.86,1.02)	0.944000
4	(1.11,0.86,1.02)	2.98	(1.89,2.14,1.98)	(0.00,3.00,0.00)	0.040000	(1.07,0.95,0.98)	0.170880
5	(1.07,0.95,0.98)	3.00	(1.93,2.05,2.02)	(0.00,3.00,0.00)	0.040000	(1.02,1.03,0.94)	0.164045
6	(1.02,1.03,0.94)	3.00	(1.98,1.97,2.06)	(0.00,0.00,3.00)	0.040000	(0.98,0.99,1.03)	0.164503
7	(0.98,0.99,1.03)	3.00	(2.02,2.01,1.97)	(3.00,0.00,0.00)	0.008000	(1.00,0.98,1.02)	0.032259
8	(1.00,0.98,1.02)	3.00	(2.00,2.02,1.98)	(0.00,3.00,0.00)	0.008000	(0.99,1.00,1.01)	0.032283
9	(0.99,1.00,1.01)	3.00	(2.01,2.00,1.99)	(3.00,0.00,0.00)	0.001600	(1.00,1.00,1.01)	0.006426
10	(1.00,1.00,1.01)	3.00	(2.00,2.00,1.99)	(3.00,0.00,0.00)	0.001600	(1.00,1.00,1.01)	0.006415
11	(1.00,1.00,1.01)	3.00	(2.00,2.00,1.99)	(0.00,3.00,0.00)	0.001600	(1.00,1.00,1.00)	0.006415
12	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.001600	(1.00,1.00,1.00)	0.006410
13	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.001600	(1.00,1.00,1.00)	0.006410
14	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.000320	(1.00,1.00,1.00)	0.001281
15	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.000320	(1.00,1.00,1.00)	0.001281
16	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000320	(1.00,1.00,1.00)	0.001280
17	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.000320	(1.00,1.00,1.00)	0.001280
18	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000064	(1.00,1.00,1.00)	0.000256

optimal value z = 3.000000 at point :(0.999922,0.999855,1.000223)
relative error = 0.016019 %
accuracy = 99.983981 %

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **bisection** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00,2.00)	2.00	(2.00,3.00,1.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.357147	(0.64,1.07,1.29)	2.142883
2	(0.64,1.07,1.29)	2.89	(2.36,1.93,1.71)	(3.00,0.00,0.00)	0.153839	(1.01,0.91,1.09)	0.725243
3	(1.01,0.91,1.09)	2.99	(1.99,2.09,1.91)	(0.00,3.00,0.00)	0.045105	(0.96,1.00,1.04)	0.188844
4	(0.96,1.00,1.04)	3.00	(2.04,2.00,1.96)	(3.00,0.00,0.00)	0.019653	(1.00,0.98,1.02)	0.080181
5	(1.00,0.98,1.02)	3.00	(2.00,2.02,1.98)	(0.00,3.00,0.00)	0.009247	(0.99,1.00,1.01)	0.037332
6	(0.99,1.00,1.01)	3.00	(2.01,2.00,1.99)	(3.00,0.00,0.00)	0.004517	(1.00,1.00,1.00)	0.018148
7	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.002228	(1.00,1.00,1.00)	0.008931
8	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.001099	(1.00,1.00,1.00)	0.004399
9	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000549	(1.00,1.00,1.00)	0.002198
10	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(3.00,0.00,0.00)	0.000275	(1.00,1.00,1.00)	0.001099
11	(1.00,1.00,1.00)	3.00	(2.00,2.00,2.00)	(0.00,3.00,0.00)	0.000153	(1.00,1.00,1.00)	0.000610

optimal value z = 3.000000 at point :(0.999857,1.000007,1.000136)
relative error = 0.011391 % accuracy = 99.988609 %

เมื่อใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลยปัญหา NLP3 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
                SOLVE     SUMMARY

   MODEL   MFD              OBJECTIVE  z
   TYPE   NLP           DIRECTION  MAXIMIZE
   SOLVER  CONOPT           FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE               3.0000

----    35 VARIABLE x.L  independent variable

1 1.000,    2 1.000,    3 1.000
```

จากตาราง จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 3.000$ ที่จุด (1.000,1.000,1.000)

<u>ปัญหา NLP4</u>: การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 + x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (1,0)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \leq 0.001$

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **golden section** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00)	1.00	(2.00,-1.00)	(0.00,1.50)	0.280015	(0.72,0.42)	0.700038
2	(0.72,0.42)	0.51	(0.60,0.40)	(0.00,1.00)	0.059155	(0.68,0.45)	0.076899
3	(0.68,0.45)	0.50	(0.45,0.55)	(1.00,0.00)	0.089238	(0.71,0.41)	0.069333
4	(0.71,0.41)	0.50	(0.58,0.42)	(0.00,1.00)	0.050744	(0.67,0.44)	0.065581
5	(0.67,0.44)	0.49	(0.45,0.55)	(1.00,0.00)	0.077600	(0.70,0.41)	0.059999
6	(0.70,0.41)	0.49	(0.57,0.43)	(0.00,1.00)	0.044451	(0.66,0.44)	0.057200
7	(0.66,0.44)	0.49	(0.46,0.54)	(1.00,0.00)	0.068736	(0.69,0.41)	0.052953
8	(0.69,0.41)	0.49	(0.57,0.43)	(0.00,1.00)	0.039615	(0.66,0.43)	0.050808
9	(0.66,0.43)	0.48	(0.46,0.54)	(1.00,0.00)	0.061792	(0.68,0.40)	0.047471
...							
889	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(1.00,0.00)	0.001334	(0.63,0.38)	0.001001
890	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(0.00,1.00)	0.000799	(0.63,0.38)	0.001000

optimal value z = 0.438471 at point :(0.625789,0.376154)

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยกฎของ **Armijo** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00)	1.00	(2.00,-1.00)	(0.00,1.50)	0.200000	(0.80,0.30)	0.500000
2	(0.80,0.30)	0.55	(1.00,0.00)	(0.00,1.00)	0.200000	(0.64,0.44)	0.300000
3	(0.64,0.44)	0.48	(0.40,0.60)	(1.00,0.00)	0.040000	(0.65,0.42)	0.032000
4	(0.65,0.42)	0.48	(0.46,0.54)	(1.00,0.00)	0.040000	(0.67,0.41)	0.030720
5	(0.67,0.41)	0.47	(0.53,0.47)	(0.00,1.00)	0.008000	(0.66,0.41)	0.010102
6	(0.66,0.41)	0.47	(0.51,0.49)	(0.00,1.00)	0.008000	(0.66,0.41)	0.010021
7	(0.66,0.41)	0.47	(0.49,0.51)	(1.00,0.00)	0.040000	(0.67,0.40)	0.030296
8	(0.67,0.40)	0.47	(0.55,0.45)	(0.00,1.00)	0.040000	(0.64,0.42)	0.050916
9	(0.64,0.42)	0.47	(0.44,0.56)	(1.00,0.00)	0.040000	(0.66,0.41)	0.031121
...							
443	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(1.00,0.00)	0.001600	(0.63,0.38)	0.001202
444	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(0.00,1.00)	0.000320	(0.63,0.38)	0.000400

optimal value z = 0.439586 at point :(0.626887,0.377284)

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **bisection** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.00)	1.00	(2.00,-1.00)	(0.00,1.50)	0.279999	(0.72,0.42)	0.699997
2	(0.72,0.42)	0.51	(0.60,0.40)	(0.00,1.00)	0.059174	(0.68,0.45)	0.076926
3	(0.68,0.45)	0.50	(0.45,0.55)	(1.00,0.00)	0.089203	(0.71,0.41)	0.069304
4	(0.71,0.41)	0.50	(0.58,0.42)	(0.00,1.00)	0.050751	(0.67,0.44)	0.065589
5	(0.67,0.44)	0.49	(0.45,0.55)	(1.00,0.00)	0.077637	(0.70,0.41)	0.060029
6	(0.70,0.41)	0.49	(0.57,0.43)	(0.00,1.00)	0.044464	(0.66,0.44)	0.057217
7	(0.66,0.44)	0.49	(0.46,0.54)	(1.00,0.00)	0.068756	(0.69,0.41)	0.052969
8	(0.69,0.41)	0.49	(0.57,0.43)	(0.00,1.00)	0.039612	(0.66,0.43)	0.050805
9	(0.66,0.43)	0.48	(0.46,0.54)	(1.00,0.00)	0.061768	(0.68,0.40)	0.047452
10	(0.68,0.40)	0.48	(0.56,0.44)	(0.00,1.00)	0.035706	(0.66,0.42)	0.045675
...							
909	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(1.00,0.00)	0.001343	(0.63,0.38)	0.001008
910	(0.63,0.38)	0.44	(0.50,0.50)	(0.00,1.00)	0.000793	(0.63,0.38)	0.000992

optimal value z = 0.438452 at point :(0.625768,0.376136)

เมื่อใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลยปัญหา NLP4 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
               SOLVE    SUMMARY

   MODEL   MFD            OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP            DIRECTION  MINIMIZE
   SOLVER  CONOPT         FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE            0.4375
----    35 VARIABLE x.L  independent variable

1   0.625,    2   0.375
```

จากตาราง จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 0.4375$ ที่จุด $(0.625\ ,\ 0.375)$

<u>ปัญหา NLP5</u>: การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 18x_1 - x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 9x_2 \le 12$$
$$-x_1 + 9x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (1,0.5)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \le 0.001$

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **golden section** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.50)	19.25	(20.50,0.00)	(12.00,0.00)	0.652690	(8.18,0.17)	7.505932
2	(8.18,0.17)	92.84	(3.20,70.49)	(3.00,1.00)	0.291302	(6.67,0.41)	1.749541
3	(6.67,0.41)	98.91	(8.39,52.58)	(12.00,0.00)	0.229948	(7.90,0.32)	1.320732
4	(7.90,0.32)	101.54	(5.08,65.32)	(3.00,1.00)	0.168625	(7.07,0.43)	0.940444
5	(7.07,0.43)	103.19	(7.76,55.82)	(12.00,0.00)	0.155240	(7.84,0.37)	0.832603
6	(7.84,0.37)	104.29	(5.63,63.92)	(3.00,1.00)	0.121679	(7.25,0.44)	0.665498
7	(7.25,0.44)	105.09	(7.50,57.24)	(12.00,0.00)	0.118146	(7.81,0.39)	0.613911
8	(7.81,0.39)	105.70	(5.90,63.24)	(3.00,1.00)	0.095714	(7.35,0.45)	0.518550
9	(7.35,0.45)	106.18	(7.35,58.05)	(12.00,0.00)	0.095648	(7.79,0.41)	0.487887
......							
4398	(7.74,0.47)	110.36	(6.79,61.11)	(3.00,1.00)	0.000214	(7.74,0.47)	0.001126
4399	(7.74,0.47)	110.36	(6.79,61.10)	(12.00,0.00)	0.000198	(7.74,0.47)	0.000940

optimal value z = 110.358738 at point :(7.736886,0.473521)

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยกฎของ **Armijo** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.50)	19.25	(20.50,0.00)	(12.00,0.00)	1.000000	(12.00,0.00)	11.500000
2	(12.00,0.00)	72.00	(-6.00,108.00)	(3.00,1.00)	0.200000	(10.20,0.20)	2.000000
3	(10.20,0.20)	97.56	(-0.60,88.20)	(3.00,1.00)	0.200000	(8.76,0.36)	1.600000
4	(8.76,0.36)	108.16	(3.72,72.36)	(3.00,1.00)	0.200000	(7.61,0.49)	1.280000
5	(7.61,0.49)	110.33	(7.18,59.69)	(12.00,0.00)	0.040000	(7.78,0.47)	0.195200
6	(7.78,0.47)	110.36	(6.65,61.62)	(3.00,1.00)	0.008000	(7.75,0.47)	0.042522
7	(7.75,0.47)	110.37	(6.76,61.20)	(3.00,1.00)	0.001600	(7.74,0.47)	0.008436
8	(7.74,0.47)	110.37	(6.79,61.12)	(3.00,1.00)	0.000320	(7.74,0.47)	0.001685
9	(7.74,0.47)	110.37	(6.79,61.10)	(12.00,0.00)	0.000064	(7.74,0.47)	0.000303

optimal value z = 110.368421 at point :(7.736575,0.473714)

เมื่อใช้การค้นตามเส้นโดยวิธี **bisection** ได้ผลลัพธ์ดังนี้

k	$\mathbf{x}^k$	$f(\mathbf{x}^k)$	$\nabla f(\mathbf{x}^k)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(1.00,0.50)	19.25	(20.50,0.00)	(12.00,0.00)	0.652679	(8.18,0.17)	7.505814
2	(8.18,0.17)	92.84	(3.20,70.49)	(3.00,1.00)	0.291321	(6.67,0.41)	1.749618
3	(6.67,0.41)	98.91	(8.39,52.58)	(12.00,0.00)	0.229980	(7.90,0.32)	1.320963
4	(7.90,0.32)	101.54	(5.08,65.32)	(3.00,1.00)	0.168610	(7.07,0.43)	0.940363
5	(7.07,0.43)	103.19	(7.76,55.83)	(12.00,0.00)	0.155243	(7.84,0.37)	0.832600
6	(7.84,0.37)	104.29	(5.63,63.93)	(3.00,1.00)	0.121704	(7.25,0.44)	0.665648
7	(7.25,0.44)	105.09	(7.50,57.24)	(12.00,0.00)	0.118164	(7.81,0.39)	0.614010
8	(7.81,0.39)	105.70	(5.90,63.24)	(3.00,1.00)	0.095734	(7.35,0.45)	0.518662
9	(7.35,0.45)	106.18	(7.35,58.05)	(12.00,0.00)	0.095673	(7.79,0.41)	0.488017
10	(7.79,0.41)	106.57	(6.07,62.83)	(3.00,1.00)	0.079071	(7.41,0.45)	0.425965
......							
4483	(7.74,0.47)	110.36	(6.79,61.10)	(12.00,0.00)	0.000214	(7.74,0.47)	0.001012
4484	(7.74,0.47)	110.36	(6.79,61.11)	(3.00,1.00)	0.000183	(7.74,0.47)	0.000964

optimal value z = 110.358965 at point :(7.736032,0.473619)

เมื่อใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลยตัวอย่างที่ ปัญหา NLP5 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
                SOLVE     SUMMARY
   MODEL   MFD             OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP             DIRECTION  MAXIMIZE
   SOLVER  CONOPT          FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              110.3684
----    35 VARIABLE x.L  independent variable

1 7.737,    2 0.474
```

จากตารางข้างต้น จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 110.3684$ ที่จุด $(7.737\ ,\ 0.474)$

<u>ปัญหา NLP6</u>:

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 - 3x_4$

ภายใต้เงื่อนไข

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (2,2,1,0)$ เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k}\right\| \leq 0.001$

ผลลัพธ์ของการใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างคำนวณหาผลเฉลย

```
Type of the problem is a Minimize
calculate gradient using Automatic Differentiation
Line search using the golden section method
optimal value z = 1.400685 at point :(1.123359,0.650999,1.828612,0.568418)
```

ผลลัพธ์ของการใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลย

```
                SOLVE      SUMMARY
  MODEL   MFD              OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP            DIRECTION  MINIMIZE
   SOLVER  CONOPT            FROM LINE  34

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              1.4007
----    35 VARIABLE x.L  independent variable

1 1.123,   2 0.651,   3 1.829,   4 0.568
```

จากตารางข้างต้น จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 1.4007$ ที่จุด (1.123,0.651,1.829,0.568)

<u>ปัญหา NLP7</u>:

การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3e^{x_1} + 3e^{x_2} + \dots\dots\dots + 3e^{x_{20}}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\le 10 \\
x_4 + x_5 + x_6 &\le 10 \\
x_7 + x_8 + x_9 &\le 10 \\
x_{10} + x_{11} + x_{12} &\le 20 \\
x_{13} + x_{14} + x_{15} &\le 20 \\
x_{16} + x_{17} + x_{18} &\le 20 \\
x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} + x_{13} + x_{16} + x_{20} &\le 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0, x_9 \ge 0, \\
&x_{10} \ge 0, x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, x_{13} \ge 0, x_{14} \ge 0, x_{15} \ge 0, x_{16} \ge 0, x_{17} \ge 0, \\
&x_{18} \ge 0, x_{19} \ge 0, x_{20} \ge 0
\end{aligned}
$$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} =$ (1,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1) เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k}\right\| \le 0.001$

ผลลัพธ์ของการใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างคำนวณหาผลเฉลย

```
Type of the problem is a  Minimize
calculate gradient using Automatic Differentiation
Line search using the golden section method
optimal value z = 60.000000 at point
:(0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.00000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,
0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,0.000000,
0.000000,0.000000)
```

ผลลัพธ์ของการใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลย

```
          SOLVE    SUMMARY

   MODEL   MFD             OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP             DIRECTION  MINIMIZE
   SOLVER  CONOPT          FROM LINE  37

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS       2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE              60.0000
----     38 VARIABLE x.L  independent variable
                  ( ALL       0.000 )
```

__ปัญหา NLP8:__

<u>ปัญหา NLP8</u>:

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{30}\left(2x_i - x_i^2 e^{x_i}\right)$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + x_{11} + 4x_{21} \le 100\\
&x_2 + 8x_{12} + x_{22} \le 100\\
&x_3 + 2x_{13} + x_{23} \le 100\\
&-x_4 + x_{14} + 3x_{24} \le 100\\
&x_5 + 7x_1 + x_{25} \le 100\\
&3x_6 + x_{16} + x_{26} \le 100\\
&x_7 - 3x_{17} + 2x_{27} \le 100\\
&x_8 + x_{18} + x_{28} \le 100\\
&4x_9 + x_{19} + x_{29} \le 100\\
&x_{10} + 7x_{20} + 2x_{30} \le 100
\end{aligned}
$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0, x_9 \ge 0, x_{10} \ge 0, x_{11} \ge 0,$
$x_{12} \ge 0, x_{13} \ge 0, x_{14} \ge 0, x_{15} \ge 0, x_{16} \ge 0, x_{17} \ge 0, x_{18} \ge 0, x_{19} \ge 0, x_{20} \ge 0, x_{21} \ge 0,$
$x_{22} \ge 0, x_{23} \ge 0, x_{24} \ge 0, x_{25} \ge 0, x_{26} \ge 0, x_{27} \ge 0, x_{28} \ge 0, x_{29} \ge 0, x_{30} \ge 0$

กำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ $\mathbf{x} = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$
เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้
ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\| \le 0.001$

ผลลัพธ์ของการใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างคำนวณหาผลเฉลย

Type of the problem is a การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์:
calculate gradient using Automatic Differentiation
Line search using the golden section method
optimal value z = 17.642581 at point:
(0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,
0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,
0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,0.491218,
0.491218,0.491218,0.491218)

ผลลัพธ์ของการใช้โปรแกรม GAMS คำนวณหาผลเฉลย

```
                    SOLVE     SUMMARY
   MODEL   MFD               OBJECTIVE  z
   TYPE    NLP               DIRECTION  MAXIMIZE
   SOLVER  CONOPT            FROM LINE  40

**** SOLVER STATUS     1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      2 LOCALLY OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE            17.6426
----    41 VARIABLE x.L  independent variable

1  0.491,   2  0.491,   3  0.491,   4  0.491,   5  0.491,   6  0.491
7  0.491,   8  0.491,   9  0.491,   10 0.491,   11 0.491,   12 0.491
13 0.491,   14 0.491,   15 0.491,   16 0.491,   17 0.491,   18 0.491
19 0.491,   20 0.491,   21 0.491,   22 0.491,   23 0.491,   24 0.491
25 0.491,   26 0.491,   27 0.491,   28 0.491,   29 0.491,   30 0.491
```

จากตาราง จะได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $z = 17.6426$ ที่จุด (0.491,0.491,….,0.491)

เมื่อพิจารณาผลลัพธ์ของการคำนวณจะเห็นได้ว่าค่าเหมาะที่สุดที่ได้จากการใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าเหมาะที่สุดที่ได้จากการใช้ GAMS ผลเฉลยที่ได้แตกต่างกันที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 4

ผู้วิจัยได้รวบรวมปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นแล้วใช้ซอฟต์แวร์ที่สร้างขึ้นหาผลเฉลยและเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากการใช้โปรแกรม General Algebraic Modeling System (GAMS) ผลลัพธ์ดังรายละเอียดของแต่ละตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง ผลเฉลยของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้น

1. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	8.163536	(0.833014,1.165943)	1.19
	Armijo's rule	8.166667	(0.833264,1.166736)	0.03
	bisection	8.166667	(0.833349,1.166651)	0.02
GAMS		8.1667	(0.833 , 1.167)	0.28

2. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0.5,0.5)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	4.166667	(0.333367,0.833316)	0.05
	Armijo's rule	4.466667	(0.333333,0.833333)	0.02
	bisection	4.166667	(0.333313,0.833344)	0.04
GAMS		4.1667	(0.333 , 0.833)	0.361

3. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + 8x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$3x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

เริ่มต้นที่จุด (3,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	15.017857	(2.464241,2.607277)	0.02
	Armijo's rule	15.017857	(2.464319,2.607043)	0.03
	bisection	15.017857	(2.464250,2.607251)	0.03
GAMS		15.0179	(2.464,2.607)	0.11

4. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$-x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,1) ได้ผลลัพธ์การคำนวณดังนี้

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0.5	(0.5,1.5)	0.01
	Armijo's rule	0.5	(0.5,1.5)	0.02
	bisection	0.5	(0.5,1.5)	0.02
GAMS		0.5	(0.5,1.5)	0.12

5. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = e^{-x_1} + e^{-2x_2}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0.970298	(0.435625,0.564375)	0.01
	Armijo's rule	0.970298	(0.435606,0.564394)	0.03
	bisection	0.970298	(0.435625,0.564375)	0.02
GAMS		0.9703	(0.436,0.564)	0.08

6. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0.504088	(2.497600,4.498320)	3.10
	Armijo's rule	0.500000	(2.499898,4.500102)	0.01
	bisection	0.503312	(2.498465,4.498229)	12.96
GAMS		0.500000	(2.500000,4.500000)	0.121

7. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$-2x_1 - 3x_2 \le -6$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,2)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-2.100000	(1.800029,1.199971)	0.03
	Armijo's rule	-2.100000	(1.799992,1.200008)	0.01
	bisection	-2.100000	(1.799988,1.200012)	0.03
GAMS		-2.100000	(1.800000,1.200000)	0.12

8. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$2x_1 - x_2 \le 1$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-1.000000	(0,1)	0.01
	Armijo's rule	-1.000000	(0,1)	0.01
	bisection	-1.000000	(0,1)	0.01
GAMS		-1.000000	(0,1)	0.05

9. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0	(0,0)	0.03
	Armijo's rule	0	(0,0)	0.01
	bisection	0	(0,0)	0.01
GAMS		0	(0,0)	0.13

10. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = -2x_1 - 3x_2 + x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-2.083333	(0.333367,0.833316)	0.02
	Armijo's rule	-2.083333	(0.333333,0.833333)	0.02
	bisection	-2.083333	(0.333313,0.833344)	0.02
GAMS		-2.0833	(0.333,0.833)	0.11

11. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 36 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

เริ่มต้นที่จุด (4,4,4)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	72.000	(5.999857,3.999853,3.000182)	0.04
	Armijo’s rule	72.000	(6.000094,4.000040,2.999923)	0.03
	bisection	72.000	(5.999912,3.999867,3.000144)	0.06
GAMS		72.000	(6.000000,4.000000,3.000000)	0.12

12. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&-x_1 + 2x_2 \quad \leq 3 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

เริ่มต้นที่จุด (1,0,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-24.000	(0,0,2)	0.02
	Armijo’s rule	-24.000	(0,0,2)	0.02
	bisection	-24.000	(0,0,2)	0.02
GAMS		-24.000	(0,0,2)	0.061

13. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_2 + 12x_3$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (2,1,3)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	14.000	(0,0,1)	0.01
	Armijo's rule	14.000	(0,0,1)	0.01
	bisection	14.000	(0,0,1)	0.02
GAMS		14.000	(0,0,1)	0.12

14. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_1 - 6x_2$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_1 \ge 0 , x_2 \ge 0 , x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,1,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-6.749999	(2.000669,0.749412,0.500507)	0.03
	Armijo's rule	-6.749997	(2.001975,0.748654,0.500718)	0.01
	bisection	-6.750000	(2.000611,0.749462,0.500465)	0.06
GAMS		-6.750000	(2.000000,0.750000,0.500000)	0.13

15. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$z = f(\mathbf{x}) = e^{-x_1 + x_2} + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,3)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	1.000	(0,0)	0.02
	Armijo's rule	1.000	(0,0)	0.01
	bisection	1.000	(0,0)	0.01
GAMS		1.000	(0,0)	0.121

16. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 6x_1 - 14x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \quad \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,0,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-19.111111	(0.333333,1.666667,0)	0.01
	Armijo's rule	-19.111111	(0.333333,1.666667,0)	0.02
	bisection	-19.111111	(0.333333,1.666667,0)	0.02
GAMS		-19.1111	(0.333,1.667)	0.13

17. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 2x_2^3 - x_1^2 + x_1 - 2x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-0.769800	(0,0.577362)	0.01
	Armijo's rule	-0.769800	(0,0.577475)	0.02
	bisection	-0.769800	(0,0.577360)	0.02
GAMS		-0.7698	(0,0.577)	0.091

18. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + 1) + x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	3.000	(0,3)	0.03
	Armijo's rule	3.000	(0,3)	0.01
	bisection	3.000	(0,3)	0.02
GAMS		3.000	(0,3)	0.111

19. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 15x_1 + 30x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	269.923326	(11.989854,8.992316)	8.16
	Armijo's rule	269.941958	(11.992184,8.994247)	9.59
	bisection	269.931151	(11.990992,8.993047)	31.29
GAMS		270.0000	(12.000000,9.000000)	0.10

20. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	11.497775	(0.999575,1.499525)	1.51
	Armijo's rule	11.499999	(1.000433,1.499350)	0.04
	bisection	11.497686	(0.999564,1.499497)	5.54
GAMS		11.500000	(1.000000,1.500000)	0.131

21. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = \ln(x_1 + 1) - x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	1.386294	(3,0)	0.02
	Armijo's rule	1.386294	(3,0)	0.04
	bisection	1.386294	(3,0)	0.02
GAMS		1.3863	(3,0)	0.13

22. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 4x_2^2 + 16x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,2,2)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	39.366415	(2.308399,1.997790,0.693811)	0.09
	Armijo's rule	39.366500	(2.306844,1.995943,0.697213)	0.04
	bisection	39.366423	(2.308320,1.997450,0.694231)	0.28
GAMS		39.3664	(2.309,2.000,0.691)	0.07

23. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^3 - 6x_1 - 3x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-5.000	(1,0)	0.02
	Armijo's rule	-5.000	(1,0)	0.02
	bisection	-5.000	(1,0)	0.02
GAMS		-5.000	(1,0)	0.13

24. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 8x_1 - x_1^2 + 2x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	21.440033	(3.666128,2.775751,0.000000)	3.70
	Armijo's rule	21.422823	(3.667116,2.766818,0.000000)	0.76
	bisection	21.440106	(3.666129,2.775788,0.000000)	12.25
GAMS		21.4444	(3.667,2.778,0.000)	0.12

25. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 32x_1 + 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_1^4 - x_2^4$

ภายใต้เงื่อนไข $3x_1 + x_2 \le 11$

$2x_1 + 5x_2 \le 16$

$x_1 \ge 0 \; , x_2 \ge 0$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	100.935986	(1.999630,1.807648)	0.04
	Armijo's rule	100.935972	(1.999623,1.807233)	0.05
	bisection	100.935986	(1.999625,1.807642)	0.05
GAMS		100.9360	(2.000,1.808)	0.120

26. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$z = f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 40x_1 + 30x_2 - 4x_1^2 - x_1^4 - 3x_2^2 - x_2^4$$

ภายใต้เงื่อนไข $4x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0 \; , x_2 \ge 0$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	82.725935	(1.682677,1.157852)	0.94
	Armijo's rule	82.743657	(1.682948,1.158526)	0.03
	bisection	82.726171	(1.683330,1.157536)	3.33
GAMS		82.7437	(1.683,1.158)	0.13

27. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	3.185185	(0.333342,0.666658)	0.01
	Armijo's rule	3.185185	(0.333059,0.666941)	0.02
	bisection	3.185185	(0.333333,0.666667)	0.01
GAMS		3.1852	(0.333,0.667)	0.141

28. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^4 - x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$4x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0 \,, x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	3.852695	(0.893047,0.711150)	0.89
	Armijo's rule	3.854281	(0.893410,0.713180)	0.03
	bisection	3.852752	(0.892737,0.711869)	2.93
GAMS		3.8543	(0.893,0.713)	0.14

29. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^4 + 4x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

เริ่มต้นที่จุด (5,5)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	176.317095	(2.571670,4.857203)	2.07
	Armijo's rule	176.293211	(2.571336,4.857328)	0.01
	bisection	176.316055	(2.571343,4.857833)	6.87
GAMS		176.2932	(2.571,4.857)	0.13

30. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

เริ่มต้นที่จุด (5,5)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	66.666667	(3.333291,6.666709)	0.01
	Armijo's rule	66.666667	(3.333389,6.666611)	0.02
	bisection	66.666667	(3.333282,6.666718)	0.02
GAMS		66.6667	(3.333,6.667)	0.12

31. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข $x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

เริ่มต้นที่จุด (1,4)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	10.669658	(2.667398,1.333163)	1.95
	Armijo's rule	10.666667	(2.666741,1.333259)	0.03
	bisection	10.669385	(2.666877,1.333633)	7.49
GAMS		10.6667	(2.667, 1.333)	0.13

32. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{8}\right)^4$

ภายใต้เงื่อนไข $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$-x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0.250244	(1,0)	0.03
	Armijo's rule	0.250244	(1,0)	0.03
	bisection	0.250244	(1,0)	0.01
GAMS		0.2502	(1,0)	0.12

33. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + \left(x_2 - \frac{5}{2}\right)^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$-x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (2,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	0.800	(1.400008,1.700004)	0.01
	Armijo's rule	0.800	(1.400009,1.700004)	0.03
	bisection	0.800	(1.399982,1.699991)	0.03
GAMS		0.800	(1.400000,1.700000)	0.111

34. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 20x_1 + 40x_2 - 15x_1^2 + 10x_2^2 - 16x_1x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + 2x_2 \le 16$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 23$$
$$x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	560.625000	(0.000000,5.750000)	0.04
	Armijo's rule	560.625000	(0.000000,5.750000)	0.02
	bisection	560.625000	(0.000000,5.750000)	0.02
GAMS		560.625000	(0.000000,5.750000)	0.09

35. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 - (x_1 + 2x_2)^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (2,2)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	2.247748	(1.499358,0.000450)	1.24
	Armijo's rule	2.250000	(1.499978,0.000000)	0.03
	bisection	2.247858	(1.499411,0.000428)	9.70
GAMS		2.250000	(1.500000,0.000000)	0.11

36. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$z = f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 5x_1 - x_2 + 3x_3$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (0,0,0)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	1.125000	(0.000000,0.000000,0.750013)	0.02
	Armijo's rule	1.125000	(0.000000,0.000000,0.750189)	0.03
	bisection	1.125000	(0.000000,0.000000,0.749985)	0.03
GAMS		1.125000	(0.000000,0.000000,0.750)	0.1

37. การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1 - 2x_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$-x_1 + 4x_2 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (2,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	-9.000	(1.000000,3.000000)	0.01
	Armijo's rule	-9.000	(1.000000,3.000000)	0.01
	bisection	-9.000	(1.000000,3.000000)	0.02
GAMS		-9.000	(1.000000,3.000000)	0.09

38. การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 5x_1 - x_1^2 + 3x_2 - x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$3x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด (1,1)

ตารางแสดงผลลัพธ์การคำนวณด้วยซอฟต์แวร์ที่สร้างเปรียบเทียบกับการใช้ GAMS

software		objective value z	optimal solution	time (sec.)
MFD	golden section	8.325917	(2.152617,1.268897)	1.10
	Armijo's rule	8.323305	(2.150459,1.266512)	0.32
	bisection	8.325918	(2.152614,1.268905)	3.84
GAMS		8.3269	(2.154,1.269)	0.09

ภาคผนวก ข

ในภาคผนวกนี้เป็นตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นหนึ่งตัวแปรที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับโดยวิธีการค้นตามเส้นที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้เช่น วิธี golden section , กฎของ Armijo และวิธี bisection ดังจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไป

ตัวอย่างที่ 1 การคำนวณหาค่าสูงสุดโดยวิธี golden section

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(x) = -x^2 + 6x - 13$

ภายใต้เงื่อนไข $2 \le x \le 8$

กำหนดให้ ความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุดได้ คือ $\varepsilon = 0.01$

จากปัญหาจะได้ว่า interval of uncertainty เริ่มต้น คือ $[a,b] = [2,8]$

การคำนวณครั้งที่ 1 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_1,b_1] = [a,b] = [2,8]$

โดยที่ $\lambda_1 = b_1 - r(b_1 - a_1) = 8 - 0.618(8-2) = 4.292$ จะได้ $f(\lambda_1) = -5.668737$

และ $\mu_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) = 2 + 0.618(8-2) = 5.708$ จะได้ $f(\mu_1) = -11.334369$

เนื่องจาก $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a_1, \mu_1] = [2, 5.708]$

ความยาวช่วงเท่ากับ $3.708 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 2 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_2,b_2] = [a_1,\mu_1] = [2, 5.708]$

$\lambda_2 = b_2 - r(b_2 - a_2) = 5.708 - 0.618(5.708 - 2) = 3.416$ จะได้ $f(\lambda_2) = -4.173396$

$\mu_2 = \lambda_1$ จะได้ $f(\mu_2) = f(\lambda_1) = -5.668737$

เนื่องจาก $f(\lambda_2) > f(\mu_2)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a_2, \mu_2] = [2, 4.292]$

ความยาวช่วงเท่ากับ $2.292 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 3 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_3,b_3] = [a_2,\mu_2] = [2, 4.292]$

$\lambda_3 = b_3 - r(b_3 - a_3) = 4.292 - 0.618(4.292 - 2) = 2.875$ จะได้ $f(\lambda_3) = -4.015528$

$\mu_3 = \lambda_2 = 3.416$ จะได้ $f(\mu_3) = f(\lambda_2) = -4.173396$

เนื่องจาก $f(\lambda_3) > f(\mu_3)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a_3, \mu_3] = [2, 3.416]$

ความยาวช่วงเท่ากับ $1.416 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 4 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_4,b_4] = [a_3,\mu_3] = [2, 3.416]$

$\lambda_4 = b_4 - r(b_4 - a_4) = 3.416 - 0.618(3.416 - 2) = 2.541$ จะได้ $f(\lambda_4) = -4.210663$

$\mu_4 = \lambda_3 = 2.875$ จะได้ $f(\mu_4) = f(\lambda_3) = -4.015528$

เนื่องจาก $f(\lambda_4) < f(\mu_4)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_4, b_4] = [2.541, 3.416]$

ความยาวช่วงเท่ากับ $0.875 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 5 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_5, b_5] = [\lambda_4, b_4] = [2.541, 3.416]$

$\lambda_5 = \mu_4 = 2.875$ จะได้ $f(\lambda_5) = f(\mu_4) = -4.015528$

$\mu_5 = a_5 + r(b_5 - a_5) = 2.541 + 0.618(3.416 - 2.541) = 3.082$ จะได้ $f(\mu_5) = -4.006730$

เนื่องจาก $f(\lambda_5) < f(\mu_5)$ จะได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_5, b_5] = [2.875, 3.416]$

ความยาวช่วงเท่ากับ $0.541 > \varepsilon$

จากนั้นทำซ้ำกันไปเรื่อยๆ เมื่อความยาวช่วงที่ลดได้ยังมากกว่าความยาวช่วงที่ยอมรับได้ สามารถคำนวณหาจำนวนครั้งการทำซ้ำได้ดังนี้ สมมติให้ k เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำในการลดช่วงเพื่อหาผลเฉลยเหมาะที่สุดของความยาวช่วงที่ยอมรับได้ ε คำนวณได้จาก $r^k(b-a) < \varepsilon$ เมื่อ $r = 0.618$

$$0.618^k(8-2) < 0.0100$$
$$0.618^k < \frac{0.0100}{6}$$
$$k\,\mathbf{ln}(0.618) < \mathbf{ln}(0.001667)$$
$$k(-0.48) < -6.3969$$
$$k > 13.326$$

แสดงว่าต้องทำซ้ำจำนวน 14 ครั้งจึงจะทำให้ $|b_k - a_k| < \varepsilon$

จากตัวอย่างการคำนวณสามารถสรุปผลตามตารางดังนี้

ตารางที่ 1 สรุปผลการคำนวณของวิธี golden section

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$	interval of uncertainty	length
1	2.000	8.000	4.292	5.708	-5.668737	-11.334369	[2.000, 5.708]	3.708
2	2.000	5.708	3.416	4.292	-4.173396	-5.668737	[2.000, 4.292]	2.292
3	2.000	4.292	2.875	3.416	-4.015528	-4.173396	[2.000, 3.416]	1.416
4	2.000	3.416	2.541	2.875	-4.210663	-4.015528	[2.541, 3.416]	0.875
5	2.541	3.416	2.875	3.082	-4.015528	-4.006730	[2.875, 3.416]	0.541
6	2.875	3.416	3.082	3.210	-4.006730	-4.043998	[2.875, 3.210]	0.334
7	2.875	3.210	3.003	3.082	-4.000010	-4.006730	[2.875, 3.082]	0.207
8	2.875	3.082	2.954	3.003	-4.002086	-4.000010	[2.954, 3.082]	0.128
9	2.954	3.082	3.003	3.033	-4.000010	-4.001106	[2.954, 3.033]	0.079
10	2.954	3.033	2.984	3.003	-4.000241	-4.000010	[2.984, 3.033]	0.049
11	2.984	3.033	3.003	3.015	-4.000010	-4.000214	[2.984, 3.015]	0.030
12	2.984	3.015	2.996	3.003	-4.000016	-4.000010	[2.996, 3.015]	0.019
13	2.996	3.015	3.003	3.008	-4.000010	-4.000056	[2.996, 3.008]	0.012
14	2.996	3.008	3.000	3.003	-4.000000	-4.000010	[2.996, 3.003]	0.007

ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x} = 3.003106$

ตัวอย่างที่ 2 การคำนวณหาค่าสูงสุดโดยวิธี bisection

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(x) = -x^2 + 6x - 13$

ภายใต้เงื่อนไข $2 \le x \le 8$

กำหนดให้ ความยาวของ interval of uncertainty สุดท้ายที่ยอมรับผลเฉลยเหมาะที่สุดได้ คือ $\varepsilon = 0.001$

จากปัญหาจะได้ว่า interval of uncertainty เริ่มต้น คือ $[a,b] = [2,8]$

$$\text{และ} \quad f(x) = -x^2 + 6x - 13$$
$$f'(x) = -2x + 6$$

การคำนวณครั้งที่ 1 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_1, b_1] = [a,b] = [2,8]$

$$\text{จะได้} \quad \lambda_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 5$$

เนื่องจาก $f'(\lambda_1) = f'(5) = -4 < 0$ แสดงว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดไม่อยู่ในช่วง $[\lambda_1, b_1] = [5, 8]$

ทำให้ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a_1, \lambda_1] = [2, 5]$ ความยาวช่วงเท่ากับ $3 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 2 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_2, b_2] = [a_1, \lambda_1] = [2, 5]$

$$\text{จะได้} \quad \lambda_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 3.5$$

เนื่องจาก $f'(\lambda_2) = f'(3.5) = -1 < 0$ แสดงว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดไม่อยู่ในช่วง $[\lambda_2, b_2] = [3.5, 5]$

ทำให้ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[a_2, \lambda_2] = [2, 3.5]$ ความยาวช่วงเท่ากับ $1.5 > \varepsilon$

การคำนวณครั้งที่ 3 กำหนดให้ interval of uncertainty คือ $[a_3, b_3] = [a_2, \lambda_2] = [2, 3.5]$

$$\text{จะได้} \quad \lambda_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 2.75$$

เนื่องจาก $f'(\lambda_3) = f'(2.75) = 0.5 > 0$ แสดงว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดไม่อยู่ในช่วง $[a_3, \lambda_3] = [2, 2.75]$

ทำให้ได้ interval of uncertainty ใหม่คือ $[\lambda_3, b_3] = [2.75, 3.5]$ ความยาวช่วงเท่ากับ $0.75 > \varepsilon$

จากนั้นทำซ้ำกัน จนกระทั่งความยาวของ interval of uncertainty น้อยกว่า ε

การหาจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

สมมติให้ k เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำในการลด interval of uncertainty เพื่อหาผลเฉลยเหมาะที่สุดของความยาวช่วงที่ยอมรับได้ ε คำนวณได้จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) < \varepsilon$

แทนค่าแล้วได้ $(0.5)^k (8-2) < 0.001$

$$0.5^k < \frac{0.001}{6}$$
$$k\ \mathbf{ln}(0.5) < \mathbf{ln}(0.0001667)$$
$$k(-0.693) < -8.6995$$
$$k \quad > 12.55$$

แสดงว่าต้องทำซ้ำจำนวน 13 ครั้งจึงจะได้ลดช่วงได้เป็นช่วงที่ยอมรับได้ สามารถสรุปผลตามตารางดังนี้

ตารางที่ 2 สรุปผลการคำนวณโดยวิธี bisection

k	a_k	b_k	λ_k	$f'(\lambda_k)$	$(b_k - a_k)$
0	2.000	8.000	5.000	-4.000	6.000
1	2.000	5.000	3.500	-1.000	3.000
2	2.000	3.500	2.750	0.500	1.500
3	2.750	3.500	3.125	-0.250	0.750
4	2.750	3.125	2.938	0.125	0.375
5	2.938	3.125	3.031	-0.062	0.188
6	2.938	3.031	2.984	0.031	0.094
7	2.984	3.031	3.008	-0.016	0.047
8	2.984	3.008	2.996	0.008	0.023
9	2.996	3.008	3.002	-0.004	0.012
10	2.996	3.002	2.999	0.002	0.006
11	2.999	3.002	3.000	-0.001	0.003
12	2.999	3.000	3.000	0.000	0.001

ผลเฉลยเหมาะที่สุด $\bar{x} = 3.00012$

ตัวอย่างที่ 3 การคำนวณหาระยะการเคลื่อนที่โดยกฎของ Armijo

กำหนดให้ $f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 6x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

สมมติว่าต้องการหาระยะการเคลื่อนที่ α สูงสุดเพื่อเพิ่มค่าฟังก์ชัน f

จากจุด $\mathbf{x} = (0,0)$ ในทิศทาง $\mathbf{d} = (2,0)$ เมื่อกำหนดให้ $0 \le \alpha \le 1$

สามารถกำหนดรูปแบบของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นได้ดังนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) = f(2\alpha, 0) = 12\alpha - 16\alpha^2$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha \le 1$

กำหนดให้ $\sigma = 0.1$ และ $\beta = 0.375$, $s = 1$

การคำนวณครั้งที่ 1

กำหนดให้ $\alpha = s = 1$

จะได้ว่า $f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) = f(2\alpha, 0) = 12\alpha - 16\alpha^2$ =12(1)-16(1) = -4.0

$f(\mathbf{x}) = f(0,0) = 0$

$\alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\,\mathbf{d}$ = 1(0.1)[6(2)+5(0)] = 1.20

นั่นคือ $f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) < \alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\,\mathbf{d}$ ทำซ้ำครั้งต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 2

กำหนดให้ $\alpha = \alpha\beta = 1(0.375) = 0.375$

จะได้ว่า $f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) = f(2\alpha, 0) = 12\alpha - 16\alpha^2$ =12(0.375)-16$(0.375)^2$ = 2.25

$f(\mathbf{x}) = f(0,0) = 0$

$\alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\,\mathbf{d}$ = (0.375)(0.1)[6(2)+5(0)] = 0.45

นั่นคือ $f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) \ge \alpha\sigma\nabla f(\mathbf{x})^T\,\mathbf{d}$ หยุดการคำนวณ

แสดงว่า $\alpha = 0.375$ เป็นระยะเคลื่อนที่ที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ f มีค่าเพิ่มขึ้น

ภาคผนวก ค

ในภาคผนวกนี้เป็นตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับเชิงเส้นโดยวิธีการใช้ทิศทางที่เป็นไปได้ของ Frank-Wolfe ที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ดังจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไปนี้

ตัวอย่าง

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 6x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

เริ่มต้นที่จุด $\mathbf{x}^1 = (0,0)$ และกำหนดให้

กำหนดให้ ความยาวของระยะห่างจุดถัดไปที่ยอมรับได้ คือ $\varepsilon = 0.0001$

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ $f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 + 6x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

จะได้ $\nabla f(\mathbf{x}) = (3x_2 + 6 - 8x_1, 3x_1 + 5 - 6x_2)$

การคำนวณครั้งที่ 1

กำหนดให้ $k = 1$, $\mathbf{x}^1 = (0,0)$, $f(\mathbf{x}^1) = 0.00$

นั่นคือ $\nabla f(\mathbf{x}^1) = \nabla f(0,0) = (6,5)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^1 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f(\mathbf{x}^1)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 6d_1 + 5d_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$d_1 + d_2 \le 2$$
$$d_1 + 2d_2 \le 3$$
$$d_1 \ge 0 \, , \; d_2 \ge 0$$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^1 = (2,0)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^1$ คือ $\left(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_1 จากจุด $\mathbf{x}^1$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^1 + \alpha_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_1 \le 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(2\alpha_1, 0) = 12\alpha_1 - 16\alpha_1^2$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_1 \le 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_1 = 0.374981$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^2$ มีระยะการเคลื่อนที่ α^1 จากจุด $\mathbf{x}^1$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \alpha_1\left(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1\right) = (0,0) + 0.374981(2,0) = (0.75,0)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^2\right) = 2.25$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^1\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\right\| = 0.749962 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 2

กำหนดให้ $k = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0.75,0)$, $f\left(\mathbf{x}^2\right) = 2.25$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^2\right) = \nabla f(0.75,0) = (0,7.25)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^2 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f\left(\mathbf{x}^2\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 0d_1 + 7.25d_2 = 7.25d_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$d_1 + d_2 \le 2$$
$$d_1 + 2d_2 \le 3$$
$$d_1 \ge 0$$
$$d_2 \ge 0$$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^2 = (0,1.5)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^2$ คือ $\left(\mathbf{d}^2 - \mathbf{x}^2\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_2 จากจุด $\mathbf{x}^2$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^2 - \mathbf{x}^2\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^2 + \alpha_2(\mathbf{d}^2 - \mathbf{x}^2))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq \alpha_2 \leq 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(0.75 - 0.75\alpha_2, 1.5\alpha_2)$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq \alpha_2 \leq 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_2 = 0.439374$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^3$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_2 จากจุด $\mathbf{x}^2$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^2 - \mathbf{x}^2\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \alpha_2\left(\mathbf{d}^2 - \mathbf{x}^2\right) = (0.75,0) + 0.439374[(0,1.5) - (0.75,0)] = (0.42,0.66)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^3\right) = 4.64$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^2\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2\right\| = 0.988575 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 3

กำหนดให้ $k = 3$, $\mathbf{x}^3 = (0.42,0.66)$, $f\left(\mathbf{x}^3\right) = 4.64$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^3\right) = \nabla f(0.42,0.66) = (4.61,2.31)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^3 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f\left(\mathbf{x}^3\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ad} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 4.61d_1 + 2.31d_2$

ภายใต้เงื่อนไข $d_1 + d_2 \leq 2$

$d_1 + 2d_2 \leq 3$

$d_1 \geq 0$

$d_2 \geq 0$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^3 = (2.00,0.00)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^3$ คือ $\left(\mathbf{d}^3 - \mathbf{x}^3\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_3 จากจุด $\mathbf{x}^3$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^3 - \mathbf{x}^3\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^3 + \alpha_3(\mathbf{d}^3 - \mathbf{x}^3))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_3 \le 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f((0.42,0.66) + \alpha_3[(2,0) - (0.42,0.66)])$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_3 \le 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_3 = 0.200175$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^4$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_3 จากจุด $\mathbf{x}^3$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^3 - \mathbf{x}^3\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^3 + \alpha_3\left(\mathbf{d}^3 - \mathbf{x}^3\right) = (0.42,0.66) + 0.200175[(2,0) - (0.42,0.66)] = (0.74,0.53)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^4\right) = 5.22$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^3\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^3\right\| = 0.448116 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 4

กำหนดให้ $k = 4$, $\mathbf{x}^4 = (0.74,0.53)$, $f\left(\mathbf{x}^4\right) = 5.22$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^4\right) = \nabla f(0.74,0.53) = (1.69,4.05)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^4 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f\left(\mathbf{x}^4\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$

$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 1.69d_1 + 4.05d_2$

ภายใต้เงื่อนไข $d_1 + d_2 \le 2$

$d_1 + 2d_2 \le 3$

$d_1 \ge 0$

$d_2 \ge 0$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^4 = (0.00,1.50)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^4$ คือ $\left(\mathbf{d}^4 - \mathbf{x}^4\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_4 จากจุด $\mathbf{x}^4$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^4 - \mathbf{x}^4\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^4 + \alpha_4(\mathbf{d}^4 - \mathbf{x}^4))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_4 \le 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f\left((0.74,0.53) + \alpha_4\left[(0,1.5) - (0.74,0.53)\right]\right)$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_4 \le 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_4 = 0.188124$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^5$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_4 จากจุด $\mathbf{x}^4$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^4 - \mathbf{x}^4\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^5 = \mathbf{x}^4 + \alpha_4\left(\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^4\right) = (0.74,0.53) + 0.188124\left[(0,1.5) - (0.74,0.53)\right] = (0.60,0.71)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^5\right) = 5.47$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^4\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^5 - \mathbf{x}^4\right\| = 0.321599 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 5

กำหนดให้ $k = 5$, $\mathbf{x}^5 = (0.60,0.71)$, $f\left(\mathbf{x}^5\right) = 5.47$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^5\right) = \nabla f(0.60,0.71) = (3.35,2.53)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^5 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f\left(\mathbf{x}^5\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$

$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 3.35d_1 + 2.53d_2$

ภายใต้เงื่อนไข $d_1 + d_2 \le 2$

$d_1 + 2d_2 \le 3$

$d_1 \ge 0$

$d_2 \ge 0$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^5 = (2.00,0.00)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^5$ คือ $\left(\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^5\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_5 จากจุด $\mathbf{x}^5$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^5\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^5 + \alpha_5 (\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^5))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_5 \le 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f\left((0.60,0.71) + \alpha_5\left[(2,0) - (0.60,0.71)\right]\right)$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \le \alpha_5 \le 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_5 = 0.116960$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^6$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_5 จากจุด $\mathbf{x}^5$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^5\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^6 = \mathbf{x}^5 + \alpha_5 \left(\mathbf{d}^5 - \mathbf{x}^5\right) = (0.60,0.71) + 0.116960\left[(2,0) - (0.60,0.71)\right] = (0.76,0.63)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^6\right) = 5.64$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^5\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^6 - \mathbf{x}^5\right\| = 0.247030 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 6

กำหนดให้ $k = 6$, $\mathbf{x}^6 = (0.76,0.63)$, $f\left(\mathbf{x}^6\right) = 5.64$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^6\right) = \nabla f(0.76,0.63) = (1.79,3.52)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^6 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = \nabla f\left(\mathbf{x}^6\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $\mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$

$\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = 1.79d_1 + 3.52d_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$d_1 + d_2 \le 2$

$d_1 + 2d_2 \le 3$

$d_1 \ge 0$

$d_2 \ge 0$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\mathbf{d}^6 = (1.00,1.00)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^6$ คือ $\left(\mathbf{d}^6 - \mathbf{x}^6\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_6 จากจุด $\mathbf{x}^6$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^6 - \mathbf{x}^6\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = f(\mathbf{x}^6 + \alpha_6(\mathbf{d}^6 - \mathbf{x}^6))$

ภายใต้เงื่อนไข $\quad 0 \le \alpha_6 \le 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = f((0.76,0.63) + \alpha_5[(1,1) - (0.76,0.63)])$

ภายใต้เงื่อนไข $\quad 0 \le \alpha_6 \le 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_6 = 1.000000$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^7$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_6 จากจุด $\mathbf{x}^6$ ไปตามทิศทาง $\left(\mathbf{d}^6 - \mathbf{x}^6\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^7 = \mathbf{x}^6 + \alpha_6\left(\mathbf{d}^6 - \mathbf{x}^6\right) = (0.76,0.63) + 1.00[(1,1) - (0.76,0.63)] = (1,1)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^7\right) = 7.00$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f\left(\mathbf{x}^6\right)$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^7 - \mathbf{x}^6\right\| = 0.610879 > \varepsilon$ คำนวณหาจุดที่เคลื่อนที่ต่อไป

การคำนวณครั้งที่ 7

กำหนดให้ $k = 7$, $\mathbf{x}^7 = (1,1)$, $f\left(\mathbf{x}^7\right) = 7.00$

จะได้ $\nabla f\left(\mathbf{x}^7\right) = \nabla f(1,1) = (1.00,2.00)$

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{d}^7 = (d_1, d_2)$ เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = \nabla f\left(\mathbf{x}^7\right)^T \mathbf{d}$

ภายใต้เงื่อนไข $\quad \mathbf{Ad} \le \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{d} \ge \mathbf{0}$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\quad z = d_1 + 2d_2$

ภายใต้เงื่อนไข

$$d_1 + d_2 \le 2$$
$$d_1 + 2d_2 \le 3$$
$$d_1 \ge 0$$
$$d_2 \ge 0$$

เมื่อหาผลเฉลยแล้วได้ $\quad \mathbf{d}^7 = (0.00,1.50)$

กำหนดทิศทางที่เป็นไปได้ของการเคลื่อนที่จากจุด $\mathbf{x}^7$ คือ $\left(\mathbf{d}^7 - \mathbf{x}^7\right)$

คำนวณหาระยะการเคลื่อนที่ α_7 จากจุด $\mathbf{x}^7$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^7 - \mathbf{x}^7\right)$

จากปัญหากำหนดการไม่เชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f(\mathbf{x}^7 + \alpha_7(\mathbf{d}^7 - \mathbf{x}^7))$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq \alpha_7 \leq 1$

แทนค่าแล้วได้รูปแบบปัญหาเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = f((1,1) + \alpha_7[(0,1.5) - (1,1)])$

ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq \alpha_7 \leq 1$

คำนวณโดยวิธี golden section จะได้ $\alpha_7 = 0.000000$

คำนวณหาจุด $\mathbf{x}^8$ มีระยะการเคลื่อนที่ α_7 จากจุด $\mathbf{x}^7$ ไปตามทิศทางที่เป็นไปได้ $\left(\mathbf{d}^7 - \mathbf{x}^7\right)$

จากสมการ $\mathbf{x}^8 = \mathbf{x}^7 + \alpha_7\left(\mathbf{d}^7 - \mathbf{x}^7\right) = (1,1) + 0.0[(0,1.5) - (1,1)] = (1,1)$

จะได้ว่า $f\left(\mathbf{x}^8\right) = 7.00$

เนื่องจาก $\left\|\mathbf{x}^8 - \mathbf{x}^7\right\| = 0.000000 < \varepsilon$ หยุดการคำนวณ

จากผลการคำนวณจะเห็นได้ว่า ค่าของ $f\left(\mathbf{x}^7\right) = f\left(\mathbf{x}^8\right) = 7.00$ มีค่าเท่ากัน

แสดงว่าไม่สามารถเคลื่อนที่ไปหาจุดที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้เพื่อเพิ่มค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ f ได้

สรุปได้ว่า ผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาคือ $\mathbf{x} = (1,1)$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ $z = f(\mathbf{x}) = f(1,1) = 7.00$

ตารางที่ 3 สรุปผลการคำนวณโดยวิธี method of feasible direction

k	$\mathbf{x}^k$	$f\left(\mathbf{x}^k\right)$	$\nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)$	$\mathbf{d}^k$	α^k	$\mathbf{x}^{k+1}$	residual
1	(0.00,0.00)	0.00	(6.00,5.00)	(2.00,0.00)	0.374981	(0.75,0.00)	0.749962
2	(0.75,0.00)	2.25	(0.00,7.25)	(0.00,1.50)	0.439374	(0.42,0.66)	0.988575
3	(0.42,0.66)	4.64	(4.61,2.31)	(2.00,0.00)	0.200175	(0.74,0.53)	0.448116
4	(0.74,0.53)	5.22	(1.69,4.05)	(0.00,1.50)	0.188124	(0.60,0.71)	0.321599
5	(0.60,0.71)	5.47	(3.35,2.53)	(2.00,0.00)	0.116960	(0.76,0.63)	0.247030
6	(0.76,0.63)	5.64	(1.79,3.52)	(1.00,1.00)	1.000000	(1.00,1.00)	0.610879
7	(1.00,1.00)	7.00	(1.00,2.00)	(0.00,1.50)	0.000000	(1.00,1.00)	0.000000

optimal value $z = 7.000000$ at point :(1.000000,1.000000)

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ-สกุล	เรือเอก พีระพงษ์ พรมจันทร์
วัน เดือน ปีเกิด	วันที่ 25 เดือน กรกฎาคม พุทธศักราช 2517
สถานที่เกิด	จังหวัดขอนแก่น
วุฒิการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขา คณิตศาสตร์
สถานศึกษา	คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
ปีที่สำเร็จการศึกษา	ปีการศึกษา 2539
สถานที่ทำงาน	กองวิชาคณิตศาสตร์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ กองทัพเรือ กระทรวงกลาโหม
ตำแหน่ง	อาจารย์