บทที่ 3
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการผสมกันของของไหลในเครื่องผสมรูปตัวที

3.1 <u>บทนำ</u>

บทนี้จะกล่าวถึงการแก้ปัญหาการผสมกันของของไหลในเครื่องผสมรูปตัวที โดยใช้สมการอนุรักษ์ (conservation equations) มาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) สมการโมเมนตัม (momentum equation) และสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ (scalar property equation) ความเข้มข้น และอุณหภูมิ เป็นต้น รวมทั้งการใช้แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน เมื่อสภาวะการไหลของของไหลในระบบเป็นการไหลแบบปั่นป่วน

3.2 <u>สมการอนุรักษ์ทั่วไป</u>

3.2.1 สมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม

พิจารณาในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate)

สมการความต่อเนื่อง :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{3.1}$$

สมการโมเมนตัม :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \tag{3.2}$$

ซึ่งสมการ (3.2) แทนเซตของสมการพาร์เชียลดิฟเฟอเรนเชียล (partial differential equation) ขององค์ประกอบความเร็วในแต่ละทิศทาง และตัวห้อย (subscript) i (i = 1,2,3 ตรงกันกับองค์ประกอบความเร็วในทิศทางนั้น) ซึ่ง u_i และ p หมายถึง ความเร็วและความดันขณะนั้น ตามลำดับ ส่วน ρ คือ ความหนาแน่น และ τ_{ij} คือ ความเค้นเฉือนในทิศทาง j (j = 1,2,3 ตรงกันกับแกนในระบบคาร์ทีเซียน) [Gosman และคณะ [1969]]

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2.2 สมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ

สมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u_j \phi\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial J_{\phi,j}}{\partial x_j}+S_\phi \qquad (3.3)$$

ซึ่ง ϕ คือ คุณสมบัติเชิงปริมาณ เช่น ความเข้มข้น อุณหภูมิ เป็นต้น $J_{\phi,j}$ เป็นฟลั๊กซ์ของการแพร่ของคุณสมบัติเชิงปริมาณในทิศทาง j [Gosman และคณะ [1969]] และ S_ϕ คือ แหล่งกำเนิดหรือแหล่งสูญเสียไปของคุณสมบัติเชิงปริมาณ

3.2.3 สมการช่วย (auxiliary equation)

เทอม τ_{ij} และ $J_{\phi,j}$ คือ ความเค้นเฉือน และ คุณสมบัติเชิงปริมาณในสภาวะการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ตามลำดับ [Gosman และคณะ [1969]] ซึ่งเทอมเหล่านี้จะเกี่ยวข้องกับเกรเดียนท์ของตัวมันเองอยู่ ดังนั้นจึงใช้สมการมาช่วยช่วยคำนวณเทอมเหล่านี้ก่อนที่จะแก้สมการอนุรักษ์ ดังสมการ (3.4) และ (3.5)

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.4)$$

$$J_{\phi,j}=\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \qquad (3.5)$$

โดย $\Gamma_\phi=\dfrac{\mu}{\sigma_\phi}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ของคุณสมบัติเชิงปริมาณ

ซึ่ง μ และ σ_ϕ หมายถึง ความหนืด และ ตัวเลขแพรนเดิล/ชมิดท์ (Prandtl/Schmidt number)

3.3 <u>สมการอนุรักษ์ในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน</u>

ในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน โมเลกุลของของไหลจะมีลักษณะการเคลื่อนที่สั่นไปมาเมื่อเทียบกับเวลา ดังนั้นสมการอนุรักษ์จะขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent form) ซึ่งเป็นการยากที่จะแก้สมการอนุรักษ์ที่อยู่ขึ้นกับเวลา เพื่อหาคำตอบ จึงต้องเปลี่ยนสมการอนุรักษ์ให้อยู่ในรูปเวลาเฉลี่ย (time-averaged form) ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.3.1 สมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

ให้ความเร็วขณะนั้น (instantaneous velocity , u_i) เท่ากับ ความเร็วเฉลี่ย (mean velocity, $\overline{u_i}$) บวกกับ ความเร็วที่แปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ย (fluctuating velocity, u_i') และให้ความดันขณะนั้น (instantaneous pressure, p) เท่ากับ ความดันเฉลี่ย (mean pressure, $\overline{p}$) บวกกับ ความดันที่แปรผันไปจากความดันเฉลี่ย (fluctuating pressure, p') [Hinze [1959]] โดยสามารถเขียนได้เป็นความสัมพันธ์ดังสมการ (3.6)

$$u_i = \overline{u_i} + u_i' \quad ; \quad p = \overline{p} + p' \qquad (3.6a), (3.6b)$$

โดยที่ ค่าความเร็วเฉลี่ย และ ความดันเฉลี่ย หาได้จากสมการ (3.7)

$$\overline{u_i} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} u_i \, dt \quad ; \quad \overline{p} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} p \, dt \qquad (3.7a), (3.7b)$$

นอกจากนี้ ค่าเฉลี่ยของเทอม u_i' และ p' จะมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} u_i' \, dt = 0 \quad ; \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} p' \, dt = 0 \qquad (3.8a), (3.8b)$$

และแทนสมการ (3.6) ลงในสมการ (3.1) และ (3.2) ซึ่งผลที่ได้ทำให้สมการความต่อเนื่อง และ สมการโมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน มีหน้าตาเหมือนกับสมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมทั่วไป ดังสมการ (3.9) และ (3.10) ตามลำดับ

สมการความต่อเนื่องในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho \overline{u_i}\right)}{\partial x_i} = 0 \qquad (3.9)$$

สมการโมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน :

$$\frac{\partial\left(\rho \overline{u_i}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho \overline{u_i}\,\overline{u_j}\right)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \rho \overline{u_i' u_j'}\right] + \rho g_i$$

(3.10)

ซึ่งทุกเทอมสามารถทำการวัดหาค่าได้ ยกเว้นเทอมเรย์โนลด์สเตรท (Reynolds stress, $\rho\overline{u'_i u'_j}$) ซึ่งประกอบด้วย ค่าเฉลี่ยของความเร็วที่แปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ย ซึ่งเป็นการแพร่ของโมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน ดังนั้นจึงมีการสร้างแบบจำลอง เพื่อทำการประมาณเทอมเรย์โนลด์สเตรทให้เป็นเทอมที่สามารถทำการวัดหาค่าได้ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในหัวข้อ 3.4

3.3.2 สมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

คุณสมบัติเชิงปริมาณขณะนั้น (instantaneous scalar property, ϕ) เท่ากับ คุณสมบัติเชิงปริมาณเฉลี่ย (mean scalar property, $\overline{\phi}$) บวกกับ คุณสมบัติเชิงปริมาณที่แปรผันไปจากคุณสมบัติเชิงปริมาณเฉลี่ย (fluctuating scalar property, ϕ') จาก Hinze [1959] ดังสมการ (3.11)

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{3.11}$$

โดยที่

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \phi \, dt \tag{3.12}$$

$$\int_{t=0}^{T} \phi' \, dt = 0 \tag{3.13}$$

ซึ่งแทนความสัมพันธ์ (3.11) ลงในสมการ (3.3) ได้สมการใหม่เป็นสมการ (3.14)

$$\frac{\partial(\rho\,\overline{\phi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\,\overline{u}_i\,\overline{\phi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\sigma_\phi}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_j} - \rho\,\overline{u'_j\phi'}\right) + \overline{S}_\phi \tag{3.14}$$

ซึ่งเทอม $\rho\overline{u'_j\phi'}$ ประกอบด้วย ค่าเฉลี่ยของคุณสมบัติเชิงปริมาณที่แปรผันไปจากคุณสมบัติเชิงปริมาณเฉลี่ย ซึ่งเป็นการแพร่ของคุณสมบัติเชิงปริมาณในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยแบบจำลองประมาณค่าเช่นเดียวกัน และ $\overline{S}_\phi$ คือ ค่าเฉลี่ยของแหล่งกำเนิดหรือแหล่งสูญเสียไปของคุณสมบัติเชิงปริมาณ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I17032234

ขั้นแรกนำสมการโมเมนตัมที่เป็นค่าเวลาเฉลี่ยในสมการ (3.10) นำไปลบออกจากสมการโมเมนตัมทั่วไปในสมการ (3.2) และแทนค่า $u_i = \overline{u_i} + u_i'$ ดังนั้นได้สมการใหม่เป็นสมการ (3.22)

$$\frac{\partial \rho \overline{u_j} u_i'}{\partial x_j} = -\frac{\partial \rho u_j' \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i' u_j' - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^{\,2}} \qquad (3.22)$$

แล้วจึงคูณด้วยสมการ (3.22) ด้วย $\overline{u_i}$ และทำเป็นเวลาเฉลี่ยโดยใช้สมการ (3.6) ดังนั้นได้สมการใหม่เป็นสมการ (3.23)

$$\frac{\partial \rho \overline{u_j} k}{\partial x_j} = -\rho \overline{u_j' u_i'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' p'} + \rho \overline{u_j' k'} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \rho \varepsilon \qquad (3.23)$$

I II III IV

โดยที่ $k = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$

เทอม I หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ที่สั่นไปมา ต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล จากการไหลของของไหล

เทอม II หมายถึง แหล่งกำเนิดพลังงานจลน์ของของไหลที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล จากความเค้นเฉือนในการกระทบกันของของไหล

เทอม III หมายถึง การแพร่ของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล ซึ่งเกิดจากความดันที่แปรผันไปจากความดันเฉลี่ย การแพร่ของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยของของไหล ซึ่งเกิดจากความเร็วที่แปรผันไปจากความเร็วเฉลี่ย และการแพร่ของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยของของไหลต่อๆกันจากโมเลกุลหนึ่งไปยังอีกโมเลกุลหนึ่ง

เทอม IV หมายถึง การสูญเสียของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล ซึ่งเกิดจากความเค้นเฉือนในการกระทบกันของของไหล

พจน์ $\overline{u_j' p'}$ และ $\overline{u_j' k'}$ ในเทอม III เป็นตัวแปรที่เพิ่มเติมขึ้นมา ซึ่งต้องใช้แบบจำลองมาช่วยแปลงเป็นเทอมที่รู้จัก ส่วนพจน์ $\overline{u_i' u_j'}$ ในเทอม II แทนได้ด้วยสมการ (3.15) ได้ และเทอมที่เหลือแต่ละพจน์เป็นตัวแปรที่ทำการวัดหาค่าได้ทั้งหมด ซึ่ง [Launder และ Spalding [1972]] ได้เสนอสมการอนุรักษ์ของ k ที่ใช้ได้กับของไหลที่มีตัวเลขเรย์โนลด์ที่มีค่าสูง (>30,000) เป็นดังสมการ (3.24)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j} k\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \mu_t G - \rho\varepsilon \qquad (3.24)$$

ซึ่ง σ_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการทดลอง และแสดงค่าอยู่ในตารางที่ 2.1 และ G มีความสัมพันธ์ดังสมการ (3.25)

$$G = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \qquad (3.25)$$

ส่วนที่มาของสมการอนุรักษ์ ε จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ ซึ่งมีสมการอนุรักษ์ ε [Rodi [1972]] ดังสมการ (3.26)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j}\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + \frac{C_1 \mu_t \varepsilon G}{k} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{k} \qquad (3.26)$$

ซึ่งค่า σ_ε , C_1 และ C_2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการทดลอง และแสดงค่าอยู่ในตารางที่ 2.1 [Launder และ Spalding [1972]]

และพบว่าสมการ (3.24) และ (3.26) มีรูปแบบสมการเหมือนกับ สมการแสดงคุณสมบัติ เชิงปริมาณ

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการทดลองของ Launder และ Spalding [1972]

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1 .0	1.3

3.4.2 แบบจำลองอธิบายระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วนโดยใช้เทอมเรย์โนลด์สเตรท

แบบจำลองนี้จะหาเทอมเรย์โนลด์สเตรทโดยตรงจากสมการอนุรักษ์ของตัวมันเอง [Hussain และ Rodi [1974]] ดังสมการ (3.27)

$$\frac{D\rho\overline{u_i' u_j'}}{Dt} = \text{production} + \text{dissipation} + \text{redistribution} \qquad (3.27)$$

ซึ่งเทอมทางขวามือของสมการจะมีจำนวนมาก ยาว และซับซ้อน ซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้

3.5 <u>ฟังก์ชั่นผนัง</u> (wall function)

ใช้อธิบายการถ่ายเทโมเมนตัมให้กับผนัง โดยขึ้นอยู่กับระยะทางตั้งฉากที่ห่างจากผนัง [Launder และ Spalding [1974]] ดังสมการ (3.28)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(E\,y^+\right) \tag{3.28}$$

โดยที่

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}} = \frac{u}{u_w} \tag{3.29}$$

$$y^+ = \frac{u_w\,y\,\rho}{\mu} \tag{3.30}$$

ใช้ได้เมื่อ $5 < y^+ < 70$

ซึ่ง y เป็นระยะทางที่ห่างจากผนังในแนวตั้งฉากกับผนัง ส่วน u คือ ความเร็วที่ขนานกับผนัง และ u_w คือ ความเร็วที่ผนัง ส่วน κ คือ ค่าคงที่ของ Von Karman มีค่าเท่ากับ 0.4 และ E คือ ค่าบ่งบอกถึงความขรุขระของผนัง มีค่าเท่ากับ 9 เมื่อผนังเป็นผนังเรียบ (smooth wall)

ส่วนฟังก์ชั่นผนังที่ใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติเชิงปริมาณบริเวณใกล้ๆผนัง [Launder และ Spalding [1974]] จะเป็นไปดังสมการ (3.31)

$$\phi^+ = \sigma_{\phi,t}\left(u^+ + L_{sub}\right) \tag{3.31}$$

โดยที่

$$\phi^+ = \frac{(\phi - \phi_w)\rho C_p u_w}{J_{\phi w}} \tag{3.32}$$

$$L_{sub} = 9.0\left(\frac{\sigma_\phi}{\sigma_{\phi,t}} - 1\right)\left(\frac{\sigma_\phi}{\sigma_{\phi,t}}\right)^{-1/4} \tag{3.33}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ซึ่ง ϕ คือ คุณสมบัติเชิงปริมาณที่ตำแหน่งใกล้ๆผนัง ϕ_w คือ คุณสมบัติเชิงปริมาณที่ผนัง J_{ϕ_w} คือ ฟลั๊กซ์ของการแพร่ของคุณสมบัติเชิงปริมาณที่ผนัง และ L_{sub} คือ ความต้านทานที่เกิดจากชั้นย่อยที่เป็นการไหลแบบราบเรียบ (resistance of laminar sublayer)

ส่วน σ_ϕ เป็นตัวเลขแพรนเดิล/ชมิดท์ในระบบที่มีการไหลแบบราบเรียบ และ $\sigma_{\phi,t}$ เป็นตัวเลขแพรนเดิล/ชมิดท์ในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

สำหรับพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล บริเวณใกล้ๆผนัง [Launder และ Spalding [1974]] เป็นไปดังสมการ (3.34)

$$k_w = C_\mu^{1/2}\, u_w \tag{3.34}$$

ซึ่ง k_w คือ พลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหลบริเวณใกล้ๆผนัง

เมื่อสมมติให้เกรเดียนท์ของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหลบริเวณใกล้ๆผนังเท่ากับศูนย์ ทำให้สามารถหาค่าความเร็วที่ผนังจากสมการ (3.34)

ในกรณีของอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล ที่บริเวณใกล้ๆผนัง [Launder และ Spalding [1974]] สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการ (3.35)

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4}\, k_w^{3/2}}{\kappa\, y} \tag{3.35}$$

3.6 <u>สมมติฐานของการศึกษา</u>

ในการศึกษาการผสมกันของของไหลในเครื่องผสมรูปตัวทีโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายข้างต้นนั้น การคำนวณหาค่าต่างๆของแบบจำลองตั้งอยู่บนสมมติฐานต่อไปนี้

1. ระบบที่จะศึกษาอยู่ในสภาวะคงตัว (steady state)
2. ความหนาแน่นแปรผกผันกับอุณหภูมิ ดังสมการ (3.36)

$$\rho = \frac{P}{RT} \tag{3.36}$$

โดยค่า R เป็นค่าคงที่ของอากาศ มีค่าเท่ากับ 287 $m^2/s^2.^\circ K$

3. ของไหลในระบบเป็นแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid)

4. ความหนืดแปรผันตามอุณหภูมิ ดังสมการ (3.37)

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + S}{T + S} \qquad (3.37)$$

โดยค่า S มีค่าเท่ากับ 110 K สำหรับอากาศ จาก Schlichting [1971]

และให้อุณหภูมิอ้างอิง $T_\infty = 280\,^\circ K$ ค่าความหนืดของอากาศ $\mu_\infty = 1.75 \times 10^{-5}$ Pa.s

5. ไม่มีแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกเกี่ยวข้องในระบบ

6. ของไหลในระบบเป็นไปตามกฎของฟูเรียร์ (Fourier's Law)

7. ให้ค่าการนำความร้อนของไหล และค่าความจุความร้อนเป็นค่าคงที่ โดยคำนวณค่าอุณหภูมิเฉลี่ยที่ใช้ประมาณค่าการนำความร้อนของไหลเฉลี่ย ($Cp_{ave.}$) ค่าความจุความร้อนเฉลี่ย ($k_{ave.}$) และสำหรับรายละเอียดการหาค่าเฉลี่ยอุณหภูมิเฉลี่ยอยู่ในหัวข้อ 5.3.2

8. ไม่มีพลังงานเกิดขึ้นใหม่ในระบบ และไม่มีพลังงานที่เสียไปเนื่องจากแรงเสียดทาน

9. สภาวะการไหลของของไหลในระบบเป็นการไหลแบบปั่นป่วน

โดยหาค่า μ_t ประมาณได้จากแบบจำลอง $k - \varepsilon$

และค่า Pr_t ประมาณได้จากตารางที่ 3.2

<u>ตารางที่ 3.2</u> ตารางแสดงการประมาณค่า Pr_t จาก Abramovich [1968]

Pr	Prt(Pr)
0.001	36
0.003	12
0.01	3.95
0.03	2.08
0.1	1.46
0.7	1.15
1	1.12
10	1.03

ดังนั้นเมื่อแทนสมมติฐานเบื้องต้นลงในสมการอนุรักษ์ในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน และแบบจำลองอธิบายระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน ทำให้ได้สมการใหม่เป็นสมการ (3.38) ถึง (3.44)

โดยให้ $x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$

และ $\overline{u_1} = \overline{u} \quad \overline{u_2} = \overline{v} \quad \overline{u_3} = \overline{w}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมการความต่อเนื่องในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน :

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\overline{v}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\overline{w}\right)}{\partial z}=0 \tag{3.38}$$

สมการโมเมนตัมในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน :

$$\frac{\partial(\rho\overline{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{u}\,\overline{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{u}\,\overline{w})}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\left(\mu_1+\mu_t\right)\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right) \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{v}\,\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{v}^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{v}\,\overline{w})}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\left(\mu_1+\mu_t\right)\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial z^2}\right) \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{w}\,\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{w}\,\overline{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{w}^2)}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\left(\mu_1+\mu_t\right)\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}\right) \tag{3.41}$$

สมการอนุรักษ์ของพลังงานในระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน :

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u}C_p\overline{T}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\overline{v}C_p\overline{T}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\overline{w}C_p\overline{T}\right)}{\partial z}=\left(k_1+k_t\right)\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2}\right) \tag{3.42}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมการอนุรักษ์ของพลังงานจลน์ที่สั่นไปมาต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}k)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{v}k)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\bar{w}k)}{\partial z}=\left(\mu_l+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\left\{\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial z^2}\right\}+\left(\mu_l+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)$$
$$\left\{2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$-\rho\varepsilon$$

(3.43)

สมการอนุรักษ์ของอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยมวลของของไหล :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{v}\varepsilon)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\bar{w}\varepsilon)}{\partial z}=\left(\mu_l+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\left\{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}\right\}+C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\mu_l+\mu_t\right)$$
$$\left\{2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$-C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

(3.44)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย