

ขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 ทฤษฎีที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรม

หลักการและวิธีการทางทฤษฎีที่ใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาโปรแกรมได้สรุปไว้ในหัวข้อต่อไปนี้ เนื้อหาหลักจะเป็นการแสดงสมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ใช้สัญลักษณ์ $\langle \rangle$, $\{ \}$ และ $[\]$ แทนเวกเตอร์แถว(row vector) เวกเตอร์หลัก(column vector) และเมตริกซ์ ตามลำดับ

3.1.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐาน

สมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์กลศาสตร์ของชิ้นส่วนต่อเนื่อง (Continuum Mechanics) ประกอบด้วยสมการหลัก 3 สมการ ดังนี้

(1) สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์ (Static Equilibrium Equation) ประกอบด้วย

- สมการสมดุลย์(equilibrium equation) : $[\sigma_{ij} + h_i = 0]$
- สมการเขตจำกัดของหน่วยแรง(stress boundary) : $[T_i = \sigma_{ij}n_j]$

โดยสามารถสรุปความสัมพันธ์ในรูปเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$A^T \sigma = f \quad (3.1)$$

โดยที่ σ : เมตริกซ์ของความเค้น

f : เมตริกซ์ของแรงภายนอก(external force)

(2) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเคลื่อนตัว (Compatibility Equation)

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$$

โดยแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\epsilon = BU \quad (3.2)$$

โดยที่ ϵ : เมตริกซ์ของความเครียด
 U : เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัว
 B : เมตริกซ์ความเครียด-การเคลื่อนตัว (strain-displacement matrix)

ขั้นตอนการหาเมตริกซ์ความเครียด-การเคลื่อนตัว แสดงในหัวข้อ 3.1.4

(3) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Constitutive Equation)

สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอีลาสติกเชิงเส้น (linear elastic) และมีคุณสมบัติเดียวกันทุกทิศทาง (isotropic property)*

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

โดยแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\sigma = D \epsilon \quad (3.3)$$

โดยที่ D : เมตริกซ์ความสัมพันธ์ความเค้น-ความเครียด (constitutive matrix)

* สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอื่น สมการจะแตกต่างออกไปขึ้นกับแบบจำลอง (model) ที่ใช้จำลองพฤติกรรมของวัสดุนั้น

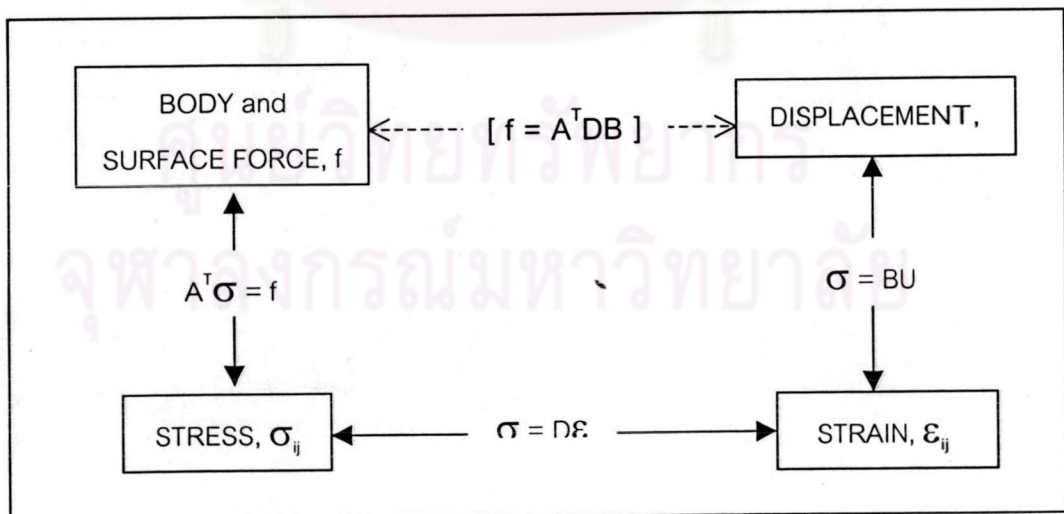
สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาใน 3 มิติ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

จากสมการความสัมพันธ์ทั้ง 3 สมการ สามารถสรุปได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของสมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการพิสูจน์ด้วยหลักการของงานเสมือน (principle of virtual work) สามารถพิสูจน์ได้ว่า $[A^T = B^T]$ ดังนั้นจากสมการ 3.1 ,3.2 และ 3.3 จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ และการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นที่จุดใดๆภายในชิ้นส่วน ดังนี้

$$[B]^T[D][B]dv \{U\} = \{F_n\} \quad (3.5)$$

โดยที่ [B] : เมตริกซ์ความเครียด-การเคลื่อนตัว (strain-displacement matrix)
 [D] : เมตริกซ์ความสัมพันธ์ความเค้น-ความเครียด(constitutive matrix)
 v : ปริมาตรของชิ้นส่วน
 {U} : เวกเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นของจุดต่อในทิศทาง x ,y ,z
 {F_n} : แรงกระทำที่เพิ่มขึ้นที่จุดต่อ

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$KU = R \quad (3.6)$$

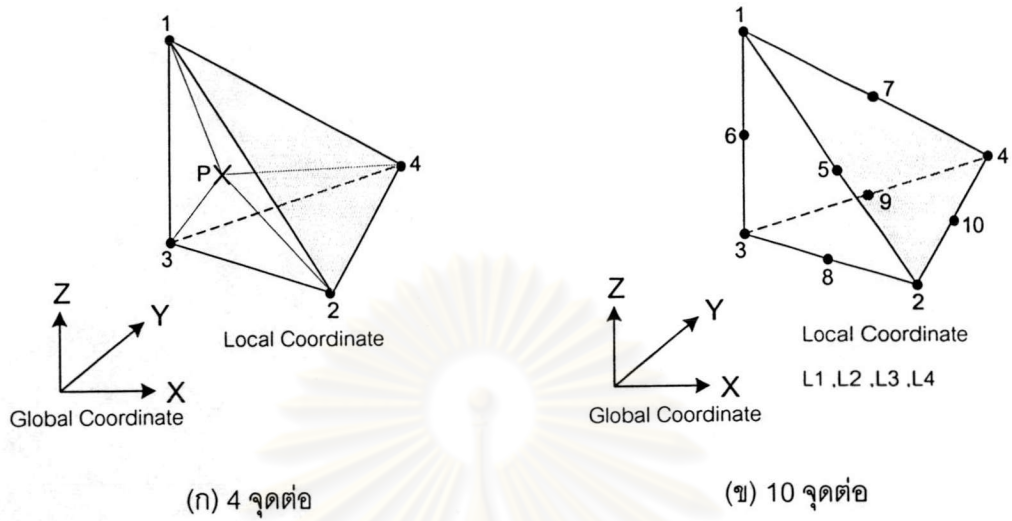
โดยที่ K = สติฟเนสเมตริกซ์ (stiffness matrix)
 = $[B]^T[D][B]$
 R = เวกเตอร์ของแรงกระทำ (load vector)

3.1.2 ระบบพิกัด(coordinate system)

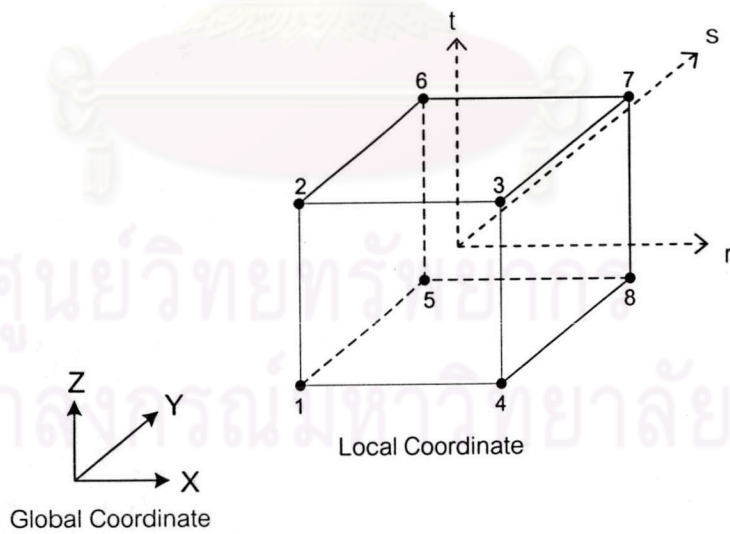
ชิ้นส่วนย่อย (element) ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย ชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน (Tetrahedron) 4 และ 10 จุดต่อ และ เฮกซะฮีดรอน(Hexahedron) 8 จุดต่อ โดยระบบพิกัดทั่วไป(Global Coordinate) ที่ใช้ คือพิกัดคาร์ทีเซียน(cartesian) x-y-z ขณะที่ระบบพิกัดเฉพาะที่(Local Coordinate) ที่ใช้ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น มีรายละเอียดดังนี้

(1) เตตระฮีดรอน(Tetrahedron)

ระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ที่ใช้ เป็นระบบพิกัดเชิงปริมาตร (volume coordinate) ซึ่งนิยามได้ว่าเป็นสัดส่วนของปริมาตรของชิ้นส่วนที่แบ่งโดยจุด P ดังรูป 3.2(n)



รูปที่ 3.2 แผนภาพแสดงระบบพิกัด และการจัดเรียงจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยชนิด เตตระฮีดรอน



รูปที่ 3.3 แผนภาพแสดงระบบพิกัด และการจัดเรียงจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยชนิด เฮกซะฮีดรอน

$$\text{โดยที่ } L_1 = \frac{\text{volumn.P234}}{\text{volumn1234}}$$

$$L_2 = \frac{\text{volumn.P134}}{\text{volumn1234}}$$

$$L_3 = \frac{\text{volumn.P124}}{\text{volumn1234}}$$

$$L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$$

โดยค่าพิกัดเฉพาะที่ ที่จุดต่อ แสดงได้ดังตารางที่ 3.1 โดยจุดต่อ(node) ที่ 5 ถึง 10 แสดงไว้สำหรับกรณีชิ้นส่วนชนิด 10 จุดต่อเท่านั้น

ตารางที่ 3.1 พิกัดของจุดต่อของชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน ในระบบพิกัดเฉพาะที่

Node	L_1	L_2	L_3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0	0	0
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{2}$	0	0
9	0	$\frac{1}{2}$	0
10	0	0	$\frac{1}{2}$

(2) เฮกซะฮีดรอน(Hexahedron)

ระบบพิกัดเฉพาะที่ใช้ระบบพิกัดฉาก r-s-t (ดังรูปที่ 3.3) ที่ปรับขนาดให้ใช้ขอบเขตเดียวกันทุกชิ้นส่วน ค่าพิกัดที่จุดต่อแสดงได้ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 พิกัดของจุดต่อของชิ้นส่วนแยกเซฮีดรอน ในระบบพิกัดเฉพาะที่

Node	r	s	t
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1
4	+1	-1	-1
5	-1	+1	-1
6	-1	+1	+1
7	+1	+1	+1
8	+1	+1	-1

3.1.3 ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function)

ในขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองเพื่อการประมาณค่าของตัวแปรพื้นฐานในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งสำหรับในการวิเคราะห์ปัญหาหน่วยแรง และการเคลื่อนตัว (stress-deformation analysis) ตัวแปรพื้นฐานดังกล่าว คือ ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ (displacement)

การประมาณค่าการกระจายของการเคลื่อนตัวภายในชิ้นส่วนย่อย จะใช้ฟังก์ชันการแปลง (interpolating function) หรือ ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ซึ่งกำหนดโดยสมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$u = \langle N \rangle \{U\} \quad (3.7)$$

$$v = \langle N \rangle \{V\} \quad (3.8)$$

$$w = \langle N \rangle \{W\} \quad (3.9)$$

โดยที่ u, v, w : ค่าการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆภายในชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y, z
ตามลำดับ

$\{U\}, \{V\}, \{W\}$: ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ ของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y, z
ตามลำดับ

$\langle N \rangle$: ฟังก์ชันรูปร่าง ซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ (local coordinate) ที่ตำแหน่งใดๆภายในชิ้นส่วน โดย $N = f(r,s,t)$

นอกจากนี้ สำหรับในกรณีที่ชิ้นส่วนมีคุณสมบัติเป็นไอโซพารามेटริก (Isoparametric : Ergatoudis et al., 1968; Zienkiewicz et al., 1969) จะสามารถใช้ฟังก์ชันรูปร่างในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไป และพิกัดเฉพาะที่ ดังสมการ

$$x = \langle N \rangle \{X\} \quad (3.10)$$

$$y = \langle N \rangle \{Y\} \quad (3.11)$$

$$z = \langle N \rangle \{Z\} \quad (3.12)$$

โดยที่ x, y, z : พิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ที่จุดใดๆภายในชิ้นส่วน ซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ ผ่านทางฟังก์ชันรูปร่าง
 $\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$: พิกัดทั่วไปที่จุดต่อทุกจุดของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

โดยฟังก์ชันรูปร่างสำหรับชิ้นส่วนชนิดต่างๆ ที่ใช้ในงานวิจัย แสดงได้ดังนี้

(1) เตะระฮีดรอน 4 จุดต่อ

$$\langle N \rangle = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4] \quad (3.13)$$

(2) เตะระฮีดรอน 10 จุดต่อ

$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} (2L_1-1)L_1 \\ (2L_2-1)L_2 \\ (2L_3-1)L_3 \\ (2L_4-1)L_4 \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_1L_3 \\ 4L_1L_4 \\ 4L_2L_4 \\ 4L_3L_4 \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

(2) เวกเซอร์ฮีดรอน 8 จุดต่อ

$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} 1/8(1-r)(1-s)(1-t) \\ 1/8(1-r)(1-s)(1+t) \\ 1/8(1+r)(1-s)(1+t) \\ 1/8(1+r)(1-s)(1-t) \\ 1/8(1-r)(1+s)(1-t) \\ 1/8(1-r)(1+s)(1+t) \\ 1/8(1+r)(1+s)(1+t) \\ 1/8(1+r)(1+s)(1-t) \end{bmatrix}^T \quad (3.15)$$

3.1.4 การวิเคราะห์ค่าเมตริกความเครียด-การเคลื่อนตัว (Strain-Displacement Matrix)

ค่าของเมตริกความเครียด-การเคลื่อนตัว หรือ เมตริกซ์ B คำนวณได้จากสมการ

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$$

หรือ
$$\epsilon = Ae \quad (3.16)$$

ในกรณีของการวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าว ในรูปเมตริกซ์ โดยความเค้นเฉือนแสดงในรูปของ engineering shear strain (γ) ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

โดย u, v และ w คือ การเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆในชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ จากการใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ทำให้สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนตัวที่จุดต่อของชิ้นส่วนกับความเครียด ซึ่งแสดงโดยสมการ $[\epsilon = BU]$ ได้ดังนี้

จากสมการ (3.17) เมื่อพิจารณาเฉพาะ ϵ_x จะได้ว่า

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x \quad (3.18)$$

จากสมการ (3.7) คือ $[u = \langle N \rangle \{U\}]$ จะได้ว่า

$$\epsilon_x = \partial / \partial x \langle N \rangle \{U\} \quad (3.19)$$

สำหรับกรณีชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน 4 จุดต่อ จะได้ว่า

$$\epsilon_x = \langle \partial N_1 / \partial x \quad \partial N_2 / \partial x \quad \partial N_3 / \partial x \quad \partial N_4 / \partial x \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่า ϵ ค่าอื่นๆ และสรุปสมการในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \hline U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \hline U_3 \\ V_3 \\ W_3 \\ \hline U_4 \\ V_4 \\ W_4 \end{Bmatrix}$$

ซึ่งคือสมการ $\epsilon = BU$

สำหรับกรณีชิ้นส่วนชนิดอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ได้ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณเป็นฟังก์ชันของพิกัดเฉพาะที่ (local coordinate) r, s, t ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณในพิกัดทั่วไป (global coordinate) ซึ่งจำเป็นในการหาค่าเมตริกซ์ B จึงต้องใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) แสดงดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial s} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial x} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial y} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

จากสมการ อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หาได้จากการอินเวิร์ท (invert) เมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) ซึ่งกำหนดโดย

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ค่าของเมตริกซ์จาโคเบียนสามารถหาได้โดยใช้คุณสมบัติของเมตริกซ์การประมาณ ในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไป และพิกัดเฉพาะที่ ดังสมการต่อไปนี้

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial s} \\ \frac{\partial \langle N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8 \rangle}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_8 & Y_8 & Z_8 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.1.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ขั้นตอนการอินทิเกรตที่ใช้ในการหาค่าสติเฟนสมเมตริกซ์ (matrix K) ซึ่งเป็นการอินทิเกรตเชิงปริมาตร ในงานวิจัยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยวิธีของ Gauss-Legendre ซึ่งหาค่าของฟังก์ชันที่พิกัดจุดใด ๆ ที่กำหนดภายในชิ้นส่วน ซึ่งเรียกว่า จุดเกาส์ (Gauss Point) หรือจุดอินทิเกรต (integration point) คูณกับแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (weighting factor) และหาผลการอินทิเกรตโดยทำการรวมผลคูณของแต่ละจุด แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

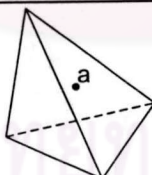
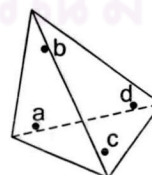
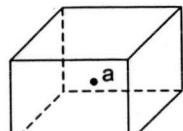
$$\iiint [B]^T [C] [B] dv \sim \sum_{i=1}^n [B_i]^T [C] [B_i] \det |J| w_{1i} w_{2i} w_{3i} \quad (3.24)$$

เมื่อ

i	=	จุดเกาส์ (Gauss Point)
n	=	จำนวนทั้งหมดของจุดเกาส์ภายในชิ้นส่วน
$\det J $	=	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จาโคเบียน
$w_{1i} w_{2i} w_{3i}$	=	แฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (weighting factor)

โดยจำนวนของจุดเกาส์ที่เลือกใช้ จะขึ้นกับชนิดของชิ้นส่วน ตารางที่ 3.3 แสดงรายละเอียดของจำนวนของจุดเกาส์ ตำแหน่ง และค่าของแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนักสำหรับชิ้นส่วนต่าง ๆ

ตารางที่ 3.3 จุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตเชิงตัวเลข

No.	Element Type	Figure	Points	Coordinates	$w_{1i} w_{2i} w_{3i}$
1	4-node Tetrahedron		a	$1/4, 1/4, 1/4, 1/4$	1
2	10-node Tetrahedron		a b c d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$1/4$
3	8-node Hexahedron		a	0, 0, 0	8

3.1.6 การวิเคราะห์หาค่าหน่วยแรงที่จุดต่อ (Nodal stress analysis)

ค่าหน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าไม่ต่อเนื่องบริเวณขอบของชิ้นส่วน และบริเวณจุดต่อ ซึ่งส่งผลให้การคำนวณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อ (nodal stress) เกิดความคลาดเคลื่อน โดยเฉพาะในบริเวณที่ค่าหน่วยแรงที่ความเปลี่ยนแปลงสูง

เนื่องจากค่าหน่วยแรงที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงสุด คือ ค่าหน่วยแรงที่บริเวณจุดเกาส์ ดังนั้นการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อใด ๆ จึงสามารถประมาณได้จากค่าหน่วยแรงที่จุดเกาส์รอบจุดต่อนั้น ซึ่งวิธีการวิเคราะห์ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ คือ วิธี Superconvergent Patch Recovery (SPR) ซึ่งเสนอโดย Zienkiewicz and Zhu (1992) ซึ่งเป็นวิธีปรับค่าหน่วยแรงเฉพาะที่ (local stress smoothing) โดยจะกำหนดบริเวณแพทช์ (patch) ซึ่งเป็นพื้นที่รอบ ๆ จุดต่อที่ต้องการประมาณค่าหน่วยแรง โดยขอบเขตพื้นที่จะขึ้นกับชนิดของชิ้นส่วน และตำแหน่งของจุดต่อ จากนั้นสมมติให้การกระจายของหน่วยแรงที่ปรับค่าแล้ว (smoothed stress, σ_p^*) ในบริเวณแพทช์ (patch) กำหนดโดยสมการพหุนามดังต่อไปนี้

$$\sigma_p^* = \langle P \rangle \{a\} \quad (3.25)$$

หรือ
$$\sigma_p^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots$$

โดยที่ $\langle P \rangle$: ฟังก์ชันพื้นฐาน (Base Function) ที่อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม $\langle 1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ \dots \rangle$

$\{a\}$: สัมประสิทธิ์ของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา

การหาค่าคงตัวของพหุนาม $\{a\}$ ทำโดยใช้หลักวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อให้ค่าของหน่วยแรงที่ประมาณแตกต่างจากค่าที่จุดเกาส์น้อยที่สุด โดยผลรวมของผลต่างระหว่างหน่วยแรงโดยประมาณและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ กำหนดโดยสมการ

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_n(x_i, y_i, z_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i, z_i))^2 \quad (3.26)$$

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_n(x_i, y_i, z_i) - [P(x_i, y_i, z_i)]\{a\})^2 \quad (3.27)$$

โดยที่ σ_n : หน่วยแรงที่จุดเกาส์

n : จำนวนจุดเกาส์ทั้งหมดในขอบเขตที่พิจารณา (patch)

การหาค่าคงตัวของพหุนาม ทำโดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของ $R(a)$ เทียบกับค่าคงตัว (a) มีค่าเป็นศูนย์จะได้ชุดของสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i, z_i)]^T [P(x_i, y_i, z_i)] \{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x_i, y_i, z_i) [P(x_i, y_i, z_i)]^T \quad (3.28)$$

หรือ $[A] \{a\} = \{b\}$

จะได้ $\{a\} = [A]^{-1} \{b\}$ (3.29)

สำหรับค่าของ $[P(x_i, y_i, z_i)]$ ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ ต่างกันไปขึ้นกับชนิดของชิ้นส่วน โดยพหุนามจะมีเทอมเท่ากับฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ของชิ้นส่วนนั้น ๆ ดังนี้

เตตระฮีดรอน 4 จุดต่อ $[P(x_i, y_i, z_i)] = [1, x, y, z]$

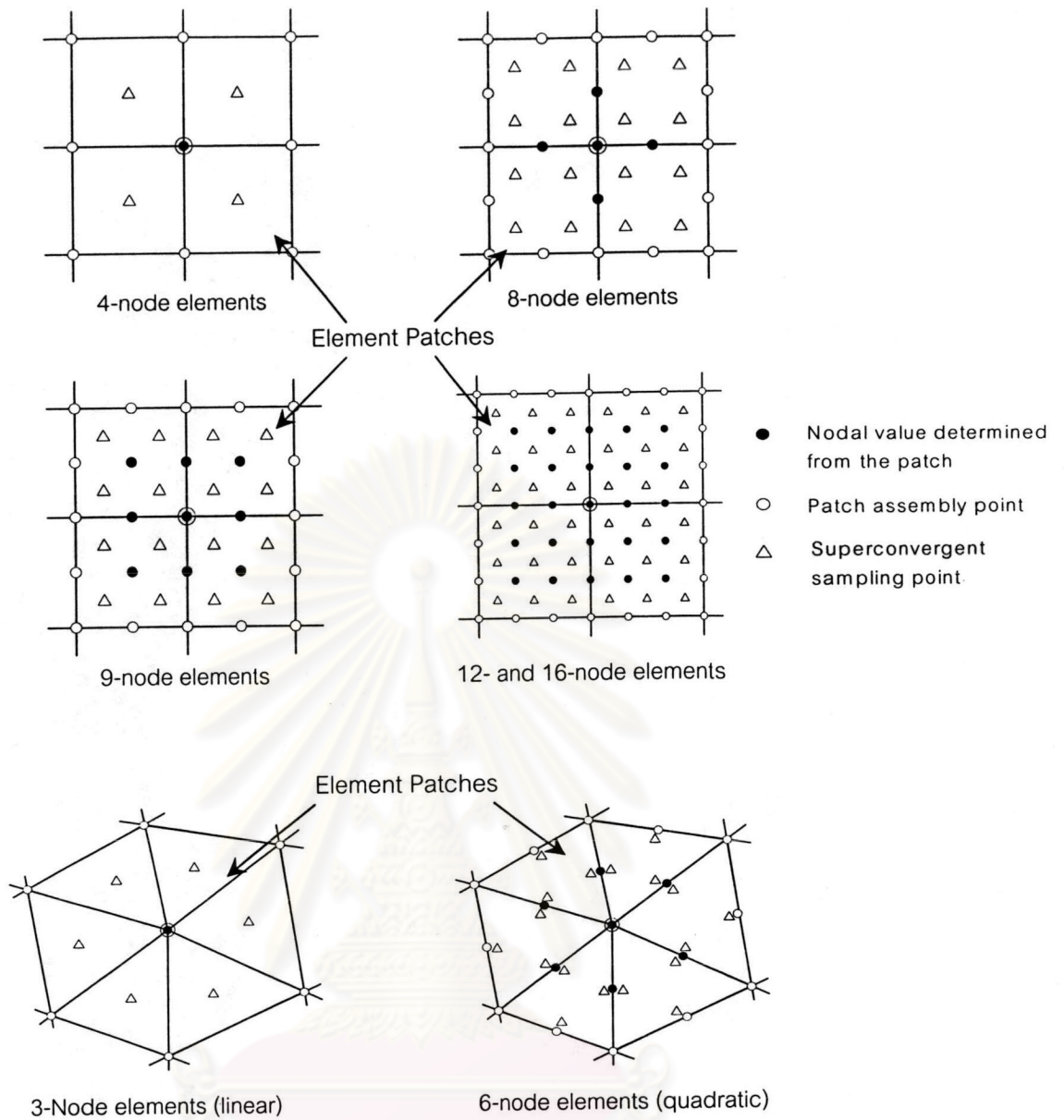
เตตระฮีดรอน 10 จุดต่อ $[P(x_i, y_i, z_i)] = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2]$

เฮกซะฮีดรอน 8 จุดต่อ $[P(x_i, y_i, z_i)] = [1, x, y, z, xy, yz, zx, xyz]$

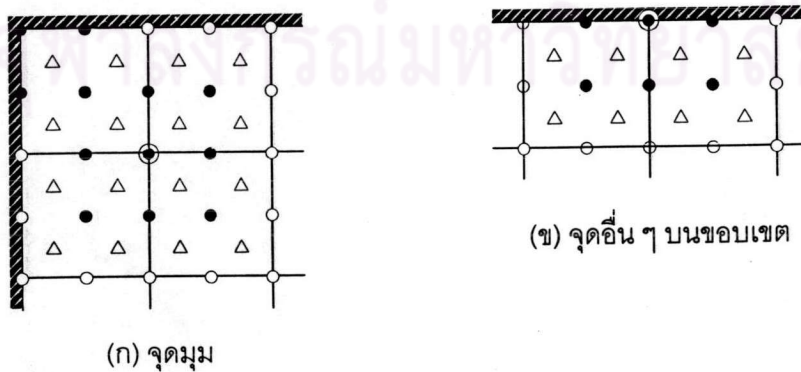
การเลือกบริเวณแพทช์ (patch) โดยทั่วไปจะใช้ชิ้นส่วนที่อยู่รอบ ๆ จุดต่อที่พิจารณา ดังแสดงตัวอย่างสำหรับชิ้นส่วน 2 มิติ ในรูปที่ 3.4 ซึ่งจุดแซมพลิง (sampling point) ที่แสดงในรูป ก็คือจุดเกาส์เดียวกันกับจุดเกาส์ที่ใช้ในการคำนวณตามทฤษฎี สำหรับจุดต่อที่อยู่บนขอบเขตของปัญหาจะจำนวนจุดเกาส์ที่อยู่รอบ ๆ จุดต่อจะไม่เพียงพอในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม $\{a\}$ จึงจำเป็นต้องขยายขอบเขตออกไปดังแสดงในรูปที่ 3.5 สำหรับในงานวิจัยนี้ ซึ่งปัญหาเป็น 3 มิติ จะประยุกต์ใช้แนวทางการเลือกบริเวณแพทช์ตามหลักการเดียวกันนี้ โดยรายละเอียดแสดงในหัวข้อ 3.3.3(3)

3.1.7 การประมาณความคลาดเคลื่อน (Error Estimation)

การประมาณความคลาดเคลื่อนของผลการวิเคราะห์ มีประโยชน์ในการพิจารณาปรับขนาดของชิ้นส่วน คือ เพื่อเพิ่มความละเอียดของชิ้นส่วนในบริเวณที่ความคลาดเคลื่อนสูง ในงานวิจัยนี้ ใช้การคำนวณหาความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง ซึ่งโดยทั่วไปจะคำนวณจากสมการ



รูปที่ 3.4 การเลือกบริเวณแพทช์ของจุดต่อที่อยู่ภายในขอบเขต สำหรับชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม(quadrilateral) และสามเหลี่ยม(Triangle)



รูปที่ 3.5 การเลือกบริเวณแพทช์ของจุดต่อที่อยู่บนขอบเขต สำหรับชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม(quadrilateral)

$$e_\sigma^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (3.30)$$

โดยที่ e_σ^* : ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
 σ^* : ค่าหน่วยแรงที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
 σ_h : ค่าหน่วยแรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

โดยในงานวิจัยนี้ กำหนดให้ ค่า σ^* คือ ค่าหน่วยแรงที่ได้จากการประมาณด้วยวิธี Superconvergent Patch Recovery (SPR) ซึ่งอธิบายไว้ในหัวข้อ 3.1.6

โดยทั่วไปเพื่อความสะดวกในการใช้ค่าความคลาดเคลื่อน มักแปลงค่าคลาดเคลื่อนที่แสดงในสมการ (3.30) ให้อยู่ในรูปของค่าสเกลาร์ ซึ่งมีหลายวิธี เช่น ในรูปของนอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน ดังสมการ (3.31)

$$\|e^*\| = \left(\int_{\Omega} e_\sigma^{*T} D^{-1} e_\sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

โดยที่ $\|e^*\|$: นอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน
 e_σ^* : เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
 D : เมตริกซ์ความสัมพันธ์ความเค้น-ความเครียด [$\sigma = DE$]
 Ω : โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือทั้งหมด (global)

นอกจากการคำนวณในรูปของนอร์มพลังงาน ยังสามารถแสดงในรูปอื่นที่คล้ายกันได้โดยในงานวิจัยนี้ เลือกการแสดงในรูปของ แอลทูนอร์ม (L_2 norm) ซึ่งตัดพจน์ของเมตริกซ์ D ออกไป ช่วยให้การคำนวณลดลง ดังสมการ (3.32)

$$\|e^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} e_\sigma^{*T} e_\sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

โดยที่ $\|e^*\|_2$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อน

เมื่อนำค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ จากสมการ (3.32) มาเปรียบเทียบกับ แอลทูนอร์มของหน่วยแรง ในสมการ (3.33) จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) ดังสมการ (3.35)

$$\|U^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

$$\|U\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^T \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2} \quad (3.34)$$

$$\eta = \frac{\|e\|_2}{\|U\|_2} \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|_2}{\sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2}} \quad (3.35)$$

โดยที่ $\|U^*\|_2$: แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากการประมาณด้วยวิธี SPR
 $\|U\|_2$: แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากการผลเฉลยแบบแม่นยำ
 η : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error)

โดยทำการคำนวณความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เฉพาะที่ (local) สำหรับแต่ละชิ้นส่วน จะได้การกระจายของความคลาดเคลื่อนในโครงข่ายนั้น ๆ และคำนวณความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ทั้งหมด (global) เพื่อเปรียบเทียบกับค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ โดยรายละเอียดแสดงในหัวข้อ 3.3.3

3.1.8 แบบจำลองพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นของวัสดุ (Material Nonlinearity Model)

โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้ สามารถกำหนดพฤติกรรมของวัสดุได้ทั้งกรณีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น หรือแบบอิลาสติก และพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้น โดยกำหนดพฤติกรรมของดินเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ (Elastic-perfectly plastic) ภายใต้กฎการวิบัติแบบมอร์-คูลอมป์ โดยกำหนดให้พื้นผิวคราก (yield surface) เป็นพื้นผิวเดียวกับพื้นผิววิบัติ (failure surface) โดยแสดงพื้นผิวดังกล่าวในระบบแกนของหน่วยแรงหลัก (principle stress space) ดังรูปที่ 3.6

วิธีการที่เลือกใช้ในการจำลองพฤติกรรมพลาสติกของวัสดุในงานวิจัยนี้ คือ วิธีสติฟเนสคงที่ (constant stiffness method) ซึ่งจะใช้การคำนวณซ้ำ (iteration) เมื่อในระบบเกิดจุดที่มีหน่วยแรงอยู่บน หรือภายนอกพื้นผิววิบัติ ($F \geq 0$) โดยแต่ละรอบการคำนวณจะกระจายค่าหน่วยแรงที่เกินนั้นไป

ยังบริเวณใกล้เคียง ด้วยการสมมติแรงกระทำที่จุดต่อขึ้นมาใหม่ชุดหนึ่ง เรียกว่า บอดีโหลด (body-loads) ซึ่งแรงกระทำชุดนี้จะต้องสมดุลย์ในตนเอง (self equilibrating) เพื่อที่จะไม่เปลี่ยนค่าแรงภายนอกรวม (net load) ในระบบ โดยในแต่ละรอบจะเปลี่ยนค่าเวกเตอร์ของแรงกระทำ (load vector) ซึ่งคือ เวกเตอร์ R ในสมการ $KU=R$ ด้วยการรวมบอดีโหลดเข้าไปด้วย ในขณะที่สตีฟเนสเมตริก K (ซึ่งโดยทั่วไปใช้อิลาสติคสตีฟเนสเมตริก) ไม่เปลี่ยนแปลง โดยจะทวนซ้ำการคำนวณจนกว่า ค่าหน่วยแรงทุก ๆ จุดไม่ฝ่าฝืนขอบเขตวิบัติที่กำหนดเกินกว่าค่าต่างที่กำหนด (tolerance) วิธีสตีฟเนสคังที่สามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.7

3.1.8.1 สมการพื้นฐานที่ใช้ในวิธีสตีฟเนสคังที่

ในการเพิ่มแรงกระทำ (load increment) ในแต่ละรอบการคำนวณ จะได้

$$K\delta^i = p^i \quad (3.36)$$

โดยที่ K : สตีฟเนสเมตริกทั้งระบบ (Global stiffness matrix)

δ^i : ค่าการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้น

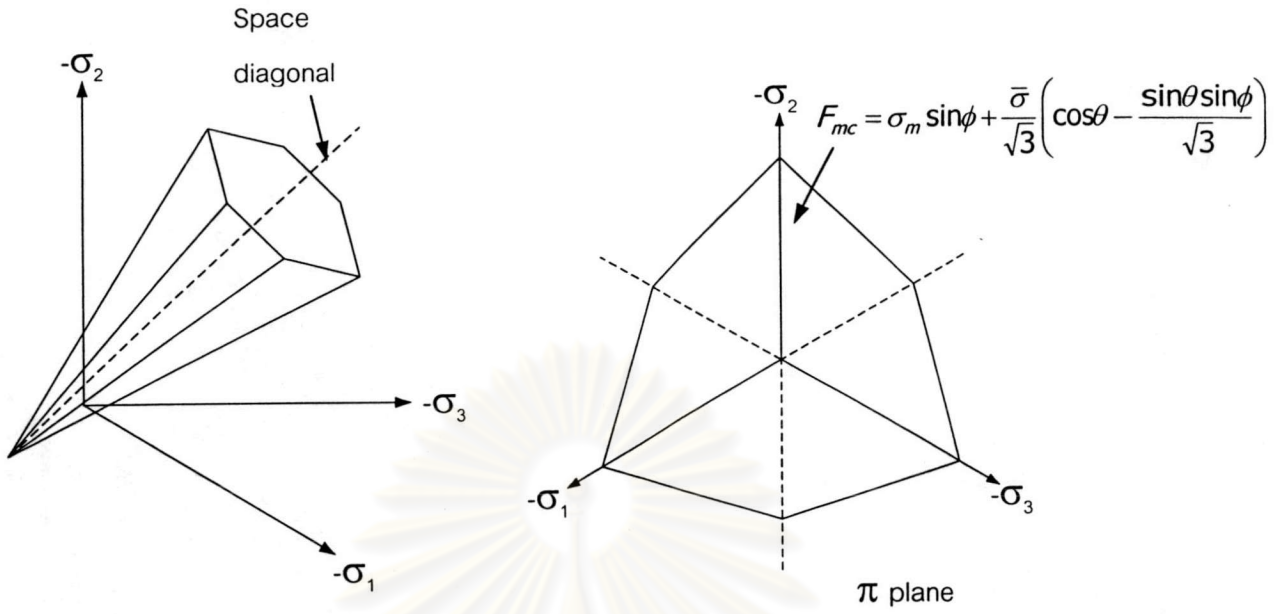
p^i : แรงกระทำภายนอก และภายใน

จากนั้นหาการเคลื่อนตัวเฉพาะที่ขึ้นส่วนใด ๆ u^i จาก δ^i จะสามารถหาค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นทั้งหมด (total strain increment) จากสมการ

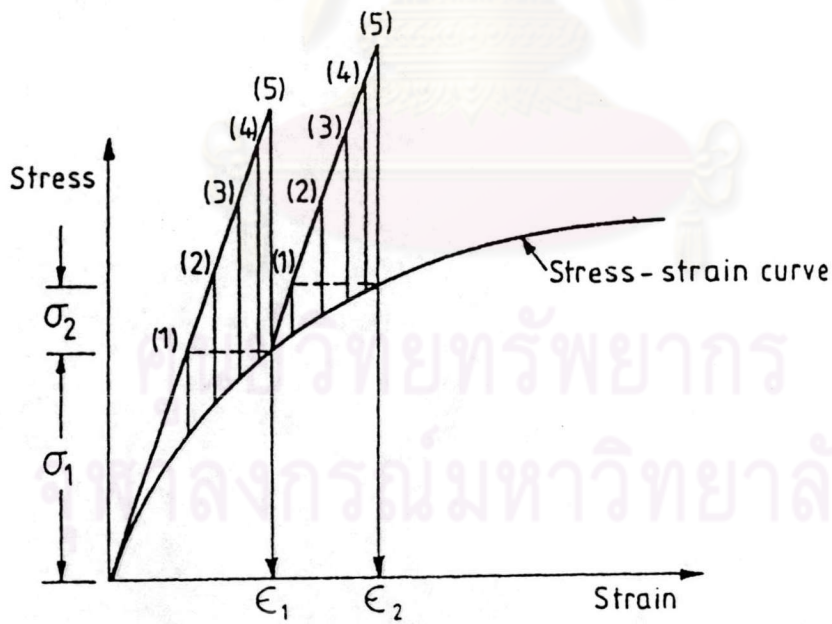
$$\Delta\varepsilon^i = Bu^i \quad (3.37)$$

ในกรณีที่ขึ้นส่วนมีหน่วยแรงถึงจุดคราก(yield) ความเครียดจะสามารถแบ่งออกเป็นความเครียดอีลาสติค และพลาสติก ดังสมการ

$$\Delta\varepsilon^i = (\Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p)^i \quad (3.38)$$



รูปที่ 3.6 พื้นผิววิบัติในกรณีกฎการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์



รูปที่ 3.7 แผนภาพแสดงการคำนวณด้วยวิธีสติฟเนสคงที่

โดยความเครียดอีลาสติกเป็นความเครียดเดียวที่ก่อให้เกิดหน่วยแรง ดังสมการ

$$\Delta\sigma^i = D^e(\Delta\varepsilon^e)^i \quad (3.39)$$

นำหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้นนี้ เพิ่มเข้าไปในหน่วยแรงจากระดับการเพิ่มแรง (load step) ที่ผ่านมา แล้วตรวจสอบกับกฎการวิบัติที่ใช้ ถ้าตกนอกขอบเขต คือ $F \geq 0$ จำเป็นต้องมีการกระจาย (redistribution) หน่วยแรง จะทำโดยปรับค่า p^i ในสมการ (3.30) โดย

$$p^i = p_a + p_b^i \quad (3.40)$$

โดยที่ p_a : แรงกระทำเพิ่มแท้จริง
 p_b^i : บอดีโหลด(body-loads)ซึ่งเปลี่ยนค่าในแต่ละรอบการคำนวณ

ในงานวิจัยนี้ หากค่าบอดีโหลดด้วยวิธีวิสโคพลาสติกซิตี (visco-plasticity) มีรายละเอียดดังแสดงในหัวข้อต่อไปนี้

3.1.8.2 การหาค่าบอดีโหลดด้วยวิธีวิสโคพลาสติกซิตี (visco-plasticity)

วิธีวิสโคพลาสติกซิตี ยอมให้ค่าหน่วยแรงที่ฝ่าฝืนกฎการวิบัติ อยู่นอกขอบเขตการวิบัติ (failure criterion) ในช่วงระยะเวลา (period) หนึ่ง ส่วนของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นกว่าขอบเขตวิบัตินี้ คือ ส่วนอินทิเกรตในสมการ ซึ่งเป็นส่วนสำคัญที่ใช้ในขั้นตอนการคำนวณในแต่ละรอบ

ในที่นี้ ความเครียดพลาสติก (plastic strain) เสนอให้ใช้เป็น ความเครียดวิสโคพลาสติก (visco-plastic strain) ε^{VP} แทน โดย ε^{VP} จะเพิ่มขึ้นในอัตราที่สัมพันธ์กับปริมาณการฝ่าฝืนขอบเขตวิบัติ ดังสมการ

$$\dot{\varepsilon}^{VP} = F \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3.41)$$

โดยที่ $\dot{\varepsilon}^{VP}$: อัตราการเพิ่มขึ้นของความเครียดวิสโคพลาสติก ε^{VP}

การเพิ่มขึ้นของความเครียดวิสโคพลาสติก หาได้จากสมการ

$$(\delta \varepsilon^{VP})^i = \Delta t (\dot{\varepsilon}^{VP})^i \quad (3.42)$$

$$\text{และ} \quad (\Delta \varepsilon^{VP})^i = (\Delta \varepsilon^{VP})^{i-1} + (\delta \varepsilon^{VP})^i \quad (3.43)$$

โดยที่ "time step" Δt ในกรณีใช้กฎการวิบัติแบบมอร์-คูลอมบ์ จะได้

$$\Delta t = \frac{4(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-2\nu+\sin^2 \phi)} \quad (3.44)$$

จากสมการ (3.35) อนุพันธ์ของ plastic potential function Q สามารถพิสูจน์ด้วยกฎลูกโซ่ (chain rule) ดังนี้

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (3.45)$$

โดย $J_3 = 1/2t^2$ เมื่อนำค่า $\frac{\partial Q}{\partial \sigma}$ ที่ได้จากสมการ (3.45) แทนในสมการ (3.41) จะได้

$$\dot{\varepsilon}^{VP} = F(DQ1 M^1 + DQ2 M^2 + DQ3 M^3) \sigma \quad (3.46)$$

โดยที่ $DQ1, DQ2, DQ3$: $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m}, \frac{\partial Q}{\partial J_2}, \frac{\partial Q}{\partial J_3}$ ตามลำดับ

M^1, M^2, M^3 : $\frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma}, \frac{\partial J_2}{\partial \sigma}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma}$ ตามลำดับ

บอดีไลต์ p_b^i คำนวณได้ดังสมการ (3.47) โดยจะสะสมค่าสำหรับแต่ละ "time step" ในแต่ละระดับการเพิ่มแรง ด้วยผลรวมของผลการอินทิเกรตจากทุกชิ้นส่วนที่มีจุดเกาส์ที่หน่วยแรงถึงจุดคราก ดังนี้

$$p_b^i = p_b^{i-1} + \sum_{element}^{all} [B^T D^e (\delta \varepsilon^{VP})] d(element) \quad (3.47)$$

โดยจะทวนซ้ำการคำนวณโดยปรับค่าแรงกระทำด้วย p_b^i จนกว่าค่าหน่วยแรงทุก ๆ จุดไม่ฝ่าฝืนขอบเขตวิบัติที่เกินกว่า ค่าต่างที่กำหนด (tolerance)

3.2 โปรแกรมพื้นฐานที่ใช้ในการพัฒนา

3.2.1 โปรแกรมวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐาน

โปรแกรมพื้นฐานที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ คือ โปรแกรมที่เสนอโดย Smith และ Griffiths (1999) เนื่องจากเป็นโปรแกรมที่มีขั้นตอนกระบวนการวิเคราะห์ที่ไม่ซับซ้อนยุ่งยาก เหมาะที่จะใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาในงานวิจัยต่อไป

Smith และ Griffiths (1999) ได้ให้ซอสโค้ด (source code) ไว้ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน 90 (Fortran 90) โดยงานวิจัยนี้เลือกใช้โปรแกรม 5.9 ซึ่งเป็นโปรแกรมวิเคราะห์วัสดุอีลาสติก ในปัญหา 3 มิติทั่วไป เป็นโปรแกรมหลักที่ใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนา และใช้โปรแกรม 6.8 ในส่วนการวิเคราะห์วัสดุที่มีพฤติกรรมแบบอีลาสติกโดพลาสติก โดยความสามารถเบื้องต้น ของโปรแกรมพื้นฐานที่มีก่อนการพัฒนาแสดงไว้ในหัวข้อ 3.3 ซึ่งแสดงรายละเอียดการพัฒนาโปรแกรม

3.2.2 โปรแกรมการสร้างโครงข่าย (Mesh generation program)

เนื่องจากการสร้างข้อมูลโครงข่ายของโครงสร้างใด ๆ ที่ต้องการ ซึ่งประกอบด้วย ข้อมูลพิกัดจุดต่อ (nodal coordinate data) และข้อมูลการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อ (connectivity data) เป็นหัวข้อสำคัญที่มีการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องเป็นจำนวนมาก สามารถแบ่งออกได้เป็นหลายแนวทาง และการจะพัฒนาโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างโครงข่ายต้องใช้เวลาในการศึกษา และพัฒนาโปรแกรมค่อนข้างมาก ดังนั้น ในงานวิจัยนี้ จึงเลือกที่จะใช้โปรแกรมสร้างโครงข่ายสำเร็จรูป ที่เป็นโปรแกรมซึ่งไม่มีเป้าหมายเพื่อการค้า (noncommercial program) โดยพบโปรแกรมที่เหมาะสม 2 โปรแกรม ดังนี้

(1) โปรแกรม GEOMPACK

โปรแกรมที่พัฒนาล่าสุด คือ GEOMPACK++ พัฒนาขึ้นโดย Barry Joe (2002) เป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างข้อมูลโครงข่ายสำหรับโครงสร้าง 2 มิติ , 3 มิติ และโครงข่ายของพื้นผิว (surface mesh) ได้ ชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นเป็น 'unstructured mesh' ทั้งชนิดเชิงเส้น (linear) และควอดราติก (quadratic) การใช้งานทำโดยระบุข้อมูลขอบเขตของโครงสร้าง ลงในแฟ้มข้อมูลขอบเขต (region file) และระบุรายละเอียด พารามิเตอร์ของเส้น และพื้นผิวแต่ละชนิดที่ระบุในแฟ้มข้อมูลขอบเขต ลงในแฟ้ม

ข้อมูลเส้น/พื้นผิว (curve/surface file) ผลการดำเนินการโปรแกรมเป็นข้อมูลโครงข่าย แสดงในแฟ้มข้อมูลโครงข่าย (mesh file) จากนั้น สามารถปรับปรุงโครงข่ายได้ด้วยโปรแกรมย่อยปรับขนาดของชิ้นส่วน (mesh refinement subroutine) โดยข้อดี และข้อจำกัดของโปรแกรมสามารถสรุปได้ดังนี้

ข้อดีของโปรแกรม

- (ก) สามารถสร้างชิ้นส่วนได้หลายชนิด เช่น สำหรับชิ้นส่วน 3 มิติ สามารถสร้างได้ทั้งชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน 4 และ 10 จุดต่อ และ ชิ้นส่วนเฮกซะฮีดรอน 8 และ 20 จุดต่อ
- (ข) มีโปรแกรมย่อยปรับขนาดของชิ้นส่วน (mesh refinement subroutine)

ข้อจำกัดของโปรแกรม

- (ก) รูปแบบของโปรแกรมเป็นโปรแกรมดำเนินการในรูป *.exe ซึ่งการใช้งานต้องดำเนินการในระบบปฏิบัติการ DOS ไม่มี Graphic User Interface (GUI)
- (ข) การสร้างแฟ้มข้อมูลขอบเขต (region file) มีความซับซ้อนสูง ต้องการความรู้ความเข้าใจ และความระมัดระวังเป็นอย่างสูงในการป้อนค่าจุด เส้น วงรอบ (loop) พื้นผิว (surface) และขอบเขตปริมาตร (region) การระบุลำดับที่เครื่องหมาย ชนิด คลาดเคลื่อนจะทำให้การดำเนินการโปรแกรมมีปัญหาทันที
- (ค) การระบุขนาดของโครงข่ายทั้งหมด จะระบุด้วยค่าเพียงค่าเดียว ซึ่งเป็นค่าอัตราส่วนกับขนาดด้านของขอบเขต นั่นคือถ้าขอบเขตแคบ ชิ้นส่วนจะมีความละเอียดสูง ทำให้ไม่สามารถระบุขนาดของชิ้นส่วนในแต่ละบริเวณ ได้อย่างอิสระ
- (ง) โปรแกรมย่อยปรับขนาดของชิ้นส่วนที่มีอยู่ไม่สามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากต้องกำหนดหมายเลขของชิ้นส่วนที่ต้องการทำให้ละเอียดขึ้นทุกชิ้นส่วน ทำให้ยุ่งยากในการทำงาน

(2) โปรแกรม GMSH

โปรแกรมถูกพัฒนาขึ้นโดย Remacle และ Geuzaine (2003) โปรแกรมยังได้รับการพัฒนาอยู่ตลอดเวลา โดยโปรแกรมล่าสุด คือ GMSH-1.37 พัฒนาขึ้นในปี 2003 โปรแกรมมีความสามารถในการสร้างข้อมูลโครงข่าย โดยมีข้อดี และข้อจำกัดของโปรแกรม ดังนี้

ข้อดีของโปรแกรม

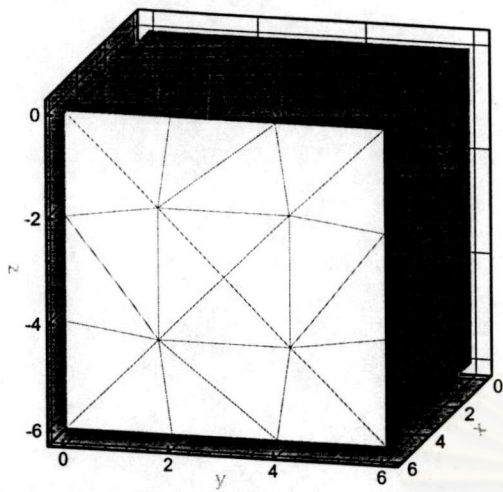
- (ก) การดำเนินการของโปรแกรมดำเนินการได้ในระบบปฏิบัติการ Windows โดยมี Graphic User Interface (GUI) ช่วยให้การป้อนข้อมูลขอบเขตโครงสร้างทำได้สะดวก ไม่ซับซ้อน
- (ข) การกำหนดขนาดของโปรแกรมทำได้สะดวก โดยการกำหนดค่า 'characteristic length' ซึ่งเป็นขนาดของชิ้นส่วนที่ต้องการ เข้าไปที่จุดใด ๆ ที่กำหนดเป็นขอบเขตของโครงสร้าง ทำให้สามารถเลือกความละเอียด หยาบ ของชิ้นส่วนในแต่ละพื้นที่ได้อย่างอิสระ และการปรับขนาดของชิ้นส่วนทำได้ง่าย โดยตัวอย่างการใช้ 'characteristic length' ปรับขนาดโครงข่าย แสดงดังรูปที่ 3.8

ข้อจำกัดของโปรแกรม

โปรแกรมสามารถสร้างได้เฉพาะชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน 4 จุดต่อเท่านั้น

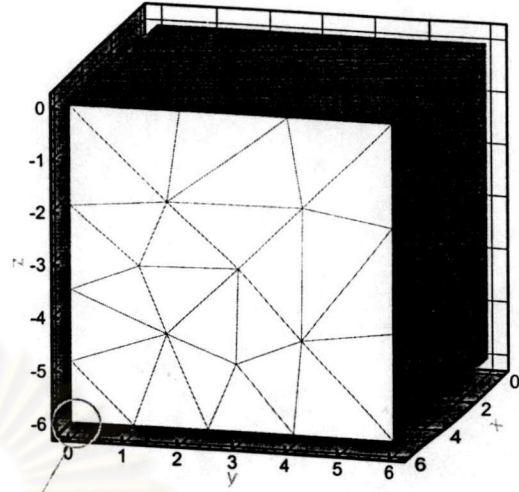
โดยการเรียงลำดับจุดต่อในชิ้นส่วนเตตระฮีดรอนจากโปรแกรมทั้งสองแสดงดังรูปที่ 3.9

เมื่อพิจารณาจากได้เปรียบ และข้อจำกัดของโปรแกรม จึงเลือกใช้โปรแกรม GMSH เป็นหลัก ในการสร้างโครงข่ายในงานวิจัย



characteristic length @ all vertex = 2

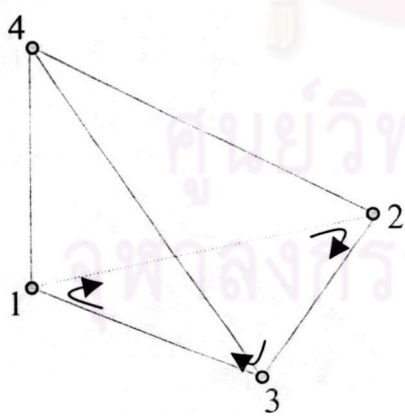
(ก) โครงสร้างก่อนการปรับขนาด



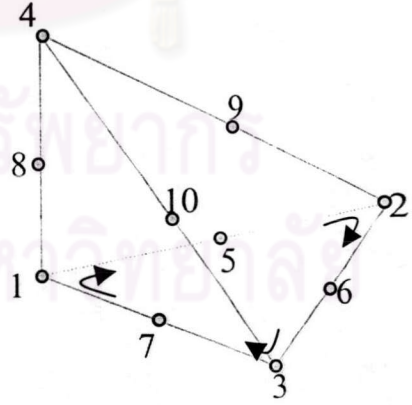
Assign characteristic length = 1

(ข) โครงสร้างหลังการปรับขนาดด้วย characteristic length

รูปที่ 3.8 ตัวอย่างการใช้ 'characteristic length' ปรับขนาดโครงข่ายด้วยโปรแกรม GMSH



(ก) ชั้นส่วนเตตระฮีดรอน 4 จุดต่อ



(ข) ชั้นส่วนเตตระฮีดรอน 10 จุดต่อ

รูปที่ 3.9 การจัดเรียงของจุดต่อของชั้นส่วนเตตระฮีดรอน จากโปรแกรม GEOMPACK และ GMSH

3.2.3 โปรแกรมที่ใช้ในการแสดงผลทางกราฟฟิกส์

ในงานวิจัยนี้ เลือกใช้โปรแกรม TECPLOT 8.0 ในการแสดงผลการดำเนินการของโปรแกรมในทางกราฟฟิกส์ โดยโปรแกรมมีความสามารถในการแสดงโครงข่ายทั้ง 2 และ 3 มิติ แสดงคอนทัวร์ และเวกเตอร์ของข้อมูล รวมถึงความสามารถในการสร้างภาพเคลื่อนไหว (animation)

3.3 การพัฒนาโปรแกรม

ในส่วนนี้ แสดงรายละเอียดขั้นตอน ในการพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์พฤติกรรมของเสาเข็มในงานวิจัยนี้ สำหรับส่วนที่มีในโปรแกรมพื้นฐานเดิม จะแสดงในเชิงเปรียบเทียบกับโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถสรุปขั้นตอนโดยแบ่งเป็นส่วนต่าง ๆ ได้ดังนี้

3.3.1 ส่วนพรีโพรเซสซิ่ง (Preprocessing)

ส่วนพรีโพรเซสซิ่ง ซึ่งเป็นส่วนการเตรียมข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ การพัฒนาโปรแกรมในส่วนนี้ ประกอบด้วย

(1) การสร้างโครงข่าย (Mesh generation)

โปรแกรมพื้นฐาน

ในกรณีปัญหา 3 มิติ การสร้างข้อมูลโครงข่าย สามารถเลือกได้ 2 วิธี คือ ป้อนเข้าโดยตรง โดยข้อมูลอาจได้จากโปรแกรมสร้างข้อมูลโครงข่ายอื่น ๆ หรือ สร้างจากโปรแกรมย่อย (Geometry Subroutine) ที่มีอยู่ในโปรแกรม โดยโปรแกรมย่อยนี้จะมีข้อจำกัด คือ สร้างได้เฉพาะชิ้นส่วนหกเหลี่ยม 8 จุดต่อ และ ไม่มีความสามารถในการปรับขนาดของชิ้นส่วน (mesh refinement)

การสร้างข้อมูลโครงข่ายของชิ้นส่วนหกเหลี่ยม 8 จุดต่อด้วยโปรแกรมย่อย จะทำโดยระบุขนาด และจำนวนของชิ้นส่วนในแต่ละแกน ซึ่งในแกนใด ๆ ขนาดของชิ้นส่วนเท่ากันตลอด รูปที่ 3.10 แสดงตัวอย่างการกำหนดขนาด (aa ,bb ,cc) และจำนวน (nxe ,nye ,nze) ชิ้นส่วนที่จำเป็น

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

พัฒนาโปรแกรมโดยสร้างทางเลือกในการสร้างโครงข่ายเป็น 3 วิธี

- (ก) ใช้โปรแกรมย่อยเดิมที่มีในโปรแกรมพื้นฐาน แต่พัฒนาให้มีความสามารถในการปรับขนาดของชิ้นส่วน (mesh refinement) โดยการกำหนดจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของขอบเขตรูปทรงสี่เหลี่ยม และทิศทาง (แกน x, y, z) ที่ต้องการเพิ่มความละเอียด จากนั้นโปรแกรมจะแบ่งครึ่งขนาดของชิ้นส่วนภายในขอบเขตและทิศทางที่ต้องการ ดังแสดงตัวอย่างสำหรับการปรับขนาดทั้ง 3 แกน ดังรูปที่ 3.11

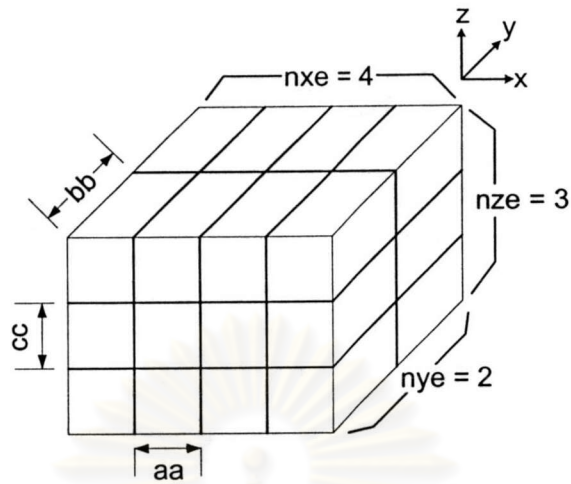
- (ข) สร้างโดยโปรแกรม GEOMPACK - ใช้ในการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วน เตตระฮีดรอน 4 และ 10 จุดต่อ

- (ค) สร้างโดยโปรแกรม GMSH - ใช้ในการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วน เตตระฮีดรอน 4จุดต่อเท่านั้น โดยมีลำดับการเรียงจุดต่อเช่นเดียวกับโปรแกรม GEOMPACK

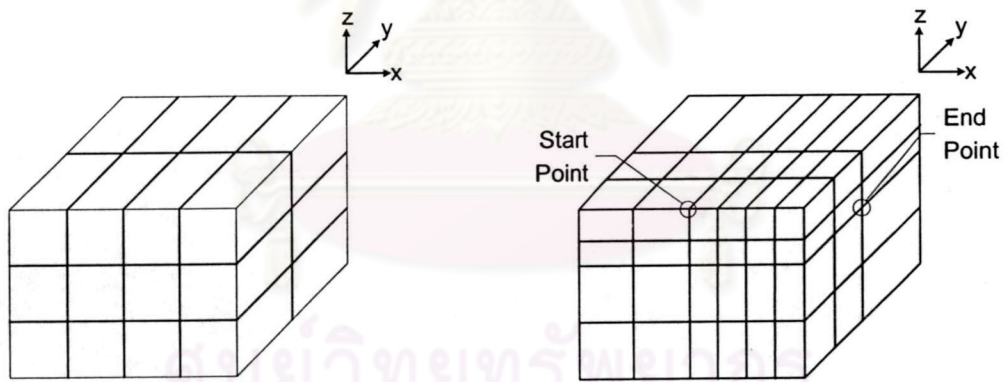
ผลจากการทดสอบประสิทธิภาพของการสร้างโครงข่ายในแต่ละวิธี สรุปได้ว่า

- (1) การใช้ชิ้นส่วน เฮกซะฮีดรอน 8 จุดต่อ มีข้อจำกัดจากโครงสร้างของชิ้นส่วนซึ่งเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม จึงไม่สามารถใช้สร้างโครงข่ายผิวโค้ง เช่น เสาเข็มกลม ได้ และในกรณีเสาเข็มสี่เหลี่ยม การปรับขนาดของชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กบริเวณใกล้เสาเข็ม เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดปัญหา non-conformity จะทำให้เกิดชิ้นส่วนที่มีรูปทรงแคบ และยาว (long narrow element) ในบริเวณห่างออกไปซึ่งเป็นชิ้นส่วนที่ให้คุณภาพในการวิเคราะห์ที่ไม่ดีนัก
- (2) การใช้ชิ้นส่วน เตตระฮีดรอน ในการสร้างโครงข่าย โดยสร้างเป็นโครงข่ายแบบอันสตรักเจอร์ (unstructured mesh) ทำให้มีอิสระในการสร้างโครงข่ายมากยิ่งขึ้น สามารถสร้างโครงข่ายเสาเข็มกลม และการกระจายขนาดชิ้นส่วนหลังการปรับขนาดมีความเหมาะสมยิ่งขึ้น

ด้วยประสิทธิภาพของโปรแกรม GMSH ซึ่งมีข้อดีกว่าโปรแกรม GEOMPACK ดังที่ระบุไว้ในหัวข้อ 3.2.2 เลือกใช้โปรแกรม GMSH เป็นโปรแกรมหลักในการสร้างโครงข่ายในวิทยานิพนธ์นี้



รูปที่ 3.10 ข้อมูลที่จำเป็นในการสร้างข้อมูลโครงข่ายด้วยโปรแกรมย่อยเดิม



(ก) ชั้นส่วนก่อนการปรับขนาด

(ข) ชั้นส่วนหลังการปรับขนาด

รูปที่ 3.11 การปรับขนาดชั้นส่วน ด้วยโปรแกรมย่อยที่พัฒนาขึ้น

และใช้ชิ้นส่วนแบบเตตระฮีดรอน 4 จุดต่อโดยลดปัญหาความคลาดเคลื่อนของชิ้นส่วนซึ่งมี degree ต่ำ โดยการลดขนาดของชิ้นส่วนลง

2) การป้อนข้อมูลคุณสมบัติของชิ้นส่วน (Element property data)

โปรแกรมพื้นฐาน

กำหนดคุณสมบัติต่าง ๆ กันไปในแต่ละชิ้นส่วน โดยกำหนดเลขแสดงชนิดของชิ้นส่วน (element type no.) และข้อมูลคุณสมบัติของชิ้นส่วนที่สัมพันธ์กัน แล้วจึงป้อนเลขดังกล่าวเข้าไปที่ชิ้นส่วนในแต่ละลำดับที่โดยตรง ดังตัวอย่าง สำหรับโครงข่ายที่มีชิ้นส่วน 8 ชิ้นส่วน ดังนี้

Element type No.	E	V						
1	3000	0.3						
2	400	0.5						
Element No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Element type no.	1	1	2	1	2	2	1	1

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัยนี้ปรับปรุง และ พัฒนาจนสามารถกำหนดเลขแสดงชนิดของชิ้นส่วน ได้อย่างรวดเร็วใน 3 ขั้นตอน คือ ระบุชนิดของขอบเขต ตำแหน่งและขนาดของขอบเขต และคุณสมบัติที่ต้องการกำหนดให้กับขอบเขตนั้น ๆ โดยชนิดของขอบเขตกำหนดให้มี 3 ทางเลือก ดังนี้

(ก) ทั้งหมด (whole) – กำหนดคุณสมบัติของทุกชิ้นส่วน

(ข) รูปทรงสี่เหลี่ยม (block) – โดย กำหนดจุดเริ่มต้น (x_1, y_1, z_1) และ จุดสุดท้าย (x_2, y_2, z_2) ของขอบเขต

(ค) รูปทรงกระบอก (cylinder) – โดย กำหนดจุดศูนย์กลาง (x_c, y_c) รัศมี (r) และความยาวทรงกระบอก (L) โดยเป็นทรงกระบอกแนวตั้งที่มีความยาวจาก $z=0$ ถึง $z=-L$

นอกจากนี้ทำการเพิ่มคุณสมบัติของวัสดุในส่วนของ ค่าความเชื่อมแน่น (cohesion intercept, c), มุมเสียดทานภายใน (angle of internal friction, ϕ), มุมไถลเฉือน (angle of dilation, φ), หน่วยน้ำหนัก (unit weigh, γ) และ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงดันดินสถิตย (coefficient of earth pressure at rest, k_0)

- (3) การป้อนข้อมูลการเคลื่อนตัวของจุดต่อบนขอบเขต (Nodal displacement boundary data)

โปรแกรมพื้นฐาน

เพื่อกำหนดให้ไม่มีการเคลื่อนตัวในทิศทางใด ที่จุดต่อใด โดยต้องระบุจุดต่อที่ต้องการ และกำหนดทิศทาง (x,y,z) ที่ต้องการให้ไม่เกิดการเคลื่อนตัว โดยทิศทางที่อิสระกำหนดเป็น 1 และทิศทางที่ต้องการจำกัด กำหนดเป็น 0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Node no.	x	y	z
1	0	0	1
5	0	1	1
8	1	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

พัฒนาโปรแกรมให้มีความสะดวกมากขึ้น โดยสามารถกำหนดจุดต่อ เส้น หรือ ระนาบที่ต้องการจำกัดการเคลื่อนตัวที่ พร้อมทั้งทิศทางที่ต้องการจำกัด โดยตัวอย่างการระบุค่าแสดงได้ ดังนี้

(ก) จุด(point) – เช่น $(x,y,z)=(5,5,-5)$ ในทิศทาง 0 0 0

(ข) เส้น(line) – เช่น $(x,y)=(5,5)$, $(y,z)=(5,-5)$, $(x,z)=(5,-5)$ ในทิศทาง 0 0 1

(ค) ระนาบ(plain) – เช่น $x=5$, $y=5$, $z=-5$ ในทิศทาง 1 0 1

(4) การป้อนข้อมูลแรงกระทำภายนอก (External load data)

โปรแกรมพื้นฐาน

กำหนดแรงกระทำภายนอกได้ในกรณีที่เป็นแรงในกระทำที่จุดต่อ(point load)เท่านั้น โดยระบุจุดต่อ และแรงกระทำในแกนใด ๆ (x,y,z) ที่จุดต่อนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Node no.	Nodal load		
	x	y	z
1	0.0	0.0	-0.5
4	0.0	0.0	-0.25
7	0.0	0.0	-0.5
⋮	⋮	⋮	⋮

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

พัฒนาความสามารถในการกำหนดแรงกระทำแผ่แบบสม่ำเสมอ (uniform load) ซึ่งกระทำที่ระดับผิวดิน สามารถกำหนดแรงกระทำได้ 2 ประเภท ประกอบด้วย

- (ก) แรงกระทำแบบสี่เหลี่ยม (square load) – โดยกำหนดจุดศูนย์กลาง และขนาดของแรงกระทำ ตามแกน x และ y
- (ข) แรงกระทำแบบวงกลม (circular load) – โดยกำหนดจุดศูนย์กลาง และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแรงกระทำ

นอกจากนี้ สามารถกำหนดทิศทางของแรงกระทำเริ่มต้น และแรงกระทำที่เพิ่มขึ้น (load increment) ในแต่ละรอบการคำนวณ ซึ่งจะใช้ประโยชน์ในกรณีที่พฤติกรรมของวัสดุ เป็นอิลาสโตพลาสติก

(5) การป้อนข้อมูลการเคลื่อนตัว

เป็นส่วนที่พัฒนาเพิ่มเติมขึ้นจากโปรแกรมเดิม เป็นการกำหนดเพื่อให้จุดต่อใด ๆ ที่ต้องการมีการเคลื่อนตัวในทิศทาง และค่าที่กำหนด ซึ่งเป็นประโยชน์ในกรณีที่พฤติกรรมของวัสดุ เป็นอิลาสโตพลาสติก เพื่อการเพิ่มแรงกระทำภายนอกแบบใช้การเพิ่มการเคลื่อนตัว(displacement control)

วิธีการกำหนดใช้ในรูปแบบเดียวกับการป้อนข้อมูลแรงกระทำภายนอก คือ กำหนดการเคลื่อนตัว(โดยทั่วไปเป็นการทรุดตัว) แบบสม่ำเสมอได้ทั้งแบบสี่เหลี่ยม และวงกลม รวมถึงการทรุดตัวที่เพิ่มขึ้น (displacement increment) ในแต่ละรอบการคำนวณ

3.3.2 ส่วนการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM Analysis)

(1) เพิ่มส่วนการวิเคราะห์ในกรณีวัสดุมีพฤติกรรมเป็นอีลาสโตพลาสติก

เพื่อให้มีความสามารถในการกำหนดให้วัสดุมีพฤติกรรมเป็นอีลาสโตพลาสติก โดยหลักการที่แสดงไว้ในหัวข้อ 3.1.8

(2) เพิ่มความสามารถในการกำหนดหน่วยแรงเริ่มต้น (Initial stress)

การกำหนดหน่วยแรงเริ่มต้น จำเป็นต่อการวิเคราะห์พฤติกรรมในกรณีกำหนดคุณสมบัติแบบอีลาสโตพลาสติก โดยในวิทยานิพนธ์นี้ กำหนดให้ที่ภาวะเริ่มต้น โครงสร้างของปัญหาอยู่ในสภาวะจีโอสแตติก (Geostatic condition) โดยกำหนดหน่วยแรงเริ่มต้นเข้าไปที่จุดเกาส์โดยตรง ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta h_i \quad (3.48)$$

$$\sigma_h = K_0 \sigma_v \quad (3.49)$$

เมื่อ

σ_v : หน่วยแรงเริ่มต้นในแนวตั้ง

σ_h : หน่วยแรงเริ่มต้นในแนวราบ

n : จำนวนชั้นของโครงสร้างที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน ซึ่งอยู่เหนือจุดเกาส์ที่พิจารณา

γ_i : หน่วยน้ำหนักของชั้น i ไต ๆ

Δh_i : ความหนาในแนวตั้งของชั้น i ไต ๆ

K_0 : ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงดันดินสถิตย์ (coefficient of earth pressure at rest)

(3) เพิ่มความเร็วในการวิเคราะห์

เวลาส่วนใหญ่ในการวิเคราะห์ปัญหา จะใช้ในการแก้สมการสมการไฟในดอีลิเมนต์พื้นฐาน คือ สมการ $[KU = R]$ ซึ่งเป็นการแก้ระบบสมการเชิงเส้น (Linear equations) โดยตัวแก้สมการ (Equation solver) เดิมของโปรแกรมพื้นฐาน ใช้ 'Gaussian factorization and substitution' ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient matrix) โดยเก็บข้อมูลสามเหลี่ยมล่าง (lower triangle) ของเมตริกซ์ตามสกายไลน์ (Sky line) เพื่อประหยัดพื้นที่การเก็บข้อมูล

อย่างไรก็ดี ตัวแก้สมการเดิมยังมีความเร็วที่จำกัด ในกรณีปัญหา 3 มิติซึ่งต้องการจำนวนชิ้นส่วน และจุดต่อมาก การวิเคราะห์จะใช้เวลานาน ทำให้การนำโปรแกรมที่สร้างขึ้นไปใช้ในทางปฏิบัติทำได้ยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้เปลี่ยนตัวแก้สมการ ให้เป็นตัวแก้สมการที่มีประสิทธิภาพ และความเร็วมากยิ่งขึ้น โดยเป็นหนึ่งในตัวแก้สมการที่มีอยู่ใน IMSL Math Library ซึ่งเป็นส่วนประกอบของโปรแกรม Fortran โดยวิธีการแก้สมการจะใช้ 'Cholesky factorization' ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) และมีคุณสมบัติเป็น positive definite การเก็บข้อมูลจะเก็บเฉพาะค่าที่ไม่เป็นศูนย์ของสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์ โดยการแก้สมการต้องใช้โปรแกรมย่อย 3 โปรแกรมประกอบกัน ประกอบด้วย

- โปรแกรมย่อย DLSCXD : ใช้เตรียมข้อมูลสำหรับ Cholesky factorization
- โปรแกรมย่อย DLNFXD : ทำ Cholesky factorization
- โปรแกรมย่อย DLFSXD : ใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ข้อมูลจากผลของ 2 โปรแกรมข้างต้น

ตารางที่ 3.4 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ระหว่างโปรแกรมพื้นฐาน และโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น จะเห็นว่าโปรแกรมพื้นฐานต้องใช้เวลาในการวิเคราะห์ปัญหาเดียวกันมากกว่าประมาณ 250-400 เท่า โดยโครงข่ายที่ใช้ในแต่ละปัญหา มีคุณสมบัติดังนี้

- เสาค้ำเดียว : 2,460 จุดต่อ และ 11,626 ชิ้นส่วน
- เสาค้ำ 4 ต้น : 3,615 จุดต่อ และ 19,904 ชิ้นส่วน
- เสาค้ำ 9 ต้น : 5,450 จุดต่อ และ 30,047 ชิ้นส่วน

โดยดำเนินการบนระบบคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

- CPU : Pentium IV 1.7 GHz
- Ram : 384 MB
- Hard Disk : 7,200 rpm

ตารางที่ 3.4 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา ระหว่างโปรแกรมพื้นฐาน และ โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น

ชนิดของปัญหา	เวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์		(1)/(2)
	โปรแกรมพื้นฐาน (1)	โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น (2)	
เสาเข็มเดี่ยว	4 นาที 48 วินาที	1.5 วินาที	190
เสาเข็ม 4 ต้น	36 ชั่วโมง 18 นาที	5 นาที 31 วินาที	400
เสาเข็ม 9 ต้น	8 วัน 20 ชั่วโมง	47 นาที 12 วินาที	270

3.3.3 ส่วนโพลโพรเซสซิง (Post-processing)

เป็นส่วนการวิเคราะห์ข้อมูลเพิ่มเติมโดยใช้ข้อมูลที่ได้จากผลการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ และนำเสนอข้อมูลต่าง ๆ ในรูปแบบที่เหมาะสม

(1) การนำเสนอข้อมูลโครงข่าย

โปรแกรมพื้นฐาน

แสดงในรูปของข้อมูล 2 ชุด คือ ข้อมูลพิกัดจุดต่อ (nodal coordinate data) และข้อมูลความเชื่อมต่อ (connectivity)

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

แสดงข้อมูลในเชิงกราฟฟิกซ์ โดยแสดงภาพของโครงข่ายที่สร้างขึ้นใน 3 มิติ และสามารถเปลี่ยนรายละเอียดภาพ และมุมมองต่าง ๆ โดยใช้ความสามารถของโปรแกรม TECPLOT

(2) การนำเสนอข้อมูลการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

โปรแกรมพื้นฐาน

แสดงค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ แต่ละจุดต่อ เป็นข้อมูลตัวเลข

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

แสดงค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ ในเชิงกราฟฟิก ในหลายรูปแบบ ประกอบด้วย

- (ก) แสดงโครงข่ายภายหลังการเคลื่อนตัว (deformed mesh)
- (ข) แสดงคอนทัวร์ของการเคลื่อนตัว (displacement contour)
- (ค) แสดงเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัว (displacement vector)
- (ง) แสดงค่าของเคลื่อนตัวที่จุดใด ๆ ที่กำหนด โดยคำนวณจากค่าของเคลื่อนตัวที่จุดต่อ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ในการประมาณ
- (จ) แสดงกราฟของเคลื่อนตัวตามแนวแกนใด ๆ ที่กำหนด

นอกจากนี้ ได้เพิ่มความสามารถในการแสดงภาพเคลื่อนไหว (Animation) เพื่อให้เห็นภาพการเคลื่อนตัวชัดเจนขึ้น

- (3) การนำเสนอข้อมูลหน่วยแรงที่จุดต่อ

โปรแกรมพื้นฐาน

โปรแกรมพื้นฐานเดิม ไม่สามารถแสดงค่าหน่วยแรงที่จุดต่อได้ โดยจะแสดงเฉพาะค่าหน่วยแรงที่จุดเกาส์ของแต่ละชิ้นส่วนเท่านั้น

โปรแกรมที่พัฒนาในงานวิจัย

ทำการหาค่าหน่วยแรงที่จุดต่อ โดยใช้วิธี Superconvergent Patch Recovery (SPR) ซึ่งมีหลักการดังแสดงในหัวข้อ 3.1.6 อย่างไรก็ตาม การประยุกต์ใช้หลักการนี้ใน 3 มิติ ปัญหาที่สำคัญที่สุด คือ การหาค่าหน่วยแรงของจุดต่อที่อยู่บนขอบเขต (on boundary) ซึ่งจำนวนของจุดเกาส์จากชิ้นส่วนที่อยู่รอบ ๆ จุดต่อนั้น ไม่เพียงพอต่อการหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม $\{a\}$ ในสมการ (3.29)

หลักการในการหาค่าหน่วยแรงของจุดต่อที่อยู่บนขอบเขตที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรม จะใช้การเลือกจุดต่อที่อยู่รอบ ๆ จุดต่อที่ต้องการ และใช้ชิ้นส่วนรอบ ๆ จุดต่อนั้นเป็นบริเวณแพทช์(patch) ซึ่งวิธีการเลือกจุดต่อจะขึ้นอยู่กับชนิดของชิ้นส่วน ในกรณีชิ้นส่วนเฮกซะฮีดรอน จะใช้จุดต่อใหม่เพียงจุดเดียว โดยจุดต่อนั้นต้องขยับออกจากจุดต่อเดิมโดยห่างจากขอบเขตในแนวฉากทุก ๆ ด้าน สำหรับกรณีชิ้นส่วนเตตระฮีดรอน จะใช้จุดต่อทุกจุดที่อยู่รอบ ๆ จุดต่อที่ต้องการ ในการหาบริเวณแพทช์

สำหรับการนำเสนอค่าหน่วยแรงที่จุดต่อ ในเชิงกราฟฟิกซ์ ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสรุปได้ดังนี้

(ก) แสดงคอนทัวร์ของการหน่วยแรง (stress contour)

(ข) แสดงค่าของหน่วยแรงที่จุดใด ๆ ที่กำหนด โดยใช้หลักการเดียวกันกับการหาค่าการเคลื่อนตัวที่จุดใด ๆ โดยประมาณจากค่าหน่วยแรงที่จุดต่อ ที่ได้จาก SPR

(ค) แสดงกราฟของหน่วยแรงตามแนวแกนใด ๆ ที่กำหนด

นอกจากนี้ ยังมีความสามารถแสดงการเพิ่มขึ้นของหน่วยแรงในแต่ละระดับของแรงกระทำภายนอก (โดยแสดงร่วมกับภาพเคลื่อนไหว (animation) ของโครงข่ายที่เกิดการเคลื่อนตัว

(4) การประมาณความคลาดเคลื่อน(error estimation)

เป็นส่วนที่เพิ่มเติมขึ้นมาในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น เพื่อให้สามารถทราบการกระจายของค่าคลาดเคลื่อน เพื่อใช้เป็นแนวทางการปรับขนาดของโครงข่าย โดยหลักการที่ได้เสนอไว้ในหัวข้อ 3.1.7

การประยุกต์ใช้หลักการดังกล่าวในการทำโปรแกรม เป้าหมายหลัก คือ การหาค่าแวลทูนอร์ม (L_2 norm) ของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ชิ้นส่วน $\|e^*\|_2$, และ ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error) η โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

$$\|U^*\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{nip} \sigma_i^{*T} \sigma_i^* \det J_i w_{1i} w_{2i} w_{3i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

$$\|e^*\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{nip} e_{\sigma_i}^{*T} e_{\sigma_i}^* \det J_i w_{1i} w_{2i} w_{3i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

$$\|U^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{nels} \|U^*\|_{2l,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$\|e^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{nels} \|e^*\|_{2l,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.51)$$

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|_{2g}}{\|U^*\|_{2g}} \quad (3.52)$$

โดยที่ $\|U^*\|_{2l}$: แอลทูนอร์มของหน่วยแรงเฉพาะที่ขึ้นส่วน

$\|e^*\|_{2l}$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ขึ้นส่วน

$\|U^*\|_{2g}$: แอลทูนอร์มของหน่วยแรงรวมทั้งโครงสร้าง

$\|e^*\|_{2g}$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนรวมทั้งโครงสร้าง

η : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์รวมทั้งโครงสร้าง

สำหรับการนำเสนอการกระจายของความคลาดเคลื่อนในเชิงกราฟฟิก จะแสดง
คอนทัวร์ของความคลาดเคลื่อนใน 3 มิติ โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนในแต่ละชั้นส่วน

3.3.4 การพัฒนา Graphic User Interface (GUI)

เพื่อปรับปรุงโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ให้มีความสะดวกต่อการใช้งานโดยผู้ใช้ทั่วไปมากยิ่งขึ้น จึงได้พัฒนาให้โปรแกรมสามารถป้อนข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และแสดงผลข้อมูลในรูปแบบที่ง่ายต่อการเข้าใจ และผู้ใช้รู้พื้นฐานทางวิศวกรรมโยธาสามารถศึกษา และนำไปใช้งาน หรือพัฒนาต่อไปได้โดยใช้เวลาไม่มากนัก จึงได้ทำการเพิ่มเติมส่วน Graphic User Interface (GUI) เข้าไว้ในโปรแกรม

โดย GUI ที่สร้างขึ้นนี้ เขียนขึ้นด้วยภาษา Visual Basic 6.0 เพื่อประโยชน์ในการรับข้อมูล และคำสั่งจากผู้ใช้ (user) แล้วส่งผ่านข้อมูลที่ได้ไปยังโปรแกรมวิเคราะห์ FEM หลัก ซึ่งเขียนด้วยภาษา Fortran 90 และแปลไว้ในรูป executable file (*.exe) เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหา และเขียนผลการวิเคราะห์ลงในแฟ้มต่าง ๆ แยกตามชนิดของผลที่แสดง ซึ่งผู้ใช้สามารถนำไปแสดงผลในรูปกราฟฟิกส์ผ่านโปรแกรมแสดงผล เช่น Tecplot ได้โดยตรง จากนั้นในกรณีที่ต้องการดึงข้อมูล หรือประมวลผลข้อมูล การแสดงผลในรูปแบบอื่น ๆ ต่อไป ผู้ใช้สามารถส่งผ่าน GUI ที่สร้างขึ้น ซึ่งจะส่งค่าตัวแปรไปยังโปรแกรมย่อยภาษา Fortran 90 ซึ่ง compile ในรูป Dynamic-link libraries (*.DLL) ซึ่งส่งผลกลับมาแสดงผลผ่าน GUI ได้โดยตรง โดยวิธีการใช้งานโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นผ่านทาง GUI แสดงรายละเอียดในภาคผนวก ข