

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง “การนำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ในช่วงชั้นที่ 4” ผู้วิจัยได้ศึกษาสาระการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ในช่วงชั้นที่ 4 โดยผู้วิจัยได้แบ่งสาระการเรียนรู้ ออกเป็นหน่วยการเรียนรู้ จำนวน 5 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

- หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 กราฟ
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ดีกรีของจุดยอด
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แนวเดิน
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 กราฟฮอยเลอร์
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 การประยุกต์ของกราฟ

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ในช่วงชั้นที่ 4 จำนวน 11 กิจกรรม ดังนี้

- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ความหมายของกราฟและส่วนประกอบของกราฟ
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เส้นเชื่อมขนานและวงวน
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 ประโยชน์ของกราฟและการแปลงปัญหาเป็นกราฟ
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4 ดีกรีของจุดยอด
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 5 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจุดยอด
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 6 แนวเดิน รอยเดิน วิธี วงจร และวัฏจักร
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 7 กราฟฮอยเลอร์
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 8 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟฮอยเลอร์
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 9 กราฟย่อย
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 10 กราฟถ่วงน้ำหนัก
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 11 กราฟต้นไม้ ต้นไม้แผ่ทั่ว และต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

ผู้วิจัยได้นำเสนอรายละเอียดของกิจกรรมการเรียนรู้ ตั้งแต่กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 – 11 ซึ่งในแต่ละกิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบไปด้วย ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ และการวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ความหมายของกราฟและส่วนประกอบของกราฟ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของกราฟได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถเขียนเซตของจุดยอด และเซตของเส้นเชื่อมของกราฟได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถวาดกราฟ เมื่อกำหนดส่วนประกอบของกราฟมาให้ได้อย่างถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถบอกนิยามของคำศัพท์ต่าง ๆ ของกราฟได้อย่างถูกต้อง
5. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบของกราฟได้อย่างถูกต้อง

สาระสำคัญ

บทนิยาม

กราฟ G ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G)$

บทนิยาม

จุดยอด u ประชิด (adjacent) กับจุดยอด v ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง

จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟเป็น จุดยอดประชิด (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อ จุด

ยอด u ประชิดกับจุดยอด v

เส้นเชื่อม e ของกราฟ เกิดกับ (incident) จุดยอด v ก็ต่อเมื่อ จุดยอด v เป็นจุดปลายจุด

หนึ่งของเส้นเชื่อม e

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 211-219

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูกล่าวนำเข้าสู่บทเรียนว่า “คณิตศาสตร์นั้นมีความจำเป็นในชีวิตประจำวัน เพราะว่าจริง ๆ แล้วเนื้อหาสาระในวิชาคณิตศาสตร์หลาย ๆ เรื่องนั้นถูกสร้างขึ้นมาเพื่อตอบปัญหา หรือแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันเรานั้นเอง เช่น เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เราจะเรียนต่อไป”

2. ครูกล่าวถึงสะพานคอนิกส์เบิร์ก (Königsberg) พร้อมกับใช้สื่อแผ่นโปสเตอร์รูปที่ 1 สะพานคอนิกส์เบิร์ก ประกอบการอธิบายเรื่องราวประวัติเกี่ยวกับสะพานแห่งนี้

3. ครูกล่าวถึงปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์กว่า “ปัญหาเกี่ยวกับสะพานคอนิกส์เบิร์กนี้เกิดจากคนที่ช่างสังเกต สังเกตสะพานทั้ง 7 นี้แล้วตั้งปัญหาเกี่ยวกับการเดินทางว่าเราสามารถข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์กทั้ง 7 สะพาน (ทุกสะพาน) โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงสะพานละครึ่ง แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้หรือไม่?” โดยใช้สื่อแผ่นโปสเตอร์รูปที่ 2 แสดงภาพปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก

4. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลองคิดประมาณ 1-2 นาที แล้วครูจึงให้นักเรียนตอบ ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องคือ “เป็นไปได้” จากนั้นตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนคิดต่อว่า “ทำไมจึงเป็นไปได้?” (แต่ครูยังไม่ตอบคำถามนี้)

5. ครูยกตัวอย่างรูป โดยใช้สื่อแผ่นโปสเตอร์รูปที่ 3 ที่มีความซับซ้อนกว่ารูปสะพานคอนิกส์เบิร์ก แล้วถามคำถามในลักษณะเดิมว่า “นักเรียนคิดว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะสามารถข้ามสะพานทุกสะพานโดยข้ามแต่ละสะพานเพียงสะพานละครึ่ง แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้น”

6. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนคิดประมาณ 1-2 นาที ซึ่งคำตอบของคำถามก็คือ “เป็นไปได้” ซึ่งครูถามต่อไปว่า “ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น” จากนั้นครูอธิบายต่อไปว่า “เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ได้คิดคำตอบของปัญหานี้พร้อมทั้งเหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งเราจะเรียนในบทต่อ ๆ ไป”

7. ครูเชื่อมโยงรูปจากรูปสะพานคอนิกส์เบิร์ก สู่ “กราฟ” โดยใช้สื่อแผ่นโปสเตอร์รูปที่ 4 พร้อมกับเล่าให้นักเรียนฟังว่า “ออยเลอร์ได้แปลงปัญหา (รูปภาพ) ให้เป็นลักษณะของกราฟ” แล้วครูใช้คำถามชี้แนะ เพื่อให้นักเรียนสังเกตและตอบคำถามที่ว่า “จุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟแทนอะไรในรูปของสะพานคอนิกส์เบิร์ก?”

8. ครูเชื่อมโยงแนวคิดของออยเลอร์เข้าสู่บทนิยามของกราฟ

9. ครูยกตัวอย่างที่ 1.1-1.2 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 214) พร้อมทั้งอธิบายอย่างละเอียด

10. ครูอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อสังเกตในการวาดกราฟ (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 215)

11. ครูอธิบายความหมายของคำศัพท์ต่าง ๆ ของกราฟ ได้แก่ จุดยอดประชิด (adjacent vertices), ประชิด (adjacent) และ เกิดกับ (incident) พร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 1.3 เพื่ออธิบายให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องคำศัพท์ต่าง ๆ มากยิ่งขึ้น

12. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนถามเกี่ยวกับบทนิยามของกราฟ และความหมายของคำศัพท์ที่นักเรียนยังสงสัยอยู่ จากนั้นลองสุ่มเรียกนักเรียนให้ยกตัวอย่างการใช้คำศัพท์โดยใช้กราฟจากตัวอย่างที่ 3

13. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับเรื่องกราฟ ความหมายของของกราฟ และคำศัพท์ที่เกี่ยวกับกราฟ จากนั้นครูให้นักเรียนทำเอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้แบบฝึกหัด 1.1 หน้า 216) เป็นการบ้าน

14. ครูบอกให้นักเรียนกลับไปทบทวนบทเรียนที่เรียนมาแล้ว เพราะคาบต่อไปจะมีการทำกิจกรรมเกมการแข่งขันกัน

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (คาบที่2)

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

16. ครูสุ่มเรียกนักเรียนให้ตอบคำถามเกี่ยวกับส่วนประกอบของกราฟ เพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนสนใจการทำกิจกรรม

15. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.1

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

17. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 8 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน โดยให้สมาชิกในกลุ่มมีความแตกต่างกันในด้านต่าง ๆ เช่น ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ เพศ เป็นต้น

18. จากนั้นให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มหาประธานกลุ่ม พร้อมทั้งตั้งชื่อกลุ่ม โดยประธานจะมีอำนาจในการตัดสินใจต่าง ๆ ของกลุ่ม

19. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละกลุ่มได้ทบทวนความรู้ที่เรียนมาในคาบที่แล้วประมาณ 5 นาทีก่อนดำเนินการทำกิจกรรมต่อไป

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

20. สำหรับกิจกรรมที่จะทำในคาบนี้ชื่อว่า “กิจกรรมเกมการออกคำสั่ง” (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในเอกสารการทำกิจกรรมและตัวอย่างกิจกรรมเกมการออกคำสั่ง)

21. ครูอธิบายเกี่ยวกับกิจกรรมเกมการออกคำสั่งให้นักเรียนฟัง พร้อมทั้งยกตัวอย่างการทำกิจกรรมให้นักเรียนฟัง โดยใช้สื่อแผ่นโป่งใส

22. เริ่มต้นผู้แข่งขันแต่ละคนจับบัตรคำคนละ 1 ใบ โดยพยายามอย่าให้ฝ่ายตรงข้ามเห็น บัตรคำที่มีอักษร v หมายถึงจุดยอด บัตรคำที่มีอักษร e หมายถึงเส้นเชื่อม บัตรคำนี้มีไว้เพื่อนำไปติดกับแผนภาพกราฟที่ครูจัดไว้แล้ว

23. สมาชิกในแต่ละกลุ่มดูบัตรคำของเพื่อนกลุ่มเดียวกัน (ห้ามแลกเปลี่ยนบัตรคำกัน) เพื่อจะได้ทราบบัตรคำของฝ่ายตรงข้าม ซึ่งก็คือบัตรคำที่ไม่ใช่ของสมาชิกในกลุ่ม

24. แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนเพื่อตกลงกันว่าฝ่ายใดจะเป็นคนออกคำสั่งก่อน

25. ให้ผู้แข่งขันเริ่มต้นออกคำสั่งให้ฝ่ายตรงข้ามสร้างกราฟ โดยใช้คำศัพท์ที่เกี่ยวกับกราฟ ได้แก่ จุดยอดประชิด, ประชิด และ เกิดกับ (ดูรายละเอียดในกติกาการออกคำสั่ง)

26. ผู้แข่งขันฝ่ายตรงข้ามจะต้องออกไปติดบัตรคำในแผนภาพที่ครูกำหนดให้ถูกต้องตามคำสั่งนั้น ๆ

27. ผู้แข่งขันที่ออกไปติดบัตรคำ จะกลายเป็นผู้ออกคำสั่งต่อไป

28. ผู้แข่งขันจะสลับกันออกคำสั่งและปฏิบัติตามจนครบทุกคน

29. ถ้าผู้แข่งขันติดบัตรคำถูกต้องตามคำสั่ง กลุ่มจะได้รับ 1 คะแนน แต่ถ้าผู้แข่งขันติดบัตรคำไม่ถูกต้อง กลุ่มจะไม่ได้รับคะแนน

30. ครูให้นักเรียนจับคู่แข่งขันกันทั้งหมด 3 รอบ โดยรอบที่ 1 ครูจับคู่แข่งขันกันแบบสุ่ม โดยการจับฉลาก ส่วนรอบที่ 2 และ 3 ครูจับกลุ่มแข่งขันกัน โดยให้กลุ่มที่มีคะแนนเท่ากัน (หรือใกล้เคียงกัน) จับคู่แข่งขันกัน

31. ในขณะที่ดำเนินกิจกรรมนั้นครูให้นักเรียนที่แข่งขันกันตัดสินกันเอง โดยครูมีหน้าที่เป็นกรรมการกลางคอยดูแลหรือตัดสินชี้ขาด เมื่อเกิดปัญหาที่นักเรียนไม่สามารถตัดสินเองได้

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

32. ครูและนักเรียนช่วยกันรวมคะแนน และสรุปผลการแข่งขันทั้ง 3 รอบ

33. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกพูดถึงเทคนิคในการแข่งขัน จุดเด่นและจุดด้อยของกลุ่มที่ทำให้กลุ่มชนะหรือแพ้

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

34. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการทำกิจกรรมเกมการออกคำสั่งครั้งนี้ ในด้านต่าง ๆ ได้แก่ ด้านความรู้ ด้านการแก้ปัญหา/การวางแผน ด้านการทำงานร่วมกัน ความรับผิดชอบ การให้ความร่วมมือ เป็นต้น

35. ครูแจกแบบสอบถามให้นักเรียนประเมินเพื่อนในกลุ่มเดียวกันในด้านต่าง ๆ ซึ่งเป็นการประเมินผู้เรียนโดยตัวผู้เรียนเอง

36. ครูประเมินการทำกิจกรรมของนักเรียนในแต่ละกลุ่มในด้านต่าง ๆ ได้แก่ ความรู้ ความกระตือรือร้น ความร่วมมือ ความคิดสร้างสรรค์

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

37. ครูและนักเรียนสรุปการทำกิจกรรม โดยครูเปรียบเทียบการทำกิจกรรมกับการทำงานต่าง ๆ นอกจากนักเรียนจะต้องมีความรู้ ความเข้าใจ เพื่อที่นักเรียนจะสามารถปฏิบัติตามคำสั่งได้ และนักเรียนจะต้องรู้จักประยุกต์ความรู้ เช่น การออกคำสั่งให้ฝ่ายตรงข้ามปฏิบัติได้ยาก และต้องรู้จักการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าต่าง ๆ ด้วย

38. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 1 เรื่องความหมายและส่วนประกอบของกราฟ พร้อมทั้งยกตัวอย่างเพิ่มเติม (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 217)

39. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ที่ได้รับจากการทำกิจกรรม และประโยชน์จากการทำกิจกรรม

40. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.2 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 219) เป็นการทำงาน

สื่อการเรียนรู้

1. แผ่นโป่งใสรูปที่ 1 (สะพานคอนกรีตเสริมเหล็ก)
2. แผ่นโป่งใสรูปที่ 2 (ปัญหาสะพานคอนกรีตเสริมเหล็ก)
3. แผ่นโป่งใสรูปที่ 3 (ปัญหาสะพานที่ซับซ้อน)
4. แผ่นโป่งใสรูปที่ 4 (กราฟของสะพานคอนกรีตเสริมเหล็ก)
5. แผ่นโป่งใส กติกาและตัวอย่างการทำกิจกรรมเกมออกคำสั่ง
6. แผนภาพกราฟและบัตรคำ (สำหรับทำกิจกรรมการออกคำสั่ง) จำนวน 4 ชุด (สำหรับผู้เรียน 8 กลุ่ม)
7. เอกสารใบความรู้ที่ 1.1 ความหมายและส่วนประกอบของกราฟ
8. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.1 ความหมายของกราฟ
9. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.2 คำศัพท์ของกราฟ

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากการทำตอบคำถาม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
3. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
จิตพิสัย
1. สังเกตจากการประเมินของเพื่อนในกลุ่ม
2. สังเกตจากแบบประเมินของครู
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

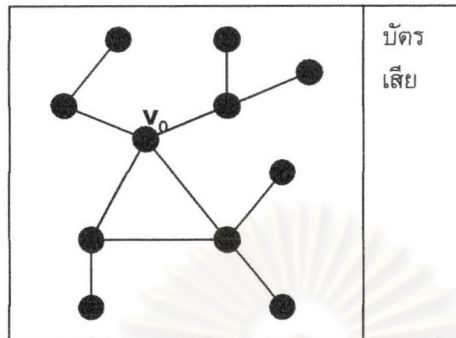
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

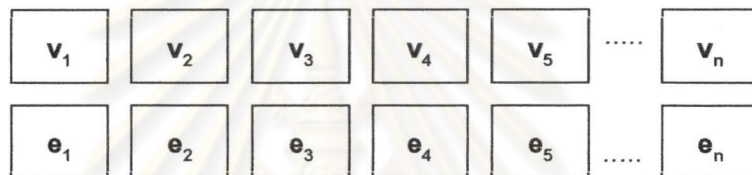
กิจกรรมเกมการออกคำสั่ง

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรม

1. แผนภาพขนาด 1x1 เมตร



2. บัตรคำขนาด 3x4 นิ้ว (โดยมีจำนวนเท่ากับจำนวนผู้เรียน 2 กลุ่ม)



3. ใบบันทึกการแข่งขันและตารางสรุปผลการแข่งขัน

วิธีการทำกิจกรรม

1. ให้ผู้แข่งขันแต่ละคนจับบัตรคำคนละ 1 ใบ โดยอย่าให้ฝ่ายตรงข้ามเห็น
2. บัตรคำที่มีอักษร v หมายถึงจุดยอด บัตรคำที่มีอักษร e หมายถึงเส้นเชื่อม
3. สมาชิกในแต่ละกลุ่มดูบัตรคำของเพื่อนกลุ่มเดียวกัน เพื่อให้ผู้แข่งขันทราบบัตรคำของฝ่ายตรงข้ามได้ เพราะบัตรคำที่ไม่ใช่ของสมาชิกในกลุ่มก็จะเป็นของฝ่ายตรงข้าม
4. ให้ตัวแทนของแต่ละกลุ่มออกมาเพื่อตกลงกันว่าใครจะเป็นคนออกคำสั่งก่อน
5. ให้ผู้แข่งขันเริ่มต้นออกคำสั่งให้ฝ่ายตรงข้ามสร้างกราฟ โดยใช้ศัพท์ที่เกี่ยวกับกราฟ ได้แก่ จุดยอดประชิด, ประชิด และ เกิดกับ (ดูรายละเอียดในกติกาการออกคำสั่ง) เช่น ผู้แข่งขันทราบว่าฝ่ายตรงข้ามถือบัตรคำ v_5 ผู้แข่งขันสามารถออกคำสั่งว่า “ e_0 เกิดกับ v_5 ” ได้
6. ผู้แข่งขันที่ถูกสั่ง (คือผู้แข่งขันที่ถือบัตรคำที่ผู้ออกคำสั่งบอก) จะต้องออกไปติดบัตรคำให้ถูกต้องตามคำสั่งนั้น ๆ เช่น เมื่อถูกสั่งว่า “ e_0 เกิดกับ v_5 ” ผู้แข่งขันที่ถือบัตรคำ v_5 จะต้องออกไปติดบัตรคำบนแผนภาพกราฟ
7. เมื่อผู้แข่งขันติดบัตรคำเรียบร้อยแล้ว ผู้แข่งขันคนนั้นจะเป็นผู้ออกคำสั่งคนต่อไป
8. ถ้าผู้แข่งขันติดบัตรคำถูกต้องตามคำสั่ง กลุ่มจะได้รับ 1 คะแนน แต่ถ้าผู้แข่งขันติดบัตรคำไม่ถูกต้อง กลุ่มจะไม่ได้รับคะแนน

9. กรณีที่ผู้ออกคำสั่งออกคำสั่งผิด (ดูรายละเอียดในกติกาการออกคำสั่ง) ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ฝ่ายตรงข้ามจะได้ รับคะแนนการแข่งขันทันที 1 คะแนน และผู้ที่ถือบัตรค่าตามคำสั่งให้นำบัตรค่าไปติดที่ช่องบัตรเสีย แล้วออกคำสั่งต่อไป

10. ผู้แข่งขันจะสลับกันออกคำสั่งและปฏิบัติตามจนครบทุกคนถือเป็นสิ้นสุดการแข่งขัน ฝ่ายที่ได้คะแนนการแข่งขันมากกว่าถือเป็นฝ่ายชนะ จะได้คะแนนสะสม 2 คะแนน ส่วนฝ่ายที่แพ้ จะได้คะแนนสะสม 0 คะแนน กรณีที่เสมอกันทั้งสองฝ่ายจะได้คะแนนสะสมฝ่ายละ 1 คะแนน

11. กรณีที่มีการทุจริตในการแข่งขัน กรรมการกลาง (ครูผู้สอน) สามารถดำเนินการทำโทษได้ตามความเหมาะสม เช่น ตัดคะแนนการแข่งขัน, ปรับแพ้ในการแข่งขันครั้งนั้น เป็นต้น

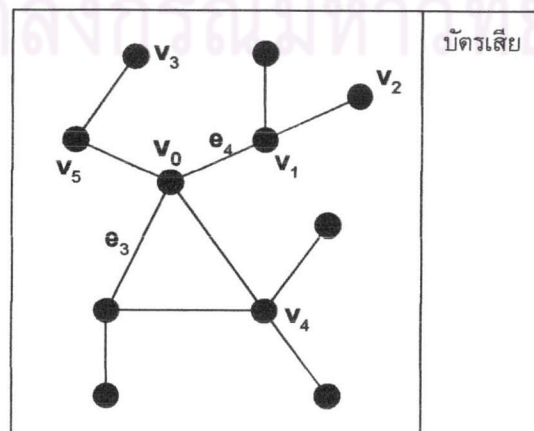
กติกาการออกคำสั่ง

การออกคำสั่งที่ถูกต้อง

1. ผู้ออกคำสั่งจะต้องใช้คำศัพท์เกี่ยวกับกราฟเท่านั้น ได้แก่ จุดยอดประชิด, ประชิด และ เกิดกับ เช่น “ e_1 ประชิด e_3 ”
2. ผู้ออกคำสั่งสามารถใช้คำว่า “ไม่” ผสมกับคำศัพท์ในคำสั่งได้ เช่น “ v_3 ไม่ประชิดกับ v_4 ”
3. ผู้ออกสามารถออกคำสั่งที่มีหลายเงื่อนไขในคราวเดียวกันได้ เช่น ต้องการสั่ง e_3 ว่า “ e_3 เกิดกับ v_1 แต่ไม่ประชิดกับ e_4 ” (ในกรณีนี้จะต้องมี v_1 และ e_4 ในกราฟอยู่แล้ว)

การออกคำสั่งที่ผิด

1. การออกคำสั่งที่ผิด คือ การออกคำสั่งที่ผู้แข่งขันไม่สามารถทำได้จริงไม่ว่ากรณีใดๆ
2. ผู้ออกคำสั่งใช้คำศัพท์ผิด เช่น “ e_1 ประชิด v_1 ” ซึ่งเส้นเชื่อมกับจุดยอดเราต้องใช้คำว่า “เกิดกับ” เป็นต้น
3. ผู้ออกคำสั่งใช้คำสั่งที่กล่าวถึงสิ่งที่ไม่อยู่ในกราฟ เช่น แผนภาพไม่มีจุดยอด v_7 แต่ผู้ออกคำสั่งสั่ง v_1 ว่า “ v_1 ประชิด v_7 ” ซึ่งทำไม่ได้
4. ผู้ออกคำสั่งออกคำสั่งที่มีหลายเงื่อนไข แล้วไม่สามารถปฏิบัติได้จริง เพราะเกิดการขัดแย้งกันในคำสั่ง เช่น จากรูป ผู้ออกคำสั่งออกคำสั่งว่า “ e_2 เกิดกับ v_3 และเกิดกับ v_0 ” ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะเส้นเชื่อมที่เกิดกับ v_3 มีเส้นเดียว แต่ไม่สามารถเกิดกับ v_0 ได้



ใบบันทึกการแข่งขัน ม.5/.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ. คาบเรียนที่.....

รอบที่ 1

คู่ที่ 1 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 2 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 3 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 4 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

รอบที่ 2

คู่ที่ 1 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 2 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 3 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 4 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

รอบที่ 3

คู่ที่ 1 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 2 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 3 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

คู่ที่ 4 กลุ่ม.....พบกับ กลุ่ม.....ผลการแข่งขัน.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางสรุปผลการแข่งขัน

คู่แข่ง กลุ่ม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	กลุ่ม 4	กลุ่ม 5	กลุ่ม 6	กลุ่ม 7	กลุ่ม 8	ผลการแข่งขัน			คะแนน สะสม
									ชนะ	เสมอ	แพ้	
กลุ่ม 1	x											
กลุ่ม 2		x										
กลุ่ม 3			x									
กลุ่ม 4				x								
กลุ่ม 5					x							
กลุ่ม 6						x						
กลุ่ม 7							x					
กลุ่ม 8								x				

ตัวอย่างการทำกิจกรรม

เริ่มต้นการแข่งขันผู้แข่งขันทุกคนจับบัตรค่าคนละ 1 ใบ สมมติเป็นการแข่งขันระหว่างกลุ่ม 1 กับ กลุ่ม 2 ซึ่งแต่ละกลุ่มประกอบด้วยสมาชิก 2 คน

ผู้แข่งขัน 2 กลุ่ม จำนวน 4 คน ดังนั้น มีบัตรค่า 4 ใบ ดังนี้

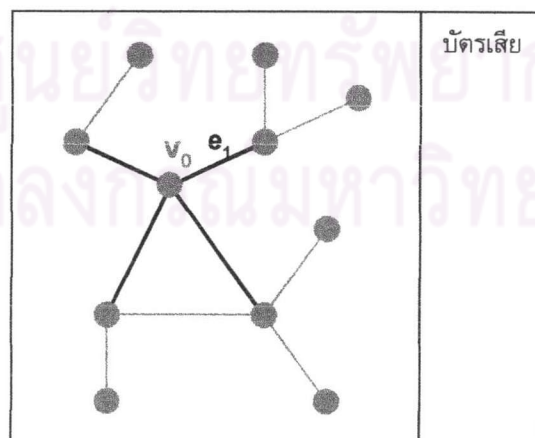


สมมติว่าผู้แข่งขันจับบัตรค่าได้ ดังนี้

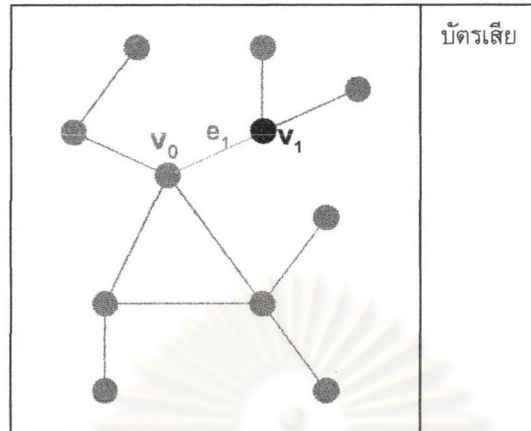
	กลุ่ม 1		กลุ่ม 2
นาย A	v_1	น.ส. X	v_2
นาย B	e_2	น.ส. Y	e_1

จากนั้นทั้งสองฝ่ายตกลงกันว่าให้กลุ่ม 1 ออกคำสั่งก่อน ดังนั้นสมาชิกคนหนึ่ง (ใครก็ได้) ของกลุ่ม 1 เป็นออกคำสั่งก่อน สมมติเริ่มต้นที่ นาย A ซึ่งเห็นบัตรค่าของสมาชิกในกลุ่ม นั้นคือ v_1 และ e_2 ดังนั้น นาย A จึงทราบว่าบัตรค่าของฝ่ายตรงข้าม คือ v_2 และ e_1 จากแผนภาพ (กราฟ) กำหนดจุดยอด v_0 ไว้เรียบร้อยแล้ว นาย A จึงออกคำสั่ง e_1 ว่า “ e_1 เกิดกับ v_0 ”

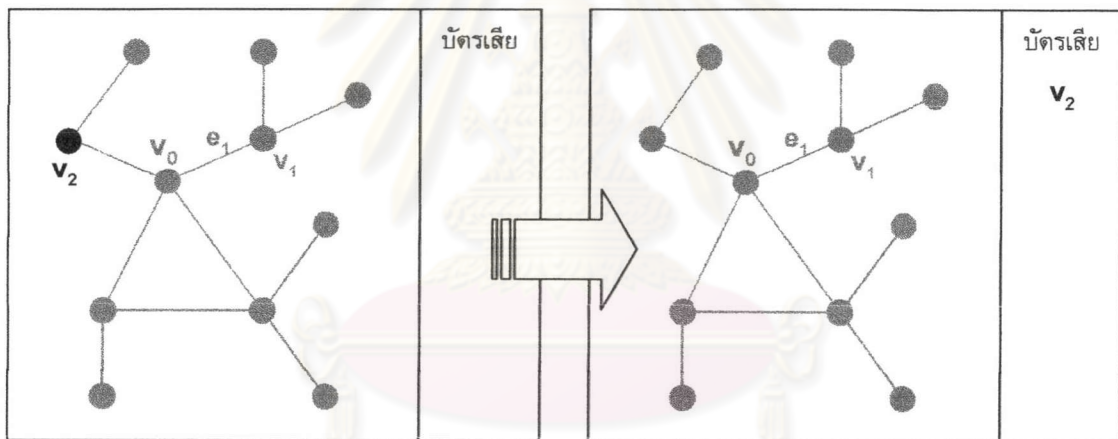
ดังนั้น Y ซึ่งถือบัตรค่า e_1 จึงออกไปติดบัตรลงบนแผนภาพ โดย Y สามารถเลือกติดเส้นเชื่อมได้ 4 เส้นเส้นใดก็ได้ สมมติ Y ติดบัตรค่า ดังรูป



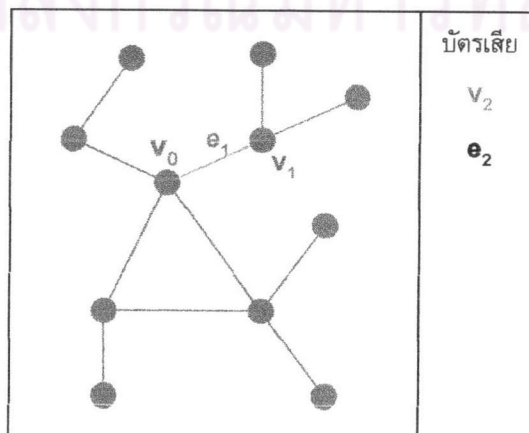
เมื่อ Y ตัดบัตรค่าแล้ว ต่อไป Y จะเป็นคนออกคำสั่ง ซึ่งออกคำสั่งว่า “ e_1 เชื่อม v_0 และ v_1 ”
 ดังนั้น A ที่ถือบัตรค่า v_1 จึงออกมาตัดบัตรค่า โดย A ตัดได้ทีเดียว ดังรูป



เมื่อ A ตัดบัตรค่าแล้ว ต่อไป A จะเป็นคนออกคำสั่ง ซึ่งออกคำสั่งว่า “ v_2 และ v_1 เป็นจุดยอดประชิด” ดังนั้น X ที่ถือบัตรค่า v_1 จึงออกมาตัดบัตรค่า โดย X ตัดบัตรค่าไม่ตรงตามคำสั่ง ดังรูป จึงต้องนำบัตรค่าไปติดช่องบัตรเสีย



เมื่อ X ตัดบัตรค่าแล้ว ต่อไป X จะเป็นคนออกคำสั่ง ซึ่งออกคำสั่งว่า “ e_2 ประชิดกับ v_1 ” ซึ่งเป็นการออกคำสั่งที่ผิด ดังนั้น B ที่ถือบัตรค่า e_2 จึงออกมาตัดบัตรค่าช่องบัตรเสีย และทำให้ กลุ่ม 1 ได้คะแนนทันที 1 คะแนน



ผู้แข่งขันติดบัตรคำครบทุกคนถือเป็นสิ้นสุดการแข่งขัน ซึ่งสรุปคะแนนได้ดังนี้

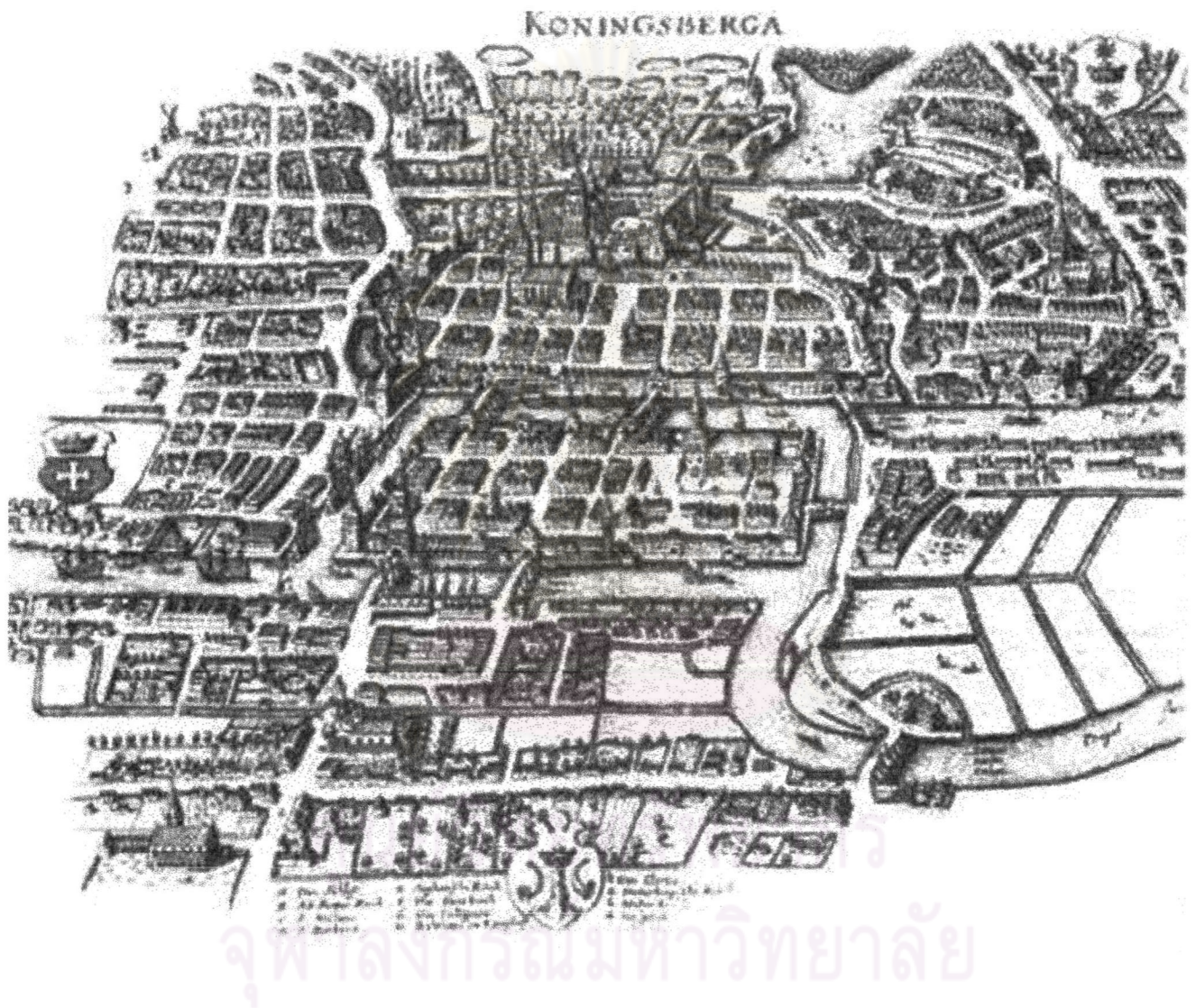
กลุ่ม 1		กลุ่ม 2	
นาย A	✓	น.ส. X	✓
นาย B	✓	น.ส. Y	✗

รวมคะแนนได้ว่า กลุ่ม 1 ชนะกลุ่มคิดคำนวณด้วยคะแนน 2 ต่อ 1 ดังนั้น กลุ่ม 1 ได้
คะแนนสะสมของกลุ่ม 2 คะแนนในการแข่งขันรอบนี้

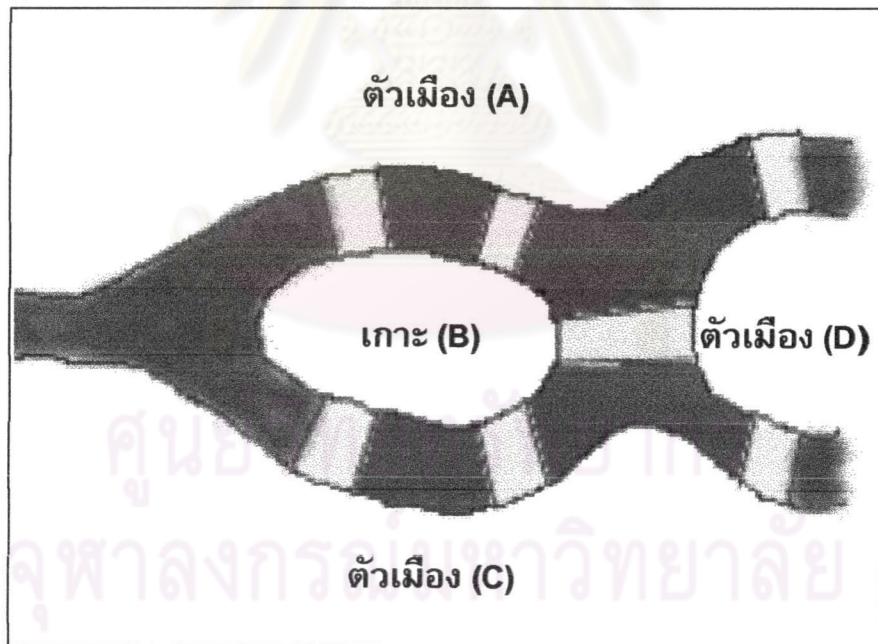
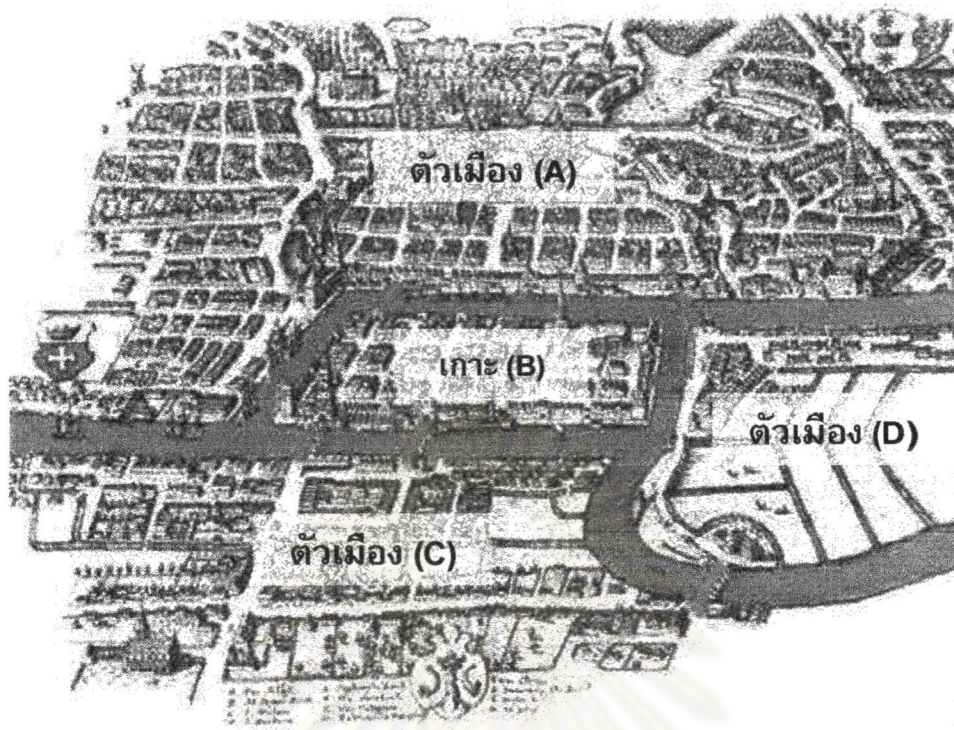


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(สื่อแผ่นโปร่งใส)

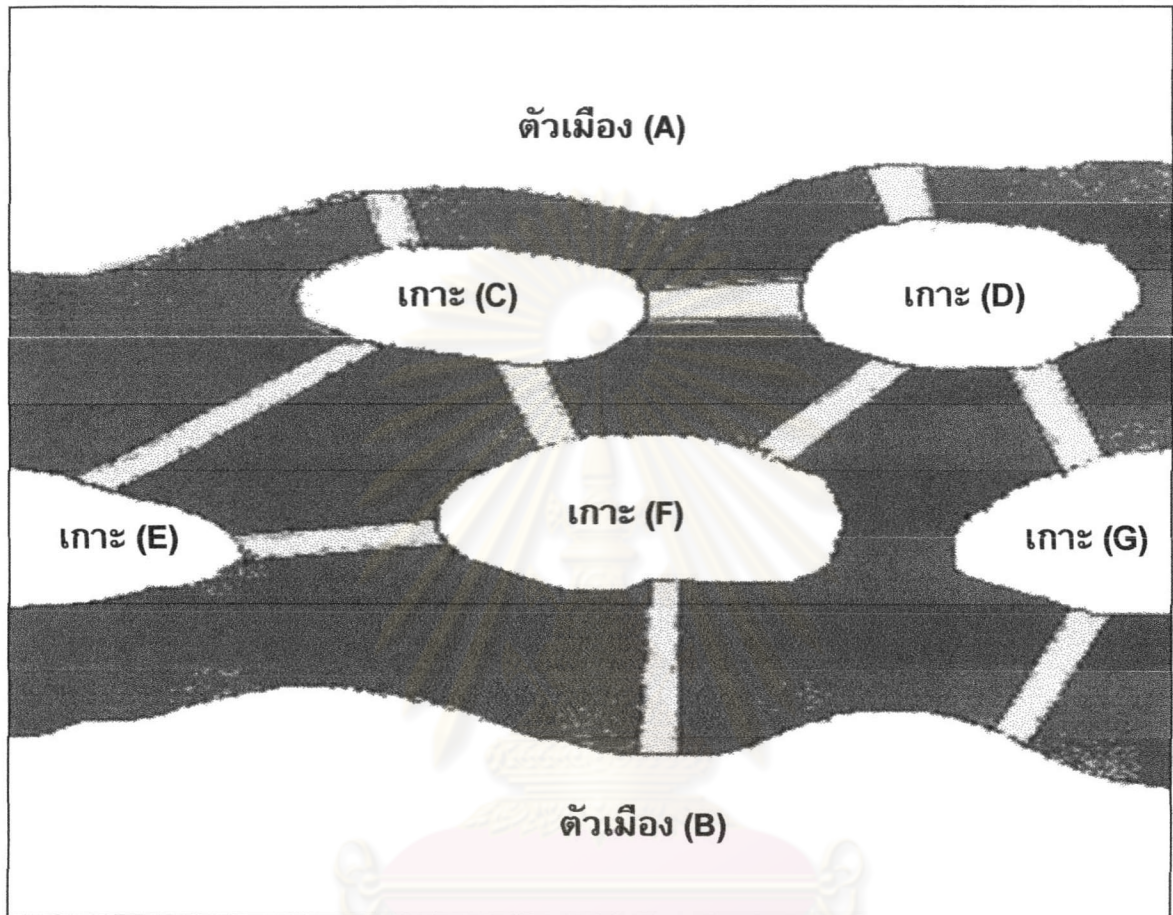


รูปที่ 1 สะพานเคอร์นิกส์เบิร์ก (Königsberg bridge)



รูปที่ 2 ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก

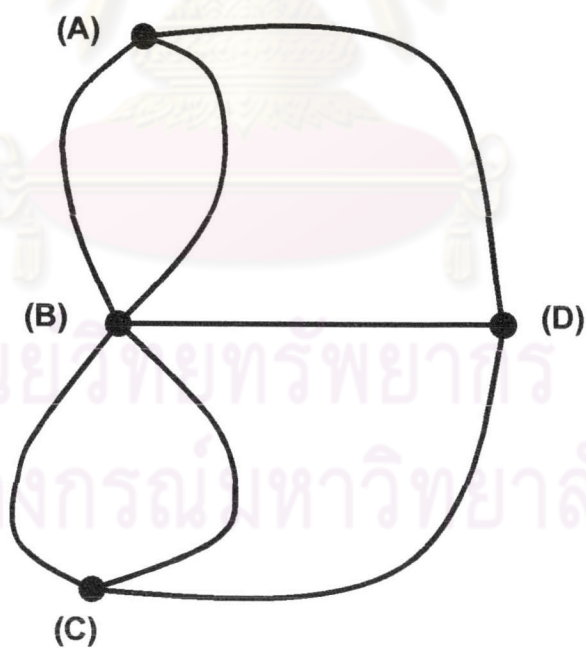
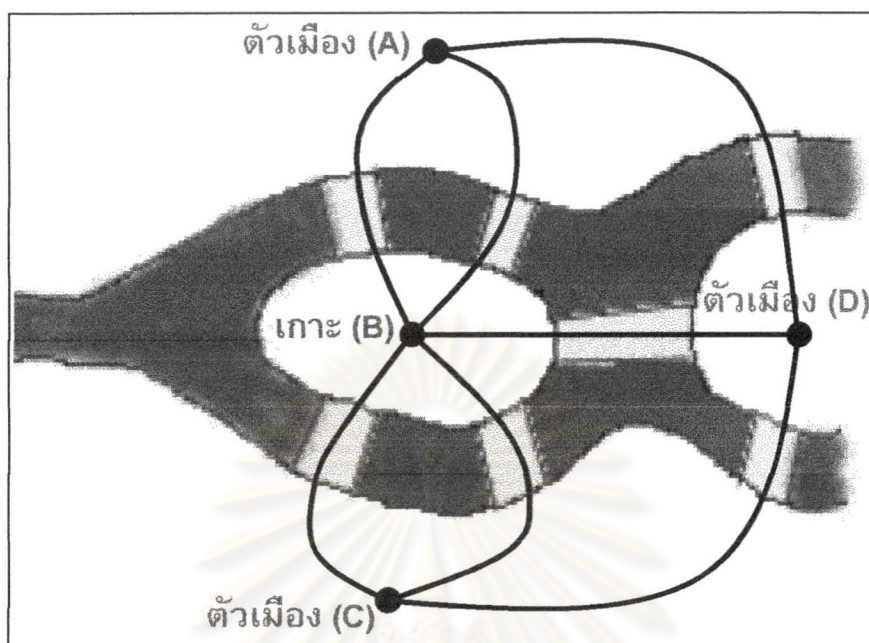
“เป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง โดยข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้น แล้วกลับมายืนที่จุดเดิม”



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 3 ปัญหาสะพานที่ซับซ้อน

“เป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะข้ามสะพานทั้งหมด โดยข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้น แล้วกลับมายืนที่จุดเดิม”



รูปที่ 4 กราฟของสะพานคอนิกส์เบิร์ก

เอกสารใบความรู้ที่ 1.1 ความหมายและส่วนประกอบของกราฟ

ความหมายของกราฟ

บทนิยาม

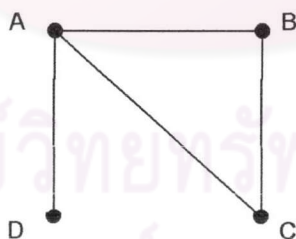
กราฟ G ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ $V(G)$ หรือ V
 2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G)$ หรือ E
- เขียนแทนกราฟ G ด้วยสัญลักษณ์ $G=(V,E)$

จากบทนิยาม จะได้ว่า โครงสร้างของกราฟมีส่วนประกอบ 2 ส่วนคือ

1. จุดยอด ซึ่งเซตของจุดยอดจะไม่เป็นเซตว่าง $V(G) \neq \emptyset$ นั่นคือ กราฟจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อย 1 จุด (เพราะถ้าไม่มีจุดยอดก็ไม่มีเส้นเชื่อมทำให้กราฟไม่มีรูอะไรเลย)
2. เส้นเชื่อม ซึ่งเส้นเชื่อมจะต้องเชื่อมจุดยอด 2 จุดใด เช่น เส้นเชื่อม e เชื่อมจุดยอด a และจุดยอด b เขียนแทนด้วย $e = \{a,b\}$ หรือ $e = ab$ โดยที่เซตของเส้นเชื่อมอาจจะเป็นเซตว่างหรือไม่ก็ได้

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้กราฟ G_1 ดังรูป

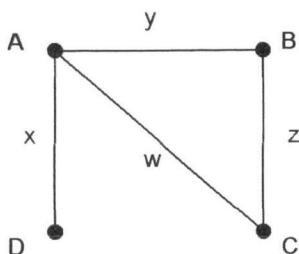


จากกราฟ $G_1=(V,E)$ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$V(G_1) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G_1) = \{ \{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\} \} \text{ หรือ } E(G_1) = \{AB, AC, AD, BC\}$$

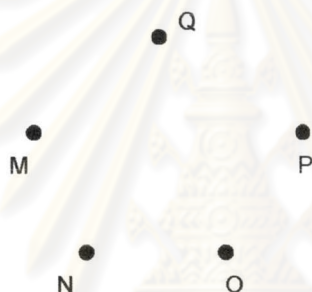
จากตัวอย่างที่ 1.1 เราสามารถกำหนดชื่อของเส้นเชื่อมได้



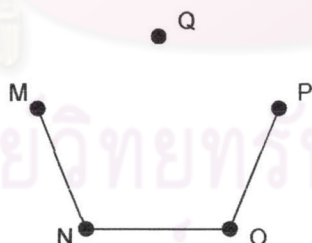
ดังนั้น จะได้ว่า $E(G_1) = \{w, x, y, z\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $V(G_2) = \{M, N, O, P, Q\}$ และ $E(G_2) = \{MN, NO, OP\}$ จงวาดกราฟ

G_2
วิธีทำ ขั้นที่ 1 กำหนดจุดยอดของกราฟ ได้ดังนี้



ขั้นที่ 2 วาดเส้นเชื่อมของกราฟ ได้ดังนี้



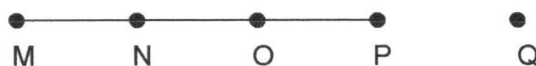
ข้อสังเกต 1) จุดยอดของกราฟสามารถอยู่จุดเดียวได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมก็ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 จะได้ว่า ไม่มีเส้นเชื่อมใดเชื่อมกับจุดยอด Q

2) เส้นเชื่อมจะต้องเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุดเสมอ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 จะได้ว่า เส้นเชื่อม MN เชื่อมจุดยอด M และจุดยอด N



จากรูปจะเห็นว่า G_3 มีเส้นเชื่อม e ที่มีปลายด้านหนึ่งเชื่อมจุดยอด R แต่ปลายอีกด้านไม่มีจุดยอด ดังนั้น G_3 ไม่เป็นกราฟ

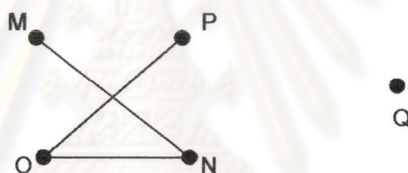
3) ในการวาดกราฟนั้น สามารถจะกำหนดตำแหน่งของจุดยอดของกราฟ ณ ตำแหน่งใดก็ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้ดังนี้



4) ในการวาดกราฟนั้น สามารถวาดเส้นเชื่อมของกราฟเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งก็ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้ดังนี้



5) เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟอาจตัดกันได้ โดยที่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสองไม่ถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2 สามารถเขียนกราฟ G_2 ลักษณะอื่นได้



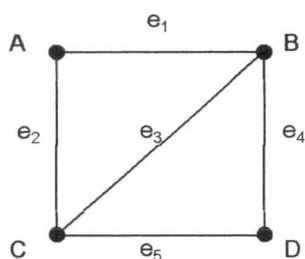
จะเห็นว่าเส้นเชื่อม MN ตัดกับเส้นเชื่อม OP แต่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสองไม่นับเป็นจุดยอดของกราฟ

บทนิยาม

จุดยอด u **ประชิด (adjacent)** กับจุดยอด v ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง
จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด (adjacent vertices)** ก็ต่อเมื่อ
จุดยอด u ประชิดกับจุดยอด v

เส้นเชื่อม e ของกราฟ **เกิดกับ (incident)** จุดยอด v ก็ต่อเมื่อ จุดยอด v เป็นจุดปลายจุด
หนึ่งของเส้นเชื่อม e

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้กราฟ G_4 ดังรูป



จะได้ว่า $G_4 = (V, E)$ โดยที่ $V(G_4) = \{A, B, C, D\}$ และ $E(G_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

จากตัวอย่างที่ 4 เราจะได้ว่า

จุดยอด A **ประชิดกับ** จุดยอด B (หรือจุดยอด C)

แต่จุดยอด A **ไม่ประชิดกับ** จุดยอด D

จุดยอด A และจุดยอด B เป็น**จุดยอดประชิด**

แต่จุดยอด A และจุดยอด D **ไม่เป็นจุดยอดประชิด**

เส้นเชื่อม e_1 **เกิดกับ**จุดยอด A (หรือจุดยอด B)

เส้นเชื่อม e_5 **ไม่เกิดกับ**จุดยอด A (หรือจุดยอด B)

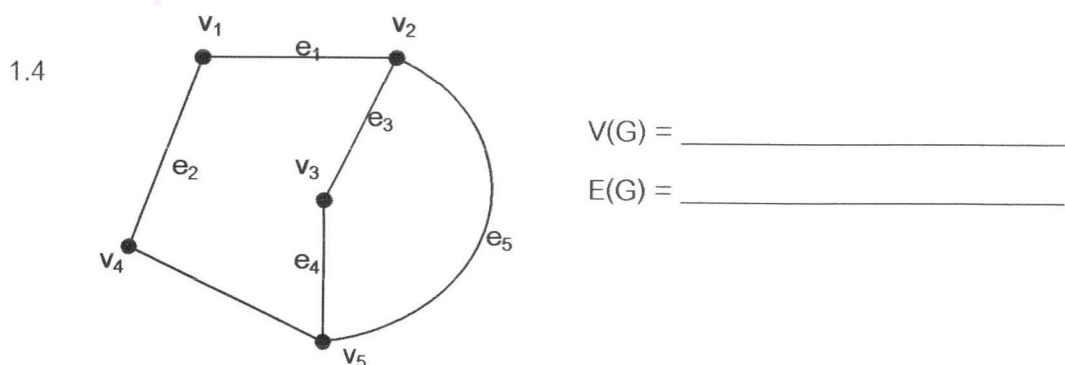
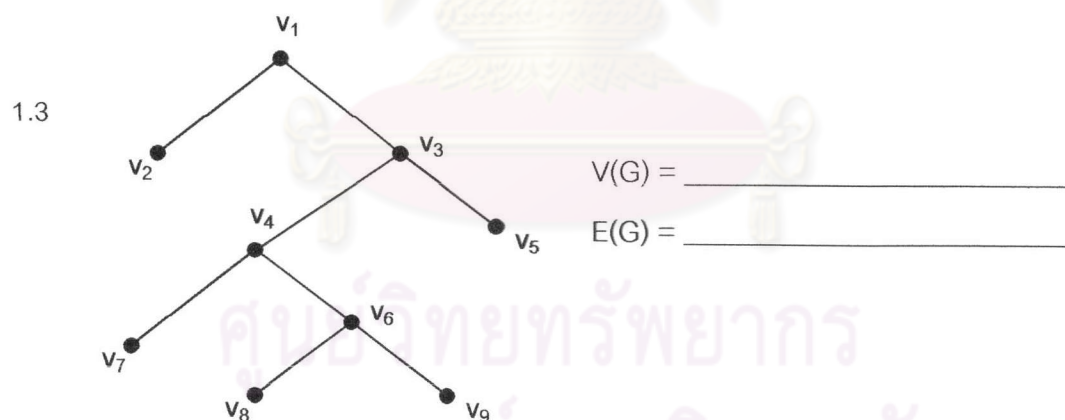
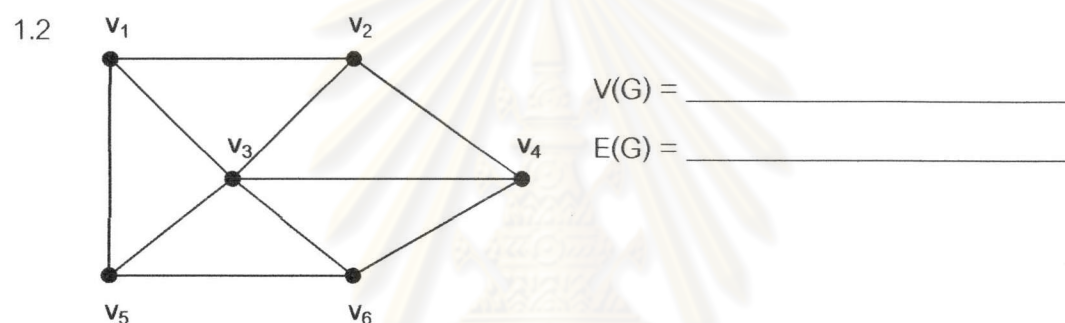
(ข้อความด้านบนเป็นเพียงตัวอย่างส่วนหนึ่งในการใช้ศัพท์ “ประชิด”, “จุดยอดประชิด”

และ “เกิดกับ”)

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.1
ความหมายของกราฟ

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. จงหา $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



2. จงเขียนรูปภาพของกราฟ G เมื่อกำหนดให้

2.1 $V(G) = \{ a, b, c, d \}$

$E(G) = \{ ab, bc, bd, cd \}$

2.2 $V(G) = \{ k, m, n, p, q \}$

$E(G) = \{ km, mp, kp, qr \}$

2.3 $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E(G) = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4 \}$

2.4 $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$

$E(G) = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_5v_6 \}$

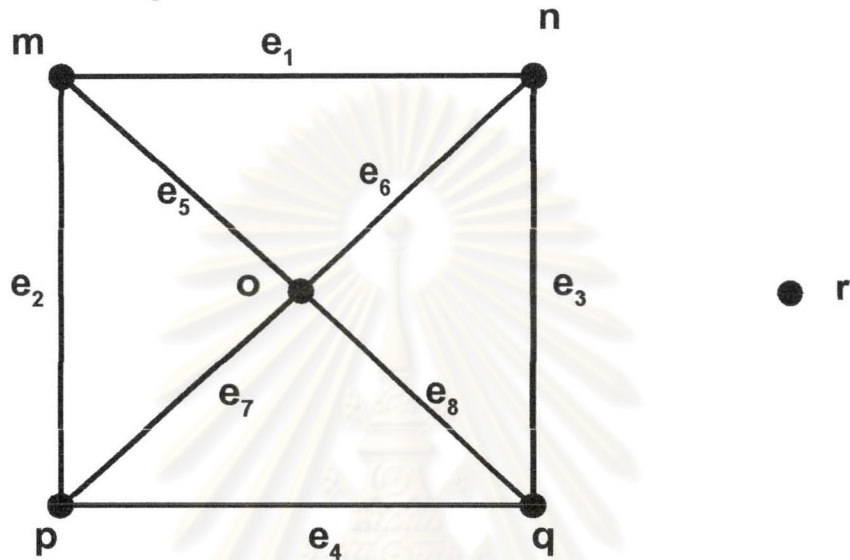
ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.2
คำศัพท์ของกราฟ

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ ถูกหรือผิด เพราะเหตุใด

1.1 จุดยอด m ประชิดกับจุดยอด p

ตอบ _____ เพราะ _____

1.2 จุดยอด n และจุดยอด p เป็นจุดยอดประชิด

ตอบ _____ เพราะ _____

1.3 จุดยอด r ไม่เป็นจุดยอดประชิดกับจุดยอดใดเลย

ตอบ _____ เพราะ _____

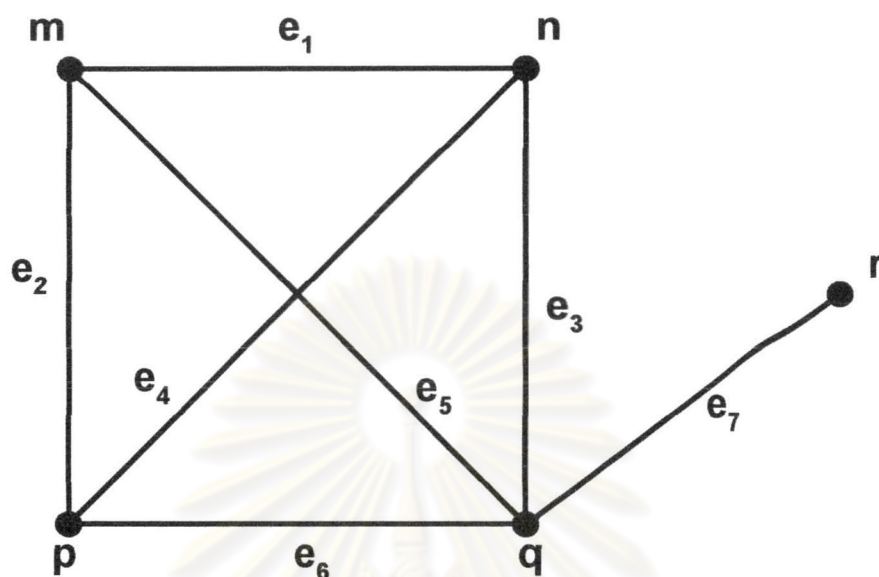
1.4 เส้นเชื่อม e_8 เกิดกับจุดยอด o และจุดยอด q

ตอบ _____ เพราะ _____

1.5 เส้นเชื่อม e_2 ไม่เกิดกับจุดยอด n และจุดยอด q

ตอบ _____ เพราะ _____

2. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

- 2.1 จุดยอด m _____ จุดยอด q
- 2.2 จุดยอด p _____ จุดยอด r
- 2.3 จุดยอด q ประชิดกับจุดยอด _____
- 2.4 จุดยอด n และจุดยอด q เป็น _____
- 2.5 จุดยอด m ไม่ประชิดกับจุดยอด _____
- 2.6 เส้นเชื่อม e_4 เกิดกับจุดยอด _____ และจุดยอด _____
- 2.7 เส้นเชื่อม e_5 เกิดกับจุดยอด _____ และจุดยอด _____
- 2.8 เส้นเชื่อม e_6 ไม่เกิดกับจุดยอด _____

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบประเมินผู้เรียน (สำหรับผู้เรียน)

ผู้ประเมิน (ชื่อ-สกุล) _____ กลุ่มที่ _____

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่คะแนนในแต่ละด้านตามความคิดเห็นที่เป็นจริงและเหมาะสม โดยมีเกณฑ์ดังนี้

- 3 หมายความว่า มีพฤติกรรมในระดับดี
- 2 หมายความว่า มีพฤติกรรมในระดับปานกลาง
- 1 หมายความว่า มีพฤติกรรมในระดับน้อย

พฤติกรรม	มีความรู้ (3)	มีความรับผิดชอบ (3)	ให้ความร่วมมือและคอยช่วยเหลือกลุ่ม (3)	มีความกระตือรือร้น เอาใจใส่ (3)	มีความเป็นผู้นำ (3)	รวม (15 คะแนน)
รายชื่อนักเรียนในกลุ่ม						
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

แบบประเมินผู้เรียน (สำหรับครู)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่คะแนนในแต่ละด้านตามความคิดเห็นที่เป็นจริงและเหมาะสม โดยมีเกณฑ์ดังนี้

- 5 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ดีมาก
- 4 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ดี
- 3 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ปานกลาง
- 2 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่น้อย
- 1 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ควรปรับปรุง

รายชื่อ กลุ่มของนักเรียน	พฤติกรรม	มีความรู้ (5)	มีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม (5)	ความร่วมมือของสมาชิกในกลุ่ม (5)	มีความคิดสร้างสรรค์ (5)	รวม (20 คะแนน)	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							
8.							

ข้อเสนอแนะ/ปรับปรุงในการทำกิจกรรมครั้งต่อไป

.....

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 1 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง เส้นเชื่อมขนานและวงวน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของวงวนและเส้นเชื่อมขนานได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดมาให้ มีวงวนหรือไม่
3. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดมาให้ มีเส้นเชื่อมขนานหรือไม่
4. นักเรียนสามารถบอกจำนวนเส้นเชื่อมขนานและวงวนของกราฟได้

สาระสำคัญ

บทนิยาม

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)

เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่าวงวน (loop)

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 220 – 221

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้

1. ครูใช้คำถามถามนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องกราฟที่เรียนในคาบที่ผ่านมา เพื่อเป็นการทบทวนและกระตุ้นนักเรียนให้เกิดความสนใจ เช่น “กราฟที่เราเรียนในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น แตกต่างกับกราฟที่เรารู้จักหรือไม่ อย่างไร” หรือ “กราฟประกอบด้วยส่วนประกอบกี่ส่วน อะไรบ้าง” เป็นต้น

2. ครูกล่าวนำเข้าสู่บทเรียนว่า “สำหรับวันนี้เรามาเรียนเรื่องเกี่ยวกับเส้นเชื่อม ซึ่งเส้นเชื่อมที่เราจะเรียนในวันนี้จะมีลักษณะที่แตกต่างจากเส้นเชื่อมที่เราเคยพบในคาบที่ผ่านมา”

3. จากนั้น ครูพูดถึงกิจกรรมในวันนี้ว่า “กิจกรรมที่เราจะทำต่อไปนี้เป็น คือ ศูนย์การเรียนรู้ที่นักเรียนจะต้องศึกษาหาความรู้จากแต่ละศูนย์เพื่อที่จะตอบปัญหาได้อย่างถูกต้อง”

4. ครูกล่าวว่า ซึ่งในแต่ละศูนย์การเรียนรู้ นั้น นักเรียนจะรู้จักเส้นเชื่อมที่มีลักษณะที่เรียกว่า เส้นเชื่อมขนาน และวงวน

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

5. ครูลองถามนักเรียนเกี่ยวกับเส้นเชื่อมขนานและวงวน ว่าในความคิดนักเรียนเป็นอย่างไร เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดก่อนการทำกิจกรรม

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

6. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่ม กลุ่มละ 3-4 คน เพื่อเตรียมตัวทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนานและวงวน”

7. ในการแบ่งกลุ่มครั้งนี้ มีกฎในการจัดกลุ่ม คือ สมาชิกในกลุ่มจะต้องได้เกรดวิชาคณิตศาสตร์ของภาคเรียนที่แล้วแตกต่างกัน

8. เมื่อจัดกลุ่มเสร็จแล้ว ครูให้นักเรียนเลือกประธานในกลุ่ม ซึ่งมีหน้าที่ในการตัดสินใจและแบ่งงานให้แก่สมาชิกแต่ละคนกลุ่ม (โดยที่สมาชิกทุกคนต้องปฏิบัติตาม)

9. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม ทบทวนทำความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นเชื่อมที่เคยเรียนไปแล้วก่อนทำกิจกรรม

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

10. ครูอธิบายเกี่ยวกับการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนานและวงวน” ให้นักเรียนฟัง (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในเอกสารการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้)

11. ศูนย์การเรียนรู้มีจำนวนทั้งหมด 2 ศูนย์ ได้แก่ ศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนาน” และศูนย์การเรียนรู้ “วงวน” โดยในแต่ละศูนย์นั้นจะประกอบไปด้วยบอร์ดความรู้ และของปัญหาที่นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะต้องช่วยกันหาคำตอบ

12. เริ่มต้นทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ ครูแจกใบบันทึกการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ แล้วจึงให้นักเรียนแยกย้ายกันไปศึกษาหาความรู้ โดยที่นักเรียนสามารถที่จะศึกษาศูนย์การเรียนรู้ศูนย์ไหนก่อนก็ได้

13. การศึกษาความรู้จากศูนย์การเรียนรู้นั้น นักเรียนจะต้องช่วยกันทำความเข้าใจเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในศูนย์การเรียนรู้ นั้น ๆ เพื่อจะได้ไปตอบปัญหาของศูนย์ พร้อมทั้งนักเรียนจะต้องบันทึกสิ่งที่ได้ในแต่ละศูนย์ลงในใบบันทึกการทำกิจกรรม

14. เมื่อนักเรียนศึกษาความรู้จากศูนย์การเรียนรู้หนึ่งเรียบร้อยแล้ว นักเรียนจะต้องหยิบซองใบปัญหาคนละ 1 ซอง (ถ้ากลุ่มไหนมี 3 คนกลุ่มนั้นจะต้องหยิบซองปัญหา 3 ซอง) และเมื่อนักเรียนหยิบซองปัญหาของศูนย์การเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะต้องออกไปจากศูนย์การเรียนรู้ทันที ดังนั้นนักเรียนจะต้องศึกษาสาระการเรียนรู้จนแน่ใจเสียก่อน

15. เมื่อออกจากศูนย์แล้ว นักเรียนจึงจะเปิดซองคำถามแล้วสมาชิกในกลุ่มจะต้องช่วยกันตอบคำถามนั้น ๆ

16. จากนั้นนักเรียนจึงไปศึกษาความรู้ในศูนย์การเรียนรู้ต่อไป

17. ครูจะต้องคอยควบคุมการทำกิจกรรมให้เป็นไปอย่างเรียบร้อย และครูจะต้องเป็นผู้ควบคุมดูแลเรื่องเวลา และคอยเตือนเรื่องเป็นเวลาเป็นระยะ ๆ โดยให้เวลาในการทำกิจกรรมแต่ละศูนย์การเรียนรู้ประมาณ 10 นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

18. เมื่อหมดเวลาในการทำกิจกรรม ครูเรียกนักเรียนแต่ละกลุ่มออกมาตอบปัญหาที่นักเรียนหยิบได้ โดยให้นักเรียนแต่ละคนตอบปัญหาที่ตนเองหยิบได้เป็นรายบุคคล

19. ในการตอบคำถามนั้น ถ้ากลุ่มไหนที่ตอบปัญหาไม่ได้ ครูผู้สอนก็จะเปิดโอกาสให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ช่วยตอบ ซึ่งถ้านักเรียนกลุ่มอื่นตอบถูกก็ได้คะแนนเพิ่ม

20. ครูรวบรวมคะแนนของแต่ละกลุ่ม เพื่อประกาศกลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุด

21. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมา 1 กลุ่ม เพื่อออกมาพูดถึงการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ ตั้งแต่การวางแผน การทำกิจกรรม และการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

22. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนานและวงวน” ในด้านต่าง ๆ เช่น ด้านการทำงานร่วมกัน การช่วยเหลือกัน และการควบคุมเวลา เป็นต้น

23. ครูผู้สอนประเมินผลงาน (คะแนน) ของแต่ละกลุ่ม และผลงาน (คะแนนเฉลี่ย) รวมของห้องว่าเป็นอย่างไร โดยให้นักเรียนอภิปรายถึงสาเหตุสำคัญของผลลัพธ์ที่ได้

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

24. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 1.2 เรื่องเส้นเชื่อมขนานและวงวน

25. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ในแต่ละศูนย์การเรียนรู้ พร้อมทั้งดูเอกสารใบความรู้ที่ 2 ประกอบ

26. ครูยกตัวอย่างเรื่องเส้นเชื่อมขนานและวงวน (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 220-221) เพื่อเป็นการขยายความให้นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น

27. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแบบฝึกหัดที่ 3 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 221) เป็น
การบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. บอร์ดความรู้ เรื่อง “เส้นเชื่อมขนานและวงวน”
2. บัตรคำปัญหา (จำนวนเท่ากับนักเรียน)
3. ใบบันทึกการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้
4. เอกสารใบความรู้ที่ 1.2 เส้นเชื่อมขนานและวงวน
5. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.3 เส้นเชื่อมขนานและวงวน

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากการทำตอบคำถามของศูนย์
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
3. สังเกตจากผลการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้
จิตพิสัย
1. สังเกตจากการประเมินของเพื่อนในกลุ่ม
2. สังเกตจากการทำงานในกลุ่ม
3. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

กิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนานและวงวน”

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรม

1. บอร์ดความรู้ “เส้นเชื่อมขนานและวงวน” ซึ่งบอร์ดความรู้จะเป็นลักษณะบอร์ดคำถามที่ชี้ให้นักเรียนหาคำตอบ มีจำนวน 2 บอร์ด คือบอร์ดความรู้ “เส้นเชื่อมขนาน” มีใบความรู้จำนวน 5 ใบ และบอร์ดความรู้ “วงวน” มีใบความรู้จำนวน 4 ใบ ซึ่งใบความรู้แต่ละใบมีขนาดเท่ากับ A_4
2. ใบบันทึกการทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้
3. ใบปัญหา ขนาด 6×8 นิ้ว จำนวนเท่ากับจำนวนนักเรียน (ใบปัญหาทำจากแผ่นใสเพื่อให้นักเรียนสามารถถอดออกนำเสนอปัญหา และเฉลยปัญหาให้เพื่อน ๆ ดูได้)

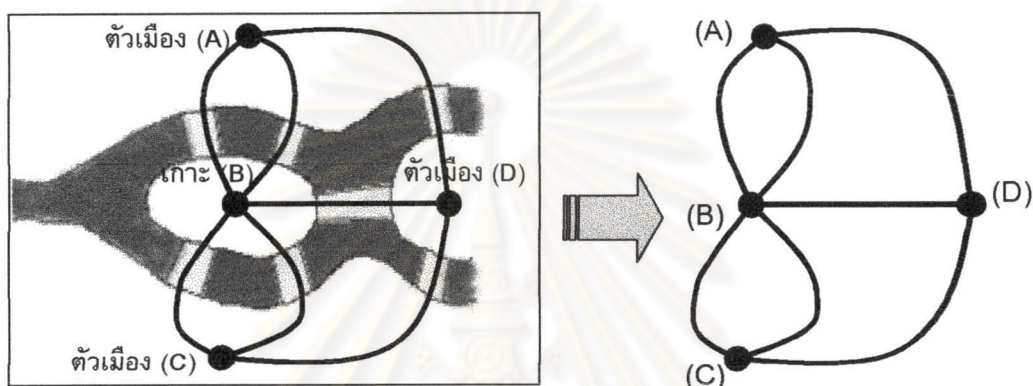
วิธีการทำกิจกรรม

1. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มละ 3-4 คน
2. ศูนย์การเรียนรู้มีทั้งหมดจำนวน 2 ศูนย์ ได้แก่ ศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนาน” และศูนย์การเรียนรู้ “วงวน” โดยในแต่ละศูนย์นั้นจะประกอบไปด้วยบอร์ดความรู้ และของปัญหาที่นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะต้องช่วยกันหาคำตอบ
3. เริ่มต้นทำกิจกรรมศูนย์การเรียนรู้ ครูให้นักเรียนแยกย้ายกันไปศึกษาหาความรู้จากศูนย์การเรียนรู้ โดยที่นักเรียนสามารถที่จะศึกษาศูนย์การเรียนรู้ศูนย์ไหนก่อนก็ได้
4. การศึกษาความรู้จากศูนย์การเรียนรู้นั้น นักเรียนจะต้องช่วยกันศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในศูนย์การเรียนรู้นั้น ๆ ก่อนที่จะหยิบของใบปัญหา
5. เมื่อนักเรียนศึกษาความรู้จากศูนย์การเรียนรู้หนึ่งเรียบร้อยแล้ว นักเรียนจึงจะต้องหยิบของใบปัญหาคนละ 1 ของ (ถ้ากลุ่มไหนมี 3 คนกลุ่มนั้นจะต้องหยิบของปัญหา 3 ของ)
6. เมื่อนักเรียนหยิบของใบปัญหาของศูนย์การเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะต้องออกไปจากศูนย์การเรียนรู้ (ดังนั้นนักเรียนจะต้องศึกษาสาระการเรียนรู้จนแน่ใจเสียก่อน)
7. เมื่อออกจากศูนย์แล้ว นักเรียนจึงจะเปิดของคำถาม แล้วสมาชิกในกลุ่มจะต้องช่วยกันตอบคำถามนั้น ๆ
8. จากนั้นนักเรียนจึงไปศึกษาความรู้ในศูนย์การเรียนรู้ต่อไป
9. ครูจะต้องคอยควบคุมการทำกิจกรรมให้เป็นไปอย่างเรียบร้อย และครูจะต้องเป็นผู้ควบคุมดูแลเรื่องเวลา และคอยเตือนเรื่องของเวลาเป็นระยะ ๆ โดยให้เวลาในการทำกิจกรรมแต่ละศูนย์ประมาณ 10 นาที

ศูนย์การเรียนรู้ “เส้นเชื่อมขนาน”

บอร์ดความรู้ “เส้นเชื่อมขนาน”

จากความรู้เรื่อง “ประโยชน์ของกราฟและการแปลงปัญหาเป็นกราฟ” นักเรียนสามารถแปลงปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์กได้ ดังนี้



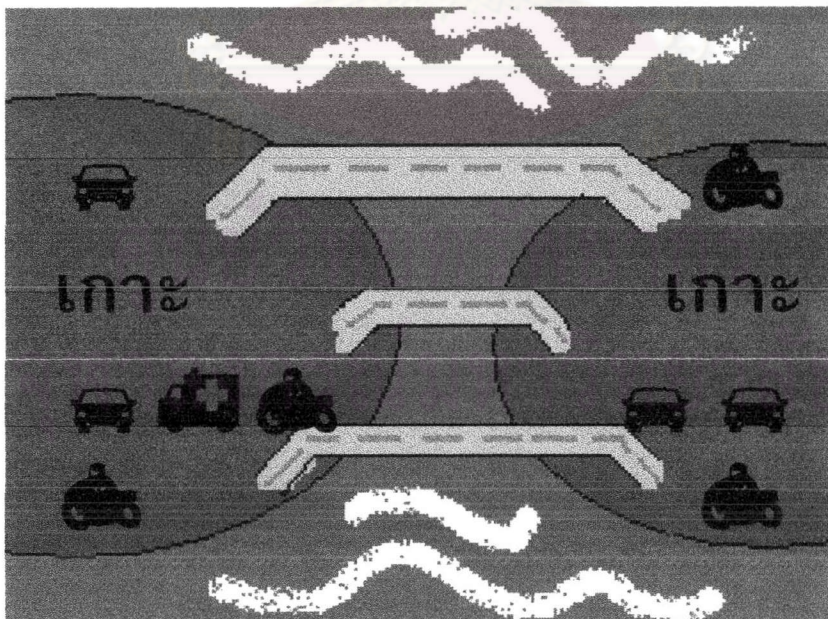
นักเรียนสังเกตสิว่ามีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด A และจุดยอด B จำนวนกี่เส้น

นักเรียนสังเกต จำนวนเส้นเชื่อมต่อไปสิว่า แล้วจำนวนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดคู่อื่น ๆ เป็นอย่างไรบ้าง

จากกราฟ เราจะได้ว่า “เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด A และ B” กับ “เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด B และ C” เป็น “เส้นเชื่อมขนาน” (เส้นเชื่อมอื่น ๆ ไม่ใช่เส้นเชื่อมขนาน)

นักเรียนคิดว่าเส้นเชื่อมขนาน เป็นเส้นเชื่อมที่มีคุณสมบัติอย่างไร ?

ถ้าเป็นปัญหา เกาะ 2 เกาะที่มีสะพานเชื่อม 3 สะพาน (ดังรูป)



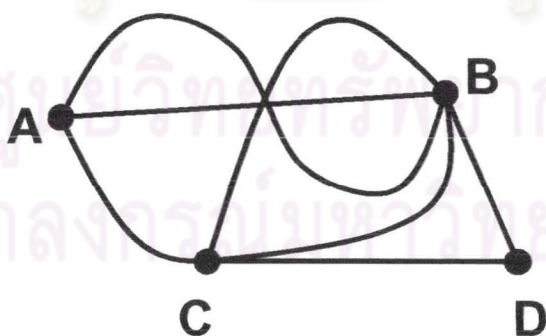
นักเรียนจะแปลงเป็นกราฟได้อย่างไร

นักเรียนได้เส้นเชื่อมของกราฟจำนวนกี่เส้น

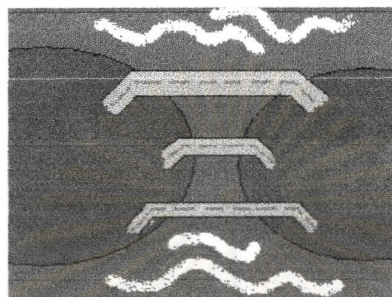
ถ้าเส้นเชื่อมที่นักเรียนวาดได้ทั้งหมดเป็น “เส้นเชื่อมขนาน” แล้วความหมายของเส้นเชื่อมขนานที่นักเรียนหาได้ถูกต้องหรือไม่

ตัวอย่างปัญหา “เส้นเชื่อมขนาน”

จงหาว่ากราฟที่กำหนดให้มีเส้นเชื่อมขนานหรือไม่ และมีกี่เส้น อะไรบ้าง



จงยกตัวอย่างปัญหาที่เมื่อแปลงเป็นกราฟแล้วทำให้กราฟมี “เส้นเชื่อมขนาน”

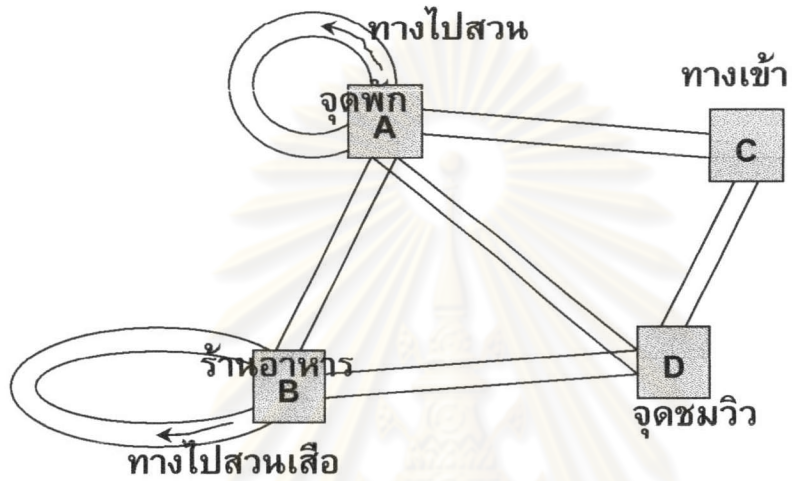


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

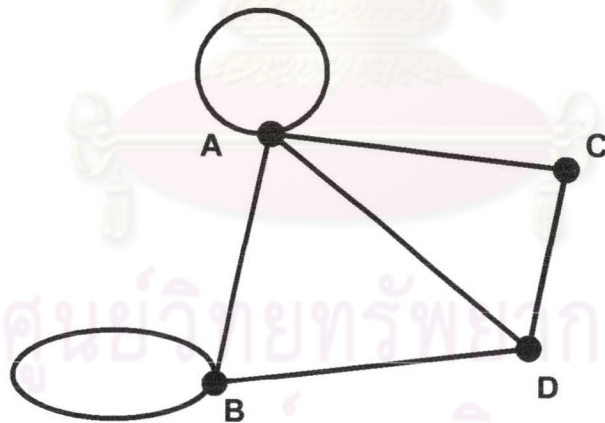
ศูนย์การเรียนรู้ “วงวน”

บอร์ดความรู้ “วงวน”

จากแผนที่ต่อไปนี้



เราสามารถแปลงเป็นกราฟ ได้ดังนี้



ศูนย์วิทยุทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากกราฟที่ได้ นักเรียนสังเกต ลักษณะของเส้นเชื่อมที่จุดยอด A ว่ามีเส้นเชื่อมใดที่มีลักษณะพิเศษหรือไม่..... ?

และที่จุดยอดอื่น ๆ มีเส้นเชื่อมที่มีลักษณะพิเศษที่นักเรียนเห็นอีกหรือไม่ที่จุดยอดใด

เอ ถ้าเราได้ว่าที่จุดยอด B ก็มีเส้นเชื่อมที่มีลักษณะพิเศษที่ว่านี้ละ >> จะตรงกับที่นักเรียนคิดไว้หรือเปล่า

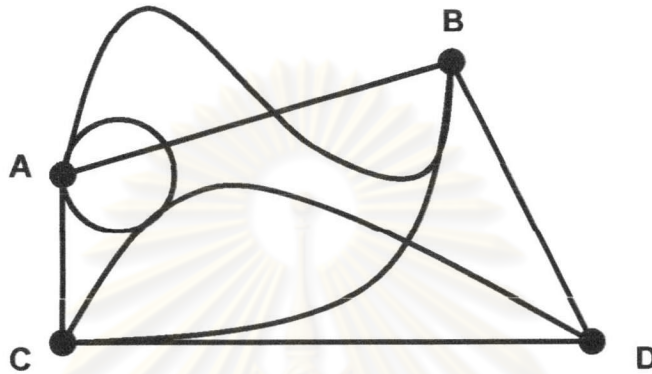
เส้นเชื่อมที่มีลักษณะพิเศษนี้เรียกว่า “วงวน” นักเรียนคิดว่ามันจะมีลักษณะพิเศษอย่างไรนะ

ศูนย์วิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ้านักเรียนได้ความหมายของวงวนในใจแล้วลองมาดูกราฟนี้ว่ามีวงวนหรือ
เปล่า..... ?

แล้วมีวงวนที่จุดยอดไหนบ้าง.....?

ช่วยหาคำตอบให้หน่อย



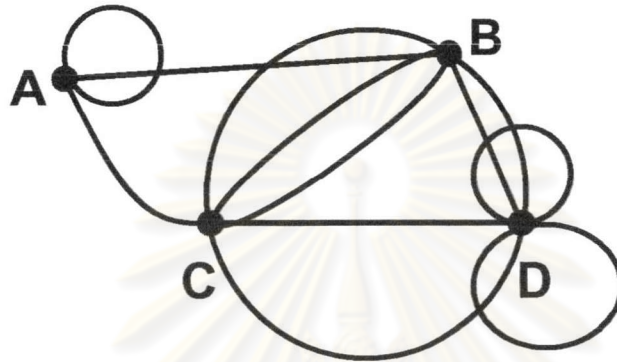
เฉลยนะ..... กราฟที่กำหนดให้มียวงวนอย่างแค่ 1 เส้น อยู่ที่จุดยอด C

นักเรียนตอบถูกหรือเปล่า แล้วความหมายของวงวนที่นักเรียนได้คิดว่าถูกไหม
เอ๋ย

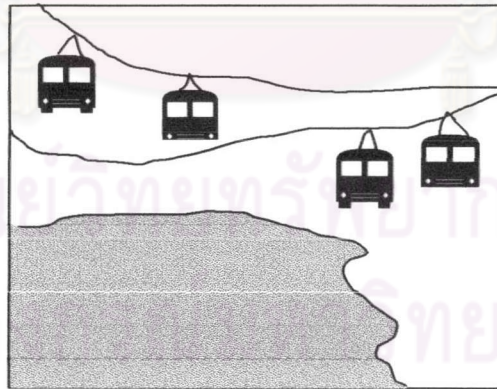
ศูนย์วิทยุทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างปัญหา “วงวน”

จงหาว่ากราฟที่กำหนดให้มียวงวนหรือไม่ และมีกี่เส้น อะไรบ้าง



จงยกตัวอย่างปัญหาที่เมื่อแปลงเป็นกราฟแล้วทำให้กราฟมี “วงวน”



ใบบันทึกการทำกิจกรรม ศูนย์การเรียนรู้

กลุ่ม

สมาชิกในกลุ่ม 1. เลขที่

2. เลขที่

3. เลขที่

4. เลขที่

ตอบปัญหาจากบอร์ดความรู้ “เส้นเชื่อมขนาน”

1. วาดรูปภาพของสะพานคอนกรีตเบิร์ก

2. จำนวนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดแต่ละคู่ของกราฟสะพานคอนกรีตเบิร์ก

ระหว่างจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม
A และ B
A และ D
B และ C
B และ D
C และ D

จากกราฟสะพานคอนกรีตเบิร์ก เส้นเชื่อมที่เป็นเส้นเชื่อมขนานได้แก่

3. บทนิยามของเส้นเชื่อมขนาน

ความหมาย เส้นเชื่อมขนาน คือ

4. ปัญหาเกาะ 2 เกาะที่มี 3 สะพานสามารถวาดเป็นกราฟ ได้ดังนี้

ซึ่งมีเส้นเชื่อมขนานจำนวน เส้น

ตอบปัญหาจากบอร์ดความรู้ “วงวน”

1. จากแผนที่ สามารถวาดรูปภาพ ได้ดังนี้

ซึ่งมีวงวนทั้งหมด เส้น ได้แก่

2. บทนิยามของวงวน

ความหมาย วงวน คือ

.....

.....

3. จากกราฟ G (จงวาดรูปภาพด้วย)

มีวงวนทั้งหมด เส้น ได้แก่

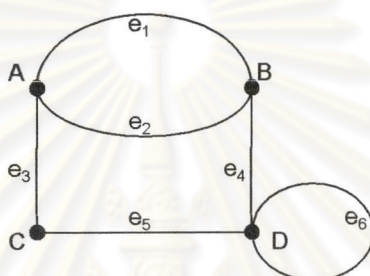
เอกสารใบความรู้ที่ 5.2 เส้นเชื่อมขนานและวงวน

บทนิยาม

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกัน เรียกว่า **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges)

เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียว เรียกว่า **วงวน (loop)**

ตัวอย่าง กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จะได้ว่า $G=(V,E)$ โดยที่ $V(G) = \{ A, B, C, D \}$

$$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$$

จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นเชื่อม e_1 เชื่อมจุดยอด A และจุดยอด B

และ เส้นเชื่อม e_2 เชื่อมจุดยอด A และจุดยอด B

จะได้ว่า เส้นเชื่อม e_1 และเส้นเชื่อม e_2 เชื่อมจุดยอดคู่เดียวกัน

ดังนั้น เส้นเชื่อม e_1 และเส้นเชื่อม e_2 เป็นเส้นเชื่อมขนาน

จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นเชื่อม e_6 เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวคือ จุดยอด D

ดังนั้น เส้นเชื่อม e_6 เป็นวงวน

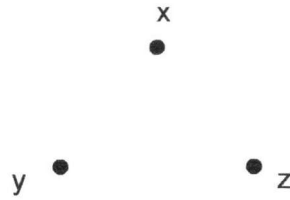
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 4 ถ้าเขียน $E(G) = \{ AB, AB, AC, BD, CD, DD \}$ จะได้ว่า

1. เซตของเส้นเชื่อมจะมีสมาชิก AB สองตัวซึ่งหมายถึงเส้นเชื่อมขนาน นั้นหมายความว่า $\{AB, AB, AC, BD, CD, DD\} \neq \{AB, AC, BD, CD, DD\}$ เพราะ $\{AB, AC, BD, CD, DD\}$ เป็นเซตของเส้นเชื่อมที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน ดังนั้นในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เซตของเส้นเชื่อมมีคุณสมบัติบางประการไม่เหมือนกับเรื่องของเซต (Sets) ที่เคยเรียนมาแล้ว

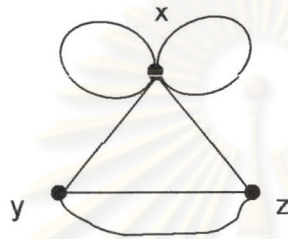
2. จากตัวอย่างที่ 4 เราสามารถเขียนเส้นเชื่อมที่เป็นวงวนได้ดังนี้ $e_6 = DD$ ซึ่งหมายความว่าเส้นเชื่อม e_6 เป็นวงวนที่จุดยอด D

ตัวอย่าง กำหนดให้ $V(G) = \{x, y, z\}$ และ $E(G) = \{xx, xy, xz, yz, yz\}$ จงวาดกราฟ G

วิธีทำ ขั้นที่ 1 กำหนดจุดยอดของกราฟ ดังนี้



ขั้นที่ 2 วาดเส้นเชื่อมของกราฟ ดังนี้

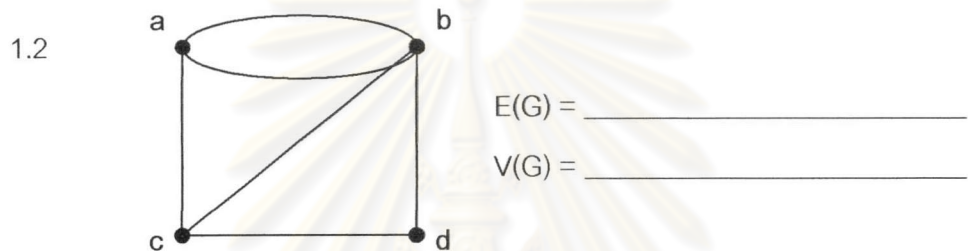
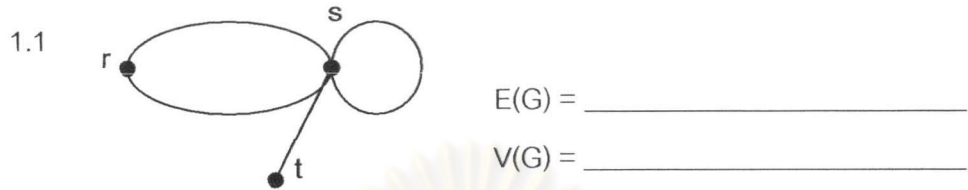


จะเห็นว่า เส้นเชื่อมที่เป็นวงวนที่จุดยอด x คือ xx จำนวน 2 เส้น และมีเส้นเชื่อมขนานคือ yz จำนวน 2 เส้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.3
เส้นเชื่อมขนานและวงวน

1. จงหา $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ที่กำหนดให้



2. กำหนดให้ $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ และ $E(G) = \{v_1v_1, v_1v_2, v_1v_2, v_2v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$

2.1 จงวาดกราฟ G

2.2 กราฟ G มีเส้นเชื่อมขนานหรือไม่ ถ้ามีแล้วเส้นเชื่อมขนานคือเส้นเชื่อมใด

ตอบ _____

2.3 กราฟ G มีวงวนหรือไม่ ถ้ามีแล้ววงวนอยู่ที่จุดยอดจุดใดบ้าง

ตอบ _____

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 1 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ประยุกต์การแปลงปัญหาเป็นกราฟ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถประยุกต์การแปลงปัญหาเป็นกราฟได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถแก้ปัญหจากกราฟได้อย่างถูกต้อง

สาระสำคัญ

การแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมีขั้นตอน ดังนี้

1. การแปลงปัญหาต่าง ๆ ให้เป็นกราฟ
2. วิเคราะห์ปัญหา และใช้รูปกราฟในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 223 – 228

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้

1. ครูกล่าวถึงปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก ซึ่งเป็นปัญหาที่นับว่าเป็นจุดเริ่มต้นของเรื่องทฤษฎีกราฟ
2. จากนั้นครูเชื่อมโยงจากปัญหาคอนิกส์เบิร์ก สู่ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันที่เราสามารถใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟในการแก้ปัญหาได้
3. ครูยกตัวอย่างประโยชน์ และการใช้กราฟ ที่พบเห็นในวิชาต่าง ๆ และชีวิตประจำวัน (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 223)

4. ครูกล่าวเชื่อมโยงต่อไปถึงตัวอย่างการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยการใช้กราฟ (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 225) พร้อมทั้งอธิบายการแก้ปัญหาด้วยทฤษฎีกราฟ อย่างละเอียด

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

5. ครูใช้คำถามถามนักเรียนทั้งห้อง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดว่าเราจะนำกราฟไปใช้ใน ชีวิตประจำวันได้อย่างไรบ้าง ซึ่งในบางครั้งเราอาจจะนำไปใช้อย่างที่เราไม่ทราบว่าเป็นเรื่องของ กราฟก็เป็นไปได้

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

6. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มออกเป็น 4 กลุ่ม จำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มเท่า ๆ กัน
7. เมื่อแบ่งกลุ่มเรียบร้อยแล้ว ครูให้นักเรียนหาประธาน รองประธาน และเลขานุการของ กลุ่ม แล้วเขียนรายชื่อสมาชิกในกลุ่มส่งครู

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

8. ครูให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมสัมมนา
9. นักเรียนจะต้องช่วยกันคิดปัญหาที่นักเรียนพบอยู่ในชีวิตประจำวันที่นักเรียนสามารถใช้ กราฟช่วยในการแก้ปัญหาได้ รวมทั้งสิ่งต่าง ๆ ที่นักเรียนพบเห็นว่ามีการใช้กราฟในเรื่องทฤษฎี กราฟเบื้องต้นไปประยุกต์ใช้และเป็นประโยชน์ โดยที่ประธานของกลุ่มจะต้องเป็นคนดำเนินการ และควบคุมการสัมมนา

10. นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะต้องหาข้อสรุปของกลุ่ม และคิดวิธีการนำเสนอข้อสรุปที่ได้ (เวลาในการนำเสนอไม่เกิน 5 นาที) ซึ่งนักเรียนจะใช้วิธีการใดก็ได้ เช่น การบรรยาย การแสดง บทบาทสมมติ การใช้ชาร์ตต่าง ๆ เป็นต้น

11. นักเรียนจะต้องแบ่งงานกันทำงานในส่วนให้เหมาะสม

12. เมื่อนักเรียนได้ข้อสรุปและแบ่งงานภายในกลุ่มเรียบร้อยแล้ว นักเรียนสามารถออกมา หยิบอุปกรณ์ที่จำเป็นในการนำเสนอที่ครูเตรียมเอาไว้ได้

13. ครูให้เวลาในการทำกิจกรรมประมาณ 15 นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

14. ครูแจกใบคะแนนการนำเสนอกิจกรรมให้นักเรียนกลุ่มละ 1 ใบ เพื่อให้นักเรียนให้ คะแนนการนำเสนอกิจกรรมของเพื่อนกลุ่มอื่น

15. ครูให้นักเรียนออกมานำเสนอผลการสัมมนาของกลุ่ม โดยใช้เวลานำเสนอกลุ่มละไม่ เกิน 5 นาที

16. เมื่อนักเรียนนำเสนอเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการนำเสนอของเพื่อน (ทั้งข้อดีและข้อเสียของกลุ่ม)

17. เมื่อทุกกลุ่มนำเสนอเรียบร้อยแล้ว ครูให้เวลานักเรียนแต่ละกลุ่มปรึกษากันประมาณ 1-2 นาที เพื่อให้คะแนนเพื่อนกลุ่มอื่น ๆ พร้อมทั้งให้เหตุผล

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

18. ครูรวบรวมคะแนนจากใบคะแนนการนำเสนอกิจกรรม

19. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำกิจกรรมสัมมนาในครั้งนี้ ในด้านการทำงาน ร่วมกัน การแบ่งงาน ความคิดสร้างสรรค์ และด้านอื่น ๆ

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

20. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 3 ให้นักเรียนแต่ละคน

21. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ เรื่องประโยชน์ของกราฟ และการแปลงปัญหาเป็นกราฟ อีกครั้ง

22. ครูให้นักเรียนทำเอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.4 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 227-228) เป็นการทำงาน

สื่อการเรียนรู้

1. อุปกรณ์ในการนำเสนอกิจกรรม เช่น กระดาษขนาด 1x1 เมตร, สีเมจิก, กระดาษสี เป็นต้น
2. ใบคะแนนการนำเสนอกิจกรรม
3. เอกสารใบความรู้ที่ 1.3 ประโยชน์ของกราฟ และการแปลงปัญหาเป็นกราฟ
4. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 1.4 การแปลงปัญหาเป็นกราฟ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากการนำเสนอผลการสัมมนา
2. สังเกตจากคะแนนที่เพื่อนประเมินให้
3. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำสัมมนา
2. สังเกตจากการนำเสนอผลการสัมมนา
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการนำเสนอผลการสัมมนา
2. สังเกตจากคะแนนที่เพื่อนประเมินให้

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารใบความรู้ที่ 1.3 ประโยชน์ของกราฟและการแปลงปัญหาเป็นกราฟ

ประโยชน์ของกราฟ

ในปัจจุบันมีผู้สนใจในเรื่องทฤษฎีกราฟเป็นจำนวนมาก เนื่องจากทฤษฎีกราฟมีประโยชน์ และถูกนำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาอื่น ๆ มากมาย เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สังคมศาสตร์ เป็นต้น

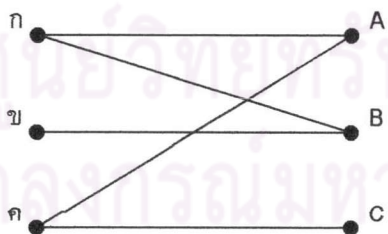
ตัวอย่างที่ 1.7 การใช้กราฟแทนเส้นทางการติดต่อ/สื่อสารระหว่างหน่วยงานต่าง ๆ



จุดยอดแทนหมู่บ้าน และ เส้นเชื่อมแทนเส้นทางการติดต่อของหมู่บ้าน

ตัวอย่างที่ 1.8 การใช้กราฟแทนสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น การแบ่งงานให้คนงาน

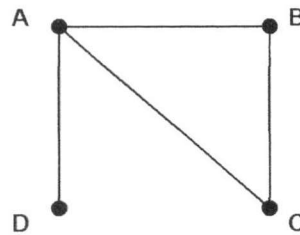
การแบ่งงาน 3 อย่าง คือ A, B และ C ให้คน 3 คน คือ ก, ข และ ค โดยที่ ก เหมาะสมกับงาน A และ B, ส่วน ข เหมาะสมกับงาน B และ ค เหมาะสมกับงาน A และ C



จุดยอดแทนคนกับงาน และเส้นเชื่อมแทนความเหมาะสม

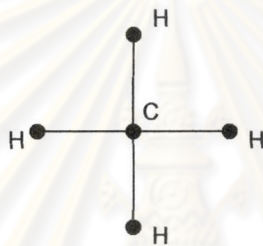
ตัวอย่างที่ 1.9 การใช้กราฟแทนความสัมพันธ์ของบุคคลต่าง ๆ (Friendship graph) เช่น กราฟแสดงความเป็นเพื่อน

- A เป็นเพื่อนกับ B, C และ D
- B เป็นเพื่อนกับ A และ C
- C เป็นเพื่อนกับ A และ B
- D เป็นเพื่อนกับ A



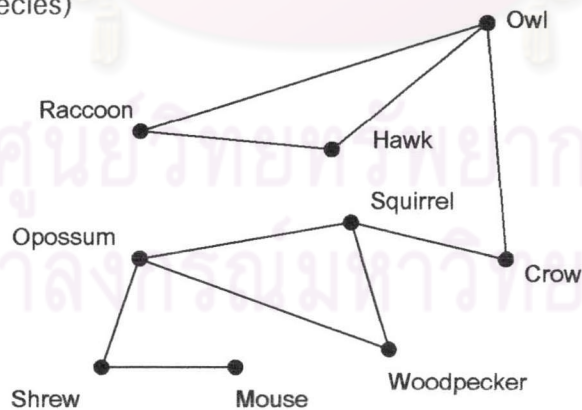
จุดยอดแทนคน และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ความเป็นเพื่อน

ตัวอย่างที่ 1.10 การใช้กราฟในวิทยาศาสตร์กายภาพ เช่น การอธิบายส่วนประกอบของโมเลกุล



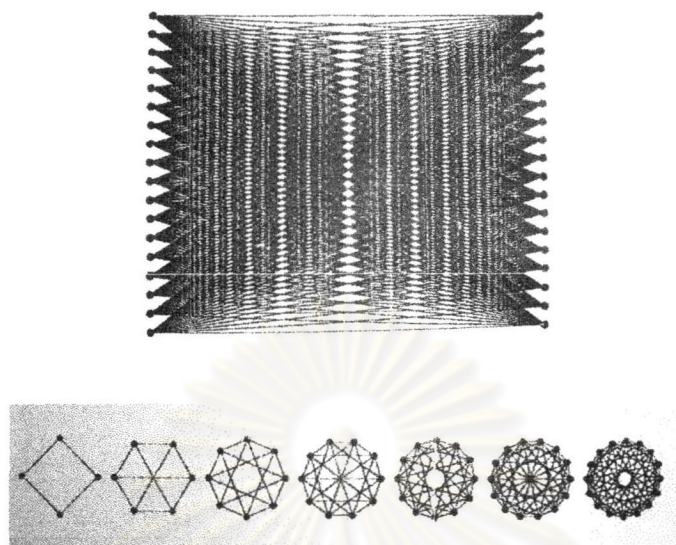
กราฟแสดงส่วนประกอบของโมเลกุลของ CH_4 โดยที่ จุดยอดแทนอะตอม และเส้นเชื่อมแทนพันธะระหว่างอะตอม

ตัวอย่างที่ 1.11 การใช้กราฟในนิเวศวิทยา (Ecology) เช่น โมเดล (models) การแข่งขันของสัตว์ในแต่ละสปีชีส์ (Species)



กราฟแสดงการแข่งขันระหว่างสัตว์แต่ละสปีชีส์ โดยที่ จุดยอดแทนสัตว์ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์แบบแข่งขัน

ตัวอย่างที่ 1.12 การใช้กราฟในงานศิลปะ



การแปลงปัญหาเป็นกราฟ

เราทราบถึงประโยชน์ต่าง ๆ ของกราฟในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมาบ้างแล้ว ดังนั้นเราสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งกราฟนั้นจะช่วยทำให้เรามองเห็นภาพหรือปัญหาได้ชัดเจนมากขึ้น และสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.13 ปัญหาเกี่ยวกับการแบ่งงาน มีอยู่ว่า

สมมติว่ามีตำแหน่งงานอยู่ 4 ตำแหน่ง คือ A, B, C และ D และมีพนักงานที่มีความชำนาญในงานดังนี้

- ก มีความชำนาญในงาน A
- ข มีความชำนาญในงาน A, B และ C
- ค มีความชำนาญในงาน C และ D
- ง มีความชำนาญในงาน A และ B

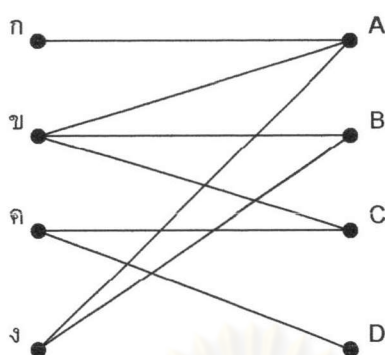
ต้องการมอบหมายงานให้พนักงานได้ทำงานที่ตนเองชำนาญ จะสามารถเลือกพนักงานอย่างไร

วิธีทำ จำลองปัญหานี้ด้วยกราฟ G โดยที่

จุดยอดแทนคนและตำแหน่งงาน ดังนี้ $V(G) = \{ก, ข, ค, ง, A, B, C, D\}$

เส้นเชื่อมแทนความชำนาญ ดังนี้ $E(G) = \{กA, ขA, ขB, ขC, คC, คD, งA, งB\}$

แปลงปัญหาเป็นกราฟ G ได้ดังนี้



เลือกพนักงาน โดยพิจารณาจากทางซ้ายมือจะเห็นว่า (ก) ชำนาญงานเพียงอย่างเดียวคือ A ดังนั้นให้ (ก) ทำงาน A, พิจารณาต่อ จะเห็นว่า (ง) ชำนาญงาน 2 อย่างคือ A และ B แต่ (ก) ทำงาน A แล้ว ดังนั้นให้ (ง) ทำงาน B, พิจารณาต่อ จะเห็นว่า (ข) ชำนาญงาน 3 อย่าง คือ A, B และ C แต่ งาน A และ B ให้ (ก) และ (ง) ทำแล้ว ดังนั้นให้ (ข) ทำงาน C, สุดท้ายจึงได้ว่า (ค) ทำงาน D จึงสรุปงานได้ดังนี้

- ก ทำงานในตำแหน่ง A
- ข ทำงานในตำแหน่ง C
- ค ทำงานในตำแหน่ง D
- ง ทำงานในตำแหน่ง B

ตัวอย่างที่ 1.14 ปัญหาในการจัดตารางสอบซ่อมให้นักเรียนที่สอบตกจำนวน 6 วิชา คือ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภาษาไทย สังคม และสุขศึกษา โดยนักเรียนที่ตกในแต่ละวิชาต้องสอบพร้อมกัน

- A ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ
- B ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาไทย
- C ตกวิชาคณิตศาสตร์และสุขศึกษา
- D ตกวิชาสุขศึกษาและสังคม
- E ตกวิชาสังคมและวิทยาศาสตร์
- F ตกวิชาวิทยาศาสตร์และภาษาไทย
- H ตกวิชาภาษาไทย และภาษาอังกฤษ

อยากทราบว่า จะต้องจัดสอบอย่างไรให้ใช้เวลาในการสอบซ่อมน้อยที่สุด (แต่ละวิชาใช้เวลาสอบซ่อม 1 คาบเท่ากัน)

วิธีทำ จำลองปัญหาด้วยกราฟ G โดยที่

จุดยอดแทนวิชา ดังนี้ $V(G) = \{m, n, o, p, q, r\}$

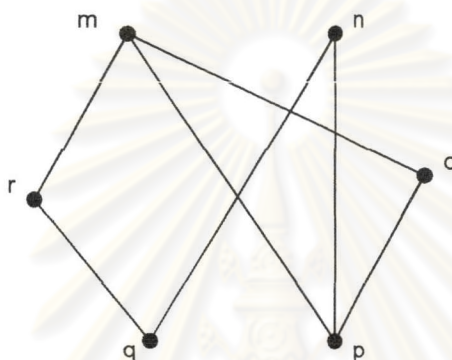
m แทนคณิตศาสตร์ n แทนวิทยาศาสตร์ o แทนภาษาอังกฤษ

p แทนภาษาไทย q แทนสังคมศึกษา r แทนสุขศึกษา

เส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของวิชาที่มีคนสอบตกทั้งสองวิชาพร้อมกัน เช่น A ตกวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ จะได้เส้นเชื่อม mo

ดังนั้นได้เซตของเส้นเชื่อม ดังนี้ $E(G) = \{mo, mp, mr, qr, nq, np, op\}$

แปลงปัญหาเป็นกราฟ G ได้ดังนี้



เลือกวิชาสอบในคาบที่ 1 เลือกคณิตศาสตร์ (m) ดังนั้น คาบที่ 1 สอบวิชาภาษาอังกฤษ (o), ภาษาไทย (p) และสุขศึกษา (r) ไม่ได้ เพราะมีเส้นเชื่อม แสดงว่ามีนักเรียนสอบตกวิชาดังกล่าวกับคณิตศาสตร์ คาบที่ 1 จึงเลือกได้ 2 วิชา คือวิทยาศาสตร์ (n) และ สุขศึกษา (r) ถ้าเราเลือก วิทยาศาสตร์ จะได้ว่า **คาบที่ 1 สอบซ่อมคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์**

เลือกวิชาสอบคาบที่ 2 เราเลือกภาษาอังกฤษ (o) เราสามารถเลือกวิชาได้ 2 วิชาคือ สังคม (q) และสุขศึกษา (r) ถ้าเราเลือกวิชาสังคม ดังนั้น **คาบที่ 2 สอบซ่อมวิชาภาษาอังกฤษและสังคม**

เลือกวิชาสอบคาบที่ 3 เราเลือกภาษาไทย (p) ซึ่งเราสามารถสอบพร้อมกับสุขศึกษา (r) ได้ ดังนั้น **คาบที่ 3 สอบซ่อมวิชาภาษาไทยและสุขศึกษา**

เราจะได้ตารางสอบซ่อม คือ

คาบที่ 1 คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์

คาบที่ 2 ภาษาอังกฤษ และสังคม

คาบที่ 3 ภาษาไทย และสุขศึกษา

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 6 และ 7 คำตอบที่ได้เป็นเพียงคำตอบแบบหนึ่งเท่านั้น นักเรียนอาจจะได้คำตอบของปัญหาในแบบอื่นที่ไม่เหมือนกันได้

2. จงเขียนกราฟ G แทนแผนที่ของประเทศไทยและประเทศเพื่อนบ้าน (พม่า, กัมพูชา, ลาว และ มาเลเซีย) โดยที่จุดยอดแทนประเทศ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของประเทศที่มีพรมแดนติดกัน และถ้าต้องการลงสีแผนที่ดังกล่าว โดยที่ประเทศที่มีพรมแดนติดกันต้องลงสีต่างกัน แล้วจะต้องใช้สีน้อยที่สุดกี่สี

วิธีทำ

ศูนย์วิทยพัชยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. โรงจอดรถแห่งหนึ่งมีรถจอดประจำ 6 คัน ในช่วงเวลาต่าง ๆ ดังนี้

คันที่ 1 จอดเวลา 7 นาฬิกา ถึง 15 นาฬิกา

คันที่ 2 จอดเวลา 12 นาฬิกา ถึง 21 นาฬิกา

คันที่ 3 จอดเวลา 9 นาฬิกา ถึง 13 นาฬิกา

คันที่ 4 จอดเวลา 16 นาฬิกา ถึง 24 นาฬิกา

คันที่ 5 จอดเวลา 8 นาฬิกา ถึง 18 นาฬิกา

คันที่ 6 จอดเวลา 22 นาฬิกา ถึง 8 นาฬิกาของวันถัดไป

อยากทราบโรงจอดรถแห่งนี้จะต้องมีที่สำหรับจอดรถอย่างน้อยที่สุดกี่คัน (แนะนำ : ให้จุดยอดแทนรถยนต์ และเส้นเชื่อมแทนความสัมพันธ์ของรถยนต์ที่จอดเวลาซ้อนกัน)

วิธีทำ



ศูนย์วิทยพัทยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ใบคะแนนการนำเสนอกิจกรรม (สำหรับนักเรียน)

ผู้ประเมิน (ชื่อกลุ่ม) _____

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่คะแนนในแต่ละด้านตามความคิดเห็นที่เป็นจริงและเหมาะสม โดยมีเกณฑ์ดังนี้

- 5 หมายความว่า ลักษณะการนำเสนออยู่ในระดับที่ดีมาก
- 4 หมายความว่า ลักษณะการนำเสนออยู่ในระดับที่ดี
- 3 หมายความว่า ลักษณะการนำเสนออยู่ในระดับที่ปานกลาง
- 2 หมายความว่า ลักษณะการนำเสนออยู่ในระดับที่น้อย
- 1 หมายความว่า ลักษณะการนำเสนออยู่ในระดับที่ควรปรับปรุง

การนำเสนอ	ความถูกต้องของเนื้อหาสาระ (5)	ความคิดสร้างสรรค์ (5)	การนำเสนอมีความสนใจ (5)	รวม (15 คะแนน)	ความคิดเห็นเพิ่มเติม
รายชื่อกลุ่มที่นำเสนอ					
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

แบบประเมินการนำเสนอกิจกรรม (สำหรับนักเรียน)

คำชี้แจง ใส่คะแนนในแต่ละด้านตามความคิดเห็นที่เป็นจริงและเหมาะสม โดยมีเกณฑ์ดังนี้

- 5 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ดีมาก
- 4 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ดี
- 3 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับปานกลาง
- 2 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่น้อย
- 1 หมายความว่า พฤติกรรมของนักเรียนอยู่ในระดับที่ควรปรับปรุง

การนำเสนอ	ความถูกต้อง (5)	ความคิดสร้างสรรค์ (5)	ความร่วมมือของกลุ่ม (5)	ความน่าสนใจ (5)	รวม (20 คะแนน)	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

ข้อเสนอแนะ/ปรับปรุงในการทำกิจกรรมครั้งต่อไป

.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 1 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ดีกรีของจุดยอด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของดีกรีของจุดยอดได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกดีกรีของจุดยอดของกราฟที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟคือจำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v
ใช้สัญลักษณ์ $\deg v$ แทนดีกรีของจุดยอด v

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 229 – 233

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้

1. ครูกล่าวถึงส่วนประกอบของกราฟว่ามี 2 ส่วนคือเส้นเชื่อมที่นักเรียนเรียนมาแล้วในคาบที่ผ่านมา
2. จากนั้นครูกล่าวนำเข้าสู่บทเรียนที่จะเรียนในคาบนี้ว่า “สำหรับคาบนี้เราจะเรียนเกี่ยวกับจุดยอดของกราฟกัน”
3. ครูยกตัวอย่างกราฟที่ 2.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 229-230) และใช้คำถามชี้แนะ ให้นักเรียนพิจารณาจำนวนทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอดต่าง ๆ ของกราฟ

4. นักเรียนจะได้คำตอบว่า มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด a จำนวน 2 ครั้ง (คือ ab และ ac) มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด b จำนวน 3 ครั้ง (คือ ab, bc และ bc) มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด c จำนวน 4 ครั้ง (คือ ac, bc, bc และ cd) และมีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด d จำนวน 3 ครั้ง (คือ cd และ dd โดยที่ dd เกิดกับจุดยอด d จำนวน 2 ครั้ง)

5. ครูบอกนิยามของดีกรีของจุดยอดให้นักเรียนฟัง ซึ่งจากตัวอย่าง จะได้ว่า $\text{deg}(a) = 2$, $\text{deg}(b) = 3$, $\text{deg}(c) = 4$ และ $\text{deg}(d) = 3$

6. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนถามข้อสงสัยเกี่ยวกับดีกรีของจุดยอด

7. ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติม (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 230) โดยครูใช้คำถามชี้แนะ เพื่อให้นักเรียนตอบจนได้คำตอบที่ถูกต้อง

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

8. ครูให้นักเรียนวาดกราฟที่มีจุดยอดดีกรี 3 โดยมีจำนวนจุดยอดและจำนวนเส้นเชื่อมเท่าใดก็ได้ เพื่อเป็นการทดสอบความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับดีกรีของจุดยอดอีกครั้ง

9. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกแสดงกราฟที่นักเรียนวาด

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

10. ครูให้นักเรียนจับคู่เพื่อเล่น “เกมแตกหน่อ”

11. ครูแจกใบบันทึกผลการแข่งขันให้นักเรียนแต่ละคน ซึ่งใบบันทึกผลการแข่งขันจะแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่ม A และกลุ่ม B จำนวนเท่า ๆ กัน (ดูจากหัวกระดาษ)

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

12. ครูอธิบายการเล่นเกมแตกหน่อให้นักเรียนฟัง พร้อมทั้งยกตัวอย่าง (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในเอกสารกิจกรรมเกมแตกหน่อ)

13. เกมแตกหน่อ เป็นเกมที่นักเรียนจะต้องสร้างกราฟ โดยการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด เมื่อนักเรียนลากเส้นเชื่อมแล้ว จะทำให้เกิดจุดยอดบนเส้นเชื่อมที่เกิดขึ้นใหม่

14. นักเรียนจะต้องสลับกันลากเส้นเชื่อม โดยที่ดีกรีของจุดยอดต้องไม่เกิน 3 และเส้นเชื่อมแต่ละเส้นห้ามตัดกัน เกมจะสิ้นสุดเมื่อนักเรียนคนใดคนหนึ่งไม่สามารถลากเส้นเชื่อมได้ตามเงื่อนไข

15. ครูให้นักเรียนลองเล่นเกมกับคู่ของตนเองดู 1 ครั้งเพื่อความเข้าใจในกติกาการเล่น และครูเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีข้อสงสัยได้ซักถาม

16. ครูให้นักเรียนจับคู่กันเพื่อทำกิจกรรม โดยให้นักเรียนที่ถือใบบันทึกกลุ่ม A จับคู่กับนักเรียนที่ถือใบบันทึกกลุ่ม B และเริ่มทำการแข่งขันกัน พร้อมทั้งบันทึกผลการแข่งขัน

17. ถ้าคูใดทำการแข่งขันเสร็จสิ้นแล้วให้นักเรียนไปจับคู่แข่งขันกับคนอื่น ๆ ต่อไป โดยที่นักเรียนจะต้องแข่งขันกับกลุ่มตรงข้ามเท่านั้น

18. นักเรียนจะจับคู่แข่งขันไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งหมดเวลาการแข่งขัน (ประมาณ 15 นาที) โดยมีครูเป็นกรรมการกลางคอยดูแล ความเรียบร้อยและควบคุมเวลาการแข่งขัน

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

19. ครูให้นักเรียนรวบรวมใบบันทึกผลการแข่งขัน และช่วยกันสรุปคะแนนการแข่งขัน (ฝ่ายชนะจะได้คะแนน 1 คะแนน)

20. ครูให้นักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุดในการแข่งขันแต่ละฝ่าย (ถือเป็นตัวแทนกลุ่ม) ออกมาแข่งขันกัน เพื่อให้เพื่อนในห้องดู โดยครูเปลี่ยนจำนวนจุดยอดเพิ่มเป็น 3 จุด ส่วนกติกาต่าง ๆ ยังคงเหมือนเดิม

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

21. ครูและนักเรียนช่วยกันวิเคราะห์การแข่งขันในคู่สุดท้าย โดยครูอาจจะชี้ให้เห็นถึงการแก้ปัญหา การวางแผนในการเล่น

22. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายสิ่งที่ได้จากการทำกิจกรรมเกมแตกหน่อ

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

23. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 2.1 เรื่องดีกรีของจุดยอด

24. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้เรื่อง ดีกรีของจุดยอด ตามเอกสารใบความรู้ที่ 4

25. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 2.1 และให้นักเรียนทำเอกสารแบบฝึกหัด 2.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 233) เป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. ใบบันทึกผลการแข่งขันกิจกรรมเกมแตกหน่อ
2. แผ่นใสการอธิบายการทำกิจกรรมเกมแตกหน่อ
3. เอกสารใบความรู้ที่ 2.1 ดีกรีของจุดยอด
4. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 2.2 ดีกรีของจุดยอด

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากการทำตอบคำถาม
2. สังเกตจากผลการเล่นเกม
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

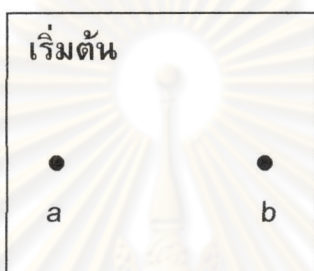
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

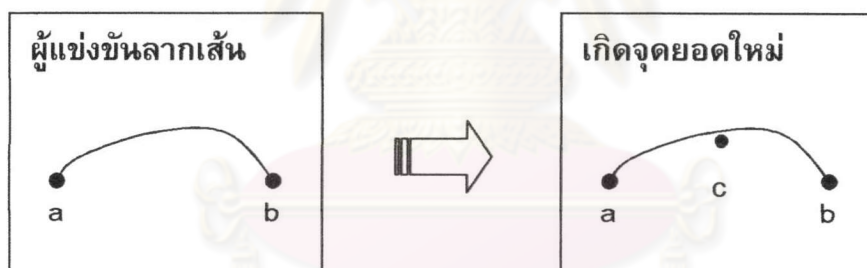
กิจกรรมเกมแตกหน่อ

กติกาในการเล่น

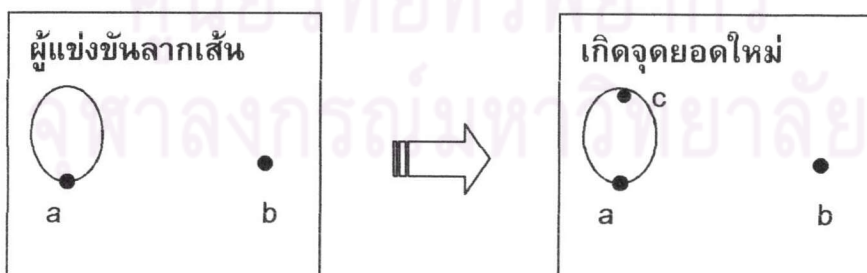
1. เกมเริ่มจากจุด 2 จุด (ให้ชื่อว่าจุด a และ b) ดังรูป ซึ่งก็คือจุดยอดของกราฟ
2. ผู้แข่งขันเสี่ยงทายเพื่อหาคนที่จะเริ่มเล่นก่อน
3. ผู้แข่งขันแต่ละคนจะผลัดกันวาดเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดคนละ 1 เส้น โดยเมื่อผู้แข่งขันคนหนึ่งลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดแล้วจะทำให้เกิดจุดยอดใหม่ที่จุดกึ่งกลางเส้นเชื่อมดังตัวอย่าง



ตัวอย่างที่ 1 ผู้แข่งขันลากเส้นเชื่อมธรรมดา



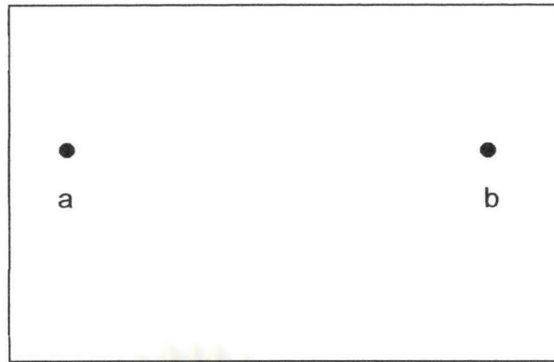
ตัวอย่างที่ 2 ผู้แข่งขันลากเส้นเชื่อมแบบวงวน



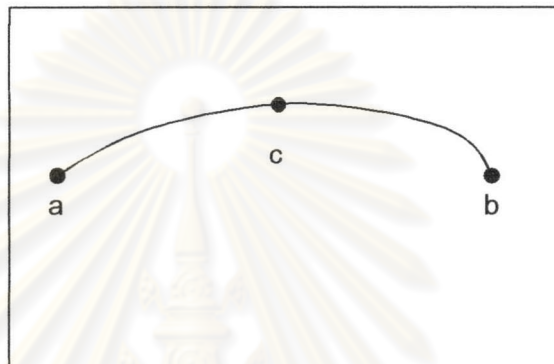
4. ดีกรีของจุดยอดในแต่ละจุดต้องไม่เกิน 3
5. ห้ามผู้แข่งขันลากเส้นเชื่อมทับกัน
6. สิ้นสุดการแข่งขันเมื่อผู้แข่งขันไม่สามารถวาดเส้นเชื่อมของกราฟได้ตามข้อกำหนด

ตัวอย่างการแข่งขัน

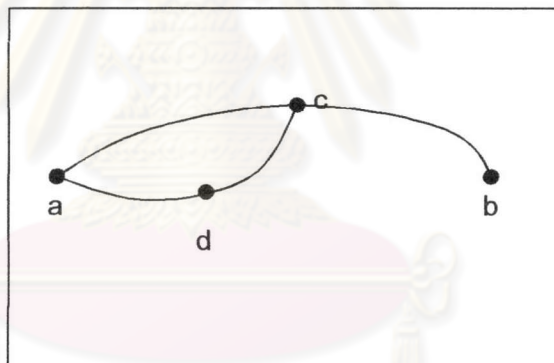
เริ่มต้น



ผู้แข่งขันคนที่ 1

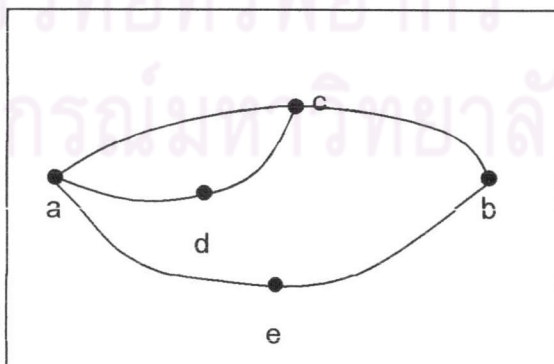


ผู้แข่งขันคนที่ 2



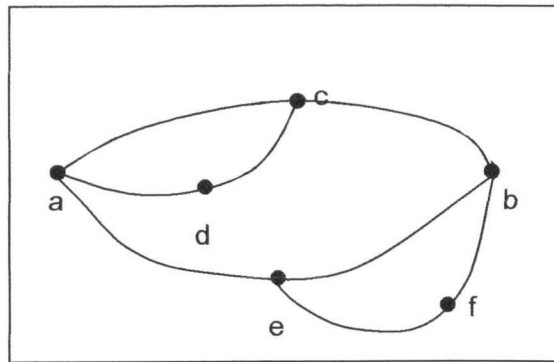
ข้อสังเกต จุดยอด c มีดีกรีเท่ากับ 3 ดังนั้น ลากเส้นเชื่อมเพิ่มไม่ได้แล้ว

ผู้แข่งขันคนที่ 1



ข้อสังเกต จุดยอด a และ c มีดีกรีเท่ากับ 3 ดังนั้น ลากเส้นเชื่อมเพิ่มไม่ได้แล้ว

ผู้แข่งขันคนที่ 2



ข้อสังเกต จุดยอด a, b, c และ e มีดีกรีเท่ากับ 3 ดังนั้นลากเส้นเชื่อมเพิ่มไม่ได้แล้ว ทำให้เหลือจุดยอด d และ f เท่านั้นซึ่งผู้แข่งขันคนที่ 1 ไม่สามารถลากเส้นเชื่อมได้ เพราะกติกาถือว่าห้ามลากเส้นเชื่อมทับกัน ดังนั้นผู้แข่งขันคนที่ 1 จึงแพ้

- หมายเหตุ
1. ผู้แข่งขันควรใช้ปากกาคณะสีในการแข่งขันเพื่อง่ายต่อการตรวจสอบความถูกต้องเมื่อเกิดข้อสงสัย
 2. การทำกิจกรรมเกมแตกหน่อนี้สามารถเริ่มต้นจากจุดยอดที่จุดก็ได้ และสามารถกำหนดดีกรีของจุดยอดเท่าไรก็ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ใบบันทึกผลการแข่งขันกิจกรรมเกมแตกหน่อ

1

ชื่อ - สกุล (หรือ กลุ่มที่ 2)

การแข่งขัน ครั้งที่	คู่แข่งชั้น (ชื่อ-สกุล)	ผลการแข่งขัน (ชนะ/แพ้)	ลายมือชื่อ คู่แข่งชั้น
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

สรุปผลการแข่งขัน

แข่งขันทั้งหมด ครั้ง

ชนะทั้งหมด ครั้ง

แพ้ทั้งหมด ครั้ง

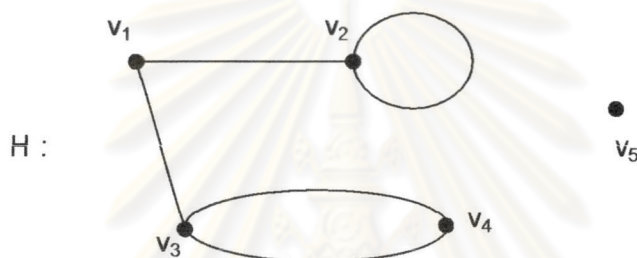
เอกสารใบความรู้ที่ 2.1 ดีกรีของจุดยอด

ดีกรีของจุดยอด

บทนิยาม

ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v แทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{deg}(v)$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้กราฟ H ดังรูป



จงหาดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟ H

วิธีทำ

จุดยอด	จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด
v_1	2
v_2	3
v_3	3
v_4	2
v_5	0

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\text{deg}(v_1) = 2$$

$$\text{deg}(v_2) = 3$$

$$\text{deg}(v_3) = 4$$

$$\text{deg}(v_4) = 2$$

$$\text{deg}(v_5) = 0$$

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 2.1
 ดีกรีของจุดยอด

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูปต่อไปนี้ จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟ และบอกว่าจุดยอดแต่ละจุดของกราฟเป็นจุดยอดชนิดใดบ้าง (จุดยอดคู่หรือจุดยอดคี่)

1.1

deg(a) = _____ deg(b) = _____
 deg(c) = _____ deg(d) = _____
 deg(e) = _____

1.2

deg(a) = _____ deg(b) = _____
 deg(c) = _____ deg(d) = _____
 deg(e) = _____

1.3

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 6

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง แนวเดิน กราฟเชื่อมโยง รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของแนวเดินได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถหาแนวเดิน $u-v$ ของกราฟได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถบอกนิยามของกราฟเชื่อมโยงได้อย่างถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชื่อมโยงหรือไม่ ได้อย่างถูกต้อง
5. นักเรียนสามารถบอกนิยามของรอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักรได้อย่างถูกต้อง
6. นักเรียนสามารถหารอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักรของกราฟที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ให้ u และ v เป็นจุดยอดของกราฟ

แนวเดิน $u - v$ ($u - v$ walk) คือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v และแต่ละเส้นเชื่อม e_i จะเกิดกับจุดยอด u_{i-1}

และ u_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

บทนิยาม

กราฟ G เรียกว่า กราฟเชื่อมโยง (connected graph) ก็ต่อเมื่อสำหรับจุดยอด u และจุดยอด v ใดๆ ที่เป็นจุดยอดต่างกันในกราฟ G มีแนวเดิน $u - v$

บทนิยาม

รอยเดิน (trail)	คือ แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันทั้งหมด
วิถี (path)	คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกันทั้งหมด
วงจร (circuit)	คือ รอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน
วัฏจักร (cycle)	คือ วิถี มีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

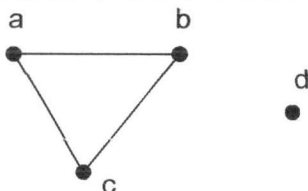
สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 239 – 244

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียน โดยการกล่าวถึงปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก ซึ่งนับว่าเป็นจุดเริ่มต้นของ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
2. ครูเชื่อมโยงจากปัญหาสะพานสู่เรื่องของการเดินทางว่า “จากปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์กนั้นเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการเดินทาง จากจุดหนึ่งไปยังจุดต่าง ๆ ของเมือง ซึ่งเมื่อเราแปลงปัญหาเป็นรูปกราฟ โดยใช้เส้นเชื่อมแทนสะพาน และจุดยอดแทนตัวเมืองและเกาะ ก็เปรียบเสมือนการเดินทางหรือเรียกง่าย ๆ ว่า “แนวเดิน” จากจุดยอดจุดหนึ่งไปยังจุดยอดจุดอื่น ๆ ของกราฟ โดยผ่านเส้นเชื่อมนั่นเอง ซึ่งวันนี้เราจะมาเรียนการเดินทางหรือแนวเดินของกราฟในรูปแบบต่าง ๆ กัน”
3. ครูอธิบายความหมายของแนวเดิน พร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 3.1 ประกอบ (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 240)
4. ครูสุ่มเรียกนักเรียนให้ลองหาแนวเดิน A-D แบบอื่น ๆ
5. หลังจากที่นักเรียนเข้าใจเรื่องแนวเดินแล้ว ครูกล่าวเข้าสู่บทเรียนเรื่องกราฟเชื่อมโยงต่อไป โดยการยกตัวอย่างกราฟดังนี้ แล้วให้นักเรียนหาแนวเดิน a-d



6. นักเรียนจะตอบว่าไม่สามารถหาแนวเดินจาก a ไป d ได้ ครูถามต่อไปว่า เพราะเหตุใด ซึ่งจะได้คำตอบว่า กราฟไม่ได้เชื่อมต่อกัน หรือกราฟไม่เชื่อมโยงนั่นเอง
7. ครูบอกนิยามของกราฟเชื่อมโยงให้นักเรียนฟังพร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 3.2 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 241)
8. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 3.1 จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ที่เรียนในคาบ
9. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 242) และให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (คาบที่ 2)

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

10. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาเฉลยเอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.1 พร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

11. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่มออกเป็น 5 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีสมาชิกเท่า ๆ กัน
12. ครูจะต้องแบ่งกลุ่มนักเรียน โดยให้สมาชิกแต่ละกลุ่มมีนักเรียนที่เก่ง ปานกลาง และอ่อน เท่า ๆ กัน (โดยพิจารณาจากเกรดวิชาคณิตศาสตร์ในเทอมที่ผ่านมา)

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

13. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมวิ่งเปี้ยว โดยครูอธิบายกิจกรรมให้นักเรียนแต่ละกลุ่มฟัง (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในเอกสารการทำกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 1)
14. กิจกรรมวิ่งเปี้ยว 1 นี้ ครูจะกำหนดกราฟมาให้นักเรียน 1 รูป แล้วให้นักเรียนหา “แนวเดิน” ซึ่งจะมีเงื่อนไขต่าง ๆ ในการเดินทาง
15. เมื่อครูให้หาแนวเดินหนึ่ง เช่น แนวเดินทาง a ไป b นักเรียนจะต้องวางแผนกลุ่มว่าจะมีแนวเดินอย่างไร แล้วจึงออกไปลากเส้นกราฟ โดยนักเรียน 1 คนจะลากเส้นเชื่อมได้ 1 เส้นเท่านั้น กลุ่มใดทำได้ถูกต้องและเร็วที่สุดจะได้คะแนน 1 คะแนนในแต่ละข้อ
16. จากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรมวิ่งเปี้ยว 2 นักเรียนจะต้องผลัดกันวิ่งไปหยิบบัตรคำที่ละคน คนละ 1 ใบ เพื่อจับคู่บัตรคำที่สื่อถึงแนวเดินลักษณะเดียวกัน (คือแนวเดิน รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร)
17. ถ้านักเรียนหยิบบัตรคำที่ไม่เข้าคู่กันจะต้องนำกลับไปคืนในกล่อง แต่ถ้านักเรียนที่หยิบบัตรคำคู่กัน ก็ให้นำมาให้ครูตรวจถ้าถูกต้องจะได้คะแนน 1 คะแนน
22. ครูให้เวลาในการทำกิจกรรมประมาณ 15 นาที หรือจนกว่าบัตรคำในกล่องจะหมด

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

23. ครูและนักเรียนช่วยกันรวบรวมคะแนนในกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 1 และ 2

24. จากนั้นครูให้กลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุด ออกมาแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว ว่าได้รับอะไรจากเกมนี้อย่าง

25. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมา 1-2 คน เพื่อพูดคุยเกี่ยวกับกลุ่มขณะทำกิจกรรมเกมนี้

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

25. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายผลเกี่ยวกับการทำกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว ถึงหน้าที่ในการทำงานของแต่ละคน ความสามารถของแต่ละคน รวมถึงความร่วมมือกันของกลุ่ม

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

26. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับนิยามของแนวเดิน วงจร วิถี และวัฏจักรของกราฟอีกครั้ง

27. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.2 (ตามเอกสารสาระการ หน้า 243-244) ให้เป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. บอร์ดรูปกราฟขนาด 1x1 เมตร
2. กระดาษรูปกราฟสำหรับลากแนวเดิน (สำหรับกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 1)
3. ใบปัญหาแนวเดิน (สำหรับครูที่ใช้ในการถาม ในกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 1)
4. บัตรคำขนาด 6x8 นิ้ว (สำหรับกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 2)
5. กล่องใส่บัตรคำ ขนาดประมาณ 1x1x1 เมตร พร้อมเม็ดยึดโฟม
6. เอกสารใบความรู้ที่ 3.1 แนวเดินและกราฟเชื่อมโยง
8. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.1 กราฟเชื่อมโยง
9. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.2 รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรมเกม
2. สังเกตจากทำเอกสารแบบฝึกหัด
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการ ทำกิจกรรม และความร่วมมือของกลุ่ม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรมเกม
2. สังเกตจากทำเอกสารแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

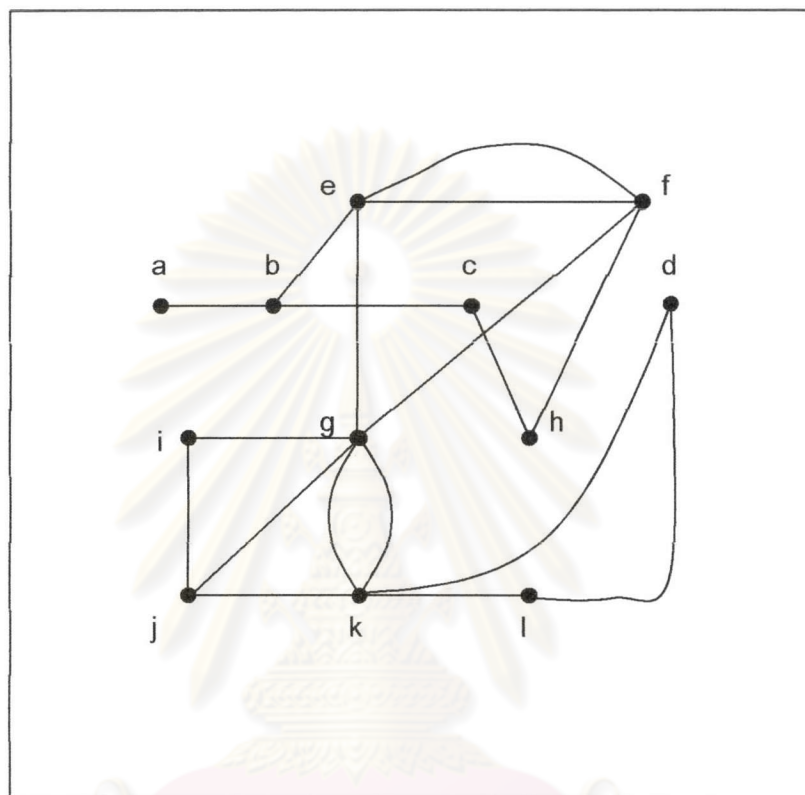
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

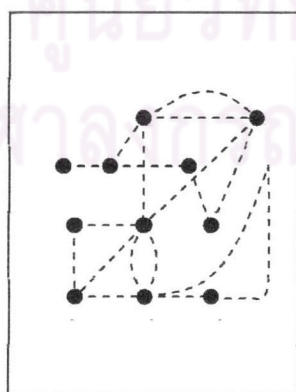
กิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรมเกมวิ่งเปี้ยว 1

1. บอร์ดรูปภาพขนาด 1x1 เมตร



2. กระดาษรูปภาพสำหรับลากแนวเดิน



3. ใบปัญหาแนวเดิน

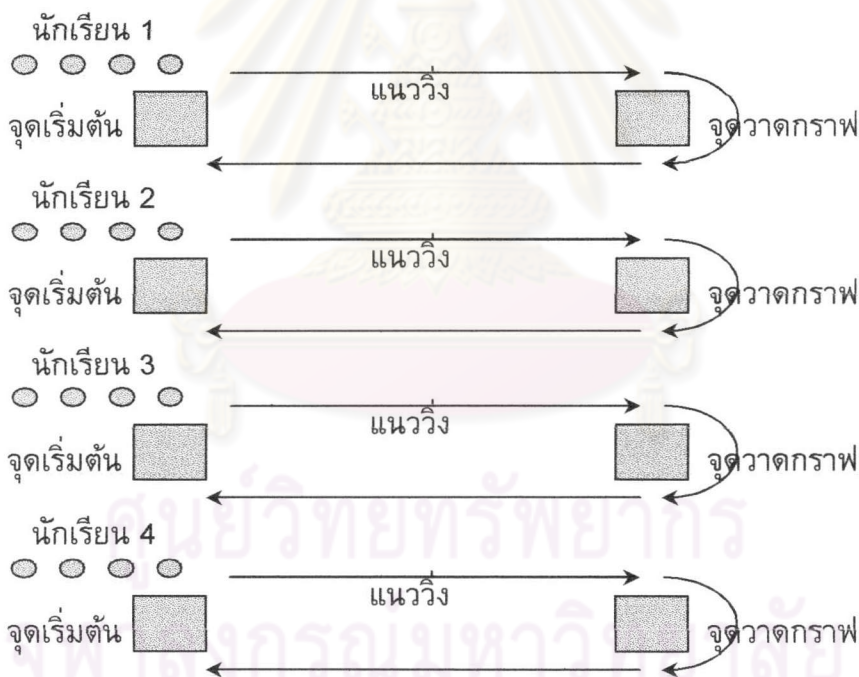
การเตรียมตัวในการทำกิจกรรม

1. ครูจะต้องเตรียมสถานที่ที่เหมาะสมกับการทำกิจกรรม
2. ครูจะเตรียมรูปภาพเพื่อให้นักเรียนได้ดู
3. ครูจะต้องเตรียมแนวเดินของกราฟให้ครอบคลุมทั้ง แนวเดิน รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร ซึ่งควรมีลักษณะที่หาไม่ได้ด้วย เช่น “จงหาแนวเดินจาก a ไป l ที่แนวเดินห้ามใช้เส้นเชื่อมซ้ำกัน” หรือ “จงหาจาก d โดยต้องผ่าน c แล้วกลับมาที่เดิม โดยห้ามใช้เส้นเชื่อมซ้ำกัน” หรือ “จงหาแนวเดินจาก a ผ่าน c แล้วกลับมาที่เดิม โดยห้ามซ้ำเส้นเชื่อม” (ซึ่งเป็นไปไม่ได้) เป็นต้น

วิธีการทำกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่มออกเป็น 5 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีสมาชิกเท่า ๆ กัน โดยให้สมาชิกแต่ละกลุ่มมีนักเรียนที่เก่ง ปานกลาง และไม่เก่งจำนวนเท่า ๆ กัน (โดยพิจารณาจากเกรดวิชาคณิตศาสตร์ในเทอมที่ผ่านมา)

2. สำหรับกิจกรรมนี้จะต้องมีการจัดพื้นที่ เพื่อทำกิจกรรม ดังรูป



3. กิจกรรมวิ่งเปี้ยวนี้ ครูจะกำหนดกราฟมาให้ให้นักเรียน 1 รูป แล้วให้นักเรียนหา “แนวเดิน” ซึ่งจะมีเงื่อนไขต่าง ๆ ในการเดินทาง

4. ครูจะกำหนดให้นักเรียนหาแนวเดินในรูปแบบและมีเงื่อนไขต่าง ๆ นักเรียนจะต้องวางแผนภายในกลุ่ม (ที่จุดเริ่มต้น) ว่าจะมีแนวเดินอย่างไร แล้วจึงวิ่งออกไปลากเส้นกราฟที่จุดวาดกราฟ โดยนักเรียน 1 คนจะลากเส้นเชื่อมได้ 1 เส้นเท่านั้น กลุ่มใดทำได้ถูกต้องและเร็วที่สุดจะได้คะแนน 1 คะแนนในแต่ละข้อ

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรมวิ่งเปี้ยว 2

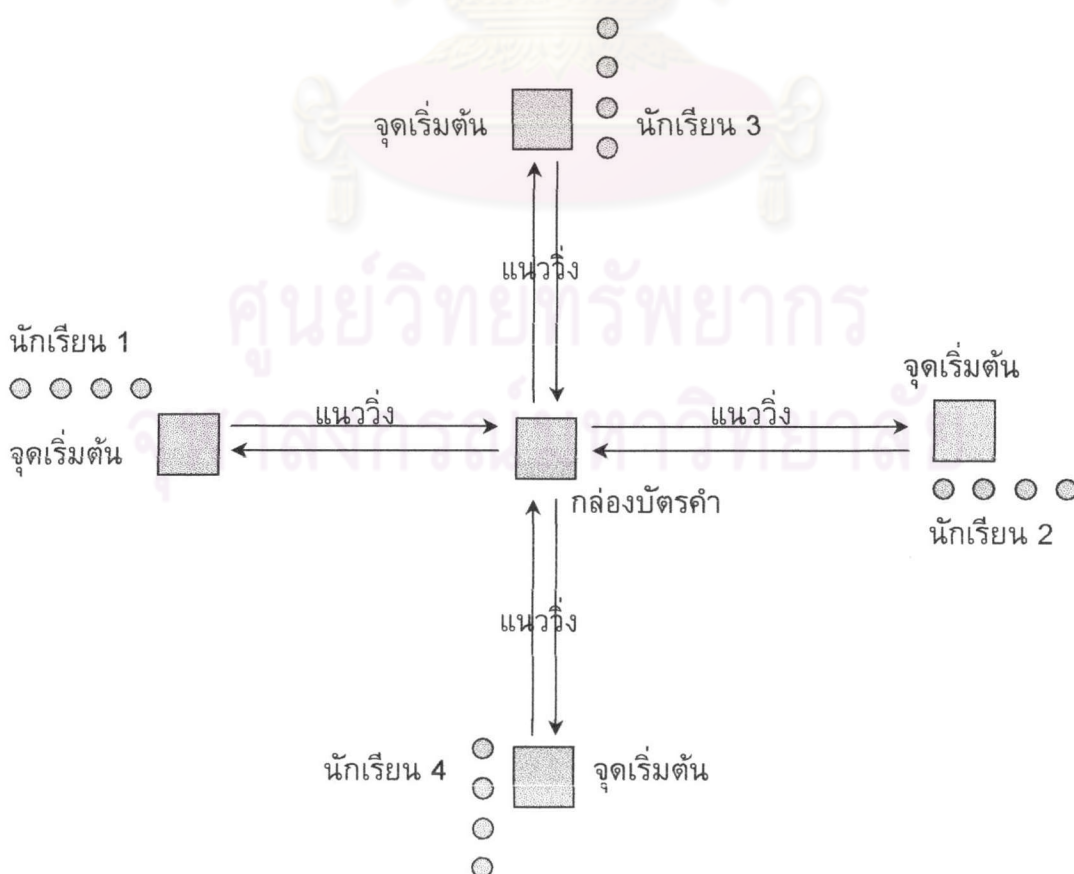
1. บัตรคำขนาด 6x8 นิ้ว
2. กล่องใส่บัตรคำ ขนาดประมาณ 1x1x1 เมตร พร้อมเม็ดโฟม
3. บอร์ดรูปภาพขนาด 1x1 เมตร

การเตรียมตัวในการทำกิจกรรม

1. ครูจะต้องเตรียมสถานที่ที่เหมาะสมกับการทำกิจกรรม
2. ครูจะเตรียมบัตรคำ และกล่องใส่บัตรคำ โดยที่บัตรคำควรสื่อถึง แนวเดินของกราฟให้ครอบคลุมทั้ง แนวเดิน รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร ซึ่งควรมีลักษณะการเขียนสื่อความหมายหลาย ๆ ลักษณะ เช่น “บทนิยามของแนวเดินแบบต่างๆ” หรือ “รูปภาพ” หรือ “การเขียนแนวเดินในลักษณะของตัวอักษร” (a, b, c, a) หรือ “ประโยคข้อความต่างๆ” เป็นต้น

วิธีในการทำกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนจัดกลุ่มออกเป็น 5 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีสมาชิกเท่า ๆ กัน โดยให้สมาชิกแต่ละกลุ่มมีนักเรียนที่เก่ง ปานกลาง และไม่เก่งจำนวนเท่า ๆ กัน (โดยพิจารณาจากเกรดวิชาคณิตศาสตร์ในเทอมที่ผ่านมา)
2. สำหรับกิจกรรมนี้จะต้องมีการจัดพื้นที่ เพื่อทำกิจกรรม ดังรูป



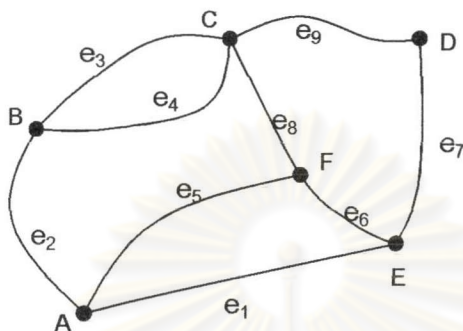
3. ครูยกรูปภาพ พร้อมทั้งกล่องใส่บัตรคำแนวดิน
4. เมื่อเริ่มเล่นเกม นักเรียนคนที่ 1 จะต้องวิ่งไปหยิบบัตรคำ 1 ใบ
5. เมื่อวิ่งกลับมาที่จุดเริ่ม นักเรียนคนที่ 2 จึงวิ่งไปหยิบบัตรคำอีก 1 ใบ แล้วนักเรียนในกลุ่มต้องพิจารณาว่าบัตรคำที่สื่อถึงแนวดินลักษณะเดียวกันหรือไม่ คู่เดียวกันหรือไม่ (คือ แนวดิน รอยดิน วิถี วงจร และวัฏจักร)
6. ถ้าเป็นคู่เดียวกันนักเรียนจะต้องให้นำบัตรคำมาให้ครูตรวจสอบ แต่ถ้าบัตรคำไม่ใช่คู่เดียวกัน นักเรียนคนที่ 3 ต้องนำบัตรคำใบหนึ่งกลับไปคืนแล้ว หยิบบัตรคำใบใหม่มาพิจารณา (นั่นแสดงว่าที่จุดเริ่มต้นนักเรียนแต่ละกลุ่มจะมีบัตรคำไม่เกิน 2 ใบ)
7. นักเรียนที่หยิบบัตรคำคู่กันได้จะได้คะแนน 1 คะแนน
6. ครูให้เวลาในการทำกิจกรรมประมาณ 15 นาที หรือจนกว่าบัตรคำในกล่องจะหมด



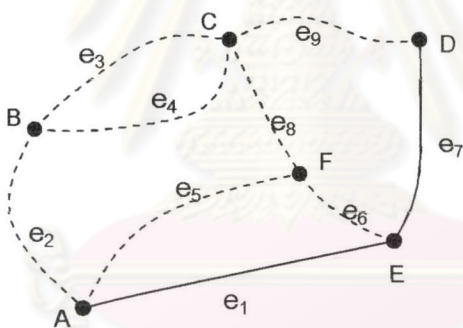
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารใบความรู้ที่ 3.1
 แนวเดินและกราฟเชื่อมโยง

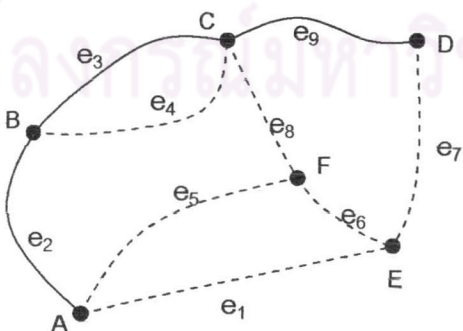
สมมติว่าแผนผังของเมืองหนึ่งแทนด้วยกราฟดังรูป โดยให้จุดยอดแทนอำเภอ และ เส้นเชื่อมแทนถนนที่เชื่อมระหว่างอำเภอสองอำเภอ



ในการเดินทางจากอำเภอ A ไปยังอำเภอ D มีเส้นทางการเดินทางหลายเส้นทาง เช่น **เส้นทางที่ 1** เดินทางดังรูป



ซึ่งเขียนเส้นทางการเดินทางได้ ดังนี้ A, e₁, E, e₇, D
เส้นทางที่ 2 เดินทางดังรูป



ซึ่งเขียนเส้นทางการเดินทางได้ ดังนี้ A, e₂, B, e₃, C, e₉, D

นอกจากนี้ยังมีเส้นทางในการเดินทางจาก A ไป D อีกหลายแบบ ซึ่งเส้นทางการเดินทางจาก A ไป D เรียกว่า “แนวเดิน A – D”

บทนิยาม

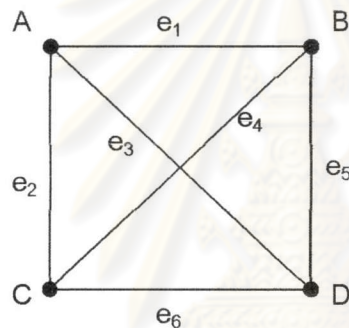
ให้ u และ v เป็นจุดยอดของกราฟ

แนวเดิน $u - v$ ($u - v$ walk) คือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

โดยเริ่มต้นที่จุดยอด u และสิ้นสุดที่จุดยอด v และแต่ละเส้นเชื่อม e_i จะเกิดกับจุดยอด u_{i-1} และ u_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงหาแนวเดิน จาก A ไป D

วิธีทำ แนวเดิน A – D มีหลายรูปแบบ เช่น

- 1) A, e_3 , D
- หรือ 2) A, e_1 , B, e_4 , C, e_2 , A, e_3 , D
- หรือ 3) A, e_2 , C, e_4 , B, e_1 , A, e_2 , C, e_6 , D เป็นต้น

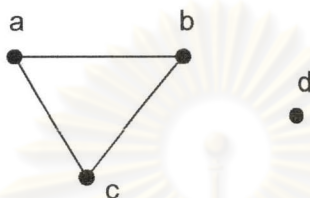
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

1. แนวเดิน $u - v$ ในกราฟ สามารถเดินทางซ้ำจุดยอดหรือเส้นเชื่อมได้
2. แนวเดิน $u - v$ กราฟอาจจะมีหลายรูปแบบ
3. สำหรับกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน (กราฟเชิงเดียว) สามารถเขียนแนวเดิน $u - v$ ด้วยลำดับของจุดยอดเท่านั้น (ไม่ต้องเขียนเส้นเชื่อม) เช่น A, e_2 , C, e_6 , D เขียนเป็น A, C, D เพราะว่าเส้นเชื่อมจากจุดยอด 2 จุดใด ๆ มีเส้นเดียว เราจึงทราบ

ว่าแวนเดินนั้นเป็นอย่างไร แต่ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อมขนาน หรือวงวน จะมีเส้นเชื่อมเชื่อมจุดยอดคู่หนึ่งหลายเส้น ซึ่งถ้าเราเขียนแวนเดินเฉพาะจุดยอดเท่านั้น จะทำให้อาจจะเกิดความสับสนว่าแวนเดินนั้นเป็นเส้นเชื่อมเส้นใด

กราฟเชื่อมโยง

ในบางครั้งเราไม่สามารถหาแวนเดินในกราฟได้ ถ้ากราฟไม่ได้เชื่อมต่อกัน เช่น กราฟ G เป็นดังรูป

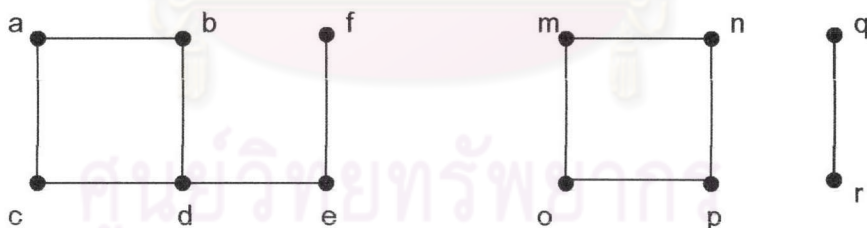


จะเห็นว่า เราไม่สามารถ หาแวนเดิน a-d ได้ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมใดเลยที่เชื่อมกับ จุดยอด d

บทนิยาม

กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง (connected graph)** ก็ต่อเมื่อสำหรับจุดยอด u และจุดยอด v ใดๆ ที่เป็นจุดยอดต่างกันในกราฟ G มีแวนเดิน $u - v$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ กราฟ G และ H ดังรูป



กราฟ G

กราฟ H

จะได้ว่า กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะสามารถหาแวนเดินของจุดยอดสองจุดใดๆ ในกราฟได้แต่กราฟ H ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะไม่สามารถหาแวนเดิน $m - q$ ได้

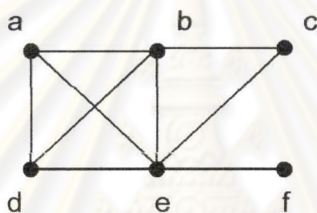
รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร

แนวเดิน $u-v$ ที่เป็นเส้นทางการเดินทางจาก u ไป v ซึ่งเราจะเดินทางอย่างไรก็ได้ แล้วยังมีเส้นทางการเดินทางที่มีลักษณะเฉพาะที่นักเรียนควรรู้จักได้แก่ รอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร

บทนิยาม

รอยเดิน (trail)	คือ แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันทั้งหมด
วิถี (path)	คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกันทั้งหมด
วงจร (circuit)	คือ รอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน
วัฏจักร (cycle)	คือ วิถี มีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป



- จงหา
- 1) รอยเดิน (trail) จากจุดยอด a ไป f
 - 2) วิถี (path) จากจุดยอด a ไป f
 - 3) วงจร (circuit) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b
 - 4) วัฏจักร (cycle) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b
 - 5) วงจร (circuit) ที่เริ่มต้นจากจุดยอด f

- วิธีทำ
- 1) รอยเดิน $a-f$ คือ a, e, b, d, e, f
(แนวเดินที่เส้นเชื่อมต่างกัน แต่ จุดยอดซ้ำกันได้)
 - 2) วิถี $a-f$ คือ a, b, d, e, f (แนวเดินที่จุดยอดต่างกัน)
 - 3) วงจรที่เริ่มต้นจากจุดยอด b คือ b, c, e, d, a, e, b
(รอยเดินหรือแนวเดินที่เส้นเชื่อมต่างกันซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ จุดยอด b)
 - 4) วัฏจักร ที่เริ่มต้นจากจุดยอด b คือ b, c, e, d, b
(วิถี หรือ แนวเดินที่จุดยอดต่างกัน ซึ่งจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียว)
 - 5) ไม่มีวงจรที่เริ่มต้นจากจุดยอด f

- ข้อสังเกต**
- 1) ในทำนองเดียวกับแนวเดิน จะได้ว่ารอยเดิน วิถี วงจร และวัฏจักร อาจจะมีได้หลายแบบที่ต่างกัน
 - 2) วิถี คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน ซึ่งทำให้แนวเดินนั้นเส้นเชื่อมจะต่างกันด้วย ดังนั้น แนวเดินแบบวิถี นับว่าเป็นรอยเดินด้วย
 - 3) วัฏจักร คือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน แต่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน ซึ่งทำให้แนวเดินนั้นเส้นเชื่อมจะต่างกันด้วย ดังนั้น แนวเดินแบบวัฏจักรนับว่าเป็นวงจรด้วย
 - 4) วัฏจักร นั้นเป็นแนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน ยกเว้น จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่เป็นจุดเดียวกัน



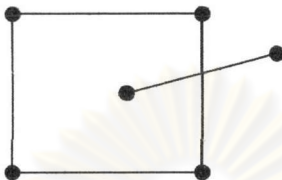
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.1
กราฟเชื่อมโยง

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

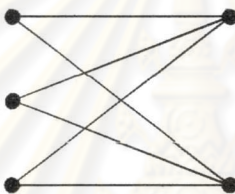
1. จงพิจารณากราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นกราฟเชื่อมโยงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1



.....
.....

1.2



.....
.....

1.3 $G=(V,E)$ เมื่อ $V(G) = \{a, b, c, d\}$ และ $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd\}$

.....
.....
.....

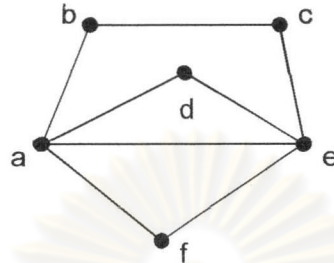
1.4 $G=(V,E)$ เมื่อ $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ และ $E(G) = \{ab, ac, bc, de\}$

.....
.....

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 3.2
รอยเดิน วิธี วงจร และวัฏจักร

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จงหา

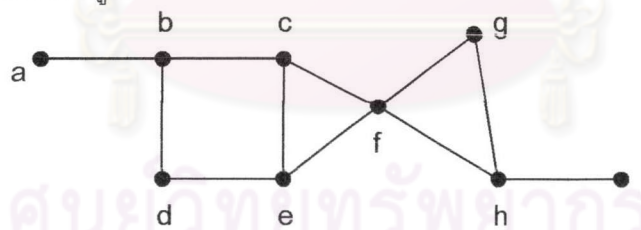
1.1 แนวเดิน , รอยเดินจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด c

1.2 วัฏจักร ที่เริ่มต้นที่จุดยอด f

1.3 วิธี a - f ที่ผ่านจุดยอดทุกจุด

1.4 วงจร ที่เริ่มต้นที่จุดยอด d ที่ผ่านจุดยอดทุกจุด

2. กำหนดให้กราฟ H ดังรูป



2.1 อยากทราบว่า มีวงจรที่เริ่มต้นที่จุดยอด a หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.2 อยากทราบว่า มีวงจรที่เริ่มต้นที่จุดยอด f หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.3 อยากทราบว่า มีวัฏจักรที่เริ่มต้นที่จุดยอด b หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

2.4 อยากทราบว่า มีวัฏจักรที่เริ่มต้นที่จุดยอด b และผ่านจุดยอด h หรือไม่ (ถ้ามีจงหา)

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 7

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 1 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง กราฟออยเลอร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของกราฟออยเลอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถหาวงจรรออยเลอร์ของกราฟที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่

สาระสำคัญ

บทนิยาม

วงจรรออยเลอร์ (Euler circuit) คือ วงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ

กราฟที่มีวงจรรออยเลอร์ เรียกว่า กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 245 – 247

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้

1. ครูทบทวนเกี่ยวกับแนวคิดของกราฟในรูปแบบต่าง ๆ ให้นักเรียนฟังอีกครั้ง ซึ่งได้แก่ แนวคิด วิธี วงจร และวัฏจักร ของกราฟ
2. ครูกล่าวถึงปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก โดยสุ่มนักเรียนว่าปัญหานี้มีลักษณะอย่างไร จากนั้นครูยกกราฟของปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก

3. ครูเชื่อมโยงจากปัญหาสะพานคอนกรีตเบิร์กว่า “ปัญหาเกี่ยวกับสะพานคอนกรีตเบิร์ก เป็นปัญหาลักษณะเดียวกับเกมการใช้ดินสอลากเส้นไปตามรูป โดยไม่ยกดินสอ (ซึ่งเปรียบเสมือนปัญหาสะพานคอนกรีตเบิร์กที่ให้เดินข้ามสะพานทุกเส้น) และลากผ่านเส้นเชื่อมของรูปเพียงครั้งเดียว (ซึ่งเปรียบเสมือนปัญหาสะพานคอนกรีตเบิร์กที่ให้เดินข้ามสะพานเพียงครั้งเดียว) ซึ่งผู้ลากจะเริ่ม ณ จุดใดจุดหนึ่งของรูปก็ได้ แต่ต้องมาสิ้นสุดที่จุดเริ่มต้น

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

4. ครูบอกนักเรียนว่าสำหรับวันนี้เราจะมาเล่นเกมลากเส้นนี้กัน

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

5. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน เพื่อทำกิจกรรมเกมลากเส้น

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

6. ครูแจกบัตรรูปภาพจำนวนกลุ่มละ 10 รูป

7. ครูอธิบายกติกาในการลากเส้นอีกครั้งหนึ่ง

8. ครูให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มลงมือช่วยกันลากเส้นรูปภาพทั้งหมด โดยครูแนะนำควรพิจารณาดี ๆ ก่อนการลากเส้นรูปภาพ

9. นักเรียนในแต่ละกลุ่มลงมือทำกิจกรรม โดยนักเรียนจะต้องแบ่งรูปภาพออกเป็น 2 ลักษณะคือ ลักษณะที่ 1 รูปภาพที่สามารถลากเส้นได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งนักเรียนจะต้องลากเส้นกราฟให้ดูด้วย ลักษณะที่ 2 รูปภาพที่ไม่สามารถลากเส้นกราฟได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด

10. นักเรียนที่สามารถทำได้ถูกต้องจะได้รับคะแนน โดยที่กราฟ 1 รูปจะมีคะแนน

คะแนน

11. ครูเป็นผู้ควบคุมดูแลการทำกิจกรรม และให้เวลาในการทำกิจกรรมในครั้งนี้ 15-20

นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

12. ครูสุ่มเรียกนักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยตามสิ่งที่กลุ่มของนักเรียนคิดได้จนครบทั้ง 10 ข้อ พร้อมทั้งครูเฉลยคำตอบที่ถูกต้องอีกครั้ง

13. ครูรวบรวมคะแนนของนักเรียนแต่ละกลุ่ม เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการประเมิน

14. ครูประกาศกลุ่มนักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุด

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

15. ครูและนักเรียนกันอภิปรายถึงสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมเกมลากเส้นนี้

16. ครูใช้คำถามถามนักเรียนเกี่ยวกับความยากของรูปภาพในแต่ละรูปว่ามีความยากง่ายต่างกันหรือไม่ เพราะเหตุใด และนักเรียนมีวิธีการในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้อย่างไร โดยให้นักเรียนช่วยกันอภิปราย

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

17. ครูถามนักเรียนว่าลักษณะของการลากเส้นนั้น เหมือนกับแนวเดินในลักษณะใด ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องก็คือ “วงจร”

18. ครูถามนักเรียนต่อไปว่า วงจรที่เราพบในเกมลากเส้นนั้นแตกต่างอย่างไรกับวงจรที่เราเคยเรียนมา ซึ่งคำตอบก็คือ “วงจรมีในเกมลากเส้นนั้น จะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุก ๆ เส้น”

19. ครูเชื่อมโยงเข้าสู่เรื่องของวงจรรอยเลอร์ว่า “อย่างที่เรารู้กันมาตั้งแต่ในคาบแรก ปัญหานี้เริ่มต้นมาจากปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก และผู้ที่ตอบปัญหานี้ได้คนแรก (อย่างมีเหตุผล และนับได้ว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ) ก็คือ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ดังนั้นเราจึงเรียกวงจรในลักษณะนี้ว่า “วงจรรอยเลอร์”

20. จากนั้นครูกล่าวต่อไปว่า “และเราจะเรียกรูปที่มีวงจรรอยเลอร์ว่ากราฟออยเลอร์นั่นเอง”

21. ครูบอกนิยามของวงจรรอยเลอร์ และกราฟออยเลอร์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างจากรูปภาพที่นักเรียนทำกิจกรรมเกมลากเส้น

22. ครูแจกเอกสารความรู้ที่ 4.1 เรื่องกราฟออยเลอร์

23. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีข้อสงสัยถาม จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ที่เรียนอีกครั้ง

สื่อการเรียนรู้

1. บัตรรูปภาพ (จำนวน 10 ใบ ต่อ 1 กลุ่ม)

2. เอกสารใบความรู้ที่ 4.1 กราฟออยเลอร์

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากความร่วมมือในการทำกิจกรรม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

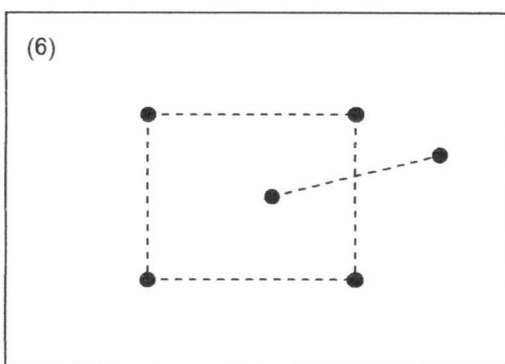
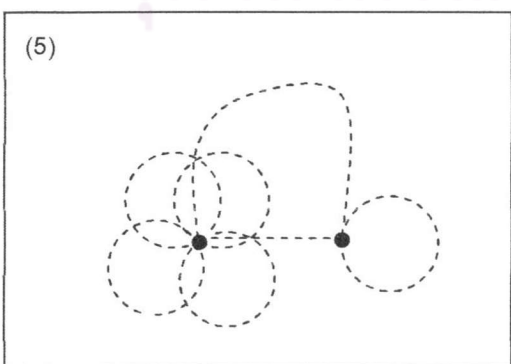
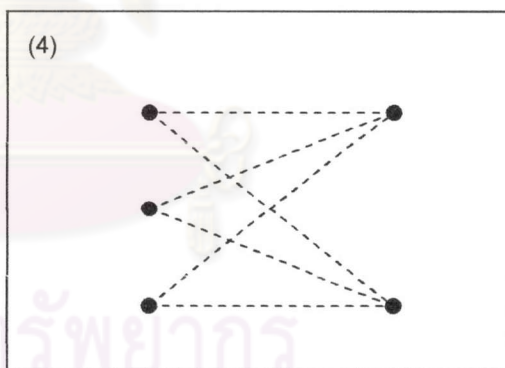
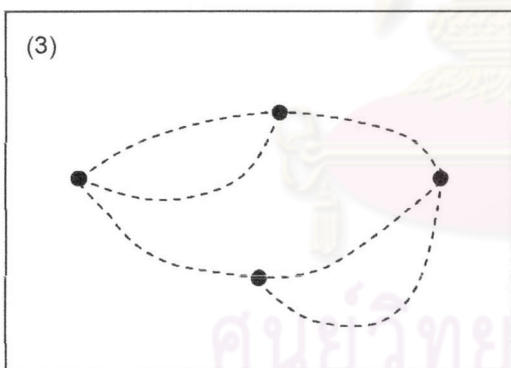
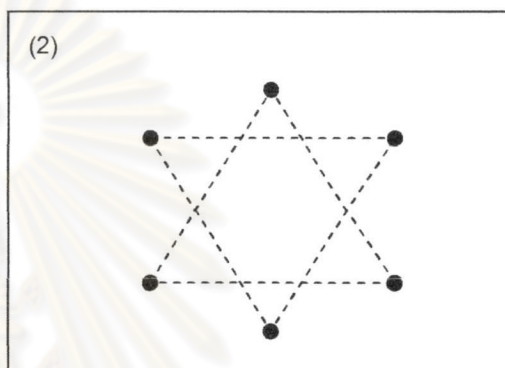
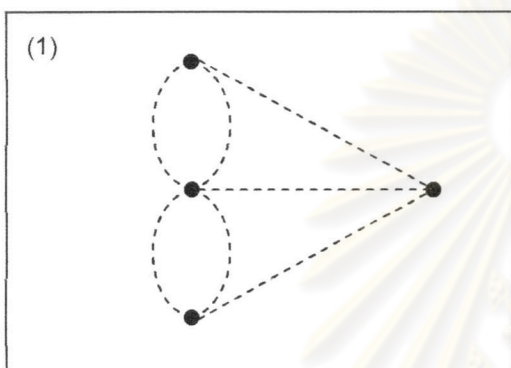
.....

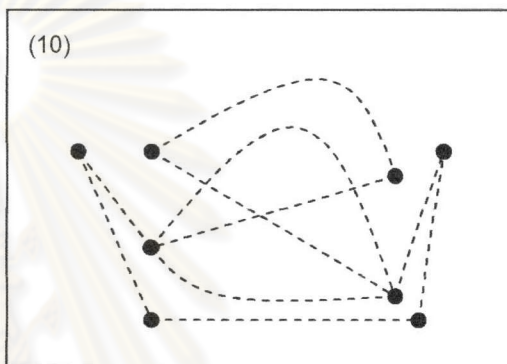
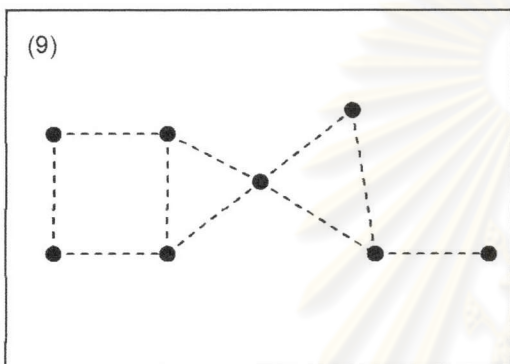
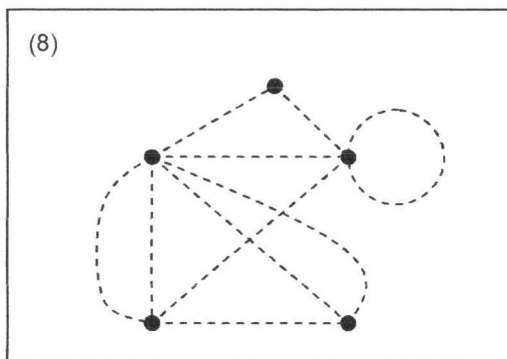
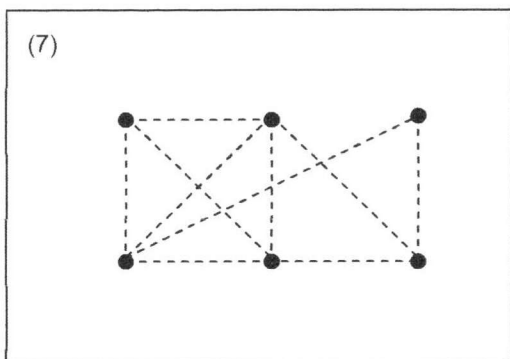
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมเกมลากเส้น

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรม

1. บัตรรูปภาพขนาด 6x8 นิ้ว (ควรมีรูปภาพหลาย ๆ ลักษณะทั้งที่เป็นกราฟออยเลอร์ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เป็นกราฟเชื่อมโยง และไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง) จำนวน 10 ใบ ต่อนักเรียน 1 กลุ่ม (4-5 คน) ซึ่งครูอาจจะให้แต่ละกลุ่มได้รูปภาพแตกต่างกันได้ แต่ต้องให้แต่ละรูป (หมายเลขที่รูป) เป็นกราฟที่มีลักษณะเดียวกัน





ขั้นตอนในการทำกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน เพื่อทำกิจกรรมเกมลากเส้น โดยนักเรียนในแต่ละกลุ่มควรมีเกรตวิชาคณิตศาสตร์ (ในเทอมที่ผ่านมา) แตกต่างกัน (หรือครูอาจจะจำกัดให้นักเรียนแต่ละกลุ่มจะมีสมาชิกกี่คนก็ได้แต่ต้องมีผลรวมของเกรตวิชาคณิตศาสตร์ไม่เกิน 10)

2. ครูแจกบัตรรูปภาพจำนวนกลุ่มละ 10 รูป

3. ครูอธิบายกติกาในการลากเส้น นั่นคือ นักเรียนจะต้องลากเส้นตามเส้นของกราฟเชื่อม (แนวเส้นประ) โดยที่

3.1 นักเรียนจะต้องเส้นผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น (แนวเส้นประ) และห้ามลากเส้นซ้ำแนวเดิม โดยเริ่มต้นจากจุดยอดจุดใดของกราฟก่อนก็ได้ แต่ต้องสิ้นสุดที่จุดเดิม

3.2 นักเรียนจะต้องไม่ยกปลายปากกาขึ้นจากกระดาษจนกว่าจะลากเส้นเรียบร้อยแล้ว

3.3 นักเรียนจะต้องลากเส้นเชื่อมจากจุดยอดไปหาจุดยอดในเส้นเชื่อมเดียวกันเท่านั้น หมายความว่า ถ้าเส้นเชื่อมใดตัดกัน นักเรียนห้ามลากเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งไปยังเส้นเชื่อมอีกเส้นหนึ่งโดยผ่านจุดตัดนั้น (ไม่ใช่จุดยอดของกราฟ)

4. ครูให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มลงมือช่วยกันลากเส้นรูปภาพทั้งหมด โดยครูแนะนำ
ควรพิจารณาดี ๆ ก่อนการลากเส้นรูปภาพ

5. นักเรียนในแต่ละกลุ่มลงมือทำกิจกรรม โดยนักเรียนจะต้องแบ่งรูปภาพออกเป็น 2
ลักษณะคือ ลักษณะที่ 1 รูปภาพที่สามารถลากเส้นได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งนักเรียนจะต้อง
ลากเส้นกราฟให้ดูด้วย ลักษณะที่ 2 รูปภาพที่ไม่สามารถลากเส้นกราฟได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด

6. นักเรียนที่สามารถทำได้ถูกต้องจะได้รับคะแนน โดยที่กราฟ 1 รูปจะมีคะแนน 1
คะแนน

7. ครูเป็นผู้ควบคุมดูแลการทำกิจกรรม และให้เวลาในการทำกิจกรรมในครั้งนี้ 15-20
นาที



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

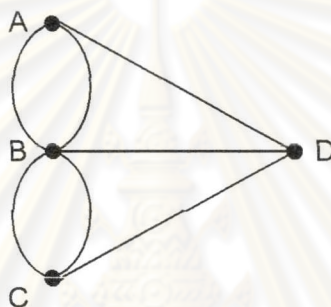
เอกสารใบความรู้ที่ 4.1 กราฟออยเลอร์

วงจรรออยเลอร์

บทนิยาม

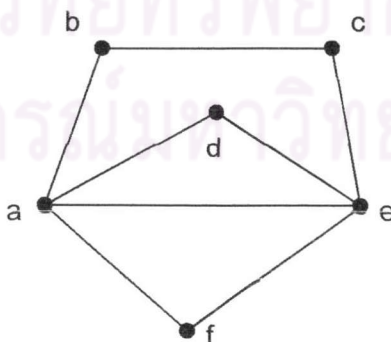
วงจรรออยเลอร์ (Euler circuit) คือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ และเรียกกราฟที่มีวงจรรออยเลอร์ เรียกว่า กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)

ตัวอย่างที่ 4.1 จากปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก เราสามารถแปลงเป็นกราฟได้ดังรูป

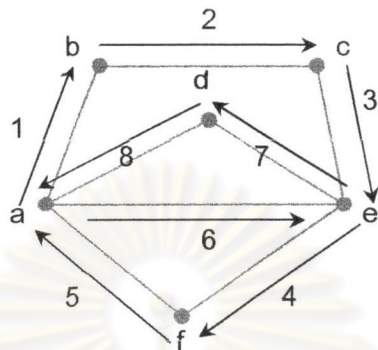


จะได้ว่า กราฟนี้ไม่มีวงจรรออยเลอร์ ดังนั้น กราฟนี้จึงไม่เป็นกราฟออยเลอร์
ดังนั้น ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์กนั้น เราได้คำตอบว่า “เป็นไปได้ไม่ได้ที่จะเดินข้ามสะพานตามเงื่อนไขที่กำหนด”

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป



จะได้ว่า กราฟ G มีวงจรรอยเลอร์ คือ แนวเดินที่มีเส้นเชื่อมต่างกันโดยมีจุดเริ่มต้นและสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน และแนวเดินจะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ หรือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้น ได้แก่ $a, b, c, e, f, a, e, d, a$ (ดังรูป 5-3)



รูป 5-3

ข้อสังเกต

1. วงจรรอยเลอร์เป็นแนวเดินที่เส้นเชื่อมต่างกันทั้งหมด (เส้นเชื่อมไม่ซ้ำ) แต่สามารถที่จะมีจุดยอดซ้ำได้
2. วงจรรอยเลอร์เป็นแนวเดินที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมด ดังนั้น วงจรรอยเลอร์จะผ่านจุดยอดทุกจุดด้วย
3. แนวเดินแบบวงจรรอยเลอร์ในกราฟเดียวกันอาจจะมีได้หลายแบบ เช่น ตัวอย่างที่ 4.2 เราสามารถหาวงจรรอยเลอร์รูปแบบอื่นได้คือ $a, f, e, d, a, b, c, e, a$ เป็นต้น
4. วงจรรอยเลอร์ สามารถเริ่มต้นที่จุดยอดใดก็ได้ในกราฟ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 8

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ในการตรวจสอบกราฟที่กำหนดให้ว่าเป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ ได้อย่างถูกต้อง

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท 3

กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

G จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดคู่

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 247 – 253

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูและนักเรียนทบทวนสาระการเรียนรู้เรื่องกราฟออยเลอร์

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

2. ครูถามนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของกราฟออยเลอร์ โดยสุ่มเรียกนักเรียนตอบ พร้อมทั้งครูอธิบายเพิ่มเติม เพื่อเป็นการทบทวนเรื่องกราฟออยเลอร์ที่เรียนเรียนในคาบที่ผ่านมา

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

3. ครูให้นักเรียนจับกลุ่มเดิมที่ทำกิจกรรมในคาบที่แล้ว ในกิจกรรมเกมลากเส้น เพื่อทำกิจกรรมเปิดช่องทำงาน ซึ่งเป็นกิจกรรมต่อเนื่อง

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

4. ครูแจกรูปกราฟของคาบที่แล้วคืนให้กับนักเรียนในแต่ละกลุ่ม
5. ครูอธิบายการทำกิจกรรมเปิดช่องทำงานให้นักเรียนฟัง (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในกิจกรรมเปิดช่องทำงาน)
6. กิจกรรมเปิดช่องทำงานจะมี ช่องงานให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำทั้งหมด 5 ช่อง
7. การทำกิจกรรมเปิดช่องทำงานนั้น นักเรียนแต่ละกลุ่มจะทำงานในแต่ละช่องพร้อมกัน โดยการทำกิจกรรมแต่ละช่วง นักเรียนจะทำงานเพียง 1 ช่องเท่านั้น โดยที่ นักเรียนจะต้องฟังสัญญาณในการเริ่มต้นและสิ้นสุดการทำกิจกรรมในแต่ละช่วงจากครู ซึ่งงานในแต่ละช่องจะมีเวลาในการทำงานจำกัด
8. เมื่อได้ยินสัญญาณ นักเรียนจะต้องวิ่งไปรับช่องงานที่ 1 จากครู แล้วจึงเปิดช่องงานที่ 1 เพื่อปฏิบัติตาม และหยุดทำเมื่อสัญญาณสิ้นสุดการทำงานดัง ครูจะตรวจดูการทำงานของนักเรียนแต่ละกลุ่มและประเมินผลในงานที่ 1 ด้วยแบบประเมินการทำกิจกรรม
9. จากนั้นครูเฉลยผลการทำงานที่ถูกต้อง พร้อมทั้งประกาศคะแนนของนักเรียนในแต่ละกลุ่ม
10. ครูดำเนินการการทำกิจกรรมต่อไปในช่องงานที่ 2, 3, และ 4 ตามลำดับ (ในทำนองเดียวกับช่องงานที่ 1)

(คาบที่ 2)

11. ครูทบทวนกิจกรรมที่ 1-4 อีกครั้ง เพื่อจะได้ทำกิจกรรมสุดท้ายต่อ (ช่องงานที่ 5)
12. ครูให้สัญญาณในการทำกิจกรรมเปิดช่องทำงาน ช่องงานที่ 5

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

13. ครูสุ่มเรียกนักเรียนประมาณ 2-3 กลุ่ม ออกมานำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการทำกิจกรรมในช่องงานที่ 5 (ซึ่งช่องงานที่ 5 จะเป็นแนวทางสู่ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์) โดยนักเรียนต้องให้เหตุผลในสิ่งที่นักเรียนได้มาจากการทำงานด้วย

14. ครูให้เพื่อนกลุ่มอื่น ๆ ตรวจสอบว่าตรงกับผลลัพธ์ที่กลุ่มของตนเองได้หรือไม่ ถ้าไม่ตรง ครูให้นักเรียนกลุ่มที่ได้ผลลัพธ์ต่างออกไปออกมานำเสนอ

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

15. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายผลที่ได้รับจากกิจกรรมนี้ ตั้งแต่เริ่มต้นในคาบที่แล้ว

จนกระทั่งสิ้นสุดในคาบนี้ว่า นักเรียนได้อะไรบ้าง

16. ครูกล่าวถึงสิ่งที่ได้รับนอกเหนือจากความรู้ที่ได้ว่า “การทำกิจกรรมนี้จะประสบความสำเร็จได้นั้น นักเรียนจะต้องเป็นคนช่างสังเกต และเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ เข้าด้วยกันได้ ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้เองที่ก่อให้เกิดการพัฒนาในด้านต่าง ๆ ดังนั้นนับว่าเป็นสิ่งสำคัญ” นอกจากนี้ครูกล่าวถึงการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม ความสามัคคี เพื่อให้เสร็จทันเวลาได้

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

17. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์
18. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 4.2 พร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติม และยกตัวอย่างประกอบ
19. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีความสงสัยถาม
20. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 4.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 252-253) เป็น
การบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. ของงานจำนวน 5 ของต่อนักเรียน 1 กลุ่ม ซึ่งแต่ละของ ประกอบด้วยใบคำสั่ง (เป็นใบคำสั่งที่นักเรียนต้องปฏิบัติตาม) และใบงาน (เป็นใบเอกสารที่นักเรียนต้องทำลงไป)
2. เอกสารใบความรู้ที่ 4.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์
3. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 4.1 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม
2. สังเกตการนำเสนอกิจกรรม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมเปิดซองทำงาน

อุปกรณ์ในการทำกิจกรรม

1. ซองงานจำนวน 5 ใบ (ต่อนักเรียน 1 กลุ่ม) ดังนี้

ซองงานที่ 1 ประกอบด้วย ใบคำสั่ง

แจกกราฟทั้ง 10 รูปออกเป็น 2 กลุ่มคือ
กลุ่มที่ 1 กราฟออยเลอร์
กลุ่มที่ 2 กลุ่มที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์
ภายในเวลา 5 นาที

ซองงานที่ 2 ประกอบด้วย ใบคำสั่ง และใบงาน ดังนี้

ศูนย์วิทยพัทยากร
จากกราฟทั้ง 10 รูป จงพิจารณา
ลักษณะของกราฟในแต่ละรูปกราฟ และเติม
ข้อความลงในใบงานให้ถูกต้อง ภายในเวลา 7
นาที

ใบงาน : ซองงานที่ 2

จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

กราฟรูปที่	ดีกรีของจุดยอด	กราฟเป็น กราฟเชื่อมโยงหรือไม่	กราฟเป็น กราฟออยเลอร์หรือไม่
1	3, 5, 3, 3	เป็น	ไม่เป็น
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ของงานที่ 3 ประกอบด้วย ใบคำสั่ง ดังนี้

จากกราฟที่ไม่ได้เป็นกราฟออยเลอร์ จง
ลากเส้นเชื่อมเพิ่ม (ให้น้อยเส้นที่สุด) เพื่อให้
กราฟดังกล่าวเป็นกราฟออยเลอร์ ภายในเวลา
15 นาที

ของงานที่ 4 ประกอบด้วย ใบคำสั่ง และใบงาน ดังนี้

ตอนนี้กราฟทุกรูปของนักเรียนเป็น
กราฟออยเลอร์ทั้งหมดแล้ว จงพิจารณาลักษณะ
ของกราฟ (รูปใหม่) ในแต่ละรูปกราฟ และเติม
ข้อความลงในใบงานให้ถูกต้อง ภายในเวลา 7
นาที

ใบงาน : ซองงานที่ 4

จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

กราฟรูปที่	ดิกรีของจุดยอด	กราฟเป็น กราฟเชื่อมโยงหรือไม่	กราฟเป็น กราฟออยเลอร์หรือไม่
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

ซองงานที่ 5 ประกอบด้วย ใบคำสั่ง ดังนี้

จากใบงานทั้งสองใบนักเรียนคิดว่า
ปัจจัยใดบ้างที่ทำให้กราฟหนึ่ง ๆ เป็นกราฟออยเลอร์ (พิจารณาส่วนที่แตกต่างของข้อมูลทั้งสองให้ดีกว่าส่วนใดของกราฟที่เปลี่ยนไปบ้าง แล้วทำให้กราฟเป็นกราฟออยเลอร์)

เอกสารใบความรู้ที่ 2.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์

ทฤษฎีบท 3

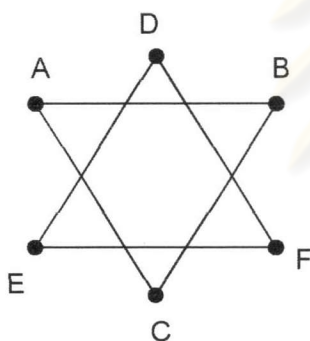
กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

G จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดคู่

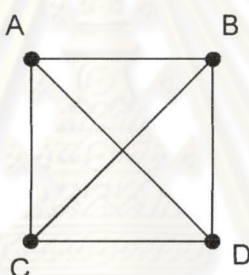
จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ก็ต่อเมื่อ G มีคุณสมบัติ 2 ประการ ดังนี้

1. G ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง
2. จุดยอดทุกจุดของ G จะต้องเป็นจุดยอดคู่ (ดีกรีของจุดยอดมีค่าเท่ากับจำนวนคู่)

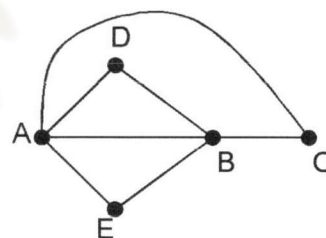
ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด



G_1



G_2



G_3

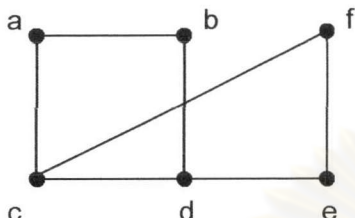
วิธีทำ

กราฟ G_1 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ G_1 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง (เนื่องจากไม่สามารถเดินทางจากจุดยอด A ไปยังจุดยอด D ได้)

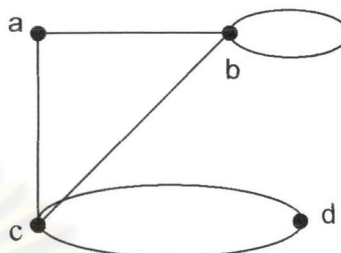
กราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ $\deg(A) = 3$ (จุดยอด A เป็นจุดยอดคี่) จากทฤษฎีบท 3 จึงได้ว่ากราฟ G_2 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

กราฟ G_3 เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะกราฟ G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง และ $\deg(A) = 4$, $\deg(B) = 4$, $\deg(C) = 2$, $\deg(D) = 2$ และ $\deg(E) = 2$ ดังนั้น จุดยอดของกราฟ G_3 ทุกจุดเป็นจุดยอดคู่ จากทฤษฎีบท 3 จึงได้ว่ากราฟ G_3 เป็นกราฟออยเลอร์ ซึ่งได้วงจรออยเลอร์ คือ A, B, C, A, D, B, E, A

ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ เป็นปัญหาลักษณะเดียวกับเกมการใช้ดินสอ ลากเส้นไปตามรูป โดยไม่ยกดินสอ และลากผ่านเส้นเชื่อมของรูปเพียงครั้งเดียว ซึ่งผู้ลากจะเริ่ม ณ จุดใดจุดหนึ่งของรูปก็ได้ แต่ต้องมาสิ้นสุดที่จุดเริ่มต้น ถ้ากำหนดรูปมาให้ 2 รูป คือ รูป (ก) และ (ข) อยากทราบว่า รูปใดบ้างที่ลากเส้นตามเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น



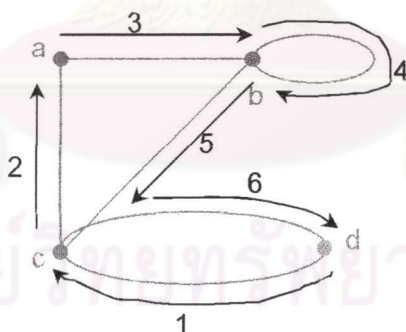
รูป (ก)



รูป (ข)

วิธีทำ รูป (ก) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ $\text{deg}(c)=3$ (นั่นคือจุดยอด c เป็นจุดยอดคี่) ดังนั้น จึงไม่สามารถลากเส้นตามเงื่อนไขได้

รูป (ข) เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ $\text{deg}(a)=2, \text{deg}(b)=4, \text{deg}(c)=4$ และ $\text{deg}(d)=2$ (นั่นคือจุดยอดทุกจุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่) ดังนั้น จึงสามารถลากเส้นตามเงื่อนไขได้ ดังนี้ d, c, b, b, a, c, b ดังรูป

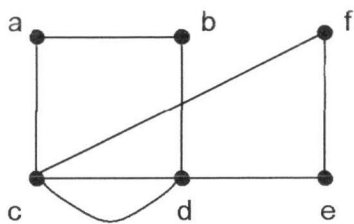


ตัวอย่างที่ 3 จากตัวอย่างที่ 4 ถ้าต้องการให้รูป (ก) เป็นกราฟออยเลอร์จะต้องทำอย่างไร

วิธีทำ พิจารณาดีกรีของจุดยอด ดังนี้

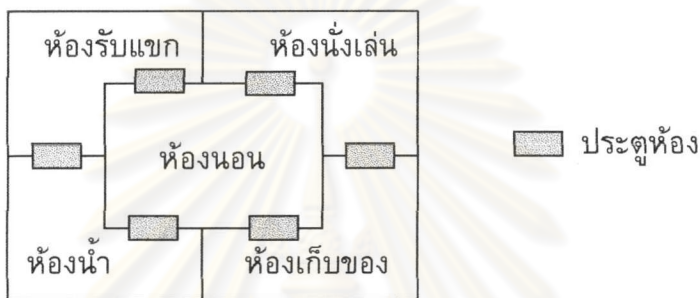
$\text{deg}(a) = 2$	$\text{deg}(b) = 2$	$\text{deg}(c) = 3$
$\text{deg}(d) = 3$	$\text{deg}(e) = 2$	$\text{deg}(f) = 2$

ถ้าเราต้องการให้ (ก) เป็นกราฟออยเลอร์ จุดยอดทุกจุดของกราฟต้องเป็นจุดยอดคู่ (หรือมีดีกรีเท่ากับจำนวนคู่) ดังนั้น เราจะต้องทำให้ดีกรีของจุดยอด d และจุดยอด c เป็นดีกรีคู่ โดยการเพิ่มเส้นเชื่อม cd เข้าไปในกราฟทำให้ $\text{deg}(c) = 4$ และ $\text{deg}(d) = 4$ ดังรูป



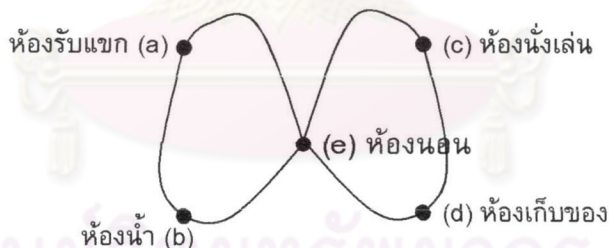
กราฟใหม่ที่ได้จะมีจุดยอดเป็นจุดยอดคู่ทั้งหมด ดังนั้นกราฟที่ได้เป็นกราฟออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 4 จากแผนผังของบ้าน อยากทราบว่านาย A จะสามารถเดินระหว่างห้องแต่ละห้อง ภายในบ้านโดยผ่านประตูทุกประตู แต่ละประตูเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาที่เดิมได้หรือไม่



วิธีทำ แปลงปัญหาให้เป็นกราฟ

โดยที่ให้จุดยอดแทนห้อง และเส้นเชื่อมแทนทางเดิน (ประตู) ระหว่างห้อง



จะได้ว่า $\text{deg}(a)=2, \text{deg}(b)=2, \text{deg}(c)=2, \text{deg}(d)=2$ และ $\text{deg}(e)=4$

นั่นคือ จุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจุดยอดคู่

ดังนั้น กราฟที่ได้เป็นกราฟออยเลอร์

และหาวงจรได้ดังนี้ a, b, e, c, d, e, a

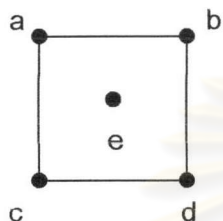
จะได้ว่า นาย A สามารถเดินทางได้ดังนี้ ห้องรับแขก, ห้องน้ำ, ห้องนอน, ห้องนั่งเล่น, ห้องเก็บของ, ห้องนอน, ห้องรับแขก

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 4.1
ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์

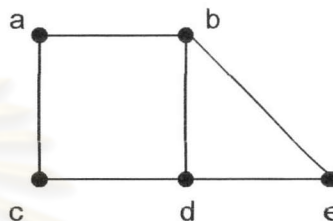
ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าเป็นกราฟออยเลอร์จงหาวงจรออยเลอร์

1.1



1.2



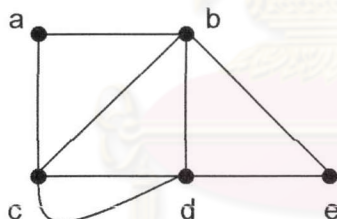
.....

.....

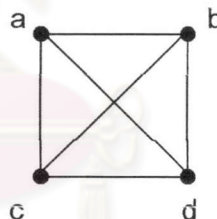
.....

.....

1.3



1.4



ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

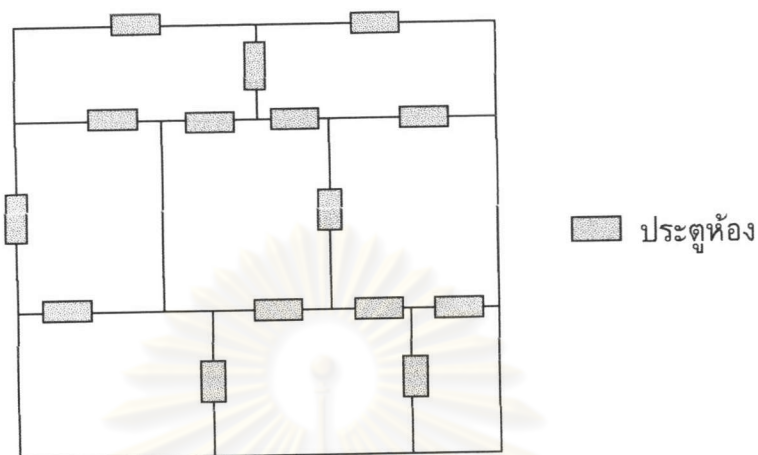
.....

.....

.....

2. จากข้อที่ 1 กราฟในข้อใดที่ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ให้นักเรียนทำกราฟดังกล่าวให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยลากเส้นเชื่อมเพิ่ม

4. จากแปลนบ้านที่แสดงดังรูป จงให้เหตุผลว่าเจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมภายใน โดยที่เริ่มต้นที่ภายนอกบ้าน อยากทราบว่า เจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมบ้าน โดยผ่านประตูทุกประตู เพียงประตูละครั้งเดียว แล้วกลับออกมาในที่จุดเดิมได้หรือไม่



วิธีทำ

ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 9

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นปีที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของกราฟถ่วงน้ำหนักได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกวิถีที่สั้นที่สุดของกราฟถ่วงน้ำหนักได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องวิถีที่สั้นที่สุดไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ค่าน้ำหนัก (weight) ของเส้นเชื่อม e ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม e

กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

บทนิยาม

วิถีที่สั้นที่สุด (shortest path) จากจุดยอด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือ วิถี $A-Z$ ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิธิน้อยที่สุด

สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 257 – 261

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูกล่าวนำเข้าสู่บทเรียนว่า “จากกราฟที่เราเรียนผ่านมาในแต่ละคาบ เราให้ความสำคัญของเส้นเชื่อมแต่ละเส้นเท่ากันทั้งหมด แต่ในความเป็นจริงแล้วปัญหาต่าง ๆ เมื่อเราแปลงเป็นกราฟแล้ว เราจะพบว่า เส้นเชื่อมแต่ละเส้นมีความสำคัญ หรือค่าน้ำหนักไม่เท่ากัน”
2. หลังจากนั้น ครูถามนักเรียนเกี่ยวกับการเดินทางจากบ้านมาโรงเรียนว่า นักเรียนเดินทางมาโรงเรียนได้กี่ทาง แต่ละทางใช้เวลาในการเดินทางเท่ากันหรือไม่ อย่างไร
3. ครูจึงชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ถนนก็เปรียบเสมือนเส้นเชื่อม ซึ่งจะเห็นว่าระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทางที่ไม่เท่ากันนั้น ก็เปรียบเสมือนความสำคัญหรือน้ำหนักของเส้นเชื่อมนั้นไม่เท่ากัน
4. ครูสุ่มเรียกนักเรียนเพื่อถามถึงแผนผังการเดินทางมาโรงเรียนของนักเรียน พร้อมทั้งระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทาง แล้วแปลงปัญหาเป็นกราฟถ่วงน้ำหนักเป็นตัวอย่างให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนัก
5. ครูยกตัวอย่างที่ 5.1 เกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนัก (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 257) และเปรียบเทียบให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับกราฟธรรมดา (กราฟไม่ถ่วงน้ำหนัก กับกราฟถ่วงน้ำหนัก
6. ครูบอกนิยามของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม และกราฟถ่วงน้ำหนักให้นักเรียนฟัง
7. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนที่สงสัยได้ซักถาม
8. ครูลองถามนักเรียนว่า แล้วนักเรียนคิดว่า นอกจากปัญหาการเดินทางแล้วมีปัญหอะไรอีกหรือไม่ที่เป็นปัญหาเกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนัก (ครูให้เวลานักเรียนคิดประมาณ 1-2 นาที) จากนั้นครูสุ่มให้นักเรียนลองตอบ ซึ่งครูอาจจะยกตัวอย่างเพิ่มเติม เช่น ปัญหางบประมาณการสร้างถนน เป็นต้น
9. ครูถามนักเรียนต่อไปว่าค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมจำเป็นหรือไม่ว่าจะขึ้นกับความยาวของเส้นเชื่อม เพราะเหตุใดจึงคิดเช่นนั้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
10. จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนออกแสดงความคิดเห็น ซึ่งครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าในชีวิตประจำวันแล้ว ความยาวของเส้นเชื่อมน่าจะมีผลกับค่าน้ำหนัก โดยครูยกตัวอย่าง การเดินทางว่า ถ้าระยะทางไกล ๆ ย่อมใช้เวลาในการเดินทางมาก แต่ในบางครั้งก็ไม่ใช่เช่นนั้นเสมอไป ครูยกตัวอย่างการเดินทางของเส้นทางที่มีการจราจรติดขัด แม้ว่าระยะทางจะสั้นก็ใช้เวลา มาก กับเส้นทางอีกเส้นที่การจราจรไม่ติดขัด แม้เส้นทางจะยาวกว่าแต่ก็อาจใช้เวลา น้อยกว่าได้
11. ครูจึงสรุปว่าค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อม ไม่จำเป็นต้องขึ้นกับความยาวของเส้นเชื่อมเสมอไป

12. ครูตั้งปัญหาเกี่ยวกับการเดินทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด เชื่อมโยงกับกราฟถ่วงน้ำหนัก
13. ครูยกตัวอย่างที่ 5.2 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 258) โดยครูให้นักเรียนหาคำตอบของปัญหาเอง
14. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลย พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ
15. จากนั้นครูชี้ให้นักเรียนเห็นถึงประโยชน์ของกราฟถ่วงน้ำหนักในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (คาบที่ 2)

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

16. ครูสุ่มถามนักเรียนเกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนักให้นักเรียนตอบ เพื่อเป็นการกระตุ้นนักเรียนให้สนใจในการเรียนในห้องก่อนจะทำกิจกรรมต่อไป

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

17. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละประมาณ 4-5 คน โดยให้สมาชิกในกลุ่มมีความแตกต่างกันในด้านต่าง ๆ เช่น ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ เพศ เป็นต้น

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

18. ครูให้นักเรียนคิดถึงปัญหาที่นักเรียนพบในชีวิตประจำวันว่ามีปัญหาใดอีกบ้างที่เกี่ยวข้องกับกราฟถ่วงน้ำหนัก และครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มปรึกษากัน โดยครูจะให้นักเรียนออกมานำเสนอในคาบต่อไป

19. ครูสุ่มเรียกนักเรียนประมาณ 2-3 กลุ่มออกมานำเสนอปัญหาในชีวิตประจำวันที่นักเรียนพบที่เกี่ยวข้องกับกราฟถ่วงน้ำหนัก เพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนสนใจในชั้นเรียน ก่อนที่จะทำกิจกรรมกลุ่ม

20. ครูทบทวนเรื่องระยะทางที่สั้นที่สุด โดยครูให้เห็นถึงว่าเป็นเส้นทางที่เราจะได้ผลบวกของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

21. ครูยกกราฟที่ 1 แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาระยะทางที่สั้นที่สุด โดยให้เวลาประมาณ 5 นาที

22. ครูถามนักเรียนว่าแต่ละกลุ่มได้ระยะทางที่สั้นที่สุดเท่ากับเท่าใด โดยยังไม่ให้นักเรียนเฉลย และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลองตรวจสอบคำตอบของกลุ่มตนเองอีกครั้ง

23. ในทำนองเดียวกัน ครูยกกราฟที่ 2 และ 3 ตามลำดับ แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาระยะทางที่สั้นที่สุด โดยให้เวลาประมาณ 10 และ 15 นาที ตามลำดับรูป

ขั้นที่ 4 ชี้นำเสนอ

24. ครูสุ่มเรียกให้นักเรียนออกมาเฉลยปัญหาในแต่ละข้อ ประมาณ 2-3 กลุ่ม โดยให้นักเรียนนี้แสดงแนวคิดของกลุ่มตนเองด้วยด้วย แล้วจึงถามนักเรียนว่ามีใครคิดได้แบบอื่น ๆ หรือไม่ และให้นักเรียนลองออกมาเฉลย

25. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่าแต่ละกลุ่ม กลุ่มใดหาได้ระยะทางที่สั้นที่สุดในแต่ละข้อ พร้อมทั้งแนวการหาในแต่ละกลุ่มอีกด้วย

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

26. ครูและนักเรียนอภิปรายผลการทำกิจกรรม ในส่วนของแนวคิดการหาระยะทางที่สั้นที่สุดในแต่ละกลุ่ม

27. ครูเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน โดยให้นักเรียนคิดว่าในชีวิตประจำวันนักเรียนเคยแก้ปัญหาในทำนองนี้บ้างหรือไม่ และมีแนวคิดการแก้ปัญหาในลักษณะเดียวกับการแก้ปัญหาที่พบในห้องหรือไม่

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

28. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นต่อไปว่าระยะทางหรือแนวเดินที่สั้นที่สุดนั้นจะเป็นแนวเดินที่ไม่ซ้ำจุดยอด ดังนั้น แนวเดินที่สั้นที่สุดจึงมีลักษณะเป็นวงจร หรือเรียกว่า วงจรที่สั้นที่สุด (shortest path)

29. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 5.1 ให้นักเรียนแต่ละบุคคล

30. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสาระการเรียนรู้ที่เรียนมาในคาบที่ผ่านมา ตามเอกสารใบความรู้ที่ 5.1 ที่ครูแจกให้

31. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.1 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 260-261) ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. แผนภาพกราฟที่ 1 – 3
2. เอกสารใบความรู้ที่ 5.1 กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด
3. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.1 กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากการทำตอบคำถาม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด
3. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
จิตพิสัย
1. สังเกตจากการประเมินของเพื่อนในกลุ่ม
2. สังเกตจากแบบประเมินของครู
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

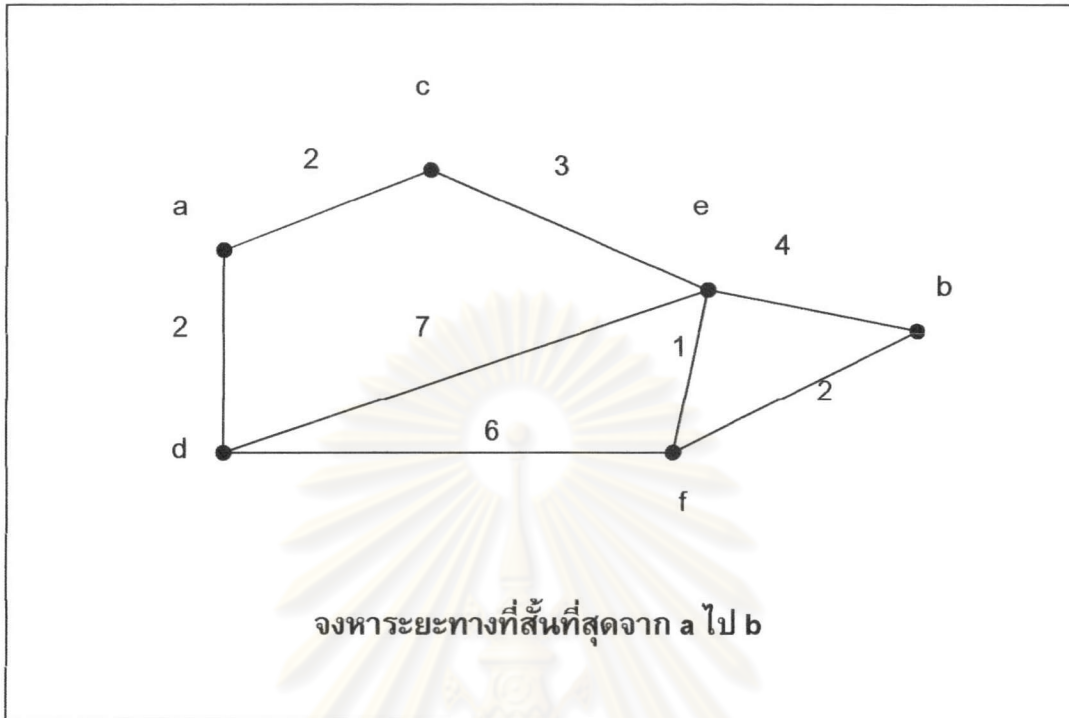
.....

.....

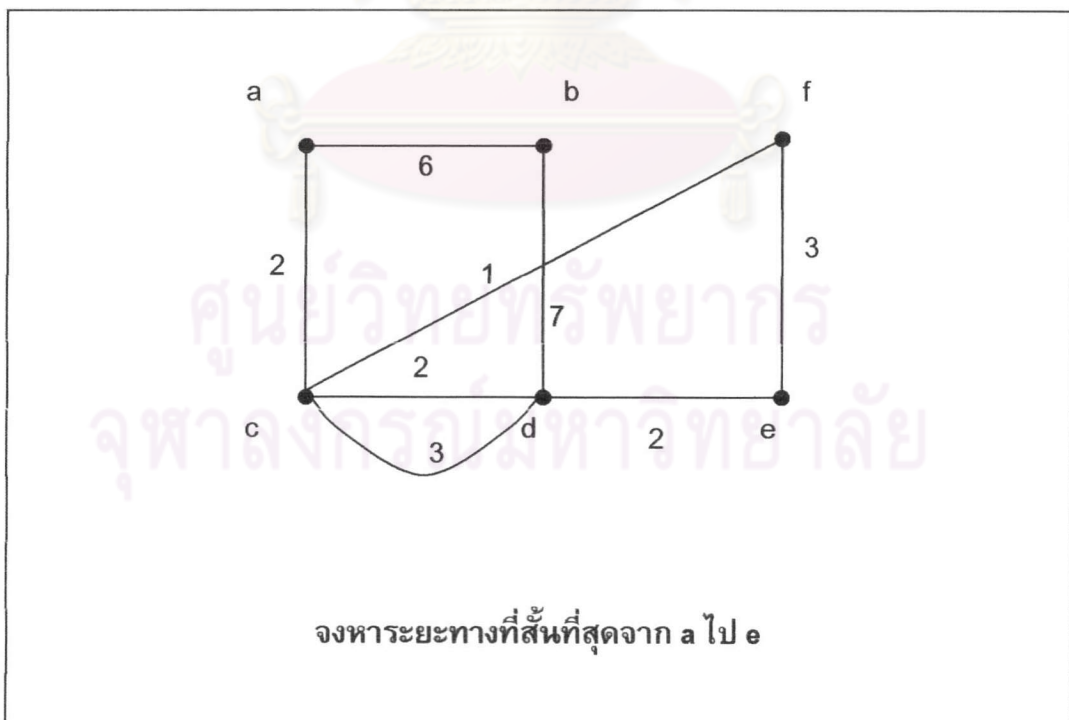
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

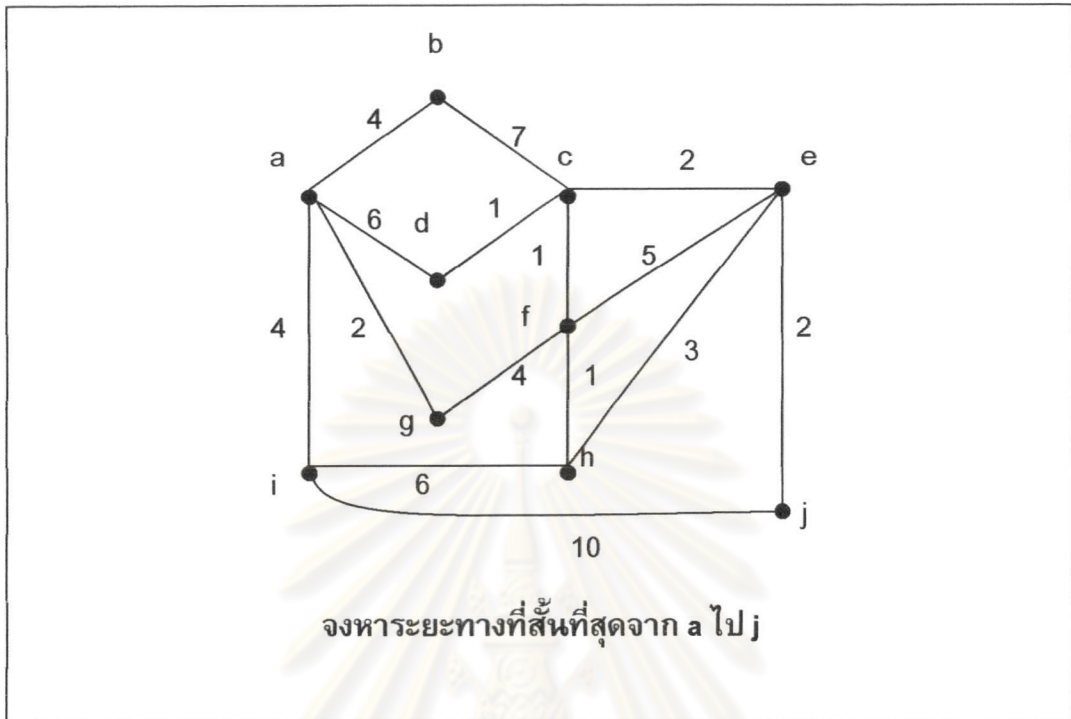
แผนภาพกราฟ รูปที่ 1



แผนภาพกราฟ รูปที่ 2



แผนภาพกราฟ รูปที่ 3



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารใบความรู้ที่ 5.1
กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด

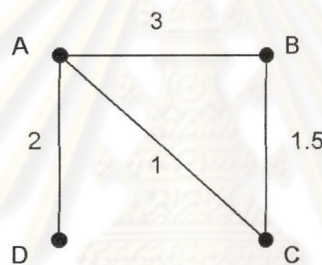
กราฟถ่วงน้ำหนัก

บทนิยาม

ค่าน้ำหนัก (weight) ของเส้นเชื่อม e ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม e

กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้ กราฟ G ดังรูป



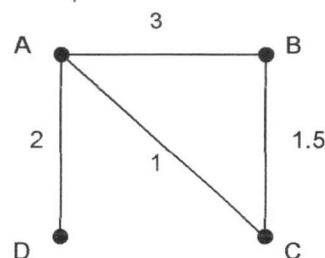
จะได้ว่า เส้นเชื่อมของกราฟ G มีค่าน้ำหนัก ดังนั้น กราฟ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก

วิถีที่สั้นที่สุด

บทนิยาม

วิถีที่สั้นที่สุด (shortest path) จากจุดยอด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือ วิถี $A-Z$ ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิถีที่น้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาวิถี $B-D$ ทั้งหมดทุกแบบ พร้อมทั้งหาผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมในวิถี

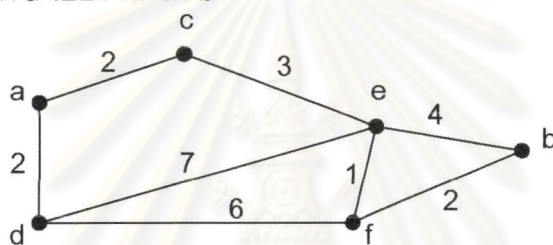


แบบที่ 1 วิธี B-D คือ B, A, D
ผลรวมของค่าน้ำหนักเท่ากับ $3 + 2 = 5$

แบบที่ 2 วิธี B-D คือ B, C, A, D
ผลรวมของค่าน้ำหนักเท่ากับ $1.5 + 1 + 2 = 4.5$

ดังนั้น วิธีที่มีผลรวมค่าน้ำหนักน้อยที่สุด คือ B, C, A, D เรียกว่าที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักน้อยที่สุดว่า “**วิธีที่สั้นที่สุด**”

ตัวอย่างที่ 5.3 กำหนดให้กราฟแทนแผนผังเมือง ดังรูป โดยที่จุดยอดแทนจังหวัด และเส้นเชื่อมแทนถนน ค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมคือเวลาที่ใช้ในการเดินทาง (ชั่วโมง) จงหาเวลาที่น้อยที่สุดในการเดินทางจากจังหวัด a ไปยังจังหวัด b



เส้นทางที่ 1 A, C, E, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+3+4 = 9$

เส้นทางที่ 2 A, C, E, F, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+3+1+2 = 8$

เส้นทางที่ 3 A, C, E, D, F, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+3+7+6+2 = 20$

เส้นทางที่ 4 A, D, E, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+7+4 = 13$

เส้นทางที่ 5 A, D, E, F, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+7+1+2 = 12$

เส้นทางที่ 6 A, D, F, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+6+2 = 10$

เส้นทางที่ 7 A, C, F, E, B
ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้น เท่ากับ $2+6+1+4 = 13$

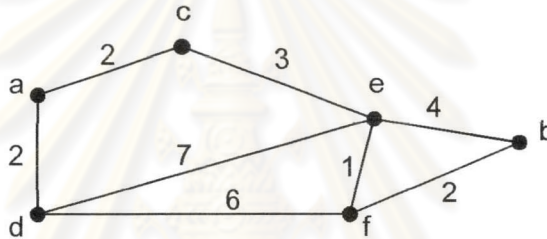
ดังนั้น เส้นทางที่ 2 คือ A, C, E, F, B มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นเท่ากับ $2+3+1+2 = 8$ ซึ่งน้อยที่สุด

จะได้ว่า เราควรเดินทางจากจังหวัด A ผ่านจังหวัด C, E, F และ B ตามลำดับ ซึ่งจะใช้เวลาทั้งสิ้น 8 ชั่วโมง

สำหรับเรื่องวิถีที่สั้นที่สุดนั้น ถ้าเราใช้วิธีพิจารณาวิถีที่เป็นไปได้ทั้งหมด นับว่าเป็นวิธีที่ยากมาก และมีโอกาสผิดพลาดสูง ดังนั้น นักคณิตศาสตร์ได้หาวิธีการในการหาวิถีที่สั้นที่สุดหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด คือ ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra (Dijkstra's algorithm) แต่จะไม่ขอกล่าวถึงในระดับขั้นนี้

ดังนั้น ในเรื่องการหาวิถีที่สั้นที่สุดนั้น เราจะเรียนกราฟที่มีลักษณะง่าย ๆ ไม่ซับซ้อนเกินไป โดยเราจะใช้วิธีการพิจารณาวิถีที่มีโอกาสเป็นวิถีที่สั้นที่สุด ซึ่งไม่จำเป็นต้องหาวิถีทั้งหมดก็ได้

จากตัวอย่างที่ 3 เราจะสังเกตเห็นว่าวิถีจาก a ไป b พิจารณาได้ 2 ทางคือ วิถีที่ผ่าน c กับผ่าน d



กรณีที่ 1 พิจารณา วิถี a-b ที่ผ่าน c

วิถี a-b ที่ผ่าน c จะต้องผ่าน e ดังนั้น พิจารณาวิถีจาก e ไป b ซึ่งมีทางเดิน 3 ทาง คือ ทางเดินจาก e ไป b ซึ่งมีค่าน้ำหนัก 4 (สิ้นสุดการเดินทาง); ทางเดิน e ไป d ซึ่งมีค่าน้ำหนักเท่ากับ 7 เราจึงไม่ต้องสนใจเพราะมีค่าน้ำหนักเกิน 4 และทางเดินจาก e ไป f ซึ่งมีค่าน้ำหนักเท่ากับ 1 จึงพิจารณาต่อไปว่ามีทางเดิน 2 ทาง แต่ทางเดิน e, f, d เราไม่สนใจ เพราะค่าน้ำหนักรวมเกิน 4 จากนั้นพิจารณาทางเดิน e, f, b ได้ค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 3 ดังนั้น วิถีจาก e ไป b ที่สั้นที่สุดคือ e, f, b เพราะฉะนั้น วิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป b ซึ่งผ่าน c คือ a, c, b, f, e ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 8

กรณีที่ 2 พิจารณา วิถี a-b ที่ผ่าน d

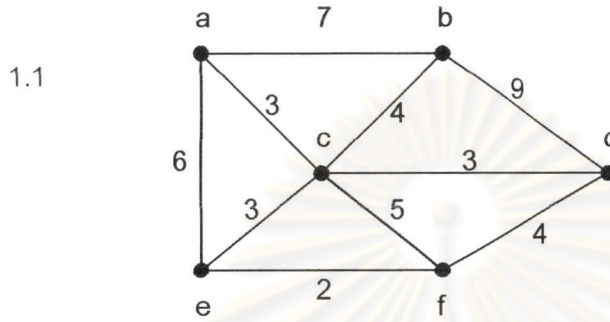
วิถี a-b ที่ผ่าน d ซึ่งมีทางเดิน 2 ทาง นั่นคือ ทางเดินจาก d ไป e ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวม (a, d, e) เท่ากับ 9 ดังนั้นไม่ต้องสนใจเพราะมีค่าน้ำหนักเกิน 8 (มากกว่ากรณีที่ 1) และทางเดินจาก d ไป f ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวม (a, d, f) เท่ากับ 8 ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับกรณีที่ 1 แต่ยังไม่สิ้นสุดการเดินทาง ดังนั้น ค่าน้ำหนักรวมจึงมีค่ามากกว่า 8 แน่ๆ จึงได้ว่า วิถี a-b ที่ผ่าน d จะมีย่าน้ำหนักมากกว่า วิถี a-b ที่ผ่าน c

ดังนั้น วิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป b คือ a, c, e, f, b ซึ่งมีค่าน้ำหนักรวมเท่ากับ 8

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.1
 กราฟถ่วงน้ำหนักและวิถีที่สั้นที่สุด

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

1. จงหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป d ของกราฟต่อไปนี้



.....

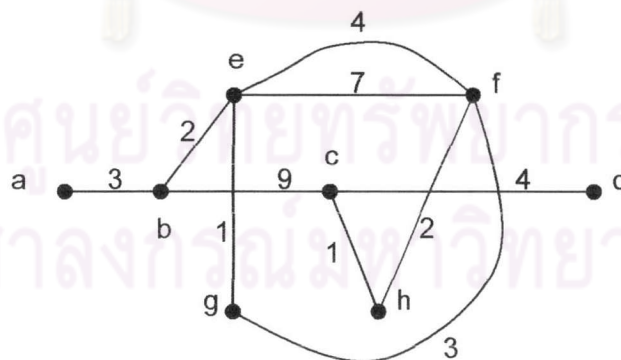
.....

.....

.....

.....

1.2



.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 10

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ต้นไม้และกราฟย่อย

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของต้นไม้ได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นต้นไม้หรือไม่ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถบอกนิยามของกราฟย่อยได้อย่างถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟย่อยหรือไม่
5. นักเรียนสามารถหากราฟย่อยของกราฟที่กำหนดมาให้ได้

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

บทนิยาม

กราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน G กล่าวคือ กราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ถ้า $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

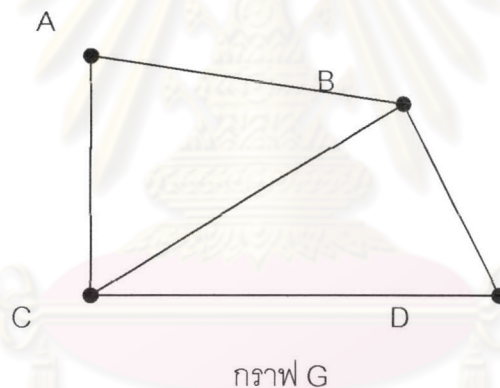
สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 261 – 265

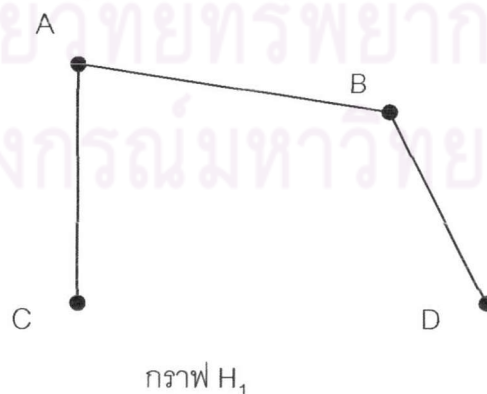
กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูกล่าวถึงเรื่องของเซตในหัวข้อสับเซตว่า “สับเซตหมายถึงอะไร” และลองให้นักเรียนยกตัวอย่างเซตและสับเซต
2. ครูถามนักเรียนต่อไปว่า “แล้วนักเรียนคิดว่าสับกราฟน่าจะเป็นอย่างไร” ครูสุ่มถามนักเรียนประมาณ 2-3 คน
3. ครูบอกนิยามของสับกราฟหรือกราฟย่อย พร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติม
4. ครูและนักเรียนทบทวนเรื่องวัฏจักร โดยครูใช้คำถามถามนักเรียนเกี่ยวกับวัฏจักร
5. ครูยกตัวอย่างกราฟ และถามนักเรียนว่านักเรียนสามารถหาวัฏจักรได้หรือไม่ อย่างไร
6. ครูบอกนิยามของต้นไม้ว่า “ต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร” พร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติม
7. ครูยกตัวอย่างกราฟ G ดังรูป



8. จากนั้นครูยกตัวอย่างกราฟย่อย H_1 ดังรูป



9. ครูถามนักเรียนว่า “กราฟย่อยนี้เป็นต้นไม้หรือไม่” ซึ่งคำตอบคือ ใช่
10. ครูให้นักเรียนลองหากราฟย่อยรูปอื่น ๆ จากนั้น ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยกราฟย่อยทั้งหมดของกราฟ G

11. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 5.2 ให้นักเรียนเป็นรายบุคคล
12. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนเรื่องกราฟย่อยและกราฟต้นไม้อีกครั้ง

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (คาบที่ 2)

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

13. ครูสุ่มเรียกนักเรียนให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับย่อยและกราฟต้นไม้ เพื่อทบทวนและกระตุ้นนักเรียนก่อนการทำกิจกรรม

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

14. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 4-5 คน เพื่อระดมความคิด

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

15. ครูยกกราฟ G ให้นักเรียนดูและให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลองหากราฟย่อยของกราฟ G
16. ครูให้เวลานักเรียนประมาณ 5-8 นาที จากนั้นครูถามนักเรียนว่านักเรียนสามารถหากราฟย่อยได้จำนวนกี่รูป

17. ครูใช้คำถามกระตุ้นนักเรียนให้ลองคิดรูปแบบอื่นต่อไปว่า “กราฟย่อยจำเป็นต้องมีจุดยอดของกราฟ G ครบทุกจุดหรือไม่” “กราฟย่อยจำเป็นต้องเป็นกราฟเชื่อมโยงหรือไม่” จากนั้นครูเปิดโอกาสให้นักเรียนลองคิดหากราฟย่อยเพิ่มเติมอีกประมาณ 10 นาที

18. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาเขียนกราฟย่อยบนกระดาน โดยครูเรียกเวียนทีละกลุ่มให้ออกมาเขียนกราฟย่อยที่ไม่ซ้ำกับที่มีบนกระดาน จนกระทั่งได้กราฟย่อยครบทุกรูป

19. ครูให้นักเรียนมองภาพทั้งหมดบนกระดานแล้ว ให้นักเรียนพิจารณาว่ากราฟย่อยบนกระดานกราฟใดเป็นกราฟต้นไม้บ้าง

20. จากนั้นครูให้นักเรียนแข่งขันกันออกมาวงกลมรูปกราฟที่เป็นต้นไม้ โดยครูเป็นคนให้สัญญาณเริ่มการแข่งขัน

21. เมื่อครูเห็นว่านักเรียนวงกลมต้นไม้ทั้งหมดเป็นเรียบร้อยแล้วจึงสั่งสิ้นสุดการแข่งขัน

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

22. ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของวงกลมกลุ่มอื่น ๆ ว่าถูกต้องหรือไม่

23. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอรูปกราฟที่กลุ่มวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวาดกราฟที่วงทำไมเป็นต้นไม้

24. ครูและนักเรียนสรุปคะแนนที่นักเรียนได้ในแต่ละกลุ่ม

ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

25. ครูอภิปรายผลการทำกิจกรรม และชี้ให้นักเรียนเห็นถึงกราฟย่อยและต้นไม้ของแต่ละกลุ่มว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

26. ครูอธิบายให้นักเรียนถึงการคิดวิเคราะห์ ความคิดสร้างสรรค์ และการเป็นคนช่างคิดช่างสังเกต เวลาครูแนะนำอะไรเพิ่มเติม

ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

27. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับเรื่องกราฟย่อยและต้นไม้อีกครั้ง

28. ครูแจกเอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.2 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 263) และเอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.3 (ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 265) ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กระดาษรูปกราฟ G ในการทำกิจกรรม (chart)
2. ใบงานเรื่องสับกราฟ
3. เอกสารใบความรู้ที่ 5.2 กราฟย่อยและต้นไม้
4. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.2 กราฟย่อย
4. เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.3 ต้นไม้

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

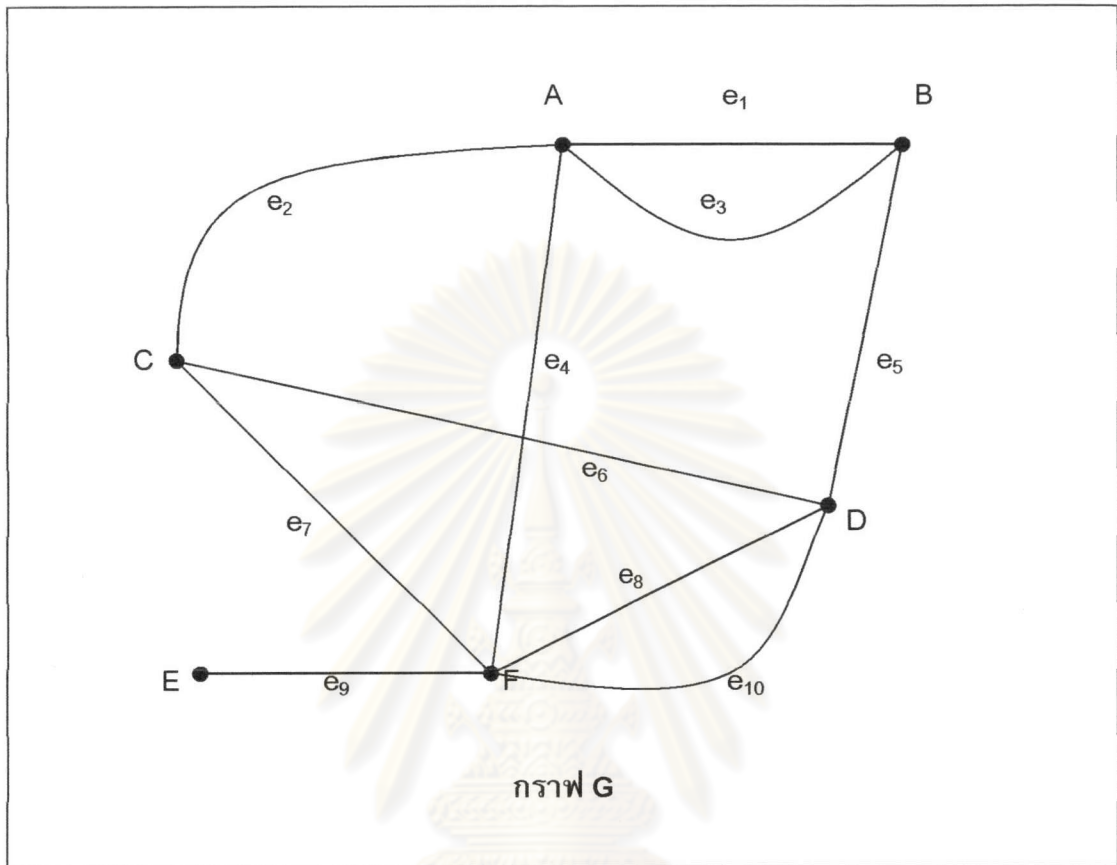
การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากการนำเสนอผลงาน
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากความร่วมมือของกลุ่ม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

กระดานรูปกราฟ G



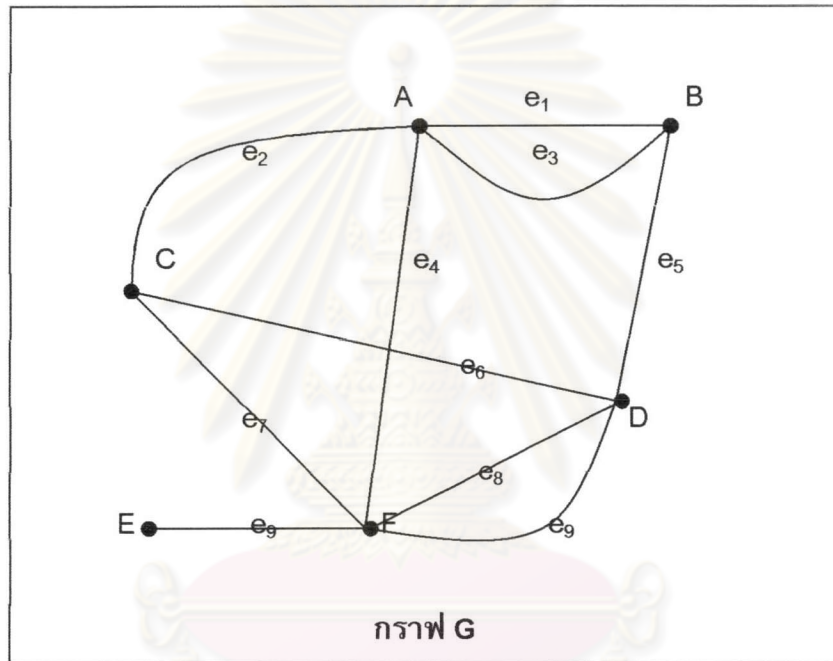
จงหาสับกราฟของกราฟ G ให้ได้มากที่สุด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

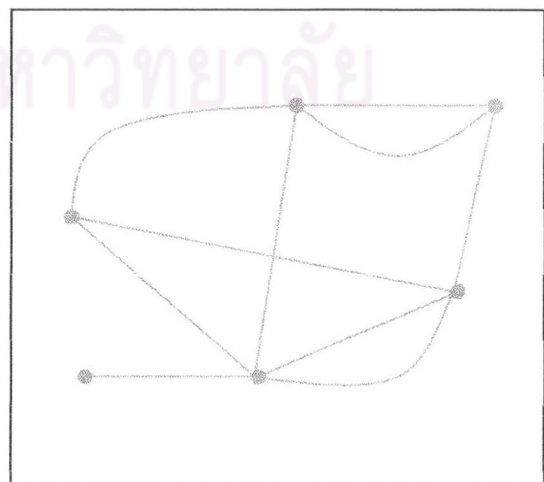
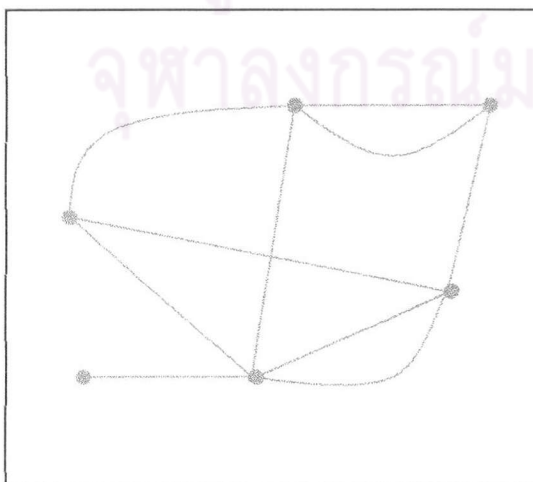
ใบงาน เรื่อง กราฟย่อย

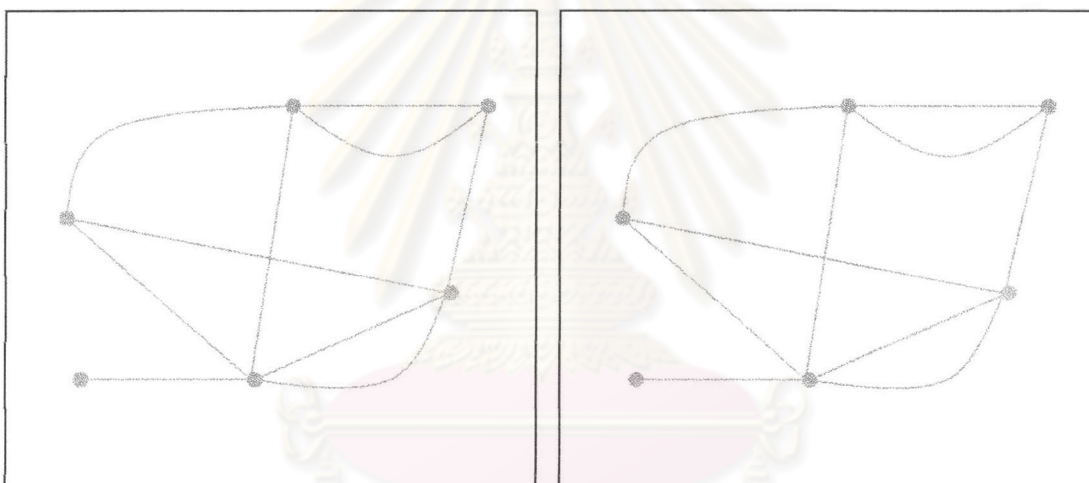
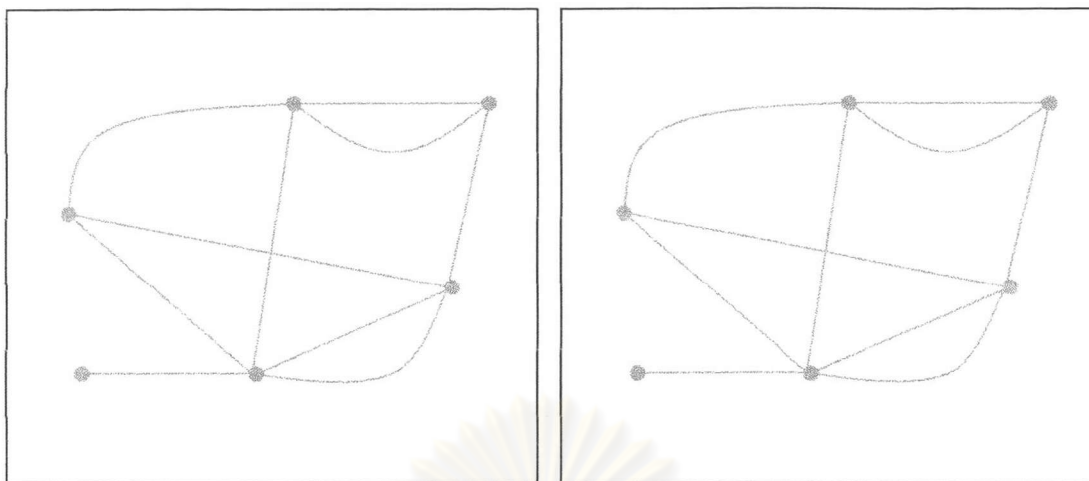
รายชื่อสมาชิกในกลุ่ม

1.
2.
3.
4.
5.
6.



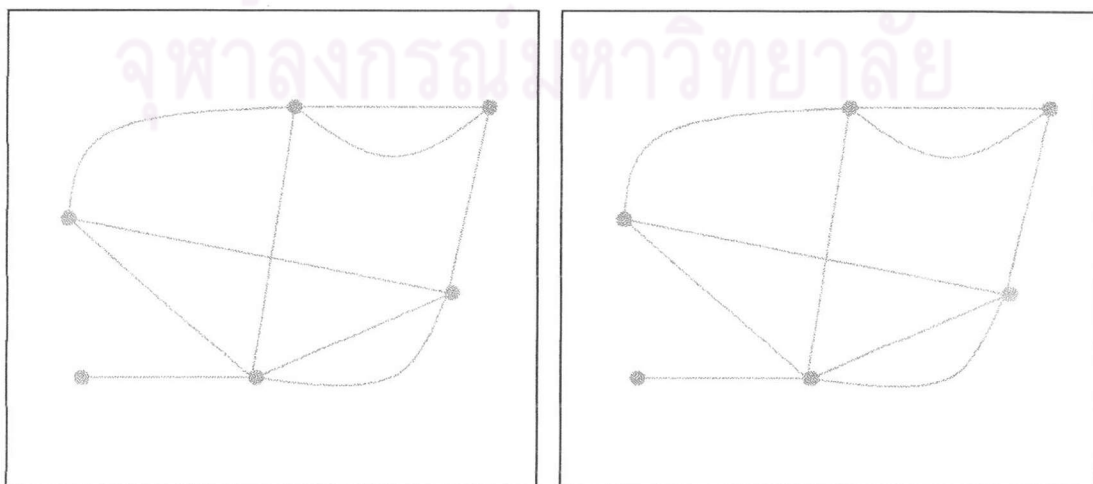
จงเขียนสับกราฟของกราฟ G ลงในกรอบที่กำหนดให้





ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



เอกสารใบความรู้ที่ 5.2

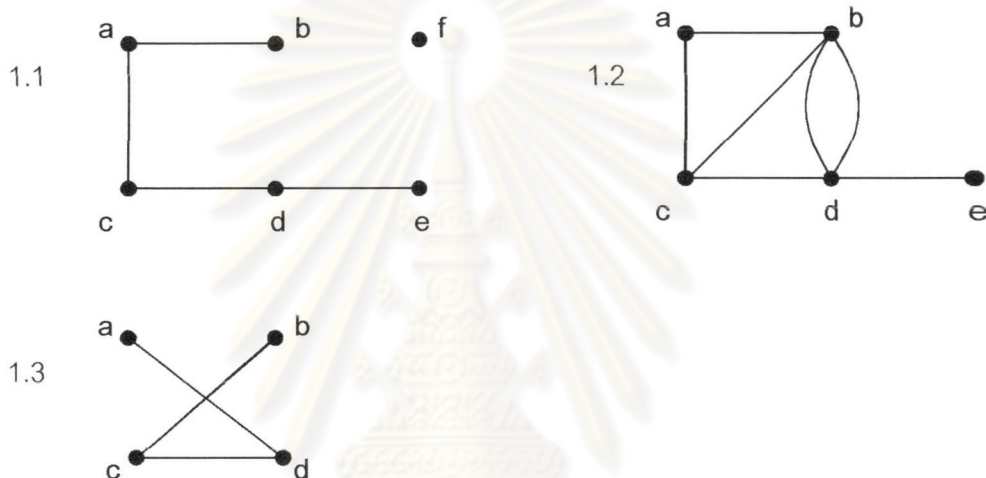
กราฟต้นไม้และกราฟย่อย

กราฟต้นไม้

บทนิยาม

ต้นไม้ (tree) คือกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่างที่ 5.4 จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟต้นไม้หรือไม่ เพราะเหตุใด



วิธีทำ วัฏจักร คือ วงจรที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน หรือ แนวเดินที่มีจุดยอดต่างกัน และจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน

1.1 กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นต้นไม้

1.2 กราฟที่กำหนดให้มีวัฏจักร เช่น a, b, c, a หรือ a, b, d, c, a เป็นต้น ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้ไม่เป็นต้นไม้

1.3 กราฟที่กำหนดให้ไม่มีวัฏจักร (คือไม่สามารถเดินเป็นวงกลมได้) ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นต้นไม้

ข้อสังเกต

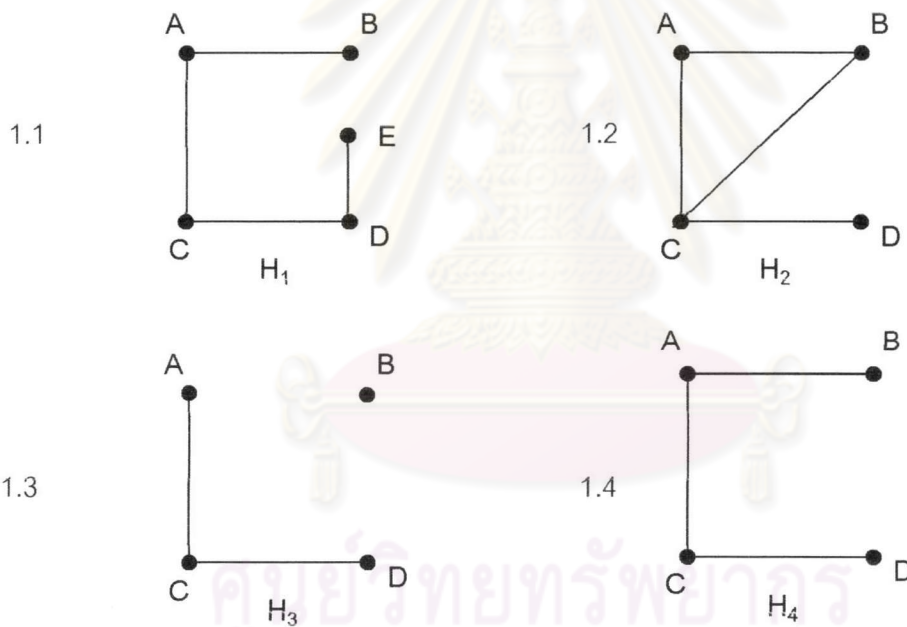
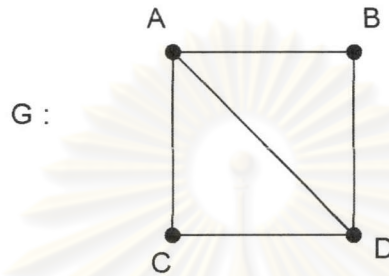
1. ต้นไม้ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวน
2. ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุด จะมีเส้นเชื่อม $n - 1$ เส้นเสมอ

กราฟย่อย

บทนิยาม

กราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน G กล่าวคือ กราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

ตัวอย่างที่ 5.5 กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณากฎที่กำหนดให้ว่าเป็นกราฟย่อยของ G หรือไม่เพราะเหตุใด



วิธีทำ

1.1 จากกราฟ $V(H_1) = \{A, B, C, D, E\}$ แต่ $V(G) = \{A, B, C, D\}$

จะได้ว่า $V(H_1) \not\subset V(G)$

ดังนั้น H_1 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

1.2 จากกราฟ $E(H_2) = \{AB, AC, CD, BC\}$ แต่ $E(G) = \{AB, AC, AD, BD, CD\}$

จะได้ว่า $E(H_2) \not\subset E(G)$

ดังนั้น H_2 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

1.3 จากกราฟ $V(H_3) = \{A, B, C, D\}$ และ $V(G) = \{A, B, C, D\}$

$E(H_3) = \{AC, CD\}$ และ $E(G) = \{AB, AC, AD, BD, CD\}$

จะได้ว่า $V(H_3) \subset V(G)$ และ $E(H_3) \subset E(G)$

ดังนั้น H_3 เป็นกราฟย่อยของ G

1.4 จากกราฟ $V(H_4) = \{A, B, C, D\}$ และ $V(G) = \{A, B, C, D\}$

$E(H_4) = \{AB, AC, CD\}$ และ $E(G) = \{AB, AC, AD, BD, CD\}$

จะได้ว่า $V(H_4) \subset V(G)$ และ $E(H_4) \subset E(G)$

ดังนั้น H_4 เป็นกราฟย่อยของ G

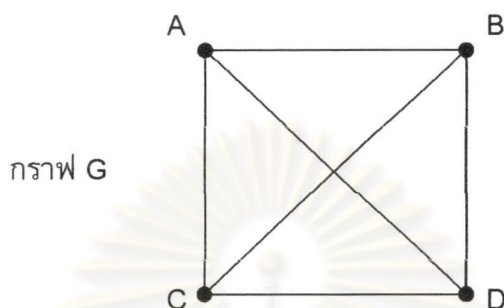


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

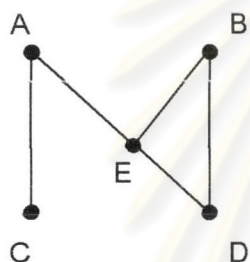
เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.2
กราฟต้นไม้

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

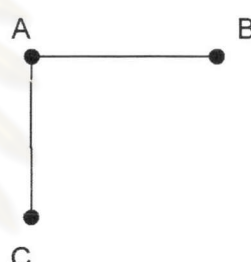
1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟต้นไม้หรือไม่ เพราะเหตุใด



1.1

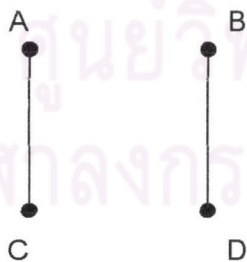


1.2

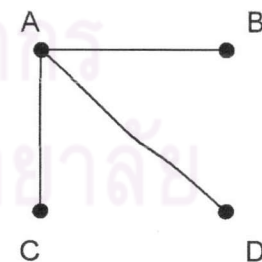


.....
.....
.....
.....

1.3



1.4



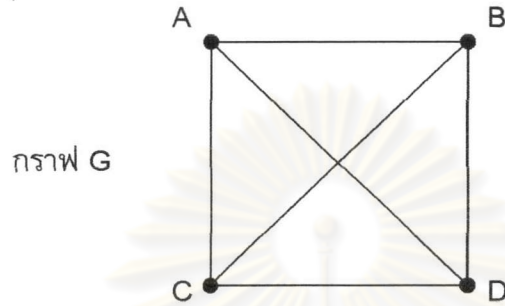
.....
.....
.....
.....

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 5.3

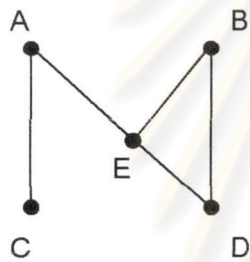
กราฟย่อย

ชื่อ-นามสกุล เลขที่

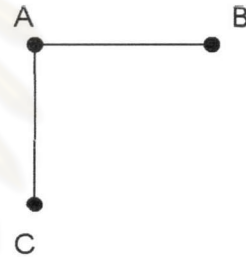
1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟย่อยของ G หรือไม่ เพราะเหตุใด



1.1



1.2



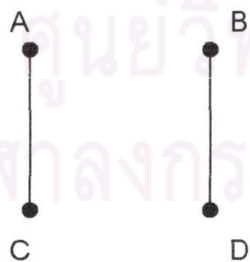
.....

.....

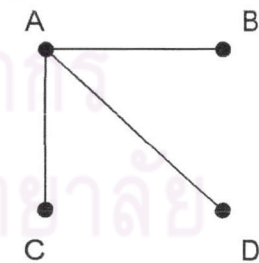
.....

.....

1.3



1.4



.....

.....

.....

.....

2. จากข้อที่ 1 จงหากราฟย่อยของกราฟ G อย่างน้อย 5 กราฟย่อย



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 11

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

สาระการเรียนรู้เรื่อง ต้นไม้แผ่ทั่ว และต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของต้นไม้แผ่ทั่วได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกนิยามของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟที่กำหนดมาให้ได้อย่างถูกต้อง

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) คือ ต้นไม้ซึ่งเป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ G

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (minimal spanning tree) คือต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของแต่ละเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

ขั้นตอนในการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดจากเส้นเชื่อมที่เหลือและไม่ทำให้เกิดวัฏจักร

ขั้นที่ 3 เลือกเส้นเชื่อมตามขั้นตอนที่ 2 จนกระทั่งได้กราฟที่เป็นต้นไม้แผ่ทั่ว ซึ่งจะเป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

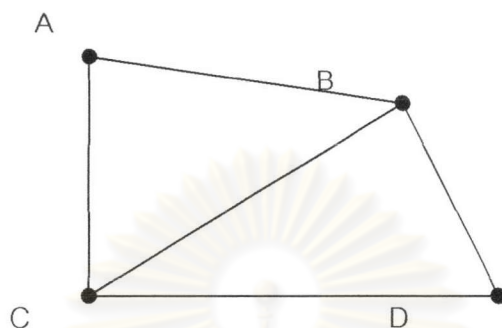
สาระการเรียนรู้

ตามเอกสารสาระการเรียนรู้ หน้า 266 – 270

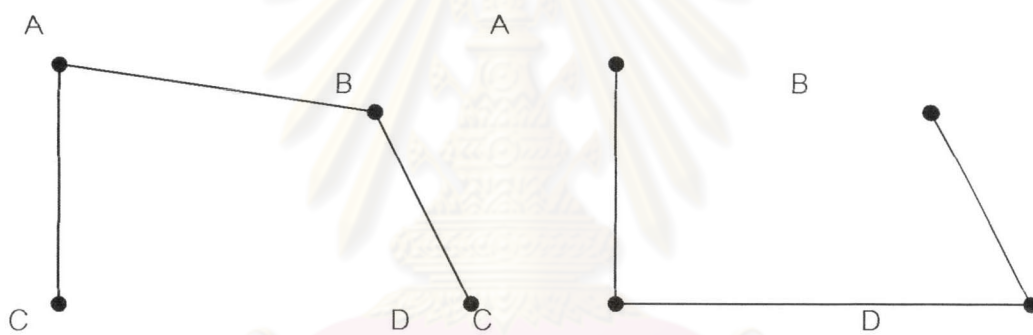
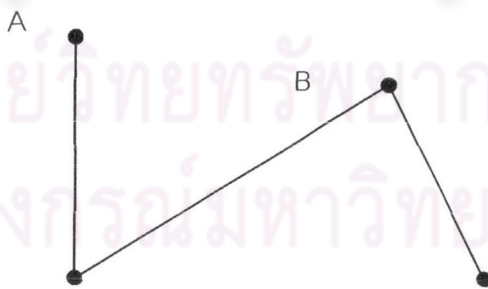
กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นให้ความรู้ (คาบที่ 1)

1. ครูทบทวนโดยการยกตัวอย่างกราฟ G ดังรูป

กราฟ G

2. จากนั้นครูยกตัวอย่างกราฟย่อย H_1 , H_2 และ H_3 ดังรูป

กราฟ H_1 กราฟ H_2 กราฟ H_3

3. ครูถามนักเรียนว่า “กราฟย่อยนี้เป็นต้นไม้หรือไม่” (ซึ่งคำตอบคือ ใช่) และครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าจุดยอดของกราฟย่อยเท่ากับจุดยอดของกราฟ G ซึ่งเราจะเรียกกราฟย่อยลักษณะนี้ว่า “ต้นไม้แผ่ทั่ว”

4. ครูให้นักเรียนแต่ละคนหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G อีกคนละ 2 รูป
5. ครูแจกเอกสารใบความรู้ที่ 5.3
6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาสาระการเรียนรู้เรื่องต้นไม้แผ่ทั่ว และต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

ขั้นกิจกรรมการเรียนรู้เชิงรุก (คาบที่ 2)

ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมตัว

7. ครูสุ่มเรียกนักเรียนให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับต้นไม้แผ่ทั่ว และต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด เพื่อทบทวนและกระตุ้นนักเรียนก่อนการทำกิจกรรม

ขั้นที่ 2 ขั้นจัดกลุ่ม

8. ครูให้นักเรียนจับกลุ่มกัน โดยให้ภายในกลุ่มจะมีสมาชิกไม่เกิน 5 คน และจะต้องมีรูปต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ครบ (นอกเหนือจากตัวอย่างกราฟย่อย H_1 , H_2 และ H_3 จะมีกราฟย่อยอีกจำนวน 5 รูป)

ขั้นที่ 3 ขั้นกิจกรรมกลุ่ม

9. ครูแจกใบงานเรื่องต้นไม้แผ่ทั่วให้นักเรียนทำทีละข้อไปพร้อม ๆ กันทั้งห้อง
10. ครูเริ่มให้นักเรียนทำใบงานเรื่องต้นไม้แผ่ทั่วข้อที่ 1 โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที
11. จากนั้นครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาเฉลย โดยให้เพื่อนคอยตรวจสอบความถูกต้อง
12. ครูเริ่มให้นักเรียนทำใบงานเรื่องต้นไม้แผ่ทั่วข้อที่ 2 โดยใช้เวลาประมาณ 10 นาที โดยข้อที่ 2 นี้ถ้านักเรียนเกิดข้อสงสัยสามารถที่จะถามอาจารย์ได้
13. ครูถามนักเรียนว่า “นักเรียนทุกคนได้ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G_2 แล้วใช่ไหม” จากนั้นให้นักเรียนรมน้ำหนักของกราฟย่อยที่ได้
14. ครูสุ่มเรียกนักเรียนแต่ละกลุ่มให้บอกน้ำหนักรวมของกราฟย่อยที่ได้เท่ากับเท่าใด
15. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าแต่ละกลุ่มอาจจะได้น้ำหนักรวมของกราฟย่อยไม่เท่ากับก็ได้
16. ครูใช้คำถามให้นักเรียนคิดต่อไปว่า “แล้วกราฟย่อยที่มีน้ำหนักรวมน้อยที่สุดจะมีน้ำหนักเท่ากับเท่าใด และมีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร” ครูให้เวลานักเรียนคิด 10 นาที
17. ครูถามนักเรียนว่า “ต้นไม้แผ่ทั่วที่มีค่าน้ำหนักรวมน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร”

18. ครูเริ่มให้นักเรียนทำใบงานเรื่องต้นไม้แผ่ทั่วข้อที่ 3 โดยใช้เวลาประมาณ 15 นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นนำเสนอ

19. ครูถามนักเรียนว่า “ต้นไม้แผ่ทั่วที่มีค่าน้ำหนักรวมน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร”

20. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาตอบ พร้อมทั้งให้อธิบายวิธีคิดด้วย ประมาณ 2-3 กลุ่ม
ขั้นที่ 5 ขั้นอภิปรายผล

21. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายผลของกิจกรรมที่ทำมาในคาบเรียน
ขั้นที่ 6 ขั้นสรุปผล

22. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาสาระการเรียนรู้เรื่องต้นไม้แฝทัว และต้นไม้แฝทัวที่
 น้อยที่สุด

สื่อการเรียนรู้

1. ใบงานเรื่องต้นไม้ ต้นไม้แฝทัว และต้นไม้แฝทัวที่น้อยที่สุด
2. เอกสารใบความรู้ที่ 5.3 ต้นไม้แฝทัว และต้นไม้แฝทัวที่น้อยที่สุด

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล
พุทธิพิสัย
1. สังเกตจากผลการทำกิจกรรม
จิตพิสัย
1. สังเกตจากความตั้งใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม
2. สังเกตจากความร่วมมือของกลุ่ม
ทักษะพิสัย
1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม

บันทึกเพิ่มเติม/ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

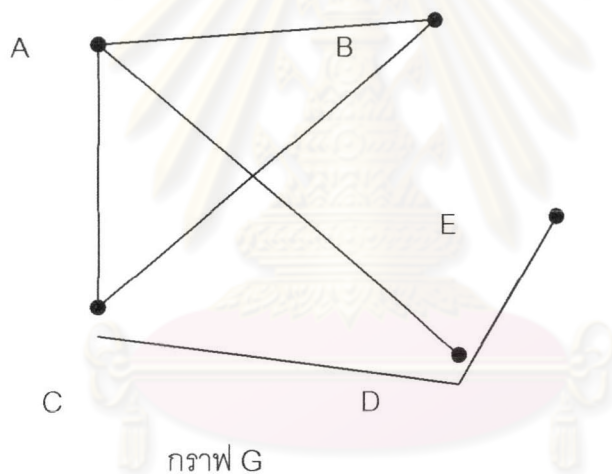
ใบงาน เรื่อง ต้นไม้ ต้นไม้แผ่ทั่ว และต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

รายชื่อสมาชิกในกลุ่ม

1.
2.
3.
4.
5.
6.

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

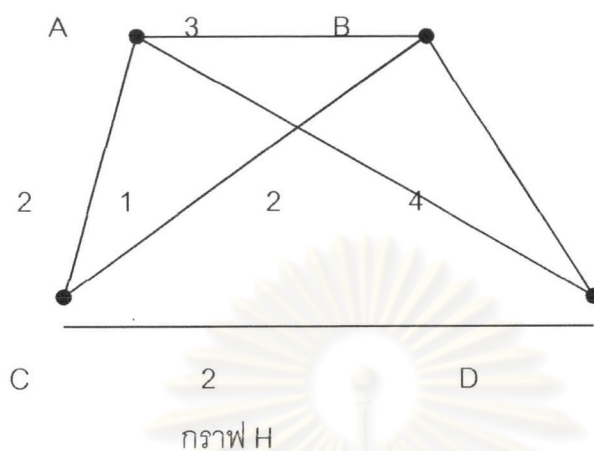
1. กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงหาต้นไม้แผ่ทั่วทุกรูปแบบ



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. กำหนดให้กราฟ H เป็นกราฟถ่วงน้ำหนักดังรูป

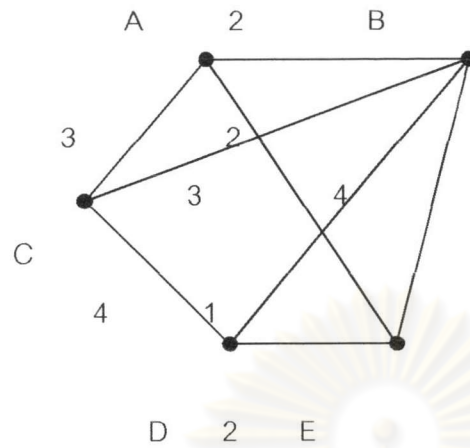
2.1 จงหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ H มา 2 แบบ



2.2 จงหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ H ที่มีน้ำหนักรวมน้อยที่สุด (เรียกกราฟย่อยชนิดนี้ว่า “ต้นไม้แผ่ทั่วถึงที่น้อยที่สุด”)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. กำหนดให้กราฟ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนัก ดังรูป จงหาต้นไม้แผ่ทั่วถึงที่น้อยที่สุด



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

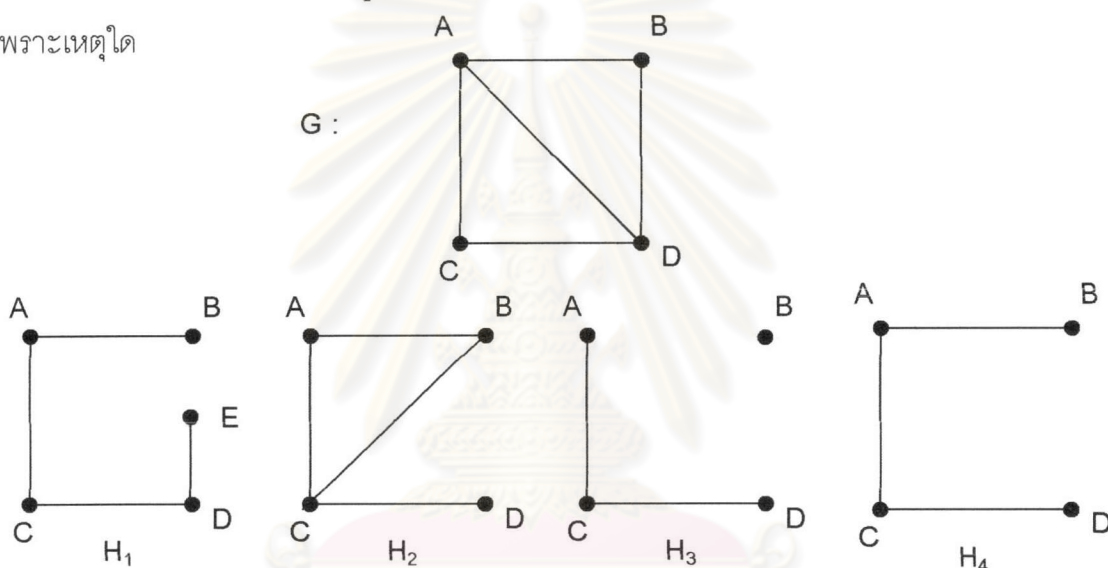
เอกสารใบความรู้ที่ 5.3
ต้นไม้แผ่ทั่วและต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

ต้นไม้แผ่ทั่ว

บทนิยาม

ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ G คือ ต้นไม้ที่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่มีจุดยอดทุกจุดของ G

ตัวอย่าง กำหนดให้กราฟ G ดังรูป จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้ว่าเป็นกราฟย่อยของ G หรือไม่ เพราะเหตุใด



เราจะได้ว่า

กราฟ H_1 และ H_2 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_1 และ H_2 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G
กราฟ H_3 ไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_3 ไม่เป็นต้นไม้ (เพราะไม่ใช่กราฟเชื่อมโยง)

กราฟ H_4 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G เพราะกราฟ H_4 เป็นต้นไม้ที่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง G ที่มีจุดยอดทุกจุดของ G

ข้อสังเกต 1. กราฟ H จะเป็นต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ G ได้จะต้องมี

คุณสมบัติ 3 ประการ คือ

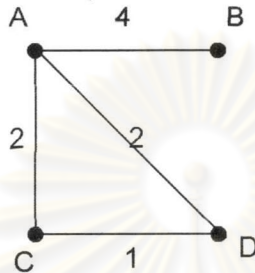
1. กราฟ H จะต้องเป็นต้นไม้
 2. กราฟ H จะต้องเป็นกราฟย่อยของ G
 3. กราฟ H จะต้อง มีจุดยอดทุกจุดของ G
2. ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ อาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งแบบ

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

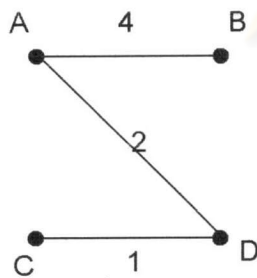
บทนิยาม

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (minimal spanning tree) ของกราฟ G คือ ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟถ่วงน้ำหนัก G ที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

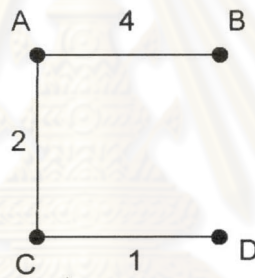
ตัวอย่าง จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้



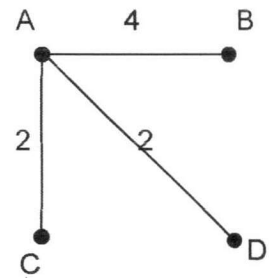
วิธีทำ หาต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมด ได้ดังนี้



แบบที่ 1 (H_1)



แบบที่ 2 (H_2)



แบบที่ 3 (H_3)

จะได้ว่า ต้นไม้แผ่ทั่ว H_1 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ $1+2+4 = 7$

ต้นไม้แผ่ทั่ว H_2 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ $1+2+4 = 7$

ต้นไม้แผ่ทั่ว H_3 มีผลบวกค่าน้ำหนัก เท่ากับ $2+2+4 = 8$

ดังนั้น ต้นไม้แผ่ทั่ว H_1 และ H_2 เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของ G

ข้อสังเกต ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดอาจจะมีได้หลายแบบ

เราจะหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ด้วยการพิจารณาง่ายๆ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด (ถ้าซ้ำกันเลือกเส้นเชื่อมเส้นใดก็ได้)

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในเส้นเชื่อมที่เหลือ โดยเส้นเชื่อมดังกล่าว

ต้องไม่ทำให้เกิดวัฏจักร

ขั้นที่ 3 ทำเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ต้นไม้แผ่ทั่ว ซึ่งจะเป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด