บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และเทคนิค Student's t Copula ในบทนี้เป็นการนำเสนอวิธีดำเนินการวิจัยซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ศึกษาลักษณะของเมตริกซ์สหสัมพันธ์
2. ศึกษาขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula
3. ศึกษาขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ใช้สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula
4. ศึกษาวิธีการสุ่มเมตริกซ์ที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์และบนบริเวณส่วนผิวของเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์
5. ทำการประมาณค่าสัดส่วนของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula
6. เปรียบเทียบขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถใช้ในการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมระหว่างเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula
7. สรุปผลการวิจัย

เนื่องจากขั้นตอนที่ 1-3 และ 6 ในวิธีการดำเนินการวิจัยเป็นการศึกษาเชิงวิเคราะห์ ดังนั้นรายละเอียดของดำเนินการวิจัยในขั้นตอนดังกล่าวผู้วิจัยขอนำเสนอไปพร้อมๆกับการวิเคราะห์ผลการวิจัยในบทที่ 4 ส่วนขั้นตอนที่ 4 และ 5 มีรายละเอียดของการดำเนินการดังต่อไปนี้

3.1 วิธีการสุ่มเมตริกซ์ที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มิติ $d(\Sigma)$

สามารถทำได้โดยการใช้วิธี Onion[1]

ซึ่งมีรายละเอียดขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้ มิติของเมตริกซ์ = d
2. ให้ $k = 1$

   $\Sigma_1 = [1]$
3. ให้ $k = k + 1$
4. จำลองตัวแปรสุ่ม Y ที่การแจกแจงแบบเบตาพารามิเตอร์ $\left(\dfrac{k-1}{2}, \dfrac{d-k+2}{2}\right)$ 1 ตัว

   $Y \sim Beta\left(\dfrac{k-1}{2}, \dfrac{d-k+2}{2}\right)$
5. ให้ $r = \sqrt{y}$
6. จำลองตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่เป็นอิสระต่อกัน $k-1$ ตัว
7. ให้ $\theta = \dfrac{1}{|Z|} Z$ โดยที่ $|Z|$ คือขนาดของ Z
8. ให้ $w = r\theta$
9. ให้ $B = \Sigma_{k-1}^{-\frac{1}{2}}$ โดยที่ $\Sigma_{k-1}^{-\frac{1}{2}}$ คือ upper triangular Cholesky factor of Σ_{k-1}^{-1}
10. ให้ $D = B^{-1}$
11. ให้ $q = Dw$
12. ให้ $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & q \\ q^t & 1 \end{pmatrix}$
13. ถ้า $k < d$ กลับไปขั้นตอนที่ 3

    ถ้า $k = d$ ทำขั้นตอนต่อไป
14. ให้ $\Sigma = \Sigma_d$ จบขั้นตอน

<u>หมายเหตุ</u> ขั้นตอนที่ 6-7 เป็นการจำลอง Unit ball in $\Re^{k-1}$

---

[1]Ghosh,S.,“ Dependence in Stochastic Simulation Models,” (Doctoral dissertation Faculty of Graduate School Cornell Univarsity 2004)

3.2 วิธีการสุ่มเมตริกซ์บนบริเวณส่วนผิวของเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์มิติ d (Σ_{sur})

มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้ มิติของเมตริกซ์ = d
2. ให้ $k=1$ และ $\Sigma_1=[1]$
3. ให้ $k=k+1$
4. จำลองตัวแปรสุ่ม Y ที่การแจกแจงแบบเบตาพารามิเตอร์ $\left(\dfrac{k-1}{2},\dfrac{d-k+2}{2}\right)$ 1 ตัว

   $Y \sim Beta\left(\dfrac{k-1}{2},\dfrac{d-k+2}{2}\right)$
5. ให้ $r=\sqrt{y}$
6. จำลองตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่เป็นอิสระต่อกัน $k-1$ ตัว
7. ให้ $\theta=\dfrac{1}{|Z|}Z$ โดยที่ $|Z|$ คือขนาดของ Z
8. ให้ $w=r\theta$
9. ให้ $B=\Sigma_{k-1}^{-\frac{1}{2}}$ โดยที่ $\Sigma_{k-1}^{-\frac{1}{2}}$ คือ upper triangular Cholesky factor of Σ_{k-1}^{-1}
10. ให้ $D=B^{-1}$
11. ให้ $q=Dw$
12. ให้ $\Sigma_k=\begin{pmatrix}\Sigma_{k-1} & \mathrm{q}\\ \mathrm{q}^{t} & 1\end{pmatrix}$
13. ถ้า $k<d$ กลับไปขั้นตอนที่ 3

    ถ้า $k=d$ ทำขั้นตอนต่อไป
14. ให้ $\Sigma=\Sigma_d$
15. หาค่าเจาะจง (Eigenvalue)ของเมตริกซ์ Σ
16. ให้ $e_{\min}$ = ค่าที่น้อยที่สุดของค่าเจาะจงของเมตริกซ์ Σ
17. ให้ $diag(e_{\min})=\begin{pmatrix} e_{\min} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e_{\min} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & e_{\min} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{\min}\end{pmatrix}$
18. ให้ $\Sigma_{sur}=\dfrac{1}{1-e_{\min}}\left(\Sigma-diag(e_{\min})\right)$ จบขั้นตอน

<u>หมายเหตุ</u>

1. ขั้นตอนที่ 6-7 เป็นการจำลอง Unit ball in $\Re^{k-1}$
2. เหตุผลที่ทำให้ Σ_{sur} เป็นเมตริกซ์ที่อยู่บริเวณผิว เนื่องจาก Seksan[1] ที่กล่าวในหัวข้อ 3.2 ว่า ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรมิติ $d \times d$ ที่มีค่าเจาะจง (Eigenvalue) คือ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_d$ แล้ว $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$ จะมีค่าเจาะจงคือ $\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \lambda_3 + \alpha, \ldots, \lambda_d + \alpha$ โดยที่ α คือค่าคงที่ใดๆ

   ดังนั้น $\Sigma_{sur} = \dfrac{1}{1 - e_{\min}}(\Sigma - diag(e_{\min}))$

   จึงเป็นการ re-scale และทำให้ค่าเจาะจงที่น้อยที่สุดของเมตริกซ์ Σ_{sur} =0

   ซึ่งส่งผลให้ Σ_{sur} เป็นเมตริกซ์ที่อยู่บริเวณผิวของเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์
3. ยังไม่พบหลักฐานยืนยันอย่างชัดเจนว่าเมตริกซ์ที่ได้จากการจำลองตามขั้นตอนข้างต้นนี้ เป็นเมตริกซ์ที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ

---

[1] Seksan Kiatsupaibul, " Mending Flaw of an Estimated Variance – covariance Matrix," (Bangkok : Chulalongkorn University,2006)

3.3 การประมาณค่าสัดส่วนของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถทำการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula

ขั้นตอนการประมาณค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula และ Student's t Copula แสดงรายละเอียดดังรูปที่ 3.1 โดยกำหนดสัญลักษณ์ในแผนผังมีความหมายดังต่อไปนี้

d แทน มิติของเมตริกซ์

v แทน องศาความเป็นอิสระของ Student 's t Copula

num แทน จำนวนเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สุ่มขึ้นมา

z_{num} แทน จำนวนเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้ด้วยเทคนิค Gaussian Copula

$t_{v,num}$ แทน จำนวนเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมได้ด้วยเทคนิค Student's t Copula องศาความเป็นอิสระ v

Σ_U แทน เมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่สุ่มด้วยวิธี Onion

Σ_z แทน เมตริกซ์ที่ได้จากการแปลงเมตริกซ์ Σ_U ด้วยฟังก์ชันในเทคนิค Gaussian Copula

$\Sigma_{T,v}$ แทน เมตริกซ์ที่ได้จากการแปลงเมตริกซ์ Σ_U ด้วยฟังก์ชันในเทคนิค Student's t Copula องศาความเป็นอิสระ v

รูปที่ 3.1 แสดงขั้นตอนการประมาณค่าสัดส่วนของเมตริกซ์ที่สามารถจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian และ Student's t Copula