การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม
ที่มีความหนาเป็นขั้นด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

นางสาวปรัณยา ธารณเจษฎา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2554

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย
The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

VIBRATION ANALYSIS OF RECTANGULAR STEPPED THIN PLATES BY USING THE KANTOROVICH METHOD

Miss Parunya Taranajetsada

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2011
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมที่มีความหนาเป็นขั้นด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช
โดย	นางสาวปรัณยา ธารณเจษฎา
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

………………………………………….. คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………………… ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย)

…………………………………………... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ)

…………………………………………… กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์)

…………………………………………… กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ศาสตราจารย์ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์)

ปรัณยา ธารณเจษฎา :การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมที่มีความหนาเป็นขั้นด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช. (VIBRATION ANALYSIS OF RECTANGULAR STEPPED THIN PLATES BY USING THE KANTOROVICH METHOD) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก :รศ.ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ, 145 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นตามทิศทางของแกน y โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดคือการจับยึดแบบอิสระ แบบยึดแน่น และแบบปล่อยอิสระ ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใช้หลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด อาศัยการสมมติให้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันในทิศทาง x กับทิศทาง y โดยฟังก์ชันทั้งสองอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ อาจถือว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงเลขเนื่องจากสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในรูปของสมการครอบคลุม และสมการเงื่อนไขขอบเขต เนื่องจากชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นตามแกน y สมการเงื่อนไขความต่อเนื่องเป็นเงื่อนไขเชื่อมฟังก์ชันการเคลื่อนที่บริเวณชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนไป ท้ายที่สุดปัญหาจะอยู่ในรูปปัญหาค่าเจาะจงโดยค่าเจาะจงจากการแก้สมการคือค่าความถี่ธรรมชาติและเวกเตอร์เจาะจงสามารถนำไปคำนวณหารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน การหาค่าเจาะจงจะอาศัยการคำนวณซ้ำจนคำตอบลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง จากการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับผลการศึกษาอื่นในอดีต ผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลการทดลอง พบว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นผลเฉลยที่มีความถูกต้อง แม่นยำ และใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง ผลการศึกษานี้ทำให้สามารถวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างได้ก่อนสร้างจริงและสามารถออกแบบให้ชิ้นงานสั่นสะเทือนอยู่ในช่วงค่าความถี่ธรรมชาติที่ต้องการ นอกจากนี้ยังสามารถนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไปประยุกต์วิเคราะห์ปัญหาอื่นได้ เช่น การโก่งงอของโครงสร้างที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต..
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก....................
ปีการศึกษา 2554

5470266921: MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS : VIBRATION / STEPPED PLATE / KANTOROVICH METHOD

PARUNYA TARANAJETSADA: VIBRATION ANALYSIS OF RECTANGULAR STEPPED THIN PLATES BY USING THE KANTOROVICH METHOD. ADVISOR :ASSOC. PROF. PAIROD SINGHATANADGID, 145 pp.

This study investigated the vibration behaviors of rectangular stepped orthotropic and symmetrically cross-ply composite plates by using the Kantorovich method. Boundary conditions of the specimens are a combination of simple, clamped and free supports. The Kantorovich method is employed as a numerical tool to solve the problem based on the variational principle of minimum total potential energy. The out-of-plane displacement is assumed in the form of a series of product of function of x and function of y. Kantorovich method is a semi-analytical method because the governing energy condition in form of a partial differential equation is reduced to a set of governing ordinary differential equations, a set of boundary conditions. Since the specimens have stepped thicknesses in y direction, the functions of y in the displacement function is written for each section and related to each other by continuity conditions. The equations are finally rewritten in the form of an eigenvalue problem where the eigenvalues and eigenvectors represent the natural frequencies and mode shapes, respectively. The converged eigenvalue is obtained from the iterative calculations. The solutions from this study are verified with the solutions from other studies, finite element method's solutions and the experimental results. The results from this research allows engineer to analyze the vibration behaviors of structures before manufacturing. Designers can also choose the natural frequency of a work piece to be in a specific frequency range. Moreover, this method can be used in other structural problems such as the buckling of steppes thin plates.

Department : Mechanical Engineering Student's Signature ....
Field of Study : Mechanical Engineering Advisor's Signature ....
Academic Year : 2011

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ให้โอกาส ให้ความรู้ คำแนะนำ และคำปรึกษาตลอดการดำเนินการจนวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี นอกจากนี้ยังเป็นแบบอย่างที่ดีในการทำงานและการดำเนินชีวิต

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์.ดร.จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย ประธานกรรมการ ศาสตราจารย์ ดร.สุรินทร์ พงศ์ศุภสมิทธิ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์ กรรมการ ที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์รวมทั้งให้ความรู้ คำแนะนำ และถ่ายทอดประสบการณ์ในการทำงานวิจัย ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น

ขอบคุณเพื่อน พี่ และน้อง หลายท่านที่ให้ความช่วยเหลือ คำปรึกษา และให้กำลังใจ ทำให้ผู้วิจัยรู้สึกถึงมิตรภาพ และความอบอุ่นตลอดเวลาที่ศึกษาอยู่

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ครอบครัวของผู้วิจัย ที่ให้การเลี้ยงดู และอบรมด้วยความรัก ความเข้าใจ ให้การสนับสนุนในทุก ๆ ด้าน และให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอดจนสามารถทำวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จ อนึ่งประโยชน์และคุณค่าใดที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ของมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแต่บิดา มารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.. ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.. จ
กิตติกรรมประกาศ.. ฉ
สารบัญ.. ช
สารบัญตาราง.. ญ
สารบัญภาพ.. ฏ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ.. ฑ

บทที่ 1 บทนำ.. 1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.. 1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.. 3
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.. 3
1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์.. 3

บทที่ 2 ปริทัศน์วรรณกรรม.. 5
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง...... 5
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น.. 8

บทที่ 3 ทฤษฎีและการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง.......................... 12
3.1 สมมุติฐานเบื้องต้นและเงื่อนไขในการวิเคราะห์.. 12
3.2 ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช.. 13

บทที่ 4 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช...................... 29
4.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน........................ 29
4.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง...................... 33
4.3 พารามิเตอร์ที่มีผลต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง.. 41

หน้า

บทที่ 5 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม.. 46
5.1 การสอบทวนความถูกต้องของโครงสร้างแผ่นบางทำจากวัสดุไอโทรอปิก........ 47
5.1.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Xiang และคณะ......... 47
5.1.2 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์............. 53
5.1.3 การสอบเทียบกับผลการทดลอง..60
5.2 การสอบทวนความถูกต้องของโครงสร้างแผ่นบางทำจากวัสดุคอมโพสิท........ 67
5.2.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Chen และคณะ......67
5.2.2 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.............. 70

บทที่ 6 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับโครงสร้างที่มีจำนวนขั้นมากขึ้น............................ 77
6.1 โครงสร้างแผ่นบางไอโซทรอปิกที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น.................... 77
6.2 การศึกษาโครงสร้างแผ่นบางที่มีปริมาตรเท่ากัน.................................... 83
6.3 ชิ้นงานคอมโพสิทที่มีจำนวนขั้น 2 ขั้น...87
6.3.1 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่าง ๆ...87
6.3.2 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่มีลักษณะการวางตัวของเส้นใยต่างกัน...90

บทที่ 7 บทสรุป...96
7.1 บทสรุป..96
7.2 ประโยชน์ที่ได้รับและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต........................ 101

รายการอ้างอิง.. 103
ภาคผนวก...106
ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.......................................107
ภาคผนวก ข ขั้นตอนการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์.....................................126
ภาคผนวก ข.1 การใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างทำจากวัสดุไอโซทรอปิก...127

หน้า

ภาคผนวก ข.2 การใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง
ทำจากวัสดุคอมโพสิท... 137
ภาคผนวก ค การตั้งค่าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต................................ 142

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์...145

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4-1 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือน ที่ 1.. 38
ตารางที่ 4-2 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือน ที่ 2.. 39
ตารางที่ 4-3 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือน ที่ 3.. 40
ตารางที่ 5-1 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตคือ SSSS.. 50
ตารางที่ 5-2 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตคือ SCSC.. 51
ตารางที่ 5-3 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตคือ SFSF.. 52
ตารางที่ 5-4 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC............... 55
ตารางที่ 5-5 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CFCF............... 56
ตารางที่ 5-6 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCSC............... 57
ตารางที่ 5-7 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCSF............... 58
ตารางที่ 5-8 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างไอโซทรอปิกที่มีการจับยึดแบบ CCCC.. 59
ตารางที่ 5-9 ความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ตจากการทดลองของชิ้นงานชิ้นที่ 1 65
ตารางที่ 5-10 เปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการทดลองของชิ้นงานที่ 1 และ ชิ้นงานที่ 2.. 66

หน้า

ตารางที่ 5-11 ความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (β) จากผลการศึกษาของ Chen กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น.. 70
ตารางที่ 5-11 (ต่อ) ความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (β) จากผลการศึกษาของ Chen กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น.. 71
ตารางที่ 5-12 ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคอมโพสิทมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_s$ และ $[0/90]_{2s}$.. 72
ตารางที่ 5-12 (ต่อ) ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคอมโพสิทมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_s$ และ $[0/90]_{2s}$.. 73
ตารางที่ 5-13 ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่มีอัตราส่วน *b/b1* ต่างกัน................... 74
ตารางที่ 5-14 ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่มีการวางตัวของเส้นใยเปลี่ยนไป........... 76
ตารางที่ 6-1 ค่าความถี่ธรรมชาติ (Φ) ของโครงสร้างมีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น.............. 79
ตารางที่ 6-1 (ต่อ) ค่าความถี่ธรรมชาติ (Φ) ของโครงสร้างมีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น........ 80
ตารางที่ 6-2 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.. 82
ตารางที่ 6-3 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีปริมาตรเท่ากันแต่ความหนาไม่เท่ากันขั้น.. 85
ตารางที่ 6-4 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่ 1 ถึง 4 เมื่อมีการจับยึดแบบ SSSS....86
ตารางที่ 6-5 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น...89
ตารางที่ 6-6 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSS และมีการเรียงตัวของเส้นใยแตกต่างกัน.............................. 92

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ 3.1 แผ่นคอมโพสิตที่มีการวางตัว [0/90/0]………………………………………… 13
ภาพที่ 3.2 โครงสร้างแผ่นบาง...13
ภาพที่ 3.3 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1ขั้น…………………..18
ภาพที่ 4.1 ขั้นตอนการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่
ประดิษฐ์ขึ้น.. 32
ภาพที่ 4.2 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น……………..……....……………. 33
ภาพที่ 4.3 อักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึด.. 34
ภาพที่ 4.4 การหารากคำตอบของปัญหาค่าเจาะจง………………………………………..... 35
ภาพที่ 4.5 ภาพที่ร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการคำนวณรอบแรก……………………….... 36
ภาพที่ 4.6 กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ…………..... 43
ภาพที่ 4.6 (ต่อ) กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ…….. 44
ภาพที่ 4.6 (ต่อ) กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ…….. 45
ภาพที่ 5.1 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณ…... 49
ภาพที่ 5.2 ชุดทดสอบและอุปกรณ์การทดลองการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะ……………... 61
ภาพที่ 5.3 อุปกรณ์จับยึดที่ใช้ในชุดทดลอง…………………………………………………... 62
ภาพที่ 5.4 กราฟที่อ่านได้จากเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต……………….………….……. 64
ภาพที่ 5.5 ชิ้นงานคอมโพสิทที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น………………………………. 71
ภาพที่ 6.1 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น………………...……………. 78
ภาพที่ 6.2 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 1………………………………………………. 83
ภาพที่ 6.3 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 2……………………………..………………….. 83
ภาพที่ 6.4 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 3……………..……………………………..…….84
ภาพที่ 6.5 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 4……………………..……………………..……….84
ภาพที่ 6.6 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น
(ชิ้นงานที่ 1)……………… ……………………………………………………...……88
ภาพที่ 6.7 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น
(ชิ้นงานที่ 2)…………………… ……………………………………….....…. 91

หน้า

ภาพที่ 6.8 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น (ชิ้นงานที่ 3)…………… ………………………………………………………… 91
ภาพที่ 6.9 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 4 ของชิ้นงานที่ 3………………….……...………. 94
ภาพที่ 6.10 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 5 ของชิ้นงานที่ 3…………..…………………..… 94

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

a	คือ	ความยาวของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทางแกน x
A_{ij}	คือ	Laminate extensional stiffness
b	คือ	ความยาวของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทางแกน y
B_{ij}	คือ	Laminate coupling stiffness
D_{ij}	คือ	Laminate bending stiffness
E	คือ	ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น
G	คือ	ค่าโมดูลัสเฉือน
h	คือ	ความหนาของแผ่นคอมโพสิทบาง
κ_x	คือ	ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $x-z$
κ_y	คือ	ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $y-z$
κ_{xy}	คือ	ค่าความโค้งบิดของการโก่งตัวนอกระนาบของระนาบกึ่งกลาง
m,n	คือ	จำนวนคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูกของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ
N	คือ	จำนวนพจน์ที่ใช้ในค่าฟังก์ชันเริ่มต้น
t	คือ	ความหนาของแผ่นลามิเมต
T	คือ	พลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของแผ่น
u	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน x
u^0	คือ	การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ x
U	คือ	พลังงานความเครียด
v	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน y
v^0	คือ	การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ y
w	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน z
w^0	คือ	การกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ z
$W(x,y)$	คือ	ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ
$w(x,y,t)$	คือ	ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบแสดงในรูปฟังก์ชันของเวลา
$X_i(x)$	คือ	ฟังก์ชันของ x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$
$Y_i(y)$	คือ	ฟังก์ชันของ y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$
Π	คือ	พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นบนแผ่นบาง
ε_x	คือ	ความเครียดตั้งฉากในทิศ x

ε_y	คือ	ความเครียดตั้งฉากในทิศ y
ε_z	คือ	ความเครียดตั้งฉากในทิศ z
γ_{xy}	คือ	ความเครียดเฉือนบนระนาบ $x-y$
γ_{xz}	คือ	ความเครียดเฉือนบนระนาบ $x-z$
γ_{yz}	คือ	ความเครียดเฉือนบนระนาบ $y-z$
σ_x	คือ	ความเค้นในแนวแกน x
σ_y	คือ	ความเค้นในแนวแกน y
σ_z	คือ	ความเค้นในแนวแกน z
τ_{xy}	คือ	ความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-y$
τ_{xz}	คือ	ความเค้นเฉือนบนระนาบ $x-z$
τ_{yz}	คือ	ความเค้นเฉือนบนระนาบ $y-z$
υ	คือ	ค่าอัตราส่วนปัวร์ซอง
ρ	คือ	ความหนาแน่นของแผ่น (มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)
β	คือ	ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางในรูปไร้หน่วย
Φ	คือ	ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางในรูปไร้หน่วย
ω	คือ	ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง (rad/s)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันมีการนำโครงสร้างแผ่นบางมาใช้ในงานทางวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะงานทางด้านอากาศยาน และงานทางด้านอาคารและโครงสร้างต่าง ๆ เช่น ที่อุโมงค์คนเดินของสนามบินอินชอนประเทศเกาหลีใต้ ได้นำโครงสร้างแผ่นบางมาใช้รับแรงแทนเสาโดยอาศัยหลักการกระจายแรงลงสู่โครงสร้างแผ่นที่นำมาเรียงต่อกันทำให้สามารถลดจำนวนเสาและคานลงได้ [1] ด้วยความซับซ้อนของโครงสร้างทางวิศวกรรมในปัจจุบัน จึงมีความคิดในการเพิ่มความแข็งแรงของโครงสร้างให้มากขึ้น ในขณะเดียวกันก็ต้องการลดน้ำหนักของโครงสร้างด้วย ดังนั้นวัสดุคอมโพสิท (composite material) จึงเข้ามามีบทบาทมากขึ้น นอกจากนี้การออกแบบลักษณะของโครงสร้างให้มีรูปร่างโค้งมนหรือมีความหนาแตกต่างกันก็สามารถช่วยประหยัดวัสดุได้อีกด้วย ชิ้นงานโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปมีประโยชน์อย่างมากสำหรับอุตสาหกรรมการบินและอวกาศ เช่น การออกแบบปีกเครื่องบินที่มีสภาวะการใช้งานในความเร็วสูง [2] เนื่องจากช่วยลดน้ำหนักลงได้และเป็นการประหยัดวัสดุที่มีราคาแพง นอกจากนี้ความหนาที่เปลี่ยนไปของโครงสร้างสามารถเปลี่ยนคุณสมบัติบางประการของโครงสร้าง เช่น ค่าความแข็งเกร็ง (stiffness) ภาระการโก่งงอ (buckling load) และ ค่าความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ได้ ซึ่งจะมีประโยชน์สำหรับวิศวกรในกรณีที่ต้องการหลีกเลี่ยงช่วงการใช้งานบางช่วง หรือเพื่อป้องกันความเสียหายที่อาจจะเกิดขึ้นกับโครงสร้าง

ความเสียหายของโครงสร้างมีหลายสาเหตุ เช่น ความเสียหายจากความเค้น (stress) อันเป็นผลมาจากแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้างสูงเกินกว่าที่ออกแบบไว้ การใช้งานผิดวัตถุประสงค์ เช่น ใช้งานที่อุณหภูมิสูงหรือต่ำกว่าที่ออกแบบไว้ ความเสียหายจากการสั่นสะเทือน เป็นต้น สิ่งเหล่านี้เป็นสาเหตุทำให้ชิ้นส่วนแตกหัก ฉีกขาด หรือโก่งงอได้ ดังนั้นนอกจากคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ เช่น ค่าความเค้น ณ จุดคราก (yield strength) ค่าโมดูลัส (Young’s modulus) ความเหนียวหรือเปราะ การสั่นสะเทือนเป็นพฤติกรรมที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบโครงสร้างแผ่นบาง หากอุปกรณ์แต่ละชิ้นมีความถี่ธรรมชาติใกล้เคียงกับค่าความถี่ที่ใช้งานอาจจะทำให้เกิดการสั่นสะเทือนอย่างรุนแรง เนื่องจากจะเกิดการสั่นพ้อง (resonance) ขึ้น นำมาซึ่งความเสียหายต่อชีวิตและทรัพย์สินได้

จากเหตุผลที่กล่าวมาในข้างต้นจึงมีการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางอย่างกว้างขวาง โดยมุ่งศึกษาหาค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญของการสั่นสะเทือน ได้แก่ค่าความถี่ธรรมชาติ และรูปร่างการสั่นสะเทือนแต่ละโหมด (mode shape) การหาค่าพารามิเตอร์ทั้งสองสามารถหาได้โดยวิธีการวิเคราะห์ (analytical method) วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) และวิธีการทดลอง (experimental method) ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบและข้อเสียเปรียบที่แตกต่างกัน ผลเฉลยของการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณจากทฤษฎีมี 2 ลักษณะคือผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) และผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) กรณีชิ้นงานที่ไม่ซับซ้อนและมีเงื่อนไขขอบเขตบางกรณีเท่านั้นที่จะสามารถแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรงได้ เช่น โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นการจับยึดแบบง่าย (simple support, S) ทั้งสี่ด้านทำจากวัสดุไอโซทรอปิก (isotropic) หรือวัสดุคอมโพสิทที่มีการวางตัวแบบ 0 องศา และ 90 องศา (cross-ply) หากชิ้นงานมีการวางตัวเป็นมุมใด ๆ (angle-ply) หรือ เงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบยึดแน่น (clamped support, C) และปล่อยปลายอิสระ (free edge, F) หรือเมื่อชิ้นงานมีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น มีรูกลมตรงกลาง ผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลเฉลยโดยประมาณซึ่งได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การวิเคราะห์โดยใช้วิธีทางตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติมีข้อดีคือประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายในการศึกษา และอีกประเด็นที่สำคัญที่เป็นลักษณะเฉพาะของวิธีการวิเคราะห์คือ วิธีการวิเคราะห์หรือวิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ มักเป็นการแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบแบบอุดมคติ ได้แก่ การจับยึดแบบง่าย การจับยึดแบบยึดแน่น และแบบปล่อยปลายอิสระ ซึ่งในปัจจุบัน เทคโนโลยีในด้านคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าจนสามารถแก้สมการได้ในเวลาอันสั้น และมีความคลาดเคลื่อนลดลงจนคำตอบที่ได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นที่นิยมในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนในปัจจุบัน แต่หากชิ้นงานที่ต้องการทราบค่าความถี่ธรรมชาตินั้นมีความซับซ้อนมาก การหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีการทดลองจะเป็นทางเลือกที่เหมาะสมกว่าเนื่องจากสามารถจำลองเงื่อนไขการจับยึด และเงื่อนไขต่าง ๆ ที่เกิดจากความไม่สมบูรณ์ของชิ้นงานได้ แม้จะมีค่าใช้จ่ายและใช้เวลาในการทดลองสูงก็ตาม

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช (Kantorocich method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งตัวเลขชนิดหนึ่งที่มีประสิทธิภาพสูงเนื่องจากสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation,PDE) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) ในรูปของสมการครอบคลุม (governing equation) และสมการ

เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) วิธีการนี้นำมาซึ่งผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง เนื่องจากเป็นการแก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนสามารถนำไปเป็นข้อมูลในการออกแบบเพื่อให้เกิดความปลอดภัยในการใช้งานต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์หลักคือ

1. ประยุกต์ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพื่อใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น
2. ศึกษาข้อจำกัด และข้อแนะนำในการใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น
3. เพื่อเป็นแนวทางในการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไปใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อนแบบอื่น ๆ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

ศึกษาและแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลียมมุมฉากที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1 ขั้น ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช โดยมีเงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบง่าย การจับยึดแบบยึดแน่น และการจับยึดแบบอิสระ แบ่งประเภทของวัสดุของชิ้นงานออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มแรกเป็นชิ้นงานที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก และกลุ่มที่สองเป็นแผ่นคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply โดยใช้จำนวนพจน์ของคำตอบเพียงพจน์เดียวเขียนโปรแกรมเพื่อใช้หาคำตอบ พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้กับงานวิจัยในอดีต (ถ้ามี) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และผลการทดลอง

1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหา 7 บทและภาคผนวก 4 บท โดยมีลำดับเนื้อหาและรายละเอียดดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความสำคัญ ที่มาของปัญหา ขอบเขต และจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์ รวมทั้งเนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับปริทัศน์วรรณกรรม ซึ่งกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อการศึกษาของวิทยานิพนธ์ โดยแบ่งกลุ่มของงานวิจัยเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง และส่วนที่สองเป็น งานวิจัยที่ใช้วิธีวิเคราะห์แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โดยงานวิจัยที่กล่าวถึงทั้งสองส่วนจะเน้นงานวิจัยที่ทำการศึกษาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

บทที่ 3 กล่าวถึงสมมุติฐานเบื้องต้นและเงื่อนไขของโครงสร้างแผ่นบางที่ใช้ในการวิเคราะห์ รวมถึงการใช้หลักการพลังงานรวมต่ำสุดและระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพื่อหาสมการครอบคลุม ที่อยู่ในรูป closed form สำหรับการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง

บทที่ 4 แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และขั้นตอนการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยแสดงขั้นตอนการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชหาสมการครอบคลุมและสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ การแก้ปัญหาค่าเจาะจง พร้อมแสดงตัวอย่างขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยสังเขป

บทที่ 5 กล่าวถึงการสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สำหรับวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 1 ขั้น โครงสร้างทำจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิท การสอบทวนทำโดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนกับการศึกษาในอดีต ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลการทดลอง

บทที่ 6 กล่าวถึงการประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อนำไปวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนเมื่อชิ้นงานมีรูปร่างลักษณะ เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด และการวางตัวของเส้นใยเปลี่ยนไป

บทที่ 7 นำเสนอข้อสรุปของวิทยานิพนธ์ ประโยชน์ของวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์เป็นภาคผนวก โดยภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป ภาคผนวก ข แสดงขั้นตอนการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน และภาคผนวก ค แสดงขั้นตอนการตั้งค่าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตเพื่อทำการทดลองการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะ

บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรม

วิทยานิพนธ์นี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นโดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช เนื่องจากจากการศึกษาในอดีตระเบียบวิธีนี้เป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงเลขที่ให้ผลเฉลยมีความถูกต้องค่อนข้างสูง ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและชิ้นงานโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก และคอมโพสิท

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง

ในปัจจุบันโครงสร้างแผ่นบางถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย จากบทความและงานวิจัยที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่ามีความพยายามในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนซึ่งเป็นพารามิเตอร์สำคัญของปัญหาการสั่นสะเทือน โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ กัน Leissa [3] รวบรวมการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยวิธีวิเคราะห์โดยศึกษาโครงสร้างลักษณะต่าง ๆ เช่น วงกลม สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยม โดยมีเงื่อนไขขอบเขตลักษณะต่าง ๆ เช่น แบบปล่อยอิสระ แบบง่าย และแบบยึดแน่น หนึ่งในวิธีการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนที่น่าสนใจคือการแก้ปัญหาโดยวิธีวิเคราะห์ สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน วิธีการวิเคราะห์ทำโดยแก้สมการครอบคลุมโดยตรงทำให้ได้ผลเฉลยแม่นตรง สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 การแก้สมการทำโดยสมมุติให้คำตอบอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) ซึ่งสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางได้อย่างถูกต้อง แต่หากมีเงื่อนไขขอบเขตต่างออกไปจากที่กล่าวไว้ข้างต้นจะไม่สามารถหารูปของคำตอบซึ่งเป็นค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่เป็นผลเฉลยแม่นตรงได้ คำตอบที่ได้จะเป็นผลเฉลยโดยประมาณซึ่งมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง

Xing และ Liu [4] ศึกษาการหาค่าผลเฉลยแม่นตรงของโครงสร้างแผ่นหนาทำจากวัสดุออร์โทรทรอปิกโดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ โดยใช้ข้อสมมุติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff

hypothesis) สร้างสมการครอบคลุม และใช้วิธีแบ่งแยกตัวแปร (separation of variable solution) กำหนดฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบให้อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันของตัวแปร x และฟังก์ชันของตัวแปร y และสมมุติให้ค่าเจาะจงอยู่ในรูปของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (exponential function) ซึ่งผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูป closed-form จากการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้กับงานวิจัยอื่นพบว่ามีความแม่นยำในระดับที่น่าพอใจ แต่การแก้สมการครอบคลุมเพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับเงื่อนไขการจับยึดแต่ละกรณีนั้นทำได้ยาก เนื่องจากจะต้องหาสมการค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงทุกครั้งเมื่อเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนไป

นอกจากการหาผลเฉลยในรูปผลเฉลยแม่นตรงแล้ว ยังมีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนอีกด้วย ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหนึ่งที่ได้รับความสนใจและมีหลายงานวิจัยนำไปศึกษาได้แก่ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ธนาวุฒิ [5] ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ได้แก่ การจับยึดแบบง่าย การจับยึดแบบยึดแน่นและแบบปล่อยอิสระ ใช้พจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณตั้งแต่ 1 ถึง 4 พจน์ งานวิจัยนี้อาศัยหลักการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด (the principle of minimum total potential energy) คำนวณแล้วลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเงื่อนไขขอบเขต โดยสมมุติให้คำตอบอยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง และอาศัยหลักการทำซ้ำเพื่อให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้า พบว่าค่าภาระการโก่งงอและค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นคอมโพสิทที่คำนวณได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีนี้มีความแม่นยำสูงและสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่หลากหลายได้ โดยธนาวุฒิได้นำค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Chen [6] ซึ่งใช้ระเบียบวิธี element free Galerkin แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคอมโพสิทบาง พบว่าค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าเฉลี่ยประมาณ -0.26 เปอร์เซ็นต์

Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแบบขยาย (Extended Kantorovich Method,EKM) วิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างคอมโพสิทแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply โดยสมมุติให้คำตอบสามารถแยกย่อยเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x คูณกับตัวแปร y โดยทราบค่าของฟังก์ชันใดฟังชันหนึ่ง วิธีการนี้สามารถลดรูปสมการจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถกำหนดลักษณะเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ แล้วแก้สมการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง เปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับคำตอบของ Levy [8] สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSF SCSF และ SCSC และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับ

คำตอบของ Rayleigh–Ritz [9] สำหรับเงื่อนไขขอบแบบ CCCC และ CSCS ผลปรากฏว่าค่าที่ได้มีใกล้เคียงกัน โดยมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยน้อยกว่า 1 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนี้มีการนำวิธีเดียวกันนี้ไปคำนวณหาคำตอบสำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCF CSSC และ CSCS อีกด้วย

Sakata และ Takahashi [10] หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุออร์โทรทรอปิก (orthotropic) โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยกำหนดฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบให้อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันของตัวแปร x กับฟังก์ชันของตัวแปร y สมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันด้านใดด้านหนึ่งก่อนแล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเพื่อหาฟังก์ชันด้านที่เหลือ ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ แล้วอาศัยการทำซ้ำจนคำตอบลู่เข้า การศึกษาดังกล่าวหาค่าความถี่ธรรมชาติ 9 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนที่มีเงื่อนไขการจับยึด 15 แบบ พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีความถูกต้องจนถึงโหมดการสั่นสะเทือนสูง เนื่องจากสามารถเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณได้ งานวิจัยนี้ไม่พิจารณากรณีที่ชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตแบบปล่อยอิสระติดกันสองด้านเนื่องจากยากต่อการสร้างสมการเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมกับปัญหา ผลการศึกษาพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงอย่างแม่นยำและรวดเร็ว

ในปี 2008 งานวิจัยของ Shufrin และคณะ [11] ศึกษาการแก้ปัญหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชโดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับหรือมากกว่า 1 พจน์ งานวิจัยนี้เน้นศึกษาผลของจำนวนพจน์ในการสมมติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นในระเบียบวิธีแคนโทโรวิชต่อค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 8 พจน์ ผลการศึกษาพบว่าระเบียบวิธีเคนโทโรวิชสามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้ถูกต้องมากขึ้นเมื่อมีการใช้ค่าฟังก์ชันเริ่มต้นที่มีจำนวนพจน์มากขึ้น งานวิจัยได้ศึกษาชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและมีการวางตัวของเส้นใยแบบ 30 องศา และชิ้นงานที่ถูกจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านและมีการวางตัวของเส้นใยแบบ 45 องศา การสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 1 พจน์ พบว่าค่าภาระการโก่งงอมีค่าแตกต่างจากผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธี Finite Strip Method ถึง 48.672 และ 74.924 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ แต่เมื่อเปรียบเทียบกับการสมมุติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นเท่ากับ 5 พจน์ พบว่า ค่าภาระการโก่งงอมีค่าแตกต่างกันน้อยลงมากคือ 0.155 และ -0.015 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังได้ศึกษาเรื่องการลู่เข้าของคำตอบ (convergence study) โดยใช้จำนวนพจน์ในการสมมติค่าฟังก์ชันเริ่มต้นตั้งแต่ 1 ถึง 8 พจน์พบว่าการลู่เข้าสู่ผลเฉลยจะมีลักษณะที่ผลเฉลยจะค่อย ๆ มีค่าลดลงเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์

ของคำตอบ ผลเฉลยจะลดลงถึงถึงค่า ๆ หนึ่งแล้วผลเฉลยจะไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากที่สุด

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชถูกใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีกึ่งตัวเลขที่ให้คำตอบที่มีความถูกต้องแม่นยำ ใกล้เคียงกับคำตอบที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง นอกจากนี้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชใช้ทรัพยากรและเวลาในการคำนวณน้อย และที่สำคัญระเบียบวิธีนี้สามารถใช้แก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขการจับยึดได้หลากหลายกว่าวิธีอื่นที่กล่าวมาข้างต้น

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

นอกจากปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางแล้ว ในปัจจุบันมีการขยายการศึกษาออกไปโดยมีการศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างที่มีความหนาไม่เท่ากัน ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ชนิดหลักคือ ความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น ความหนาเปลี่ยนไปโดยมีความชันคงที่ โดยที่ความชันเป็นฟังก์ชันของความกว้างด้านใดด้านหนึ่ง และความหนาเปลี่ยนไปโดยมีความชันคงที่ทั้งสองด้าน

Malekzadeh และ Shahpari [12] นำเสนอผลการศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางและหนาซึ่งมีขอบถูกจับยึดแบบ elastically restrained edges สมการครอบคลุมถูกสร้างขึ้นโดยหลักการของ Hamilton (Hamilton’s principle) โดยพิจารณาผลของการเปลี่ยนรูปด้านเฉือน (shear deformation) และความเฉื่อยของการหมุน (rotary inertia) งานวิจัยนี้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้ระเบียบวิธี differential quadration (DQ) ระเบียบวิธีนี้อาศัยการสร้างฟังก์ชันขึ้นมาเพื่อถ่วงน้ำหนักสมการเชิงอนุพันธ์ การศึกษาแบ่งออกเป็น 3 ส่วน โดยส่วนแรกตรวจสอบความถูกต้องของการแก้ปัญหาโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณโดยกำหนดให้โครงสร้างแผ่นบางมีความหนาสม่ำเสมอ เปรียบเทียบกับผลการคำนวณกับระเบียบวิธี pb2-Ritz [13] และระเบียบวิธีริทซ์ [14] พบว่าผลที่ได้มีความแม่นยำเมื่อให้จำนวน grid point เท่ากับ 7 ส่วนที่ 2 แก้สมการหาค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนแปลงสม่ำเสมอทั้งสองด้านสมมาตรกันที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบอุดมคติ (ideal boundary condition) โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของ elastic support สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายและเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่นให้มีค่าเป็นศูนย์และอนันต์ตามลำดับ ค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Rayleigh-Ritz ผลปรากฏว่าผลเฉลยที่ได้มีความแม่นยำและจำนวน grid point ที่เหมาะสมในการ

คำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติ 2 โหมดแรกคือ 7 และโหมดการสั่นสะเทือนที่ 3 คือ 9 ส่วนที่ 3 เป็นการหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนแปลงสม่ำเสมอทั้งสองด้านสมมาตรกัน ที่มีเงื่อนไขขอบเขต คือ C-E_{TR}-C-E_{TR} , S-E_{TR}-S-E_{TR} , S-E_{TR}-E_{TR}-E_{TR} โดยที่ E_{TR} คือขอบเขตการจับยึดที่ยอมให้เกิดการเคลื่อนที่และการหมุนของชิ้นงาน ผลการวิจัยพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติ 5 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนลู่เข้าสู่คำตอบอย่างรวดเร็ว และค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีความถูกต้องเมื่อมีจำนวน grid point เท่ากับ 7 สรุปได้ว่าการใช้ DQ แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนมีข้อดีคือ สามารถใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปโดยให้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำและใช้จำนวน grid point น้อย

Hull และ Buchanan [15] ศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นหนารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น ชิ้นงานที่ศึกษามีคุณสมบัติเป็นไอโซทรอปิกและแอนไอโซทรอปิก โดยใช้ทฤษฎีโครงสร้างแผ่นของ Mindlin (Mindlin plate theory) โดยมีเงื่อนไขขอบเขต 2 แบบ คือ SSSS และ CCCC ผลการศึกษาที่น่าสนใจคือโครงสร้างที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่ทำจากวัสดุออร์โทรทรอปิกจะมีความสามารถในการตอบสนองสั่นสะเทือนแต่ละด้านไม่เท่ากัน ซึ่งจะส่งผลกับค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างของโหมดของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นด้วย

การแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนจำนวนมากในอดีตไม่สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ทุกเงื่อนไขขอบเขต โดนส่วนใหญ่จะถูกจำกัดด้วยเงื่อนไขขอบเขตของด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไป Xiang [2] นำเสนอวิธีหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการโก่งงอและปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นโดยใช้ระเบียบวิธี Levy ในการกำหนดฟังก์ชันของคำตอบซึ่งเป็นการกระจัดนอกระนาบ คำตอบที่ได้อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันของ y กับฟังก์ชันของ x โดยฟังก์ชันของ y มีรูปร่างเป็นจำนวนเท่าของคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูก (half-sine wave) และใช้เทคนิค state-space เพื่อหาฟังก์ชันของ x ชิ้นงานต้องมีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายตลอดด้านที่มีการเปลี่ยนแปลงของความหนา ส่วนอีก 2 ด้านที่เหลือสามารถมีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบปล่อยปลายอิสระได้ สำหรับปัญหาการโก่งงอ งานวิจัยได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น 1 และ 2 ขั้น โดยมีเงื่อนไขการจับยึดทั้งหมด 6 แบบ คือ SSSS, SSFF, SSCC, SSSF, SSCF และ SSCS สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือน ได้นำเสนอค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนเมื่อมีเงื่อนไขขอบเขต 6 แบบ เช่นเดียวกับปัญหาการโก่งงอ ผลเฉลยที่ได้นำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น [16,17] พบว่ามีความถูกต้องและแม่นยำ

Bert และ Malik [18] ศึกษาการสั่นสะเทือนของชิ้นงานโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป โดยชิ้นงานด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปต้องมีเงื่อนไขขอบเขตเหมือนกัน และเงื่อนไขขอบเขตของด้านที่เหลือต้องเป็นการจับยึดแบบง่ายทั้งสองด้าน วัสดุของชิ้นงานสามารถเป็นได้ทั้งไอโซทรอปิก และคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply งานวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีกึ่ง differential quadration หาค่าความถี่ธรรมชาติ มีขั้นตอนคือกำหนดให้รูปร่างการสั่นเทือนระหว่างเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสองด้านเป็นฟังก์ชันไซน์ ซึ่งวิธีการนี้จะสามารถเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ แล้วใช้ระเบียบวิธี differential quadrature แก้สมการหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง และโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปโดยมีความชันคงที่ทั้ง 2 ด้าน ความชันของชิ้นงานเป็นฟังก์ชันของระยะทาง $H = 1 + \alpha x$ โดยที่ α มีค่า 0, 0.2 และ 0.4 ที่ทำจากวัสดุ ไอโซทรอปิก ที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS, SCSS, SCSF, CSCS, CSSS, SSCS, SSFS, FSSS, CSFS และ FSCS โดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้กับงานวิจัยที่มีในอดีต นอกจากนี้ยังขยายผลการศึกษาหาค่าความถี่ธรรมของชิ้นงานที่มีคุณสมบัติเป็น orthotropic โดยให้ α มีค่า 0, 0.2 และ 0.4 มีเงื่อนไขขอบเขตการจำยึด คือ SSSS, CSCS, CSSS, SSFS, CSFS และ FSFS โดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้กับงานวิจัยที่มีในอดีต ผลการศึกษาพบว่าเมื่อเลือกใช้ sampling point ที่เหมาะสมสำหรับปัญหานั้น ๆ แล้วนำค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น พบว่า sampling point ที่เหมาะสมคือ 23 จุด ซึ่งเป็นค่าที่มาก ดังนั้นในการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่น้อยกว่าสามโหมดแรกของการสั่นสะเทือนจะใช้ sampling point คือ 9 จุด หรือ 11 จุดได้โดยคำตอบที่ได้ยังมีความแม่นยำอยู่

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่ามีการแก้ปัญหาการสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นด้วยวิธีต่าง ๆ มีข้อดีและข้อจำกัดในการใช้งานแตกต่างกันไป จากการศึกษางานวิจัยในอดีตพบว่ามีการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชซึ่งให้ผลเฉลยแม่นยำในกรณีโครงสร้างแผ่นบางมาประยุกต์ใช้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น Cortinez และ Laura [19] ใช้ค่าพลังงานสูงสุดของการสั่นสะเทือน (the maximum of vibration energy) สร้างสมการครอบคลุม และใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน และแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยการหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม (optimization parameter) และสมมุติคำตอบด้านแกน x ซึ่งเป็นด้านที่มีความหนาเปลี่ยนแปลงให้อยู่ในรูปของสมการพหุนามที่มีเลขชี้กำลังที่มีความสัมพันธ์กับค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม แก้สมการซึ่งเป็นปัญหาค่าเจาะจง ค่าเจาะจงที่ได้คือค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงาน งานวิจัยนี้นำเสนอแนวคิดในการนำ

ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนแต่ไม่มีการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับงานวิจัยอื่น

สำหรับในด้านการทดลอง เนื่องจากความทันสมัยของเครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์ผลมีความถูกต้อง แม่นยำ และสามารถแสดงผลได้รวดเร็วกว่าเดิม ทำให้มีงานวิจัยอีกจำนวนมากที่นำเสนอผลการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีการทดลอง เช่น Tuvey [20] และ Chaudhuri [21] ได้สร้างชุดทดสอบการสั่นสะเทือน โดยใช้เครื่องกำเนิดการสั่นสะเทือน (Shaker) เป็นตัวกระตุ้นให้เกิดการสั่นสะเทือนบนชิ้นงานที่ทำจากวัสดุคอมโพสิทและใช้ตัววัดสัญญาณความเร่งรับสัญญาณการสั่นสะเทือน ส่งสัญญาณที่ได้จากเครื่องกำเนิดการสั่นสะเทือนและตัววัดสัญญาณความเร่งให้กับเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตวิเคราะห์ซึ่งจะแสดงผลบนโดเมนความถี่ ใช้ทรายโรยบนชิ้นงานที่ถูกสั่นสะเทือนที่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ตรงกับโหมดการสั่นสะเทือนหนึ่ง ๆ เพื่อศึกษารูปร่างการสั่นสะเทือน สำหรับเงื่อนไขการจับยึดแบบง่ายใช้ชิ้นส่วนที่มีลักษณะเหมือนใบมีดจับยึดชิ้นงาน สำหรับเงื่อนไขการจับยึดแบบยึดแน่นใช้แท่งเหล็กแบนขันแน่นจับยึดชิ้นงาน และปล่อยปลายไว้สำหรับเงื่อนไขการจับยึดแบบปล่อยอิสระ โดยผลการทดลองที่ได้นำมาเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณจากทฤษฎี และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากงานวิจัยที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ จะเห็นว่ามีการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางอย่างกว้างขวาง ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้อง แม่นยำ ใช้เวลาและทรัพยากรในการคำนวณน้อยเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีอื่น ข้อได้เปรียบที่สำคัญของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชคือสามารถแก้ปัญหาของโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตได้หลากหลายกว่าระเบียบวิธีอื่น และสามารถแสดงขั้นตอนการคำนวณเป็นขั้นตอนทำให้เข้าใจและสะดวกในการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนมากกว่าโปรแกรมที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และเนื่องจากในปัจจุบันโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปมีบทบาทมากขึ้นในหลายอุตสาหกรรม งานวิจัยจำนวนมากพยายามหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นแต่ผลเฉลยที่ได้ถูกจำกัดด้วยเงื่อนไขขอบเขตตามแต่กรณีไป ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้ จะแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นโดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับชิ้นงานไอโซทรอปิก และคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply โดยค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จะนำไปเทียบกับงานวิจัยที่มีอยู่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลการทดลอง เพื่อสอบทวนความถูกต้องของผลเฉลย

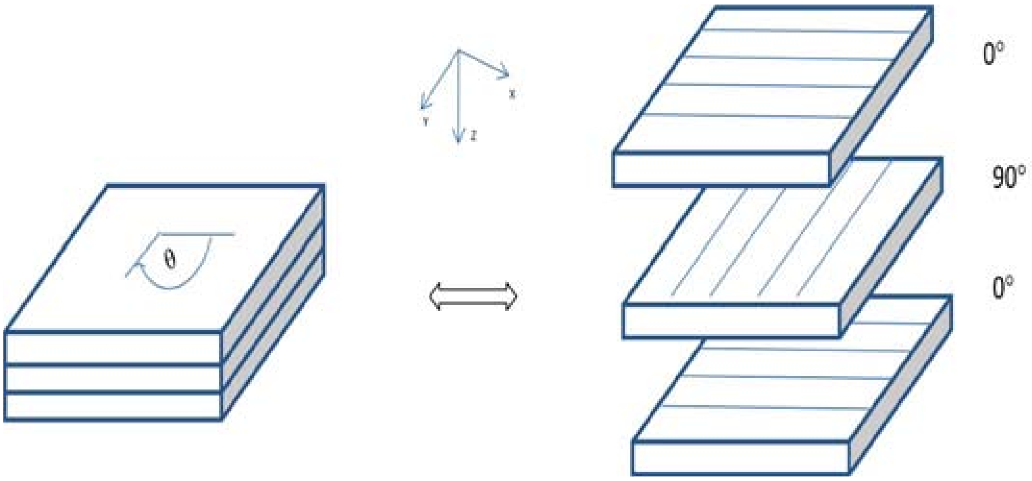
บทที่ 3
ทฤษฎีและการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นซึ่งทำจากวัสดุไอโซทรอปิก และวัสดุคอมโพสิทที่มีการวางตัวแบบ 0 องศาและ 90 องศาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานเบื้องต้นของโครงสร้างแผ่นบาง รวมถึงทฤษฎีการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

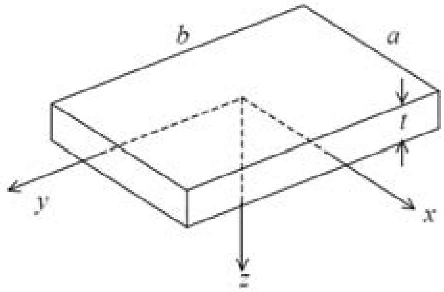
3.1 สมมุติฐานเบื้องต้นและเงื่อนไขในการวิเคราะห์

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในขอบเขตของวิทยานิพนธ์นี้มีสมมุติฐานเบื้องต้นดังต่อไปนี้ [22]

1. ชิ้นส่วนที่ศึกษาเป็นโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทำด้วยวัสดุโลหะที่มีสมบัติวัสดุเป็นไอโซทรอปิก หรือแผ่นคอมโพสิทแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใย 0 องศาและ 90 องศา เท่านั้น ดังแสดงในภาพที่ 3.1
2. ความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง (t) ดังแสดงในภาพที่ 3.2 มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวของด้านกว้าง (a) และด้านยาว (b) ของชิ้นงาน
3. การเคลื่อนที่ของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทาง x (ใช้สัญลักษณ์ u) และในทิศทาง y (ใช้สัญลักษณ์ v) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของพิกัด z
4. ความเครียดในระนาบ x-y ($\varepsilon_x , \varepsilon_y , \gamma_{xy}$) มีค่าน้อยมาก สามารถละทิ้งได้
5. ความเครียดเฉือนนอกระนาบ ($\gamma_{xz} , \gamma_{yz}$) มีค่าน้อยมาก สามารถละทิ้งได้
6. ความเครียดในทิศทางตั้งฉากกับระนาบ x-y (ε_z) มีค่าน้อยมาก สามารถละทิ้งได้
7. ความเค้นเฉือนนอกระนาบ (τ_{xz} , τ_{yz}) หายไปที่ผิวหน้าของโครงสร้างแผ่นบาง (ที่ระยะ $z = \pm t/2$)
8. วัสดุของชิ้นทดสอบมีคุณสมบัติตามกฎของฮุค (Hooke's Law)
9. ขณะเกิดการสั่นสะเทือนไม่มีความเค้นดึงและความเค้นอัด
10. ขณะเกิดการสั่นสะเทือนไม่คิดผลของ rotational inertia ($I = 0$)



ภาพที่ 3.1 แผ่นคอมโพสิทที่มีการวางตัว [0/90/0]



ภาพที่ 3.2 โครงสร้างแผ่นบาง

3.2 ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงเลข ซึ่งอาศัยหลักการการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด สำหรับโครงสร้างแผ่นบางจะสามารถเขียนพลังงานศักย์รวม (total potential energy) ให้อยู่ในรูปการเคลื่อนที่นอกระนาบ สามารถประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแก้ปัญหาได้ ขั้นตอนสำคัญของระเบียบวิธีนี้คือการสมมุติการเคลื่อนที่นอกระนาบ w ให้อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ เมื่อสมมุติให้ฟังก์ชัน $X(x)$ หรือฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าจะสามารถประยุกต์ใช้หลักการแปรผันของพลังงาน (Variational of total potential energy) สร้างสมการครอบคลุมพร้อมทั้งเงื่อนไขขอบเขต โดยสมการครอบคลุมและสมการเงื่อนไขขอบเขตจะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์สามัญที่สามารถแก้ได้โดยวิธีการวิเคราะห์หรือวิธีเชิงตัวเลข ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีที่ลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญก่อนที่จะแก้สมการ ในการแก้ปัญหารอบแรกจะสมมุติฟังก์ชัน $X(x)$ หรือฟังก์ชัน $Y(y)$ ขึ้นมาก่อน เมื่อแก้สมการรอบแรกเสร็จจะได้ฟังก์ชันอีกตัวหนึ่งที่ไม่ได้สมมุติและค่าความถี่ธรรมชาติที่ยังเป็นค่าที่ไม่ลู่เข้า การคำนวณครั้งที่สองจะใช้ฟังก์ชัน $Y(y)$ หรือฟังก์ชัน $X(x)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกเป็นฟังก์ชันที่สมมุติให้ทราบค่า การคำนวณรอบนี้จะได้ฟังก์ชันที่สมมุติในการคำนวณครั้งแรกและค่าความความถี่ธรรมชาติซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับคำตอบมากขึ้น การคำนวณกลับไปกลับมาเช่นนี้จะทำให้ได้คำตอบสุดท้ายที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา ดังนั้นระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจึงมีการคำนวณซ้ำไปมา (iterative calculation) เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

พลังงานศักย์รวมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือพลังงานความเครียด (Strain Energy, U) และพลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง (Kinetic Energy, T) โดยพลังงานความเครียดสามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\right)dxdydz \tag{3-1}$$

พจน์ที่ 3, 5 และ 6 ของสมการ 3-1 จะมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมมติฐานของโครงสร้างแผ่นบางที่กล่าวไว้ข้างต้น

เนื่องจากสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (stress-strain relation) ของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุออร์โทรทรอปิกแต่ละชั้น ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0 + z\kappa_x\\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y\\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}\end{Bmatrix}_k \tag{3-2}$$

โดยที่ ε_x^0 , ε_y^0 และ γ_{xy}^0 คือ ค่าของความเครียดที่กึ่งกลางระนาบ (midplane)

κ_x , κ_y และ κ_{xy} คือ ค่าความโค้ง (curvature)

k แสดงตำแหน่งชั้นของวัสดุคอมโพสิท

เมื่อ Q_{ij} เป็นคุณสมบัติของวัสดุซึ่งหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\ v_{12}v_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{v_{12}E_2}{1-\ v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1-\ v_{12}v_{21}} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\ v_{12}v_{21}} \\
Q_{66} &= G_{12} \\
Q_{16} &= Q_{26} = 0
\end{aligned} \tag{3-3}
$$

สมการ (3-2) จะสามารถเขียน σ_x, σ_y และ τ_{xy} ในรูปของตัวแปร $\varepsilon_x^0 + z\kappa_x$, $\varepsilon_y^0 + z\kappa_y$ และ $\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}$ ได้ เมื่อแทนค่า σ_x, σ_y และ τ_{xy} จากสมการ (3-2) ลงในสมการ (3-1) จะได้

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U} = \frac{1}{2}\iiint & Q_{11}(\varepsilon_x^0 + z\kappa_x)^2 + Q_{22}(\varepsilon_y^0 + z\kappa_y)^2 + Q_{66}(\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy})^2 \\
& + 2Q_{12}(\varepsilon_x^0 + z\kappa_x)(\varepsilon_y^0 + z\kappa_y) + 2Q_{16}(\varepsilon_x^0 + z\kappa_x)(\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}) \\
& + 2Q_{26}(\varepsilon_y^0 + z\kappa_y)(\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy})dxdydz
\end{aligned} \tag{3-4}
$$

กระจายพหุนามกำลังสองในสมการ (3-4) แล้วจัดรูปให้อยู่ในรูปของความเครียดและค่าความโค้งจะได้

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U} = \frac{1}{2}\iiint & Q_{11}\left(\varepsilon_x^0\right)^2 + Q_{11}\left(z^2\kappa_x{}^2\right) + Q_{11}\left(2z\varepsilon_x^0\kappa_x\right) \\
& + Q_{22}(\varepsilon_y^0)^2 + Q_{22}\left(z^2\kappa_y{}^2\right) + Q_{22}\left(2z\varepsilon_y^0\kappa_y\right) \\
& + Q_{66}\left(\gamma_{xy}^0\right)^2 + Q_{66}\left(z^2\kappa_{xy}{}^2\right) + Q_{66}\left(2z\gamma_{xy}^0\kappa_{xy}\right) \\
& + 2Q_{12}\left(\varepsilon_x^0\varepsilon_y^0\right) + 2Q_{12}\left(z^2\kappa_x\kappa_y\right) + 2Q_{12}(z\kappa_x\varepsilon_y^0 + z\kappa_y\varepsilon_x^0) \\
& + 2Q_{16}(\varepsilon_x^0\gamma_{xy}^0) + 2Q_{16}(z^2\kappa_x\kappa_{xy}) + 2Q_{16}(z\kappa_x\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}\varepsilon_x^0) \\
& + 2Q_{26}(\varepsilon_y^0\gamma_{xy}^0) + 2Q_{26}(z^2\kappa_y\kappa_{xy}) + 2Q_{26}(z\kappa_y\gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}\varepsilon_y^0)dxdydz
\end{aligned} \tag{3-5}
$$

พจน์ Q_{ij} ของสมการ (3-5) จะเปลี่ยนแปลงตามคุณสมบัติของวัสดุของแต่ละชั้นความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง ดังนั้นเมื่ออินทิเกรตตามแกน z จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left(Q_{ij}\right)_k \mathrm{dz} = \left(Q_{ij}\right)_k z\Big|_{-t/2}^{t/2} = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_{ij}\right)_k (z_k - z_{k-1}) = A_{ij} \tag{3-6}$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left(Q_{ij}\right)_k z\mathrm{dz} = \left(Q_{ij}\right)_k \frac{z^2}{2}\Big|_{-t/2}^{t/2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(Q_{ij}\right)_k ({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2) = B_{ij} \tag{3-7}$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left(Q_{ij}\right)_k z^2\mathrm{dz} = \left(Q_{ij}\right)_k \frac{z^3}{3}\Big|_{-t/2}^{t/2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(Q_{ij}\right)_k ({z_k}^3 - {z_{k-1}}^3) = D_{ij} \tag{3-8}$$

เมื่อ A_{ij} คือ Laminate extensional stiffness

B_{ij} คือ Laminate coupling stiffness

D_{ij} คือ Laminate bending stiffness

โดยที่ i, j คือ 1, 2 หรือ 6 ซึ่งแสดงถึงตำแหน่งของค่า stiffness ใน laminate stiffness matrix

n คือ จำนวนชั้นของแผ่นคอมโพสิท

แทนค่าสมการ (3-6) (3-7) และ (3-8) ลงในสมการ (3-5) จะได้

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} = \frac{1}{2}\iint & A_{11}(\varepsilon_x^0)^2 + D_{11}(\kappa_x)^2 + 2B_{11}\varepsilon_x^0\kappa_x \\
& + A_{22}(\varepsilon_y^0)^2 + D_{22}(\kappa_y)^2 + 2B_{22}\varepsilon_y^0\kappa_y \\
& + A_{66}(\gamma_{xy}^0)^2 + D_{66}(\kappa_{xy})^2 + 2B_{66}\gamma_{xy}^0\kappa_{xy} \\
& + 2A_{12}\varepsilon_x^0\varepsilon_y^0 + 2D_{12}\kappa_x\kappa_y + 2B_{12}\left(\kappa_x\varepsilon_y^0 + \kappa_y\varepsilon_x^0\right) \\
& + 2A_{16}\varepsilon_x^0\gamma_{xy}^0 + 2D_{16}\kappa_x\kappa_{xy} + 2B_{16}\left(\kappa_x\gamma_{xy}^0 + \kappa_{xy}\varepsilon_x^0\right) \\
& + 2A_{26}\varepsilon_y^0\gamma_{xy}^0 + 2D_{26}\kappa_y\kappa_{xy} + 2B_{26}\left(\kappa_y\gamma_{xy}^0 + \kappa_{xy}\varepsilon_y^0\right) dxdy
\end{aligned} \tag{3-9}$$

เนื่องจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวแบบ cross-ply มีการวางตัวของวัสดุเป็นแบบสมมาตร ดังนั้น $B_{ij} = 0$ และปัญหาการสั่นสะเทือนที่พิจารณาไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวระนาบ นั่นคือ u และ v มีค่าคงที่ ดังนั้น $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ และ γ_{xy}^0 มีค่าเป็นศูนย์

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและระยะการเคลื่อนที่ (strain-displacement relation) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \;\;,\;\; \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \;\;,\;\; \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \tag{3-10}$$

และ

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \;\;,\;\; \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \;\;,\;\; \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3-11}$$

แทนสมการ (3-10) และ (3-11) ลงในสมการ (3-9) ดังนั้น พลังงานความเครียดสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\iint & D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \\ & +4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) dxdy \end{aligned} \tag{3-12}$$

พลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง (Kinetic Energy, T) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\iiint \rho h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dxdy \tag{3-13}$$

เมื่อจัดรูปพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุและพลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้างแล้วนำมารวมกันจะได้พลังงานศักย์รวม (Total Potential Energy ,Π) ที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}\iint & D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \\ & + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) - \rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy \end{aligned} \tag{3-14}$$

กำหนดให้โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1 ขั้น ในทิศทางตามแกน y ดังแสดงในภาพที่ 3.3 จากภาพที่จะเห็นว่าชิ้นงานมีขนาด $a \times b$ โดยที่ช่วง $0<y<b_1$ มีความหนา h_1 และช่วง $b_1<y<b$ มีความหนา h_2 ดังนั้นสามารถอินทิเกรตสมการ (3-14) แบบแยกส่วนตามแกน y ได้คือ

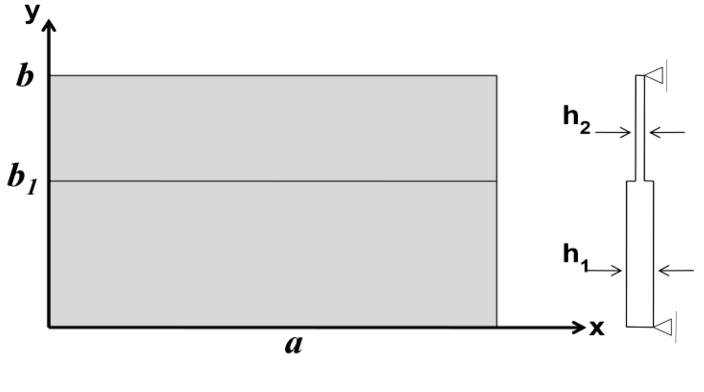
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\int_0^{b_1} A_1 dy + \int_{b_1}^{b} A_2 dy \right) dx \tag{3-15a}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A_i = {} & D_{11}^i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12}^i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22}^i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66}^i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + 4\left(D_{16}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \rho h^i \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

เมื่อตัวยก i แสดงขอบเขต คือ

$$i = \begin{cases} 1\ ; 0 < y < b_1 \\ 2\ ; b_1 < y < b \end{cases}$$



ภาพที่ 3.3 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1 ขั้น

ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบ w สามารถแสดงในรูปของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบและฟังก์ชันของเวลา คือ

$$w(x,y,t)=W(x,y)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{3-16}$$

โดยที่ $w(x,y,t)$ คือ การเคลื่อนที่ตามแนวแกน z

$W(x,y)$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

i คือ ตัวกำกับแกนจินตภาพ

ω คือ ค่าความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง (rad/s)

t คือ เวลา (s)

แทนค่าสมการ (3-16) ลงในสมการ (3-15a) จะสามารถเขียน A_i ของสมการที่ (3-15a) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_i &= D_{11}^i W_{,xx}{}^2 + 2D_{12}^i W_{,xx}W_{,yy} + D_{22}^i W_{,yy}{}^2 + 4D_{66}^i W_{,xy}{}^2 \\ &\quad + 4\left(D_{16}^i W_{,xx} + D_{26}^i W_{,yy}\right)\left(W_{,xy}\right) - \rho h^i \omega^2 W^2 \end{aligned} \tag{3-15b}$$

ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีแคนโทโรวิช สมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $W(x,y)$ อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $X(x)$ และ $Y(y)$ ดังนี้

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{n} X_n(x)Y_n(y)=\{X\}^T\{Y\} \tag{3-17}$$

โดยที่ $X(x)$ คือ ฟังก์ชันของ x อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง x=0 และ $x=a$

$Y(y)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันได ที่มีค่าเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว $Y(y)$ แบ่งเป็นช่วงๆ คือช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง y=0 ถึง $y=b_1$ และ $y=b_1$ ถึง $y=b$

n คือ จำนวนพจน์ของฟังก์ชันค่าเริ่มต้น

ซึ่งฟังก์ชัน $X(x)$ และ $Y(y)$ แสดงลักษณะรูปร่างของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้น โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการจับยึดตามแต่ละกรณี และเมื่อแทนสมการที่ (3-17) ลงในสมการ (3-15b) จะได้

$$\begin{aligned} A_i &= D_{11}{}^i X_{,xx}{}^2 Y^{i2} + 2D_{12}{}^i X_{,xx} Y^i XY_{,yy}{}^i + D_{22}{}^i X^2 Y_{,yy}{}^{i2} + 4D_{66}{}^i X_{,x}{}^2 Y_{,y}{}^{i2} \\ &\quad + 4\left(D_{16}{}^i X_{,xx} Y^i + D_{26}{}^i XY_{,yy}{}^i\right)\left(X_{,x} Y_{,y}{}^i\right) - \rho h\omega^2 X^2 Y^{i2} \end{aligned} \tag{3-15c}$$

ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนจะสมมุติให้ฟังก์ชันในทิศ x หรือ $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า เพื่อหาฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ $y=b_1$ และ $y=b$ ตัวอย่างการพิจารณาพจน์แรกภายในเครื่องหมายอินทิเกรตของสมการ (3-15c) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\int_0^{a} D_{11}{}^{i} X_{xx}{}^{2} Y^{i2} \mathrm{dx} = \int_0^{a} D_{11}{}^{i} \begin{bmatrix} X_{1,xx} & X_{2,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} [X_{1,xx} \quad X_{2,xx}] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \mathrm{dx}$$

จากสมบัติการทรานสโพสของเมตริกซ์ สามารถแสดงเป็นตัวอย่างได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^{a} D_{11}{}^{i} X_{xx}{}^{2} Y^{i2} \mathrm{dx} &= \int_0^{a} D_{11}{}^{i} [Y_1 \quad Y_2] \begin{bmatrix} X_{1,xx} \\ X_{2,xx} \end{bmatrix} [X_{1,xx} \quad X_{2,xx}] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} dx \\ &= D_{11}{}^{i} [Y_1 \quad Y_2] \int_0^{a} \begin{bmatrix} X_{1,xx} \\ X_{2,xx} \end{bmatrix} [X_{1,xx} \quad X_{2,xx}] dx \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \\ &= D_{11}{}^{i} \{Y\}^{T} [R_4] \{Y\} \end{aligned}$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบแกน x เช่นนี้กับทุกพจน์ สมการ (3-15) จะอยู่ในรูป

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\int_0^{b_1} A_1 dy + \int_{b_1}^{b} A_2 dy \right) \tag{3-18}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A_i = {} & D_{11}{}^{i} \{Y\}_i^{T} [R_4] \{Y\}_i + 2D_{12}{}^{i} \{Y\}_i^{T} [R_2] \{Y_{,yy}\}_i + D_{22}{}^{i} \{Y_{,yy}\}_i^{T} [R_1] \{Y_{,yy}\}_i \\ & + 4D_{66}{}^{i} \{Y_{,y}\}_i^{T} [R_6] \{Y_{,y}\}_i + 4D_{16}{}^{i} \{Y\}_i^{T} [R_5] \{Y_{,y}\}_i + 4D_{26}{}^{i} \{Y_{,yy}\}_i^{T} [R_3] \{Y_{,y}\}_i \\ & - \rho h \omega^2 \{Y\}_i^{T} [R_1] \{Y\}_i \end{aligned}$$

เมื่อ

$$[R_1] = \int_0^{a} \{X\}\{X\}^{T} dx, \qquad [R_2] = \int_0^{a} \{X_{,xx}\}\{X\}^{T} dx,$$

$$[R_3] = \int_0^{a} \{X\}\{X_{,x}\}^{T} dx, \qquad [R_4] = \int_0^{a} \{X_{,xx}\}\{X_{,xx}\}^{T} dx,$$

$$[R_5] = \int_0^{a} \{X_{,xx}\}\{X_{,x}\}^{T} dx, \qquad [R_6] = \int_0^{a} \{X_{,x}\}\{X_{,x}\}^{T} dx$$

ใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (principle of minimum total potential energy) คือ $\delta\Pi = 0$ โดยวิธีการหาค่าอนุพันธ์แสดงเป็นตัวอย่างได้ดังนี้

จาก

$$D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{Y\} = D_{11}[Y_1 \quad Y_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$
$$= D_{11}\left(aY_1Y_1 + bY_1Y_2 + cY_2Y_1 + dY_2Y_2\right)$$

$$\delta\left(D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{Y\}\right) = D_{11}\left[a\left(Y_1\delta Y_1 + Y_1\delta Y_1\right) + b\left(Y_1\delta Y_2 + Y_2\delta Y_1\right) + c\left(Y_2\delta Y_1 + Y_1\delta Y_2\right) + d\left(Y_2\delta Y_2 + Y_2\delta Y_2\right)\right]$$
$$= D_{11}[Y_1 \quad Y_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \end{Bmatrix} + D_{11}[Y_1 \quad Y_2]\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \end{Bmatrix}$$
$$= D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{\delta Y\} + D_{11}\{Y\}^T[R_4]^T\{\delta Y\}$$

เนื่องจาก $[R_4] = [R_4]^T$ ดังนั้น $\delta\left(D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{Y\}\right) = 2D_{11}\{Y\}^T[R_4]\{\delta Y\}$

หาค่าอนุพันธ์เช่นนี้กับทุกเทอมของสมการ (3-18) จะได้

$$\delta\Pi = \{0\} = \left(\int_0^{b_1} B_1 dy + \int_{b_1}^{b} B_2 dy\right) \qquad \text{(3-19a)}$$

โดยที่

$$B_i = (D_{12}{}^i\{Y\}_i^T[R_2] + D_{22}{}^i\{Y_{,yy}\}_i^T[R_1] + 2D_{26}{}^i\{Y_{,y}\}_i^T[R_3]^T)\{\delta Y_{,yy}\}_i$$
$$+(4D_{66}{}^i\{Y_{,y}\}_i^T[R_6] + 2D_{16}{}^i\{Y\}_i^T[R_5] + 2D_{26}{}^i\{Y_{,yy}\}_i^T[R_3])\{\delta Y_{,y}\}_i$$
$$+(D_{11}{}^i\{Y\}_i^T[R_4] + D_{12}{}^i\{Y_{,yy}\}_i^T[R_2]^T + 2D_{16}{}^i\{Y_{,y}\}_i^T[R_5]^T - \rho h\omega^2\{Y\}_i^T[R_1])\{\delta Y\}_i$$

จากสมการ (3-19) เมื่อใช้หลักการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) จะได้

$$B_i = \begin{pmatrix} \int_{i-1}^{b_1} (D_{22}{}^{i} \left\{Y_{,yyyy}\right\}^{iT} \left[R_1\right] + 2D_{26}{}^{i} \left\{Y_{,yyy}\right\}^{iT} \left[R_3\right]^T - 2D_{26}{}^{i} \left\{Y_{,yyy}\right\}^{iT} \left[R_3\right] \\ +D_{12}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_2\right] - 4D_{66}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_6\right] + D_{12}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_2\right]^T \\ -2D_{16}{}^{i} \left\{Y_{,y}\right\}^{iT} \left[R_5\right] + 2D_{16}{}^{i} \left\{Y_{,y}\right\}^{iT} \left[R_5\right]^T \\ +D_{11}{}^{i} \left\{Y\right\}^{iT} \left[R_4\right] - \rho h \omega^2 \left\{Y\right\}^{iT} \left[R_1\right]) \left\{\delta Y\right\}^{i} dy \end{pmatrix}$$

$$+ \left((D_{12}{}^{i} \left\{Y\right\}^{iT} \left[R_2\right] + 2D_{26}{}^{i} \left\{Y_{,y}\right\}^{iT} \left[R_3\right]^T + D_{22}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_1\right]) \left\{\delta Y_{,y}\right\}^{i} \Big|_{b_{i-1}}^{b_i} \right) \qquad (3\text{-}19b)$$

$$+ \begin{pmatrix} -D_{12}{}^{i} \left\{Y\right\}^{iT} \left[R_2\right] - D_{22}{}^{i} \left\{Y_{,yyy}\right\}^{iT} \left[R_1\right] - 2D_{26}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_3\right]^T \\ +4D_{66}{}^{i} \left\{Y_{,y}\right\}^{iT} \left[R_6\right] + 2D_{16}{}^{i} \left\{Y\right\}^{iT} \left[R_5\right] + 2D_{26}{}^{i} \left\{Y_{,yy}\right\}^{iT} \left[R_3\right] \left\{\delta Y\right\}^{i} \Big|_{b_{i-1}}^{b_i} \end{pmatrix}$$

และคุณสมบัติการทรานสโพสของเมทริกซ์ (transpose matrix) เพื่อช่วยจัดรูปสมการ จะได้

$$\delta \Pi = \left\{0\right\} = \left\{\delta Y\right\}^{iT} \begin{pmatrix} \int_{0}^{b_1} D_{22}{}^{i} \left[R_1\right]^T \left\{Y_{,yyyy}\right\}^{i} \\ +2D_{26}{}^{i} \left(\left[R_3\right] - \left[R_3\right]^T\right) \left\{Y_{,yyy}\right\}^{i} \\ +\left(D_{12}{}^{i} \left[R_2\right]^T - 44D_{66} \left[R_6\right]^T + D_{12}{}^{i} \left[R_2\right]\right) \left\{Y_{,yy}\right\}^{i} \\ +2D_{16}{}^{i} \left(\left[R_5\right] - \left[R_5\right]^T\right) \left\{Y_{,y}\right\}^{i} + \left(D_{11}{}^{i} \left[R_4\right]^T - \rho h \omega^2 \left[R_1\right]^T\right) \left\{Y\right\}^{i} dy \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}20)$$

$$+ \left\{\delta Y_{,y}\right\}^{iT} \left[D_{22}{}^{i} \left[R_1\right]^T \left\{Y_{,yy}\right\}^{i} + 2D_{26}{}^{i} \left[R_3\right] \left\{Y_{,y}\right\}^{i} + D_{12}{}^{i} \left[R_2\right]^T \left\{Y\right\}^{i} \right] \Big|_{b_{i-1}}^{b_i}$$

$$+ \left\{\delta Y\right\}^{iT} \Big[-D_{22}{}^{i} \left[R_1\right]^T \left\{Y_{,yyy}\right\}^{i} + 2D_{26}{}^{i} \left(\left[R_3\right]^T - \left[R_3\right]\right) \left\{Y_{,yy}\right\}^{i}$$

$$+ \left(4D_{66}{}^{i} \left[R_6\right]^T - D_{12}{}^{i} \left[R_2\right]^T\right) \left\{Y_{,y}\right\}^{i} + 2D_{16}{}^{i} \left[R_5\right]^T \left\{Y\right\}^{i} \Big] \Big|_{b_{i-1}}^{b_i}$$

สมการที่ (3-20) จะเป็นจริงเมื่อทุกพจน์มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะสามารถแจกแจงสมการ (3-20) ออกตามเงื่อนไขต่าง ๆ ได้เป็นสมการครอบคลุมและสมการเงื่อนไขของเขต โดยสมการครอบคลุมอยู่ในรูป

$$D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^{T}\left\{Y_{,yyyy}\right\}^{i}+2D_{26}{}^{i}\left(\left[R_3\right]-\left[R_3\right]^{T}\right)\left\{Y_{,yyy}\right\}^{i}$$
$$+\left(D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^{T}-44D_{66}{}^{i}\left[R_6\right]^{T}+D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]\right)\left\{Y_{,yy}\right\}^{i} \tag{3-21}$$
$$+2D_{16}{}^{i}\left(\left[R_5\right]-\left[R_5\right]^{T}\right)\left\{Y_{,y}\right\}^{i}+\left(D_{11}{}^{i}\left[R_4\right]^{T}-\rho h\omega^2\left[R_1\right]^{T}\right)\left\{Y\right\}^{i}=\left\{0\right\}$$

ซึ่งอาจเขียนใหม่ให้อยู่ในรูป

$$\left\{Y_{,yyyy}\right\}^{i}+\left[M_1\right]^{i}\left\{Y_{,yyy}\right\}^{i}+\left[M_2\right]^{i}\left\{Y_{,yy}\right\}^{i}+\left[M_3\right]^{i}\left\{Y_{,y}\right\}^{i}+\left(\left[M_4\right]^{i}-\rho\omega^2\left[M_5\right]^{i}\right)\left\{Y\right\}^{i}=\left\{0\right\} \tag{3-22}$$

โดยที่

$$\left[M_1\right]^{i}=\frac{2D_{26}{}^{i}}{D_{22}{}^{i}}\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_3\right]-\left[R_3\right]^{T}\right)$$
$$\left[M_2\right]^{i}=\frac{\left[R_1\right]^{-1}}{D_{22}{}^{i}}\left(D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^{T}-4D_{66}{}^{i}\left[R_6\right]^{T}+D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]\right)$$
$$\left[M_3\right]^{i}=\frac{2D_{16}{}^{i}}{D_{22}{}^{i}}\left[R_1\right]^{-1}\left(\left[R_5\right]-\left[R_5\right]^{T}\right)$$
$$\left[M_4\right]^{i}=\frac{D_{11}{}^{i}}{D_{22}{}^{i}}\left[R_1\right]^{-1}\left[R_4\right]^{T} \text{ และ } \left[M_5\right]^{i}=\frac{h}{D_{22}{}^{i}}\left[R_1\right]^{-1}\left[R_1\right]^{T}$$

ลักษณะของสมการ (3-22) จะอยู่ในรูปแบบของปัญหาค่าเจาะจง (eigenvalue problem) โดยมีค่า ω เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) และ $\left\{Y\right\}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง (eigenvactor) มีสมการแสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $y=0$ และ $y=b$ คือ

$$D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^{T}\left\{Y_{,yy}\right\}^{i}+2D_{26}{}^{i}\left[R_3\right]\left\{Y_{,y}\right\}^{i}+D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^{i}\left\{Y\right\}^{i}=\left\{0\right\} \tag{3-23a}$$

หรือ

$$\left\{Y_{,y}\right\}^{i}\Big|_{b_{i-1}}=\left\{0\right\} \tag{3-23b}$$

และ

$$
\begin{aligned}
&-D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yyy}\right\}^i+2D_{26}{}^{i}\left(\left[R_3\right]^T-\left[R_3\right]\right)\left\{Y_{,yy}\right\}^i \\
&+\left(4D_{66}{}^{i}\left[R_6\right]^T-D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^T\right)\left\{Y_{,y}\right\}^i+2D_{16}{}^{i}\left[R_5\right]^T\left\{Y\right\}^i=\left\{0\right\}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}23c)
$$

หรือ

$$
\left\{Y\right\}^i\Big|_{b_{i-1}}=\left\{0\right\} \qquad (3\text{-}23d)
$$

การเลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตสามารถพิจารณาจากสมการ 3-23a ถึง 3-23d ซึ่งแต่ละสมการแสดงพฤติกรรมบริเวณที่ถูกจับยึด คือ

สมการที่ 3-23a หมายถึง โมเมนต์รอบจุดจับยึดมีค่าเท่ากับศูนย์

สมการที่ 3-23b หมายถึง ความชัน (slope) ของชิ้นงานบริเวณจุดจับยึดมีค่าเท่ากับศูนย์

สมการที่ 3-23c หมายถึง แรงเฉือน (shear force) ของชิ้นงานบริเวณจุดจับยึดมีค่าเท่ากับศูนย์

สมการที่ 3-24d หมายถึง การเคลื่อนตัว (deflection) ของชิ้นงานบริเวณจุดจับยึดมีค่าเท่ากับศูนย์

ในการแก้ปัญหาจะต้องเลือกใช้สมการเงื่อนไขขอบต่าง ๆ ให้ถูกต้องตามเงื่อนไขขอบที่กำหนด คือ

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่าย ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-23a) และ (3-23d)

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-23b) และ (3-23d)

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบปล่อยอิสระ ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-23a) และ(3-23c)

สมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง (The continuity condition) ที่ $y=b_1$ คือ

$$
\begin{aligned}
&\left\{D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yy}\right\}^i+2D_{26}{}^{i}\left[R_3\right]\left\{Y_{,y}\right\}^i+D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^i\left\{Y\right\}^i\right\}\Big|_{\substack{y=b_1\\ i=1}} \\
&-\left\{D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yy}\right\}^i+2D_{26}{}^{i}\left[R_3\right]\left\{Y_{,y}\right\}^i+D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^i\left\{Y\right\}^i\right\}\Big|_{\substack{y=b_1\\ i=2}}=\left\{0\right\}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}24a)
$$

$$
\left\{Y_{,y}\right\}^i\Big|_{\substack{y=b_1\\ i=1}}-\left\{Y_{,y}\right\}^i\Big|_{\substack{y=b_1\\ i=2}}=\left\{0\right\} \qquad (3\text{-}24b)
$$

$$\left.\begin{Bmatrix} -D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yyy}\right\}^i + 2D_{26}{}^{i}\left(\left[R_3\right]^T - \left[R_3\right]\right)\left\{Y_{,yy}\right\}^i \\ +\left(4D_{66}{}^{i}\left[R_6\right]^T - D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^T\right)\left\{Y_{,y}\right\}^i + 2D_{16}{}^{i}\left[R_5\right]^T\left\{Y\right\}^i \end{Bmatrix}\right|_{\substack{y=b_1\\ i=1}} - \left.\begin{Bmatrix} -D_{22}{}^{i}\left[R_1\right]^T\left\{Y_{,yyy}\right\}^i + 2D_{26}{}^{i}\left(\left[R_3\right]^T - \left[R_3\right]\right)\left\{Y_{,yy}\right\}^i \\ +\left(4D_{66}{}^{i}\left[R_6\right]^T - D_{12}{}^{i}\left[R_2\right]^T\right)\left\{Y_{,y}\right\}^i + 2D_{16}{}^{i}\left[R_5\right]^T\left\{Y\right\}^i \end{Bmatrix}\right|_{\substack{y=b_1\\ i=2}} = \{0\} \quad \text{(3-24c)}$$

$$\left.\{Y\}^i\right|_{\substack{y=b_1\\ i=1}} - \left.\{Y\}^i\right|_{\substack{y=b_1\\ i=2}} = \{0\} \quad \text{(3-24d)}$$

ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ลักษณะของการแก้สมการจะเป็นปัญหาค่าเจาะจง โดยมี ω^2 เป็นค่าเจาะจง และ $\{Y\}^i$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง โดยจะสมมุติให้ค่า $\{Y\}^i$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ (infinite power series)

$$\{Y\}^i = \left\{mm_{1,0} + mm_{1,1}y + mm_{1,2}y^2 \ldots + mm_{1,n}y^n\right\}^i = \left\{\sum_{j=0}^{n} mm_{1,j}y^j\right\}^i = \sum_{j=0}^{\infty}\{MM\}_j^i\, y^j \quad \text{(3-25)}$$

นำสมการที่ (3-25) แทนลงในสมการที่ (3-22) แล้วจัดรูปใหม่ โดยเขียน $\{MM\}_{j+4}^i$ ให้อยู่ในรูปของ $\{MM\}_j^i$ $\{MM\}_{j+1}^i$ $\{MM\}_{j+2}^i$ และ $\{MM\}_{j+3}^i$ คือ

$$\{MM\}_{j+4}^i = -\frac{\begin{Bmatrix} \left[M_1\right]^i\{MM\}_{j+3}^i(j+1)(j+2)(j+3) + \left[M_2\right]^i\{MM\}_{j+2}^i(j+1)(j+2) \\ +\left[M_3\right]^i\{MM\}_{j+1}^i(j+1) + \left(\left[M_4\right]^i - \left[M_5\right]^i\omega^2\right)\{MM\}_j^i \end{Bmatrix}}{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)} \quad \text{(3-25)}$$

ค่า $\{MM\}_{j+4}^i$ ในสมการ (3-25) ใช้ในการแก้ปัญหาสำหรับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันของ x เพื่อนำไปแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนต่อไป ในการแก้ปัญหาจะพบว่าเวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีจำนวน 4 เท่าของจำนวนขั้นที่เปลี่ยนไปคูณกับจำนวนพจน์ของฟังก์ชันค่าเริ่มต้น เมื่อแทนสมการ (3-25) ลงในสมการ (3-21) แล้วแก้สมการเงื่อนไขความต่อเนื่องและสมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่สนใจจะได้ค่าเจาะจงหรือค่าความถี่ธรรมชาติ แล้วจึงนำค่าเจาะจงไป

หาเวกเตอร์เจาะจงหรือรูปร่างของโหมดการสั่นสะเทือนต่อไป ขั้นตอนนี้จะได้ฟังก์ชันในทิศ y ที่อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังและเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดสำหรับนำไปใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในขั้นตอนถัดไป

จากสมการพลังงานศักย์รวมหากสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ y เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและทำตามขั้นตอนเดียวกันกับการสมมุติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ x ที่กล่าวมาข้างต้น โดยสมมุติให้ผลเฉลยของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบดังสมการ (3-16) เมื่อแทนค่าสมการที่ (3-16) และ (3-17) ลงในสมการที่ (3-15) จะได้

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a & \{X_{,xx}\}^T [S_1]\{X_{,xx}\} + 2\{X_{,xx}\}^T [S_2]\{X\} + \{X\}^T [S_4]\{X\} \\ & +4\{X_{,x}\}^T [S_6]\{X_{,x}\} + 4\{X_{,xx}\}^T [S_3]\{X_{,x}\} + 4\{X\}^T [S_5]\{X_{,x}\} \\ & -\rho\omega^2 \{X\}^T [S_7]\{X\}\, dx\end{aligned} \qquad (3\text{-}26)$$

โดยที่

$$[S_1] = \int_0^{b_1} s_{1,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{1,2} dy \ , \ s_{1,i} = D_{11}^{\ i} \{Y\}_i \{Y\}_i^T$$

$$[S_2] = \int_0^{b_1} s_{2,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{2,2} dy , \ s_{2,i} = D_{12}^{\ i} \{Y\}_i \{Y_{,yy}\}_i^T$$

$$[S_3] = \int_0^{b_1} s_{3,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{3,2} dy \ , \ s_{3,i} = D_{16}^{\ i} \{Y\}_i \{Y_{,y}\}_i^T$$

$$[S_4] = \int_0^{b_1} s_{4,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{4,2} dy \ , \ s_{4,i} = D_{22}^{\ i} \{Y_{,yy}\}_i \{Y_{,yy}\}_i^T$$

$$[S_5] = \int_0^{b_1} s_{5,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{5,2} dy \ , \ s_{5,i} = D_{26}^{\ i} \{Y_{,yy}\}_i \{Y_{,y}\}_i^T$$

$$[S_6] = \int_0^{b_1} s_{6,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{6,2} dy \ , \ s_{6,i} = D_{66}^{\ i} \{Y_{,y}\}_i \{Y_{,y}\}_i^T$$

$$[S_7] = \int_0^{b_1} s_{7,1} dy + \int_{b_1}^{b} s_{7,2} dy \ , \ s_{7,i} = h^i \{Y\}_i \{Y\}_i^T$$

ใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมและอินทิเกรตทีละส่วน นอกจากนี้ใช้คุณสมบัติการทรานสโพสของเมทริกซ์เพื่อช่วยจัดรูปสมการ จะได้สมการครอบคลุมอยู่ในรูป

$$\{X_{,xxxx}\} + [N_1]\{X_{,xxx}\} + [N_2]\{X_{,xx}\} + [N_3]\{X_{,x}\} + ([N_4] - \omega^2 [N_5])\{X\} = \{0\} \qquad (3\text{-}27)$$

โดยที่

$$[N_1]=2[S_1]^{-1}\left([S_3]-[S_3]^T\right)$$
$$[N_2]=[S_1]^{-1}\left([S_2]+[S_2]^T-4[S_6]\right)$$
$$[N_3]=2[S_1]^{-1}\left([S_5]-[S_5]^T\right)$$
$$[N_4]=[S_1]^{-1}[S_4]^T$$
$$[N_5]=\rho[S_1]^{-1}[S_7]^T$$

โดยเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ คือ

$$[S_1]^T\{X_{,xx}\}+2[S_3]^T\{X_{,x}\}+[S_2]\{X\}=\{0\} \qquad \text{(3-28a)}$$

หรือ

$$\{\delta X_{,x}\}\Big|_0^a=\{0\} \qquad \text{(3-28b)}$$

และ

$$-[S_1]^T\{X_{,xxx}\}+2\left([S_3]^T-[S_3]\right)\{X_{,xx}\}+\left(4[S_6]^T-[S_2]\right)\{X_{,x}\}+2[S_5]^T\{X\}=\{0\} \qquad \text{(3-28c)}$$

หรือ

$$\{\delta X\}\Big|_0^a=\{0\} \qquad \text{(3-28d)}$$

ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตนี้มีเงื่อนไขการเลือกใช้คือ

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่าย ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-28a) และ (3-28d)

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-28b) และ (3-28d)

กรณีเงื่อนไขขอบเขตแบบปล่อยอิสระ ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3-28a) และ (3-28c)

ในทำนองเดียวกัน จะสามารถเขียน $[NN]_{j+4}$ ในรูปของ $\{NN\}_j$ $\{NN\}_{j+1}$ $\{NN\}_{j+2}$ และ $\{NN\}_{j+3}$ ได้คือ

$$[NN]_{j+4} = -\frac{\left\{\begin{matrix} [N_1]\{NN\}_{j+3}(j+1)(j+2)(j+3)+[N_2]\{NN\}_{j+2}(j+1)(j+2) \\ +[N_3]\{NN\}_{j+1}(j+1)+\left([N_4]-[N_5]\omega^2\right)\{NN\}_j \end{matrix}\right\}}{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)} \tag{3-29}$$

หากสมมุติว่าฟังก์ชันในทิศทาง y เป็นฟังก์ชันที่รู้ค่า การแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนจะมีเวกเตอร์เจาะจงจำนวน 4 เท่าของจำนวนพจน์ของฟังก์ชันค่าเริ่มต้น ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจง และเมื่อแทนสมการ (3-25) ลงในสมการ (3-26) แล้วเลือกใช้สมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่สนใจเพื่อนำไปสู่การหาค่าเจาะจงหรือค่าความถี่ธรรมชาติ แล้วจึงนำค่าเจาะจงไปหาเวกเตอร์เจาะจงหรือรูปร่างของโหมดการสั่นสะเทือนต่อไป ในขั้นตอนนี้จะได้ฟังก์ชันในทิศทาง x ซึ่งมีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อนำฟังก์ชันในทิศทางแกน x นี้ไปคำนวณซ้ำตามขั้นตอนที่กล่าวมา จะได้ฟังก์ชันในทิศทางแกน y ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ขั้นตอนการคำนวณซ้ำนี้จะหยุดเมื่อค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณซ้ำรอบใด ๆ มีค่าลู่เข้าสู่ค่าใดค่าใดค่าหนึ่ง และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนสำหรับค่าความถี่ธรรมชาตินั้นคือรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ถูกต้องของชิ้นงาน อนึ่งปัญหาการสั่นสะเทือนของชิ้นทดสอบหนึ่ง ๆ จะมีค่าความถี่ธรรมชาติหลายค่า โดยโหมดการสั่นสะเทือนเรียงลำดับตามค่าความถี่ธรรมชาติจากน้อยไปมาก

บทที่ 4

ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

เนื้อหาในบทที่ 3 กล่าวถึงปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางโดยได้แสดงที่มาของสมการครอบคลุม และเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รวมถึงแสดงขั้นตอนในการแก้สมการโดยสมมติคำตอบในรูปอนุกรมกำลัง เนื่องจากมีสมการที่เกี่ยวข้องหลายสมการและขั้นตอนการแก้สมการที่ค่อนข้างซับซ้อน เนื้อหาในบทนี้จะอธิบายลำดับการแก้ปัญหาและรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาให้ละเอียดขึ้นและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

4.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน

จากสมการครอบคลุมและสมการเงื่อนไขขอบเขตที่ได้แสดงโดยละเอียดในบทที่ 3 แล้วนั้น สามารถแบ่งการแก้ปัญหาออกเป็นสองกรณีคือ กรณีที่เริ่มต้นกำหนดให้ฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าและกรณีเริ่มต้นที่กำหนดให้ $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้น สำหรับการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ การคำนวณรอบแรกจะสมมติให้ฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันทราบค่า ซึ่งสามารถสรุปขั้นตอนการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชได้ดังนี้

1. สมมติให้ฟังก์ชัน $X(x)$ ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเป็นฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหา $\left[R_j\right]$ ได้
2. ประยุกต์ใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม และการอินทิเกรตทีละส่วน หลังขั้นตอนนี้จะสามารถแยกสมการออกมาเป็นสมการครอบคลุม สมการเงื่อนไขขอบเขต และสมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง
3. สมมติให้ผลเฉลยของฟังก์ชัน $Y(y)$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ แล้วแทนค่า $Y(y)$ ลงในสมการครอบคลุม สมการเงื่อนไขขอบเขต และสมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง
4. จัดรูปสมการครอบคลุมเพื่อหาความสัมพันธ์ของ $\{MM\}_{j+4}^{i}$
5. แก้ปัญหาค่าเจาะจงที่มีขนาด 4 เท่าของจำนวนขั้นที่มีความหนาเปลี่ยนไป โดยเลือกสมการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่สนใจ

ค่าเจาะจงที่ได้จากการแก้สมการคือค่าความถี่ธรรมชาติ และเมื่อนำเวกเตอร์เจาะจงที่ได้ไปหาฟังก์ชัน $Y(y)$ แล้วนำไปแทนค่าในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจะได้รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณรอบแรกนี้น่าจะเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้องเนื่องจากฟังก์ชัน $X(x)$ ที่ใช้ในการคำนวณเป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่สมมติขึ้นมา ดังนั้นจะต้องคำนวณซ้ำเพื่อให้ได้คำตอบที่ลู่เข้าสู่คำตอบที่แท้จริง

ในการคำนวณรอบที่สอง จะใช้ฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกเป็นฟังก์ชันเริ่มต้น โดยมีขั้นตอนการคำนวณโดยสรุปดังต่อไปนี้

1. ให้ฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกเป็นฟังก์ชันเริ่มต้น ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหา $\left[S_j\right]$ ได้
2. ประยุกต์ใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม และการอินทิเกรตทีละส่วน จะสามารถแยกสมการออกมาเป็นสมการครอบคลุม สมการเงื่อนไขขอบเขต และสมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง
3. สมมติให้ผลเฉลย $X(x)$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ แล้วแทนค่า $X(x)$ ลงในสมการครอบคลุม และสมการเงื่อนไขขอบเขต
4. จัดรูปสมการครอบคลุมเพื่อหาความสัมพันธ์ของ $\{NN\}_{j+4}$
5. แก้ปัญหาค่าเจาะจงที่มีขนาด 4 เท่าของจำนวนขั้นที่มีความหนาเปลี่ยนไป โดยเลือกสมการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่สนใจ

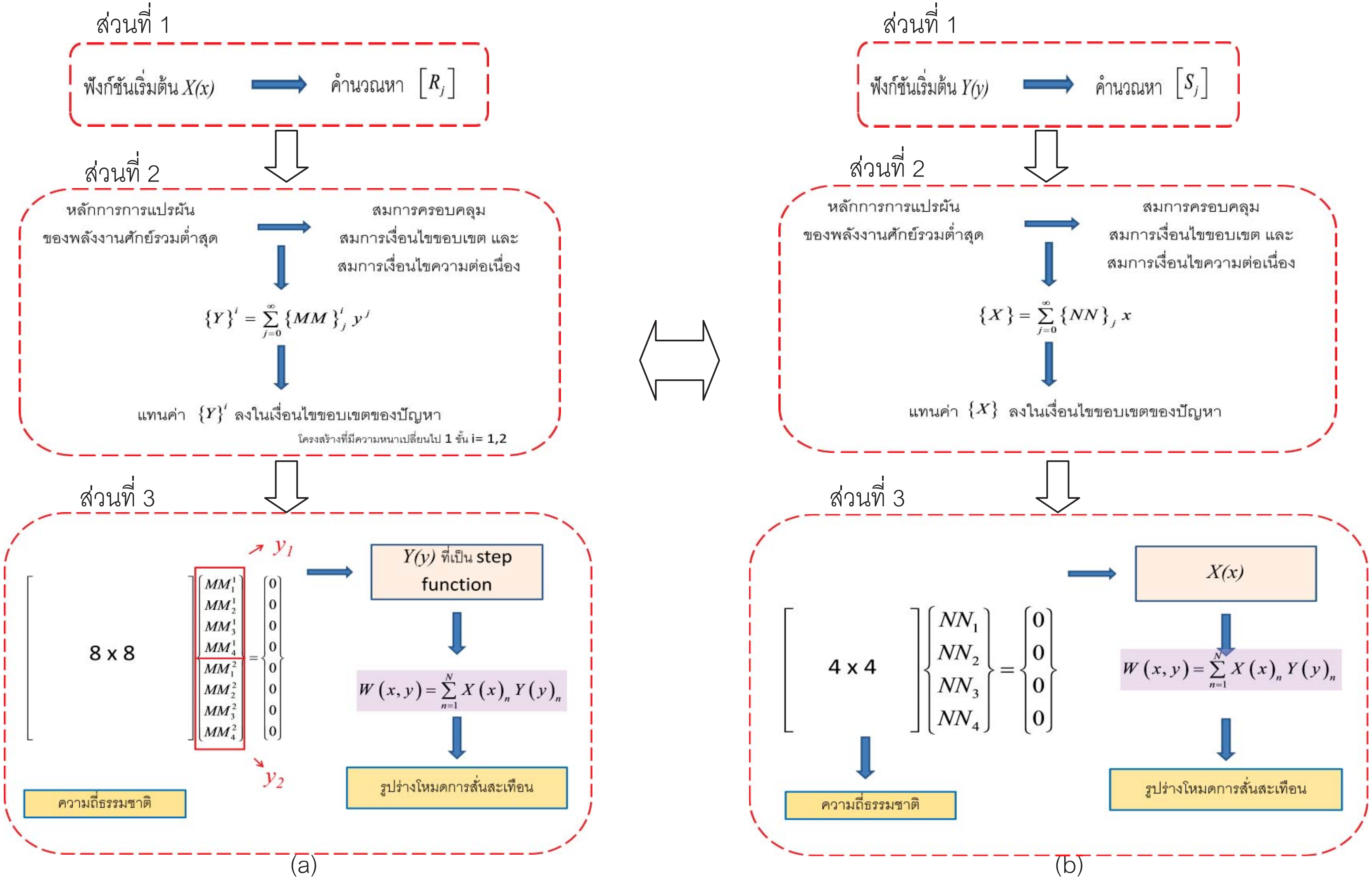
ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณรอบนี้จะมีความถูกต้องมากขึ้น ฟังก์ชัน $X(x)$ ที่ได้จากการคำนวณในรอบที่สองนี้จะนำไปใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นของการคำนวณในรอบที่สาม ในการแก้ปัญหาจะคำนวณซ้ำไปมา จนกว่าจะได้คำตอบที่ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งซึ่งถือว่าเป็นผลเฉลยของปัญหาที่สนใจ

จากขั้นตอนในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่กล่าวมาขั้นต้นเมื่อนำมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะสามารถแบ่งส่วนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นออกเป็นสามส่วน ดังแสดงด้วยแผนผังในภาพที่ 4.1 โดย

ส่วนที่ 1 เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่หาค่าเมตริกซ์ $\left[R_j\right]$ หรือ $\left[S_j\right]$ จากฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า (ขั้นตอนที่ 1)

ส่วนที่ 2 เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ทำหน้าที่ตั้งสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชัน $X(x)$ หรือ $Y(y)$ ที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าเริ่มต้น (ขั้นตอนที่ 2, 3 และ 4)

ส่วนที่ 3 เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่แก้ปัญหาค่าเจาะจง โดยพล็อตกราฟหาค่าเจาะจงที่ทำให้พลังงานรวมมีค่าต่ำสุด แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจงสำหรับให้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณซ้ำรอบต่อไป รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังแสดงในภาคผนวก ก



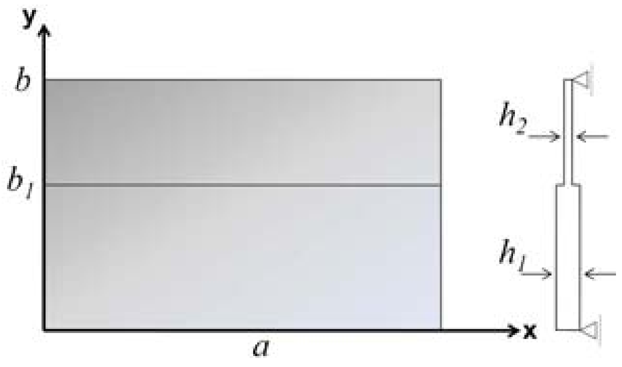
ภาพที่ 4.1 ขั้นตอนการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

4.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง

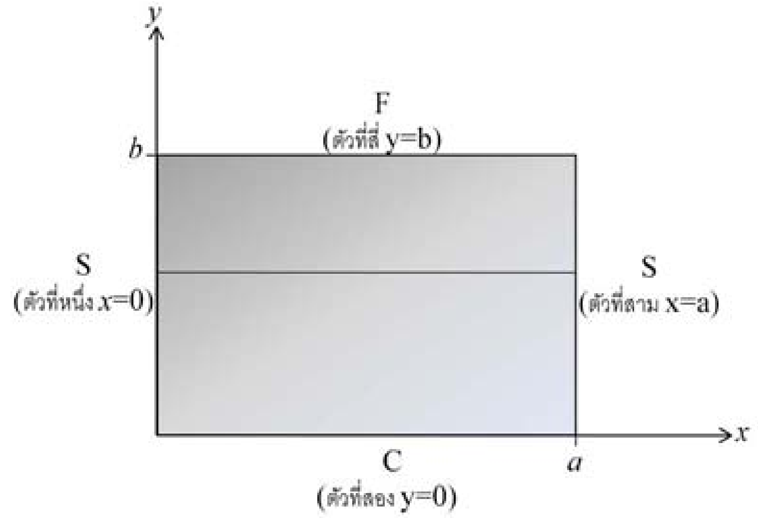
หัวข้อนี้อธิบายขั้นตอนการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นสะเทือน โดยยกตัวอย่างโครงสร้างแผ่นบางที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก ชิ้นงานมีความกว้าง a ความยาว b และมีความหนาเปลี่ยนไปตามแกน y เป็นขั้นจำนวน 1 ขั้น โดยช่วงความยาวระหว่าง 0 ถึง b_1 มีความหนา h_1 และช่วงความยาวระหว่าง b_1 ถึง b มีความหนา h_2 ดังแสดงในภาพที่ 4.2 ชิ้นงานที่ยกมาเป็นตัวอย่างมีคุณสมบัติดังนี้

$$E_1 = E_2 = 68.9 \text{ GPa.} \qquad \nu_{12} = 0.33 \qquad G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \quad \text{และ} \quad \rho = 2{,}544.34 \text{ kg/m}^3$$

ชิ้นงานมีขนาด $a = b = 200$ mm $h_1 = 1$ mm อัตราส่วนของ h_2/h_1 คือ 2 และอัตราส่วนของ b_1/b คือ 0.5 ชิ้นงานมีการจับยึดภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF ดังแสดงในภาพที่ 4.3 ตัวอักษร S หมายถึงเงื่อนไขขอบเขตเขตแบบง่าย C หมายถึงเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น และ F หมายถึงเงื่อนไขของเขตแบบปล่อยอิสระ ลำดับการเขียนตัวอักษรแสดงถึงตำแหน่งของรูปแบบการจับยึดบนชิ้นงาน โดยตัวอักษร S ตัวแรกและตัวอักษร S ตัวที่สาม แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = 0$ และ $x = a$ ตามลำดับ สำหรับตัวอักษร C ตัวที่สอง และตัวอักษร F ตัวที่สี่ แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่ $y = 0$ และ $y = b$ ตามลำดับ



ภาพที่ 4.2 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น



ภาพที่ 4.3 อักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึด

ขั้นตอนการคำนวณเริ่มจากแผนผังในภาพที่ 4.1 (a) โปรแกรมส่วนแรกทำหน้าที่หาค่าเมตริกซ์ $\left[R_j\right]$ จากฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติขึ้น การคำนวณรอบแรกเริ่มต้นโดยการสมมติให้ทราบค่าฟังก์ชันในทิศ x หรือฟังก์ชัน $X(x)$ ในสมการ (3-17) โดยฟังก์ชัน $X(x)$ ที่สมมติขึ้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = 0$ และ $x = a$ ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะกำหนดให้ใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นเพียงหนึ่งพจน์ ($N = 1$) โดยสมมติค่า $X(x) = x^{9}$ ซึ่งการศึกษาในอดีต [5] ได้แสดงไว้ว่าการใช้ฟังก์ชันเริ่มต้นในสมการ (3-17) จำนวน 1 พจน์ สำหรับระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพื่อแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงแผ่นคอมโพสิทบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply สามารถให้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องและแม่นยำ จากนั้นนำฟังก์ชันเริ่มต้น $X(x)$ ไปหาค่าเมตริกซ์ $\left[R_j\right]$ ตามสมการ (3-18) และเมตริกซ์ $\left[M_j\right]^i$ ตามสมการ (3-22)

โปรแกรมในส่วนที่สองตามภาพที่ 4.1 (a) จะหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชั่นที่ไม่ทราบค่า ที่ตำแหน่งเริ่มต้น $y = 0$ ถึง $y = b$ โดยฟังก์ชัน $Y(y)$ ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ตามสมการ (3-25) เมื่อแทนค่าฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่สร้างขึ้นลงในสมการครอบคลุม (3-22) แล้วจัดรูปใหม่จะสามารถเขียนค่า $\{MM\}_{j+4}^{i}$ ในรูปของ $\{MM\}_{j}^{i}$ $\{MM\}_{j+1}^{i}$ $\{MM\}_{j+2}^{i}$ และ $\{MM\}_{j+3}^{i}$ ได้ตามสมการ (3-26) ดังนั้นในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงจะมีจำนวนเวกเตอร์เจาะจงจำนวน $4i$ ตัวเท่านั้น เมื่อนำสมการที่ (3-25) ที่ถูกจัดรูปใหม่ตามสมการ (3-26) แทนลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่สนใจ ซึ่งในที่นี้คือด้าน $y = 0$ ที่มีการจับยึดแบบยึดแน่น และ $y = b$ ที่มีการจับยึดแบบปล่อยปลายอิสระ ตามสมการเงื่อนไขขอบเขต (3-23) และในตำแหน่งที่ชิ้นงานมีความหนาเปลี่ยนไปหรือที่ $y = b_1$ จะใช้สมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง (3-24) ดังนั้นจะสามารถจัด

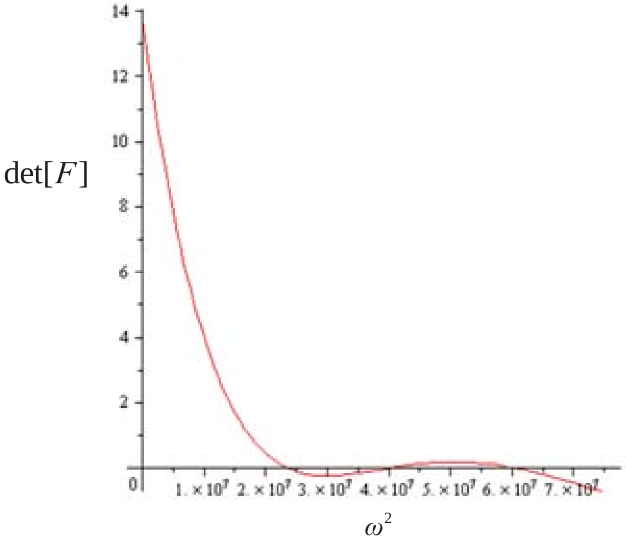
รูปสมการเงื่อนไขขอบเขตและสมการเงื่อนไขความต่อเนื่องของด้าน y ในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ในรูป

$$[F]\times[G]=0 \tag{4-1}$$

โดย $[F]$ คือ เมตริกซ์จัตุรัสขนาด $[4i\times 4i]$ ที่มีค่าเจาะจงเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$[G]$ คือ เมตริกซ์หลัก (column matrix) ของค่าเวกเตอร์เจาะจงที่ไม่ทราบค่า

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ส่วนสุดท้ายทำหน้าที่แก้ปัญหาค่าเจาะจง ตามสมการ (4-1) พบว่าสมาชิกของ $[G]$ จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกันเมื่อค่าดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของเมตริกซ์ $[F]$ มีค่าเป็นศูนย์ หมายความว่าค่าเจาะจงของปัญหาการสั่นสะเทือนหรือค่า ω^2 ตามสมการ (3-22) สามารถหาได้จากการแก้สมการ $\det[F]=0$ เมื่อเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\det[F]$ กับ ω^2 จะได้ดังภาพที่ 4.4



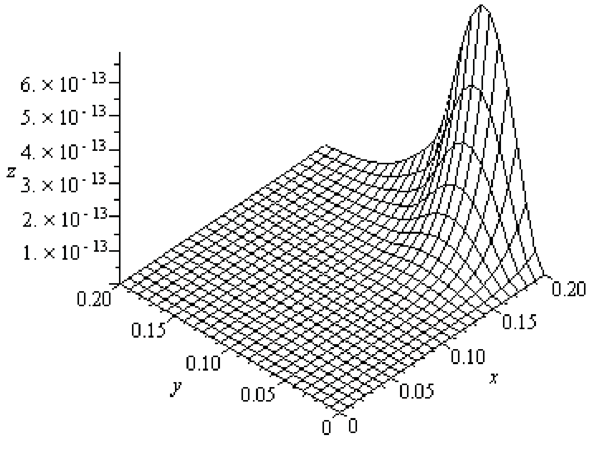
ภาพที่ 4.4 การหารากคำตอบของปัญหาค่าเจาะจง

จากภาพที่ 4.4 จะเห็นว่าค่าคำตอบ ω^2 ที่ทำให้ $\det[F]$ มีค่าเท่ากับศูนย์มีหลายค่า ค่า ω^2 ทุกค่าเป็นค่าที่ทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าต่ำที่สุดตามเงื่อนไขที่ตั้งไว้ เมื่อถอดรากที่สองของค่า ω^2 จะได้ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่สนใจ ค่าความถี่ธรรมชาติที่มีค่าต่ำที่สุดคือค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดการสั่นสะเทือนที่ 1 ค่าความถี่ธรรมชาติที่มีค่ามากขึ้นคือโหมดการสั่นสะเทือนลำดับต่อไป จากกราฟในภาพที่ 4.3 จะได้ค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ 23,601,817.54 $(\text{rad/s})^2$ ค่านี้หาได้โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีหนึ่งในการแก้สมการ $f(x)=0$ ค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วย rad/s (ω) คือรากที่สองของค่าเจาะจงที่ได้จากการแก้ปัญหาค่าเจาะจงและสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ต (Hz) ได้จาก

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \tag{4-2}$$

ค่าเจาะจงที่ได้เมื่อนำไปแทนในสมการ (4-1) เพื่อหาค่าเวกเตอร์เจาะจงที่ไม่ทราบค่าของฟังก์ชัน *Y(y)* ฟังก์ชัน *Y(y)* ที่ได้นี้จะเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดในช่วง 0 ถึง b_1 และช่วง b_1 ถึง b โดยที่ ณ ตำแหน่ง b_1 สมการจะมีค่าเท่ากันเนื่องจากคำตอบจะต้องสอดคล้องกับสมการเงื่อนไขความต่อเนื่อง เมื่อนำฟังก์ชัน *Y(y)* ที่ได้จากการคำนวณในรอบนี้ไปแทนค่าในสมการ (3-17) แล้ววาดกราฟจะได้รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนตามภาพที่ 4.5 ซึ่งจะเห็นว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณรอบแรกยังไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่สนใจ เนื่องจากฟังก์ชันเริ่มต้น *X(x)* ที่สมมติขึ้นในตอนแรกนั้นไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในด้าน x ที่เป็นการจับยึดแบบง่าย รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ $x=a$ ควรมีระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับศูนย์

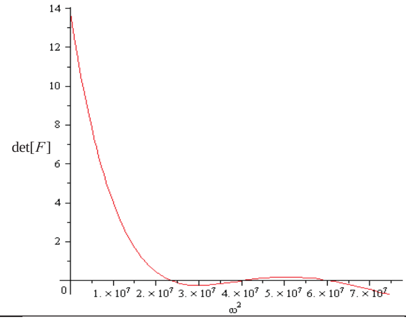
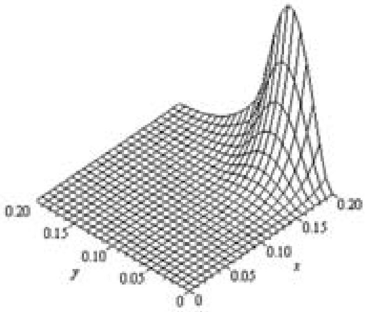
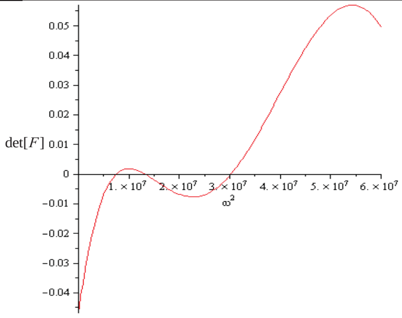
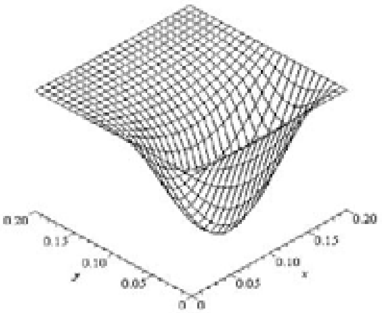
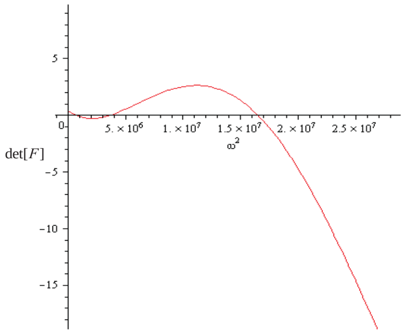
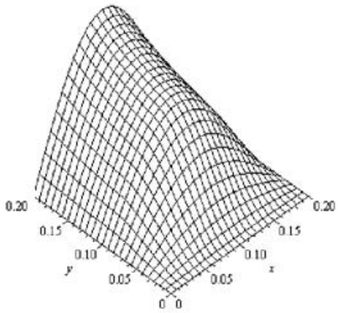
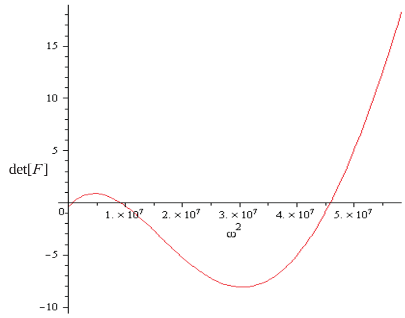
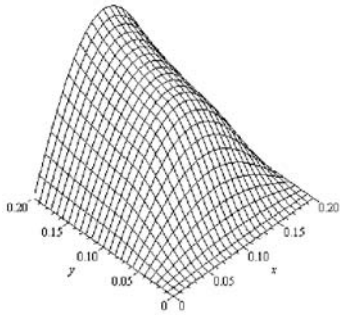


ภาพที่ 4.5 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการคำนวณรอบแรก

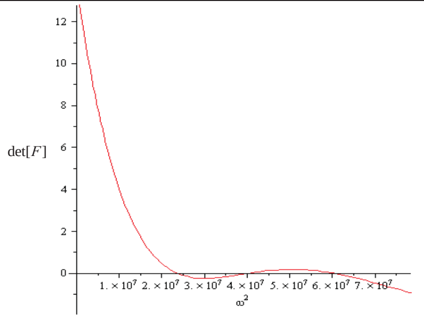
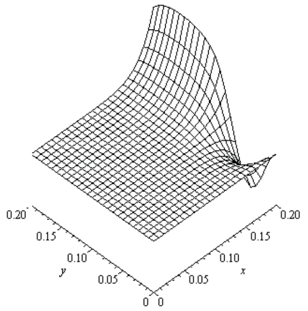
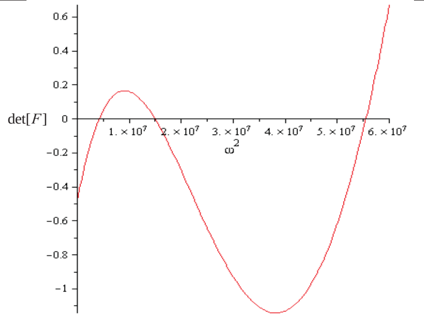
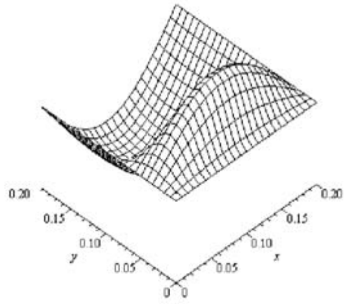
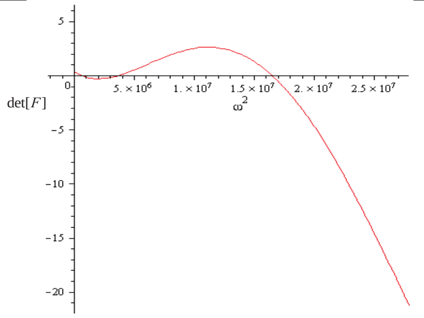
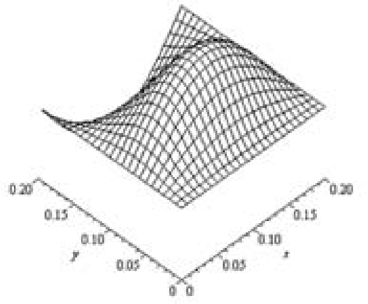
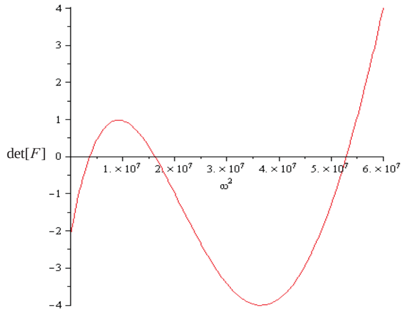
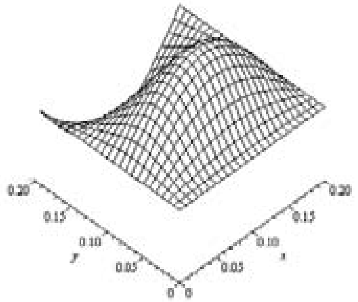
จากการคำนวณรอบแรกจะได้ฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบที่สอง จากแผนผังในภาพที่ 4.1(b) จะเห็นว่าการคำนวณรอบนี้มีขั้นตอนในการแก้ปัญหาเหมือนกับการสมมติฟังก์ชัน $X(x)$ ที่กล่าวมาข้างต้น การคำนวณรอบที่สองเริ่มจากการนำฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากการคำนวณรอบแรกไปหาเมตริกซ์ $\left[S_j\right]$ ตามสมการ (3-26) และเมตริกซ์ $\left[N_j\right]$ ตามสมการ (3-27) จากนั้นหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของด้านที่ไม่ทราบค่า โดยกำหนดฟังก์ชัน $X(x)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ แล้วแทนค่าลงในสมการ (3-27) เมื่อจัดรูปใหม่จะสามารถเขียน $[NN]_{j+4}$ ในรูปของ $\{NN\}_j$ $\{NN\}_{j+1}$ $\{NN\}_{j+2}$ และ $\{NN\}_{j+3}$ ตามสมการ (3-29) เวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงมีจำนวนเพียง 4 ตัวตามเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของปัญหาที่สนใจ ซึ่งในที่นี้คือการจับยึดแบบง่าย ที่ $x = 0$ และ $x = a$ ตามสมการเงื่อนไขขอบเขต (3-23) การแก้ปัญหาค่าเจาะจงรอบที่สองจะได้ค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $\det\left[F\right] = 0$ คือ ω^2 มีค่าเท่ากับ 16,668,104.9 $(\text{rad/s})^2$ ค่าเจาะจงที่ได้นำไปหาค่าเวกเตอร์เจาะจง จะได้ฟังก์ชัน $X(x)$ และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่มีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อจบการคำนวณในรอบที่สองจะได้ฟังก์ชัน $X(x)$ เพื่อใช้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณรอบที่สาม โดยการคำนวณรอบที่สามจะมีขั้นตอนเหมือนการคำนวณรอบแรกทุกประการ

ตารางที่ 4-1 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนโหมดแรกของโครงสร้างแผ่นบางในแต่ละรอบการคำนวณ ช่องที่สอง สามและสี่ของตารางแสดงกราฟค่าเจาะจง ค่าความถี่ธรรมชาติ และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของแต่ละรอบการคำนวณตามลำดับ การคำนวณรอบแรกจะเลือกค่าเจาะจงที่มีค่าน้อยที่สุดก่อนเพราะเป็นค่าที่ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าน้อยที่สุด ค่าที่ได้คือค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดการสั่นสะเทือนแรก โดยกระบวนการคำนวณซ้ำจะทำจนกระทั่งค่าเจาะจงมีค่าคงที่ ตารางที่ 4-2 และตารางที่ 4-3 แสดงการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่สองและสามตามลำดับ โหมดการสั่นสะเทือนที่สองจะเลือกค่าเจาะจงที่มีค่ามากถัดจากโหมดที่หนึ่ง และโหมดการสั่นสะเทือนที่สามจะเลือกค่าที่มากกว่าโหมดที่สอง เพื่อให้ได้ค่าความถี่ธรรมชาติมากขึ้นตามลำดับ

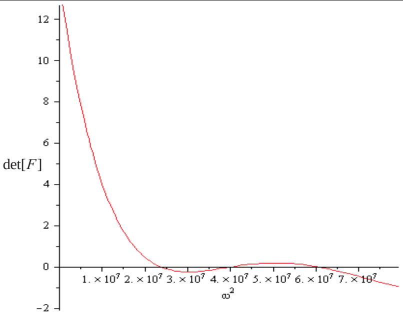
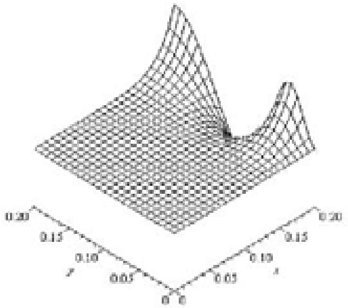
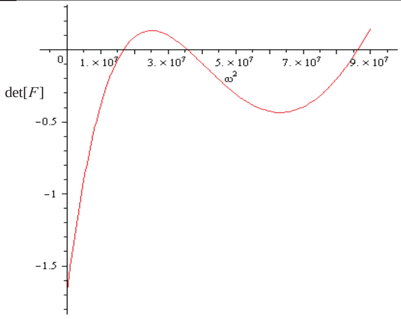
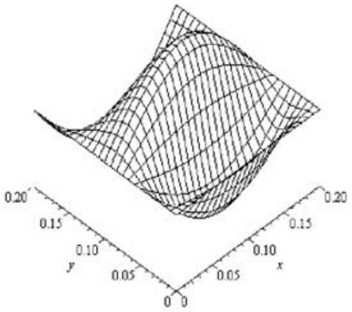
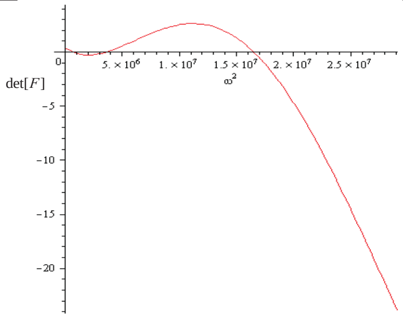
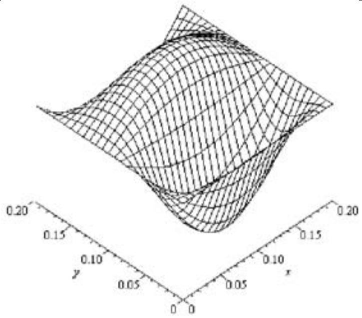
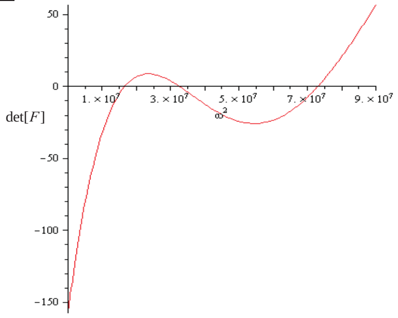
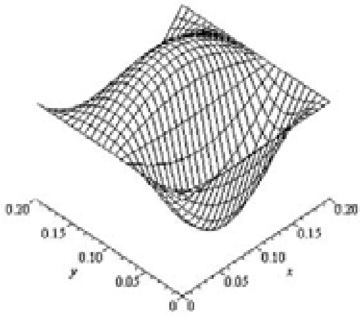
ตารางที่ 4-1 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือนที่ 1

รอบการคำนวณ	กราฟค่าเจาะจง	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)	รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
1		773.20	
2		435.08	
3		131.22	
4		131.22	

ตารางที่ 4-2 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือนที่ 2

รอบการคำนวณ	กราฟค่าเจาะจง	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)	รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
1		1,009.14	
2		324.61	
3		303.57	
4		303.57	

ตารางที่ 4-3 ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดการสั่นสะเทือนที่ 3

รอบการคำนวณ	กราฟค่าเจาะจง	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)	รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
1		1,239.43	
2		649.78	
3		646.63	
4		646.63	

4.3 พารามิเตอร์ที่มีผลต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง

เนื่องจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นการประมาณคำตอบของปัญหา ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะถูกต้องและเชื่อถือได้หรือไม่ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ฟังก์ชันที่นำมาใช้ จำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณ และจำนวนเลขทศนิยมของค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ระหว่างการคำนวณ ปัจจัยเหล่านี้นำมาซึ่งความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ ได้แก่ ความผิดพลาดที่เกิดจากข้อมูล ความผิดพลาดจากการปัดเศษ หรือ การแพร่กระจายของความผิดพลาด [23] เพื่อให้ได้คำตอบถูกต้องแม่นยำและเชื่อถือได้ หัวข้อนี้จึงศึกษาผลของจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นและผลของจำนวนเลขนัยสำคัญที่มีผลต่อการลู่เข้าของผลลัพธ์

หัวข้อนี้จะศึกษาผลของจำนวนพจน์และจำนวนเลขนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนเมื่อลักษณะของชิ้นงานเปลี่ยนไป พารามิเตอร์ของชิ้นงานที่นำมาศึกษาได้แก่ ขนาดชิ้นงาน ความหนาของชิ้นงาน ตำแหน่งของชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนไป เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด และฟังก์ชันเริ่มต้น $X(x)$ ที่สมมติให้เป็นฟังก์ชันทราบค่าในการคำนวณรอบแรก

ชิ้นงานที่ยกมาเป็นตัวอย่างในหัวข้อ 4.2 ถูกนำมาใช้ศึกษาต่อในหัวข้อนี้ กำหนดให้ชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF และมีฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติขึ้นคือ $X(x)=x^9$ จากการหาค่าความถี่ธรรมชาติโหมดแรกของการสั่นสะเทือนพบว่าผลเฉลยจะสามารถหาค่าได้เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นมีจำนวนพจน์มากกว่า 43 พจน์ ผลเฉลยจึงจะสามารถหาคำตอบได้เนื่องจากจะมีคำตอบของค่าเจาะจงที่ทำให้ $\det[F]=0$ สำหรับจำนวนเลขนัยสำคัญน้อยที่สุดที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้าเมื่อใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 61 ตัว กราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญแสดงในภาพที่ 4.6 ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการสมมติฟังก์ชันเริ่มต้นคือฟังก์ชัน $X(x)$ แทนด้วยสัญลักษณ์จุด และฟังก์ชัน $Y(y)$ แทนด้วยสัญลักษณ์กากบาท จากภาพที่ 4.6 (a) จะเห็นว่าหากใช้เลขนัยสำคัญน้อยกว่า 62 ตัว ผลเฉลยจะไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง โดยการคำนวณที่กำหนดให้ฟังก์ชันเริ่มต้นคือฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ จะได้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ค่า 131.22025 และ 131.21922 ตามลำดับ เมื่อเลขนัยสำคัญมีค่ามากกว่า 61 ตัว ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากฟังก์ชันเริ่มต้นคือฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ จะมีค่าเท่ากันคือ 131.22128 ซึ่งถือว่าเป็นผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

เมื่อเปลี่ยนฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติขึ้นคือ $X(x)=\sin(\pi x/a)$ พบว่าจำนวนเลขนัยสำคัญน้อยที่สุดที่ทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่เข้าเมื่อใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 39 ตัวดังภาพที่ 4.6 (b) เมื่อเปลี่ยน

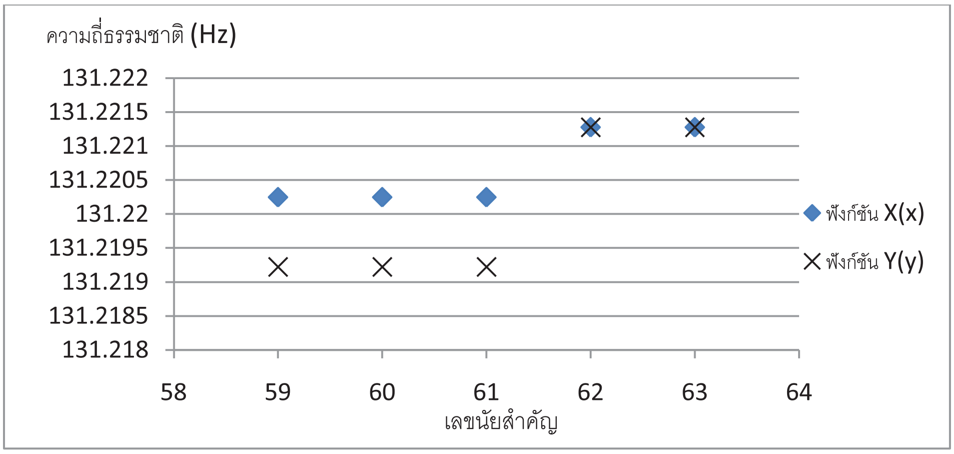
เงื่อนไขขอบเขตของชิ้นงานเป็นการจับยึดแบบ CCCF พบว่าต้องใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 65 ตัวดังภาพที่ 4.6 (c) นอกจากนี้ยังศึกษาผลของขนาดของชิ้นงานโดยให้ชิ้นงานมีขนาดกว้างขึ้น คือ a=400mm พบว่าต้องใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 53 ตัวตามภาพที่ 4.6 (d) การศึกษามีการเปลี่ยนความสูงของชิ้นงานในช่วง b_1 ถึง b ให้มีค่า 3mm เพื่อศึกษาผลของความสูงที่เปลี่ยนไปต่อจำนวนเลขนัยสำคัญ พบว่าต้องใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 65 ตัวดังภาพที่ 4.6 (e) และเมื่อเปลี่ยนอัตราส่วนของ b_1/b เป็น 0.75 พบว่าต้องใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 61 ตัวดังภาพที่ 4.6 (f) โดยทุกกรณีศึกษาที่กล่าวมาข้างต้นต้องใช้สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังต้องมีจำนวนพจน์มากกว่า 43 พจน์ ผลเฉลยจึงจะสามารถหาคำตอบได้เนื่องจากจะมีคำตอบของค่าเจาะจงที่ทำให้ $\det[F]=0$

ประเด็นสุดท้ายของการศึกษาในหัวข้อนี้คือผลของชนิดวัสดุที่ส่งผลต่อจำนวนพจน์และจำนวนเลขนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง กำหนดให้ชิ้นงานมีขนาดเท่าเดิม คือ $a = b =$ 200 mm, h_1 = 1 mm, อัตราส่วนของ h_2/h_1 คือ 2 และอัตราส่วนของ b_1/b คือ 0.5 ชิ้นงานถูกจับยึดภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF ชิ้นงานทำจากวัสดุกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 ซึ่งมีคุณสมบัติตามเอกสารอ้างอิง [24] คือ

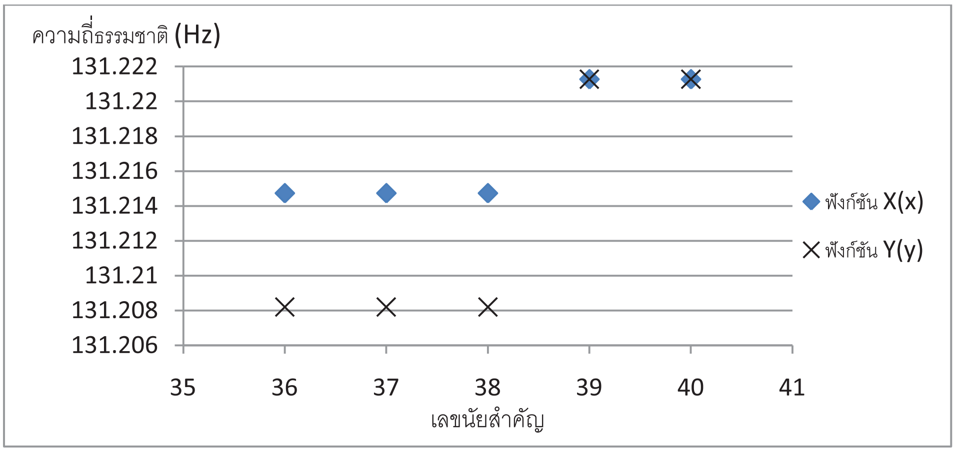
$$E_1 = 131 \text{ GPa} \quad E_2 = 10.8 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.24$$

$$G_{12} = 5.65 \text{ GPa} \quad \rho = 1{,}540 \text{ kg/m}^3 \quad t = 0.127 \text{ mm}$$

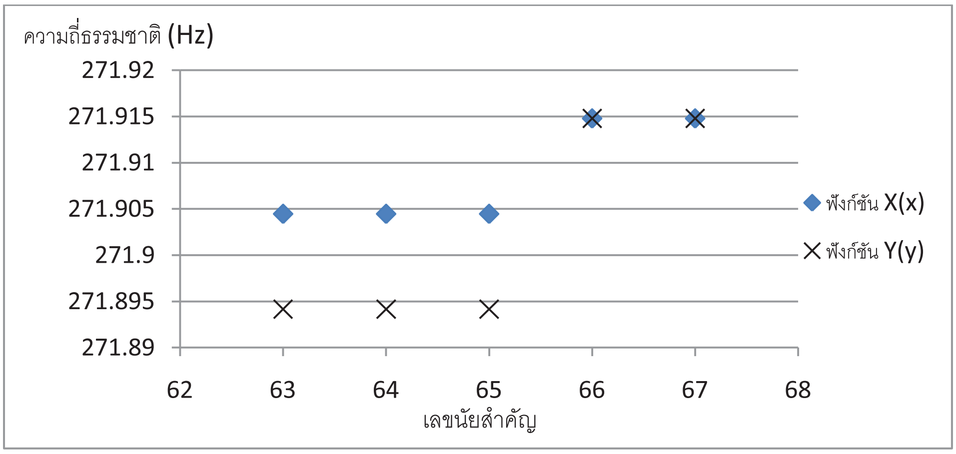
มีการเรียงตัวของเส้นใยในช่วง 0 ถึง b_1 คือ $[0]_4$ และช่วง b_1 ถึง b คือ $[90_2/0_2]_s$ การศึกษาพบว่าต้องใช้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันอนุกรมกำลังต้องมีจำนวนพจน์มากกว่า 43 พจน์ และต้องใช้เลขนัยสำคัญมากกว่า 65 ตัว เพื่อให้ผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันดังภาพที่ 4.6 (g)



(a) ชิ้นงานที่ใช้ศึกษาในหัวข้อ 4.2

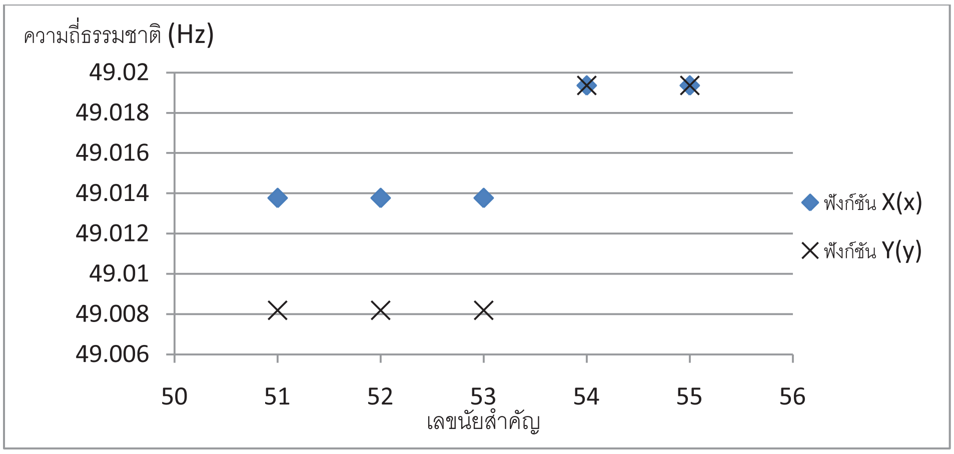


(b) เปลี่ยนฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติขึ้นคือ $X(x)=\sin(\pi x/a)$

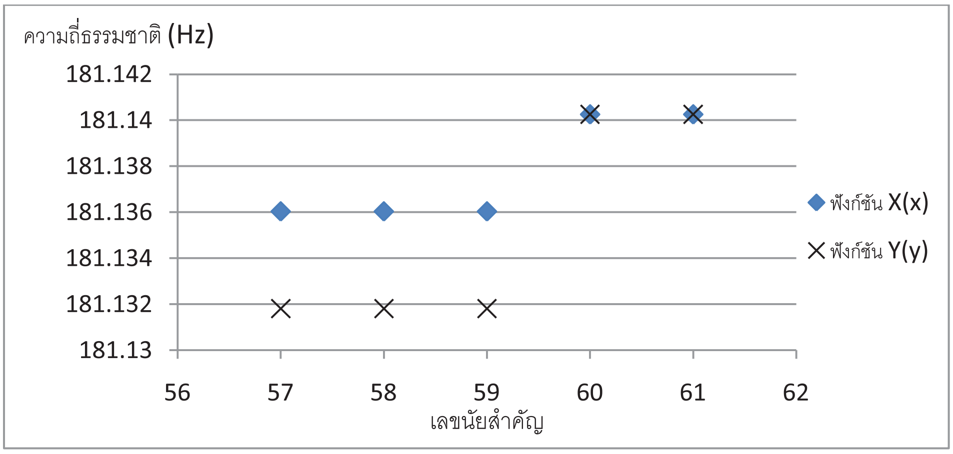


(c) เปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขตเป็นการจับยึดแบบ CCCF

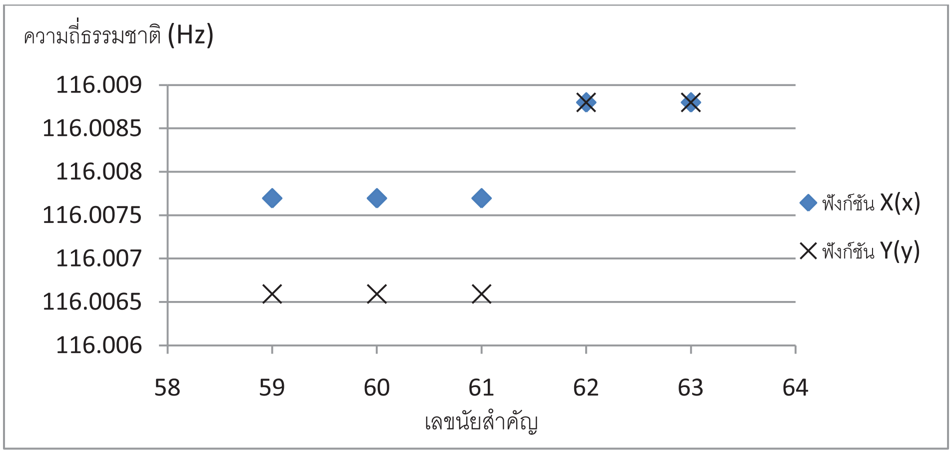
ภาพที่ 4.6 กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ



(d) เปลี่ยนขนาดชิ้นงานเป็น 400x200 mm^2

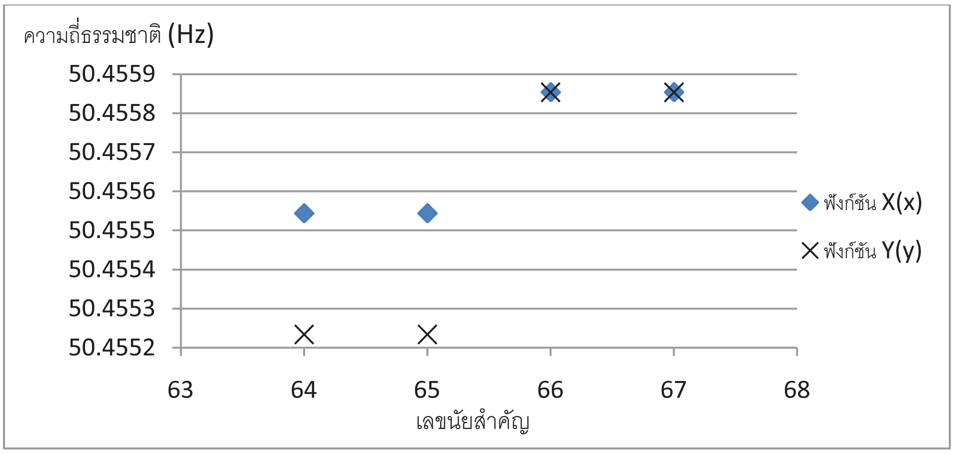


(e) เปลี่ยนความสูง (h_2) ของชิ้นงานคือ 3 mm



(f) อัตราส่วนของ b_1/b เป็น 0.75

ภาพที่ 4.6 (ต่อ) กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ



(g) ชิ้นงานทำจากวัสดุคอมโพสิท

ภาพที่ 4.6 (ต่อ) กราฟความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนเลขนัยสำคัญ

การศึกษาในหัวข้อนี้สรุปได้ว่าพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อจำนวนเลขนัยสำคัญที่ใช้คำนวณ ได้แก่ ฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติ เงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ลักษณะของชิ้นงาน ได้แก่ ขนาด และความหนาของชิ้นงานแต่ละชั้น รวมถึงชนิดของวัสดุของชิ้นงาน จำนวนเลขนัยสำคัญที่เพียงพอต่อการคำนวณปัญหาที่ยกมาเป็นกรณีศึกษาจะมีค่าอยู่ในช่วง 54-66 ตัว และจะใช้เพียงแค่ 39 ตัวเมื่อให้ฟังก์ชันเริ่มต้นอยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ จำนวนเลขนัยสำคัญส่งผลต่อการคำนวณเพราะหากใช้เลขนัยสำคัญไม่เพียงพอผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณซ้ำจะไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง เนื่องจากจำนวนเลขนัยสำคัญที่น้อยเกินไปจะทำให้เกิดการตัดเศษออก เช่น การคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $[F]$ ในสมการที่ 4-1 สัมประสิทธิ์หน้าค่าเจาะจงอยู่ในช่วงสิบยกกำลัง -40 ถึงสิบยกกำลัง -700 เป็นสาเหตุให้มีความผิดพลาดในการคำนวณ สำหรับจำนวนสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังนั้น จากการศึกษาพบว่าไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ใด แต่หากใช้จำนวนเลขนัยสำคัญไม่เพียงพอจะไม่สามารถหาคำตอบได้เนื่องจากไม่มีคำตอบของค่าเจาะจงที่ทำให้ $\det[F]=0$ จากหัวข้อนี้ทำให้สรุปได้ว่า จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นและเลขนัยสำคัญมีผลต่อการลู่เข้าของค่าเจาะจง ดังนั้นการนำโปรแกรมไปหาผลเฉลยจะต้องคำนึงถึงผลของตัวแปรทั้งสองนี้เพื่อให้ผลเฉลยถูกต้องและแม่นยำ

บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

เนื่องจากปัญหาที่ศึกษามีความซับซ้อนจากการมีความหนาเป็นขั้น ๆ ทำให้ต้องใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่มีจำนวนพจน์มาก เป็นเหตุให้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยง่าย จึงต้องมีการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณ เนื้อหาในบทนี้เป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้เขียนขึ้นเพื่อใช้ในการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โดยใช้จำนวนพจน์เริ่มต้นเพียง 1 พจน์

การตรวจสอบโปรแกรมแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ โปรแกรมสำหรับชิ้นงานที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิก และโปรแกรมสำหรับชิ้นงานที่เป็นวัสดุคอมโพสิท สำหรับชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิกการสอบทวนความถูกต้องทำโดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Xiang และคณะ [2] สำหรับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตไม่เป็นไปตามการศึกษาของ Xiang การสอบทวนความถูกต้องทำโดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนกับผลการศึกษาที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากนี้วิทยานิพนธ์นี้ยังได้ทดลองการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะ (impact testing) กับชิ้นทดสอบจริง แล้วนำค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองมาเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากทฤษฎี

เนื่องจากยังไม่มีงานวิจัยในอดีตที่ศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคอมโพสิทที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น ๆ โดยตรง การสอบทวนโปรแกรมสำหรับวัสดุดังกล่าวจึงทำโดยการใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นสำหรับชิ้นงานที่มีความหนาหนึ่งขั้น แก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาคงที่ โดยกำหนดให้แผ่นลามิเมตมีจำนวนชั้นและการวางตัวของเส้นใยเหมือนกัน ผลที่ได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการศึกษาโครงสร้างคอมโพสิทแผ่นบางที่มีความหนาคงที่ [6] การสอบทวนโปรแกรมอีกส่วนหนึ่งทำได้โดยเปรียบเทียบผลการศึกษาโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทที่มีความหนาเป็นขั้น ๆ กับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

5.1 การสอบทวนความถูกต้องของโครงสร้างแผ่นบางทำจากวัสดุไอโซทรอปิก

5.1.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Xiang และคณะ

การศึกษาในหัวข้อนี้เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลการศึกษาของ Xiang และคณะ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้เป็นการใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่ใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพียงพจน์เดียว การศึกษาของ Xiang เป็นการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นของวัสดุไอโซทรอปิก ผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยแม่นตรงเมื่อเงื่อนไขขอบเขตของชิ้นงานด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นมีการจับยึดแบบง่าย ชิ้นงานที่ศึกษาถูกกำหนดให้มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น SSSS, SCSC และ SFSF คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ศึกษาเป็นดังนี้ $E_1 = E_2 =$ 68.9 GPa $\nu_{12} =$ 0.33 $G_{12} = \dfrac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$ และ ρ = 2,544.34 kg/m^3 มีขนาด $a = b =$ 200 mm และ h_1 = 1 mm ค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนแสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยซึ่งนิยามตามสมการ

$$\Phi = \frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho h_1}{D_{11}^{\;1}}} \tag{5-1}$$

การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับผลการศึกษาของ Xiang แสดงไว้ในตารางที่ 5-1 ถึง ตารางที่ 5-3 โดยผลการศึกษาของ Xiang แสดงไว้ในช่อง Xiang ส่วนค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแสดงในช่อง Kantorovich เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่แสดงในตารางหาได้จาก

$$\text{ความคลาดเคลื่อน}\,(\%) = \frac{\omega_{kantorovich} - \omega_{ref}}{\omega_{ref}} \times 100\% \tag{5-2}$$

เมื่อ $\omega_{kantorovich}$ คือความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ω_{ref} คือความถี่ธรรมชาติจากผลการศึกษาของ Xiang

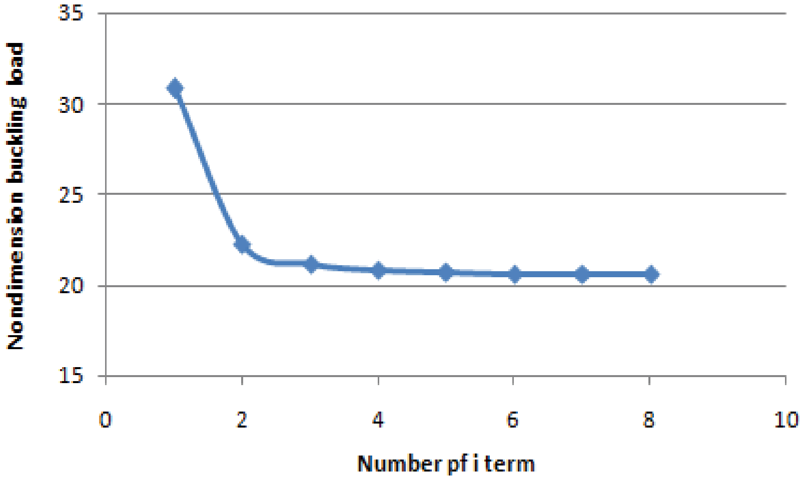
ในการศึกษาจะเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของ h_2/h_1 ให้มีค่าเท่ากับ 1.5 และ 2 และอัตราส่วนของ b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.3 และ 0.5 สำหรับทุกเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษา

นอกจากจะเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติกับผลการศึกษาของ Xiang แล้ว การศึกษานี้ยังเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อเป็นการสอบทวนความถูกต้องและความคลาดเคลื่อนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกด้วย ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้จากการจำลองรูปร่างของชิ้นงานขึ้นมาแล้วใช้โปรแกรมสำเร็จรูปใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบของปัญหา ขั้นตอนการหาคำตอบโดยละเอียดแสดงในภาคผนวก ข ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในช่อง FEM เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่แสดงใต้ช่อง FEM คือค่าความแตกต่างของค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่คำนวณตามสมการ 5-2 เมื่อ ω_{ref} คือความถี่ธรรมชาติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากตารางที่ 5-1 และตารางที่ 5-2 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนจากผลการศึกษาของ Xiang น้อยมาก โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น -0.17 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น ถือได้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และ SCSC มีความถูกต้องแม่นยำ สำหรับตารางที่ 5-3 พบว่าสำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ SFSF คำตอบที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะมีความคลาดเคลื่อนกับการศึกษาของ Xiang สูงกว่าการจับยึดสองกรณีแรก คือมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเป็น -0.92 เปอร์เซ็นต์ แต่คำตอบที่ได้นี้ใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มากกว่าสองกรณีการจับยึดข้างต้น ถือได้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความน่าเชื่อถือและแม่นยำเพราะคำตอบที่ได้จากแต่ละวิธีคำนวณแตกต่างกันที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 2 สำหรับการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่า เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้ง 3 กรณีให้ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยใกล้เคียงกันคือ 0.28 เปอร์เซ็นต์

งานวิจัยในอดีตที่ศึกษาเรื่องการลู่เข้าของคำตอบ (convergence study) [11] งานวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเป็นมุม 30 องศาและมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งที่ด้าน โดยกำหนดให้ใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้น 1 ถึง 8 พจน์ ภาพที่ 5.1 แสดงผลการศึกษาในรูปกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณคำตอบจะลู่เข้าในลักษณะที่ผลเฉลยจะค่อย ๆ มีค่าลดลงเรื่อยๆ ซึ่งจะใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น และเมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณถึงค่าค่าหนึ่ง ผลเฉลยจะมีค่าคงที่ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากที่สุด ดังนั้นการเปรียบเทียบว่าระเบียบวิธีใดให้คำตอบที่แม่นยำกว่ากันอาจพิจารณาจากคำตอบที่ได้ โดยระเบียบวิธีใดให้คำตอบที่มีค่าต่ำกว่าจะเป็นระเบียบวิธีที่มี

ความแม่นยำมากกว่า และจากการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติพบว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าน้อยกว่าผลการศึกษาในอดีต ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชให้ผลเฉลยในรูปค่าความถี่ธรรมชาติที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าการศึกษาในอดีต



ภาพที่ 5.1 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติและจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณ

ตารางที่ 5-1 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น SSSS

h_2/h_1	b_1/b		Mode					
			1	2	3	4	5	6
1.5	0.3	Kantorovich	2.631	6.530	6.757	10.705	13.432	13.482
		Xiang	2.629	6.538	6.760	10.724	13.432	13.501
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.080	-0.122	-0.049	-0.177	0.000	-0.141
		FEM	2.624	6.514	6.744	10.663	13.405	13.454
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.255	0.250	0.188	0.394	0.203	0.207
	0.5	Kantorovich	2.441	6.117	6.225	9.867	11.776	11.943
		Xiang	2.447	6.134	6.223	9.858	11.801	11.948
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.269	-0.279	0.033	0.090	-0.216	-0.045
		FEM	2.433	6.102	6.211	9.835	11.750	11.921
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.338	0.243	0.221	0.321	0.222	0.186
2	0.3	Kantorovich	3.141	8.071	8.396	13.481	16.430	16.538
		Xiang	3.145	8.089	8.424	13.515	16.511	16.536
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.122	-0.220	-0.328	-0.252	-0.489	0.011
		FEM	3.131	8.038	8.372	13.400	16.364	16.493
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.316	0.408	0.282	0.601	0.406	0.272
	0.5	Kantorovich	2.882	7.121	7.143	11.261	12.828	13.770
		Xiang	2.902	7.116	7.183	11.254	12.864	13.785
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.675	0.069	-0.555	0.064	-0.278	-0.112
		FEM	2.867	7.103	7.115	11.225	12.785	13.727
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.515	0.252	0.392	0.322	0.340	0.311

ตารางที่ 5-2 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น SCSC

h_2/h_1	b_1/b		Mode					
			1	2	3	4	5	6
1.5	0.3	Kantorovich	3.798	7.499	9.086	12.756	14.186	17.470
		Xiang	3.794	7.496	9.092	12.776	14.195	17.573
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.107	0.042	-0.072	-0.153	-0.066	-0.585
		FEM	3.793	7.490	9.071	12.722	14.165	17.436
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.121	0.126	0.167	0.266	0.149	0.197
	0.5	Kantorovich	3.554	6.808	8.722	11.778	12.379	15.616
		Xiang	3.561	6.828	8.720	11.769	12.409	15.621
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.199	-0.281	0.026	0.075	-0.242	-0.031
		FEM	3.549	6.797	8.710	11.754	12.357	15.590
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.155	0.167	0.136	0.208	0.175	0.169
2	0.3	Kantorovich	4.451	9.255	11.014	15.948	17.592	21.711
		Xiang	4.450	9.272	11.032	15.992	17.659	21.712
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.009	-0.181	-0.161	-0.277	-0.382	-0.002
		FEM	4.444	9.237	11.001	15.871	17.540	21.647
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.167	0.197	0.118	0.487	0.298	0.294
	0.5	Kantorovich	4.150	8.038	9.910	13.286	13.785	18.032
		Xiang	4.171	8.087	9.905	13.276	13.835	18.045
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.512	-0.603	0.049	0.078	-0.364	-0.072
		FEM	4.138	8.011	9.894	13.258	13.742	17.980
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.288	0.339	0.162	0.213	0.310	0.291

ตารางที่ 5-3 ค่าความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (Φ) ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น SFSF

			Mode					
h_2/h_1	b_1/b		1	2	3	4	5	6
1.5	0.3	Kantorovich	1.317	2.227	4.931	4.981	6.454	9.411
		Xiang	1.329	2.261	4.978	5.012	6.495	9.470
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.873	-1.538	-0.954	-0.627	-0.643	-0.622
		FEM	1.316	2.217	4.922	4.963	6.439	9.374
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.038	0.470	0.186	0.363	0.240	0.399
	0.5	Kantorovich	1.215	2.037	4.429	4.471	6.176	8.776
		Xiang	1.226	2.062	4.470	4.505	6.207	8.858
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-0.867	-1.245	-0.923	-0.747	-0.493	-0.932
		FEM	1.215	2.029	4.410	4.465	6.166	8.737
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.037	0.392	0.428	0.138	0.164	0.448
2	0.3	Kantorovich	1.707	2.887	5.721	5.887	8.300	11.017
		Xiang	1.725	2.930	5.801	5.924	8.337	11.133
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-1.075	-1.503	-1.385	-0.631	-0.449	-1.053
		FEM	1.705	2.868	5.699	5.862	8.280	10.976
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.145	0.656	0.393	0.424	0.239	0.373
	0.5	Kantorovich	1.474	2.421	4.732	5.114	7.671	9.724
		Xiang	1.493	2.444	4.777	5.176	7.711	9.783
		ความคลาดเคลื่อน (%)	-1.292	-0.948	-0.940	-1.197	-0.521	-0.599
		FEM	1.471	2.412	4.721	5.080	7.658	9.706
		ความคลาดเคลื่อน (%)	0.200	0.361	0.232	0.664	0.173	0.184

5.1.2 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื่องจากงานวิจัยของ Xiang มีข้อจำกัดของเงื่อนไขขอบเขตค่อนข้างมาก กล่าวคือ โครงสร้างด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจะต้องมีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสองด้าน ดังนั้น สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่มีเขื่อนไขขอบเขตการจับยึดไม่ตรงตาม เงื่อนไขข้างต้น จะนำค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และงานวิจัยในอดีตในหัวข้อที่ 5.1.1 ทำให้มั่นใจว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่นำมาใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างไอโซทรอปิกบางนั้นมีความน่าเชื่อถือเพียงพอต่อการนำมาใช้อ้างอิงคำตอบได้

การศึกษาในส่วนนี้กำหนดให้ชิ้นงานมีคุณสมบัติดังนี้ E_1=E_2= 68.9 GPa ν_{12}= 0.33 $G_{12} = \dfrac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$, ρ = 2,544.34 kg/m^3, b = 200 mm, h_1 = 2 mm อัตราส่วน a/b มีค่าเท่ากับ 1 และ 1.5 อัตราส่วน b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 0.75 และอัตราส่วน h_2/h_1 มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 0.75 ค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงไว้ในช่อง Kantorovich ของตารางที่ 5-4 ถึงตารางที่ 5-7 โดยแต่ละตารางแสดงเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC, CFCF, CCSC และ CCSF ตามลำดับ ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงไว้ในช่อง FEM เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสามารถคำนวณได้จากสมการ 5-2 โดย ω_{ref} คือค่าความถี่ธรรมชาติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการเปรียบเทียบพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตารางที่ 5-4 ถึงตารางที่ 5-7 พบว่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่าใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ 0.4 เปอร์เซ็นต์ แสดงว่าการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชนี้สามารถใช้แก้ปัญหาได้ทุกเงื่อนไขขอบเขตและให้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำ นอกจากนี้ข้อได้เปรียบของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชคือ สามารถวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานเมื่อด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นมีเงื่อนไขขอบเขตไม่เหมือนกันได้ ไม่จำเป็นต้องเป็นการจับยึดแบบง่ายตามวิธีการในการศึกษาของ Xiang

นอกจากการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติแล้ว การศึกษานี้ยังได้พิจารณารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 6 โหมดแรกของโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านของชิ้นงานที่มีคุณสมบัติของวัสดุข้างต้น อัตราส่วน a/b มีค่าเท่ากับ 1 อัตราส่วน b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.5 และ

อัตราส่วน h_2/h_1 มีค่าเท่ากับ 0.5 ตารางที่ 5-8 แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกพล็อตแบบพื้นที่ผิวและแบบคอนทัวร์เพื่อแสดงให้เห็นถึงการเคลื่อนที่นอกแนวระนาบในแบบ 3 มิติ และ 2 มิติตามลำดับ จากการเปรียบเทียบรูปร่างการโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตารางที่ 5-8 พบว่ารูปร่างการสั่นสะเทือนมีลักษณะคล้ายกัน

ตารางที่ 5-4 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC

a/b		1						1.5					
b_1/b		0.5			0.75			0.5			0.75		
h2/h1	Mode	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.5	1	330.77	329.72	0.32	386.19	385.3	0.23	239.21	238.73	0.20	272.54	272.09	0.17
	2	646.91	644.82	0.32	744.34	742.62	0.23	385.25	384.16	0.28	450.38	449.54	0.19
	3	656.79	655.34	0.22	829.96	827.77	0.26	596.23	589.96	1.06	650.04	648.97	0.16
	4	978.01	975.06	0.30	1171.75	1167.4	0.37	596.66	600.4	-0.62	745.51	743.96	0.21
	5	1044.80	1042.2	0.25	1408.74	1403.6	0.37	708.19	706.31	0.27	824.90	822.84	0.25
	6	1157.79	1154.3	0.30	1480.11	1474.7	0.37	854.88	842.6	1.46	1118.83	1106.1	1.15
0.75	1	394.05	393.39	0.17	427.12	426.34	0.18	293.42	293.08	0.12	312.94	312.51	0.14
	2	800.03	798.31	0.22	855.16	853.39	0.21	457.33	456.63	0.15	496.62	495.8	0.17
	3	812.79	811.01	0.22	891.01	888.96	0.23	727.17	724.38	0.39	765.70	764.37	0.17
	4	1196.78	1193.2	0.30	1278.56	1274.7	0.30	733.41	733.64	-0.03	804.38	802.79	0.20
	5	1405.97	1401.3	0.33	1537.63	1532.8	0.32	882.00	879.89	0.24	933.15	931.15	0.21
	6	1425.00	1421.8	0.23	1606.43	1601	0.34	1090.00	1086.8	0.29	1220.38	1213.2	0.59

ตารางที่ 5-5 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CFCF

a/b		1						1.5					
b_1/b		0.5			0.75			0.5			0.75		
h_2/h_1	Mode	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.5	1	174.25	173.25	0.58	231.67	230.28	0.60	90.27	89.527	0.83	112.25	111.59	0.59
	2	280.04	278.31	0.62	304.79	302.8	0.66	138.53	137.33	0.87	158.77	157.63	0.72
	3	396.21	393.64	0.65	473.30	471	0.49	211.83	210.94	0.42	279.45	278.03	0.51
	4	429.14	427.57	0.37	533.17	530.01	0.60	265.36	264.28	0.41	356.98	355.76	0.34
	5	694.54	690.85	0.53	790.99	787.59	0.43	340.52	338.97	0.46	374.42	372.48	0.52
	6	704.08	705.49	-0.20	802.24	804.87	-0.33	381.32	380.18	0.30	482.91	480.76	0.45
0.75	1	234.12	232.94	0.51	256.08	254.91	0.46	107.86	107.19	0.62	116.57	115.99	0.50
	2	303.34	301.49	0.61	313.25	311.35	0.61	153.74	152.72	0.67	162.10	161.16	0.58
	3	472.81	470.65	0.46	521.11	518.78	0.45	286.18	285.14	0.36	312.37	311.29	0.35
	4	619.33	616.98	0.38	672.56	669.51	0.46	337.25	336.23	0.30	387.92	383.58	1.13
	5	786.38	782.96	0.44	808.11	804.36	0.47	373.88	372.16	0.46	384.71	386.09	-0.36
	6	876.15	877.85	-0.19	930.97	932.55	-0.17	544.29	542.62	0.31	593.06	590.99	0.35

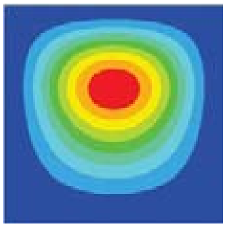
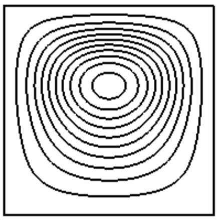
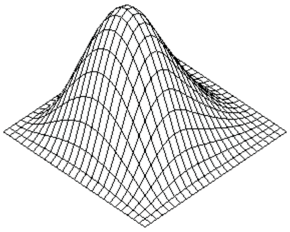
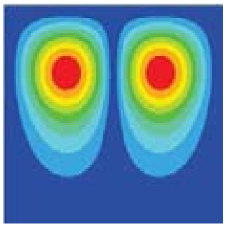
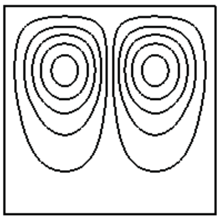
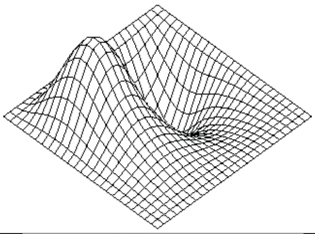
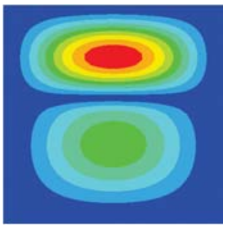
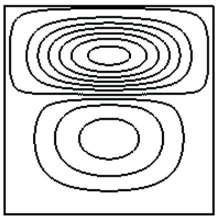
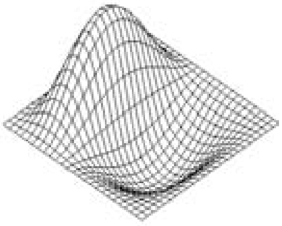
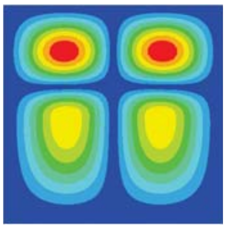
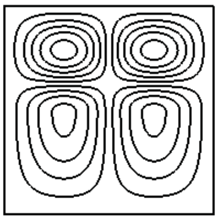
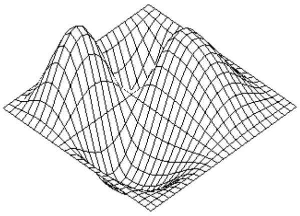
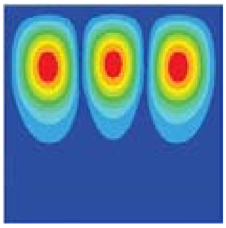
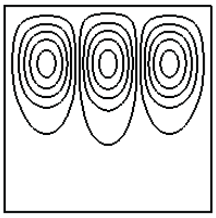
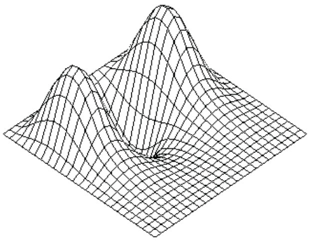
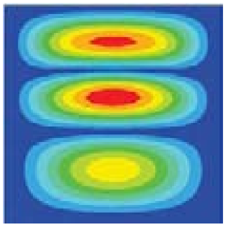
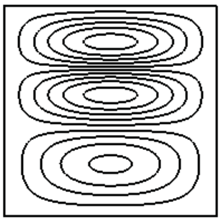
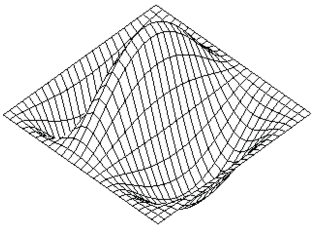
ตารางที่ 5-6 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCSC

a/b		1						1.5					
b_1/b		0.5			0.75			0.5			0.75		
h_2/h_1	Mode	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.5	1	289.25	288.32	0.32	328.98	328.29	0.21	226.69	226.29	0.18	256.20	255.85	0.14
	2	572.18	569.77	0.42	705.80	703.96	0.26	351.04	350.03	0.29	402.52	401.84	0.17
	3	634.86	634.13	0.12	714.18	712.62	0.22	548.24	546.36	0.34	641.83	640.72	0.17
	4	895.56	892.1	0.39	1081.39	1076.8	0.43	590.76	590.15	0.10	667.86	666.66	0.18
	5	950.65	949.04	0.17	1310.75	1306.5	0.33	686.38	685.12	0.18	795.97	793.82	0.27
	6	1140.73	1137.4	0.29	1390.18	1385.6	0.33	796.18	785.5	1.36	1048.71	1034.9	1.33
0.75	1	347.59	346.9	0.20	372.59	371.83	0.21	280.39	280.05	0.12	297.69	297.29	0.14
	2	693.03	691.34	0.24	764.01	762.29	0.23	417.36	416.64	0.17	449.97	449.17	0.18
	3	786.86	785.17	0.22	826.30	824.34	0.24	660.47	659.15	0.20	725.65	724.24	0.19
	4	1111.70	1107.8	0.35	1187.91	1183.8	0.35	726.58	725.35	0.17	758.00	756.61	0.18
	5	1250.36	1247.2	0.25	1415.32	1411.2	0.29	856.61	854.56	0.24	905.05	902.86	0.24
	6	1407.52	1403.5	0.29	1518.82	1513.8	0.33	1001.26	996.97	0.43	1122.25	1115.2	0.63

ตารางที่ 5-7 ค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ CCSF

a/b		1						1.5					
b_1/b		0.5			0.75			0.5			0.75		
h_2/h_1	Mode	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
1.5	1	137.90	137.21	0.50	182.50	181.45	0.58	86.19	85.849	0.39	107.47	106.97	0.47
	2	309.12	307.6	0.49	392.65	390.39	0.58	183.61	182.9	0.39	244.28	243.03	0.52
	3	359.01	358	0.28	458.82	457.08	0.38	237.91	237.35	0.24	323.08	322.44	0.20
	4	628.86	623.27	0.90	740.34	737.18	0.43	337.40	336.37	0.31	434.83	431.81	0.70
	5	655.79	656.3	-0.08	755.91	753.15	0.37	380.21	378.84	0.36	466.44	465.84	0.13
	6	701.89	700.25	0.23	828.80	825.76	0.37	549.86	543.97	1.08	664.39	661.34	0.46
2.0	1	179.39	178.56	0.46	196.65	195.76	0.46	100.84	100.43	0.41	108.82	108.37	0.41
	2	386.56	385.02	0.40	429.98	428.19	0.42	246.57	245.75	0.33	270.85	269.89	0.36
	3	511.73	510.12	0.32	559.02	557.06	0.35	302.91	302.22	0.23	344.00	343.27	0.21
	4	768.80	764.91	0.51	836.35	832.49	0.46	470.94	468.87	0.44	518.47	514.45	0.78
	5	814.59	812.78	0.22	871.07	868.67	0.28	478.11	477.31	0.17	523.13	523.69	-0.11
	6	1030.12	1026.9	0.31	1107.52	1102.9	0.42	738.45	732.21	0.85	790.42	788.52	0.24

ตารางที่ 5-8 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างไอโซทรอปิกที่มีการจับยึดแบบ CCCC

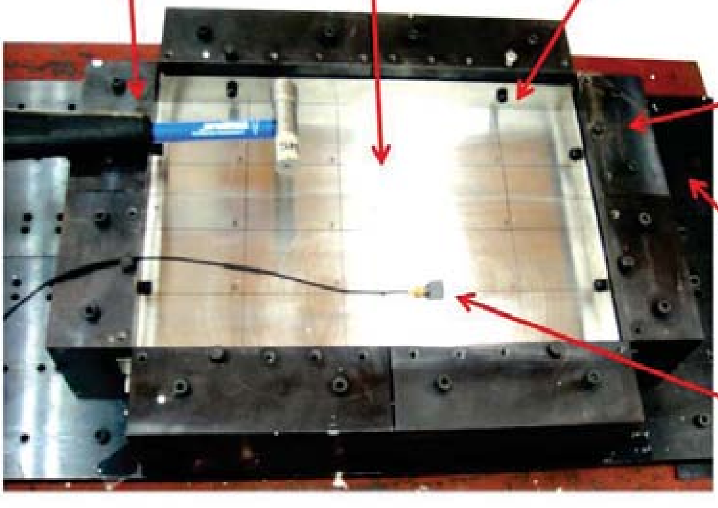
โหมดการสั่นสะเทือน	ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	โปรแกรมคอมพิวเตอร์	
		การพล็อตแบบคอนทัวร์	การพล็อตแบบพื้นผิว
1			
2			
3			
4			
5			
6			

5.1.3 การสอบเทียบกับผลการทดลอง

จากที่กล่าวมาข้างต้นแล้วว่า นอกจากการใช้วิธีวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแล้ว การทดสอบการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะก็เป็นอีกทางหนึ่งในการหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบาง การศึกษาการสั่นสะเทือนด้วยวิธีทดลองหรือ Modal Analysis คือการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง ได้แก่ ค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือน ค่าความหน่วงของระบบ และรูปร่างของการสั่นสะเทือนที่โหมดการสั่นสะเทือนต่าง ๆ ด้วยวิธีการทดลอง การทดลองเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางในงานวิจัยนี้ทำโดยใช้เครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต (oscilloscope) รับสัญญาณกระตุ้นจากค้อนเคาะสัญญาณ (impact hammer) และรับสัญญาณการสั่นสะเทือนจากตัววัดสัญญาณความเร่ง (accelerometer) แล้วสร้างฟังก์ชันการตอบสนองของความถี่ (Frequency response function, FRF) จากการแปลงรูปของฟูเรียร์ (Fourier transform) เพื่อเปลี่ยนข้อมูลบนโดเมนเวลาเป็นข้อมูลบนโดเมนความถี่ เนื่องจากการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนบนโดเมนความถี่มีความสะดวกและง่ายกว่าบนโดเมนเวลามาก ชุดทดสอบการสั่นสะเทือนของงานวิจัยนี้เป็นชุดทดลองเดียวกับชุดทดลองจากงานวิจัยเรื่องการออกแบบอุปกรณ์จับยึดของชุดทดสอบการสั่นสะเทือนให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด [25] ซึ่งได้ออกแบบ สร้าง และสอบทวนความถูกต้องของชุดทดลองไว้เรียบร้อยแล้ว

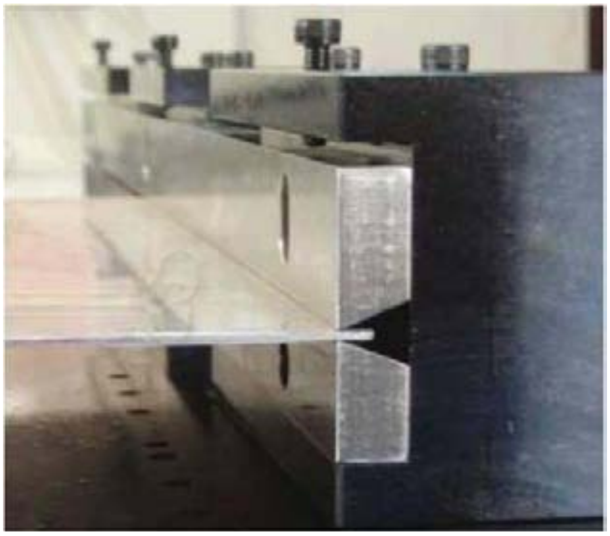
ภาพที่ 5.2 (a) แสดงชุดทดลอง เครื่องมือและอุปกรณ์การวัดทั้งหมดขณะทำการทดลองการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะ แผ่นทดลองถูกจับยึดด้วยอุปกรณ์จับยึดตามเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษา โดยชิ้นงานทดสอบและอุปกรณ์วัดสัญญาณต่าง ๆ แสดงในภาพที่ 5.2 (b) อุปกรณ์จับยึดชิ้นงานจะติดอยู่กับชิ้นส่วนโครงสร้างที่ยึดแน่นบนแผ่นรองกำหนดตำแหน่ง อุปกรณ์วัดและอุปกรณ์การทดลองประกอบด้วย ตัววัดสัญญาณความเร่ง อุปกรณ์กำเนิดกำลังไฟฟ้า ค้อนเคาะสัญญาณ และเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต อุปกรณ์จับยึดสำหรับเงื่อนไขการจับยึดแบบง่ายจะมีลักษณะคล้ายมีดปลายแหลม แรงบิดที่ใช้ขันสกรูเพื่อให้อุปกรณ์จับยึดกดชิ้นงานจะต้องมีค่าน้อยที่สุด เพื่อให้ชิ้นงานไม่มีการเคลื่อนที่นอกแนวระนาบ (แกน z) แต่สามารถหมุนรอบแนวการจับยึด อุปกรณ์จับยึดสำหรับเงื่อนไขการจับยึดแบบยึดแน่นมีลักษณะเป็นแผ่นเรียบตรงและให้แรงบิดกดอุปกรณ์จับยึดมีค่ามากกว่า 3 N-m เพื่อให้ชิ้นงานไม่มีการเคลื่อนที่นอกแนวระนาบ (แกน z) และไม่หมุนรอบแนวการจับยึด การติดตั้งอุปกรณ์จับยึดต้องวางอุปกรณ์จับยึดบนชิ้นงานโดยชิ้นงานจะต้องไม่ดัดหรืองอ ภาพที่ 5.3 แสดงตัวอย่างการติดตั้งอุปกรณ์จับยึดแบบง่ายที่ใช้ในการทดลองกับโครงสร้างยึดอุปกรณ์จับยึด

(a)



(b)

ภาพที่ 5.2 ชุดทดสอบและอุปกรณ์การทดลองการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการเคาะ



ภาพที่ 5.3 อุปกรณ์จับยึดที่ใช้ในชุดทดลอง

ชิ้นทดสอบที่เลือกมาเป็นตัวอย่างในการทดลองทำจากสเตนเลส 304 โดยชิ้นงานชิ้นที่ 1 มีขนาดและคุณสมบัติของวัสดุดังนี้ $E_1=E_2=$ 193 GPa, $\nu_{12}=$ 0.27, $G_{12}=\frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$, ρ = 7,860 kg/m^3 ขนาดต่าง ๆ ของชิ้นงานทดสอบเป็นดังนี้ a = 300 mm, b = 200 mm, h_1 = 1.5 mm, h_2 = 3 mm, อัตราส่วน b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.5 สำหรับชิ้นงานชิ้นที่ 2 มีคุณสมบัติของวัสดุเหมือนชิ้นงานชิ้นที่ 1 ทุกประการ สิ่งที่แตกต่างคืออัตราส่วน b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.625 ค่าความถี่ธรรมชาติ 5 โหมดแรกที่ได้จากการทดลองของชิ้นงานที่ 1 แสดงในตารางที่ 5-9 โดยเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขต 3 แบบ คือ SSSS, SCSF และ CFCF ดังแสดงในช่องเงื่อนไขขอบเขต ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองแสดงในช่องผลการทดลอง สำหรับช่อง Kantorovich แสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ช่องความคลาดเคลื่อนแสดงความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองกับค่าที่ได้จากโปรแกรม ซึ่งคำนวณจากสมการ 5-2 โดยให้ ω_{ref} คือค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลอง

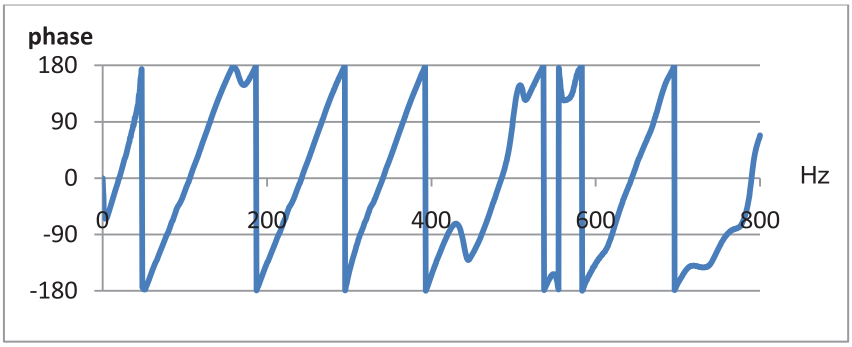
แรงดลซึ่งเป็นตัวสร้างสัญญาณสำหรับกระตุ้นชิ้นงานถูกควบคุมโดยค่าสเปกตรัมของสัญญาณ การทดลองจะควบคุมให้แต่ละครั้งของการเคาะมีน้ำหนักใกล้เคียงกัน สัญญาณสเปกตรัมนี้จะต้องมีขนาดของสัญญาณลดลงเมื่อความถี่เพิ่มขึ้นและไม่สั่นเป็นคลื่น

เพื่อให้ได้ผลการทดลองที่ถูกต้องและเชื่อถือได้จะอาศัยการทดลองซ้ำ โดยใช้ตัววัดสัญญาณความเร่งติดบนชิ้นงานที่ตำแหน่งต่างกันอย่างน้อย 2 ตำแหน่งเพื่อให้สามารถเห็นโหมดการสั่นสะเทือนชัดเจนครบทุกโหมดที่ต้องการ แต่ละตำแหน่งที่ติดตัววัดสัญญาณความเร่งจะใช้ค้อน

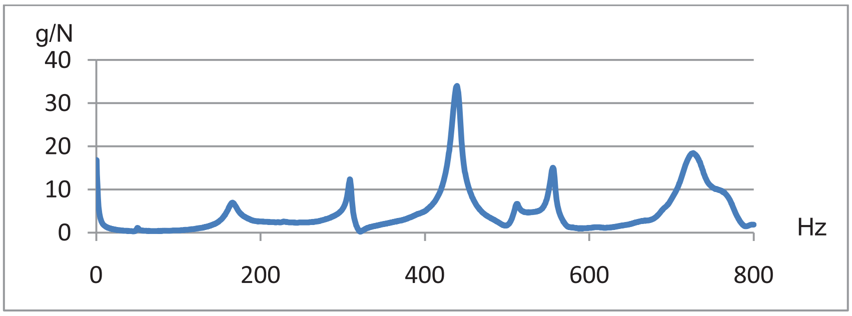
เคาะสัญญาณเคาะกระตุ้นที่ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างแผ่นบางอย่างน้อย 4 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งเคาะซ้ำตำแหน่งเดิม 1-3 ครั้ง ซึ่งจะตั้งค่าให้เครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตคำนวณค่าเฉลี่ยแล้วบันทึกผลการทดลองเป็นค่าความถี่ธรรมชาติเพียงค่าเดียว ดังนั้นแต่ละเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ จะได้ค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดหนึ่ง ๆ อย่างน้อย 4 ค่า ในการเฉลี่ยค่าความถี่ธรรมชาติที่ถูกต้องพิจารณาจากค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้อย่างน้อย 4 ค่านี้ หากค่าที่ได้มีค่าเท่ากันอย่างน้อย 3 ค่าจาก 4 ค่า จะถือว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้คือผลการทดลองของโหมดนั้น ๆ แต่หากมีค่าที่เท่ากันน้อยกว่า 3 ค่า จะทำการทดลองเพิ่มเติมเพื่อให้ได้ผลการทดลองที่เชื่อถือได้

นอกจากการทดลองจะให้ค่าความถี่ธรรมชาติแล้วยังสามารถแสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแต่ละค่าความถี่ธรรมชาติได้อีกด้วย รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนพิจารณาได้จากเครื่องหมายบวก/ลบของจำนวนจินตภาพของกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง FRF และความถี่ ในการทดลองจะใช้ค้อนเคาะสัญญาณสร้างแรงกระตุ้นแบบแรงดล (impact input) ที่ตำแหน่งเดิมของชิ้นงานแล้วเปลี่ยนตำแหน่งตัววัดสัญญาณความเร่งไปตามจุดวัด (node) บนชิ้นงาน จุดวัดทั้งหมด 7 จุดบนชิ้นงานถูกเลือกเพื่อให้ครอบคลุมรูปแบบการเคลื่อนที่ทุกโหมดการสั่นสะเทือนที่ต้องการศึกษา โดยจะหลีกเลี่ยงตำแหน่งที่มีการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนเท่ากับศูนย์ (แนว nodal line) ค่าบวกและลบของส่วนจินตภาพของ FRF ที่ตำแหน่งค่าความถี่ธรรมชาตินั้นแสดงระยะกระจัดของชิ้นงานจากตำแหน่งอ้างอิง

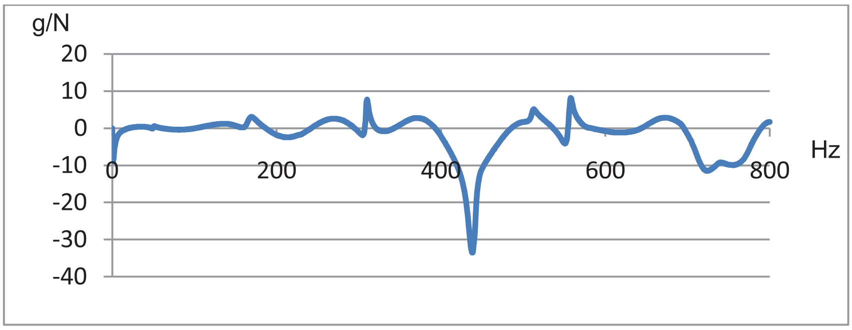
กราฟที่ได้จากเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตสามารถบันทึกเก็บไว้ เพื่อเรียกมาดูในภายหลังหรือนำมาวิเคราะห์เพิ่มเติมได้ ตัวอย่างกราฟจากการทดลองแสดงในภาพที่ 5.4 โดย ภาพ (a) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเฟสการสั่นของ FRF และความถี่ ภาพ (b) แสดงกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดแอมปลิจูดการสั่นของ FRF และความถี่ จุดยอด (peak) ของกราฟนี้คือค่าความถี่ธรรมชาติเรียงตามลำดับจากโหมดต่ำไปโหมดสูง ภาพ (c) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจินตภาพการสั่นของ FRF และความถี่ จุดยอดที่ตำแหน่งความถี่ธรรมชาติสามารถนำไปวิเคราะห์หารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ และภาพ (d) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของแรงกระตุ้นของค้อนเคาะสัญญาณและความถี่เพื่อควบคุมคุณภาพของแรงกระตุ้นจากค้อนเคาะสัญญาณ



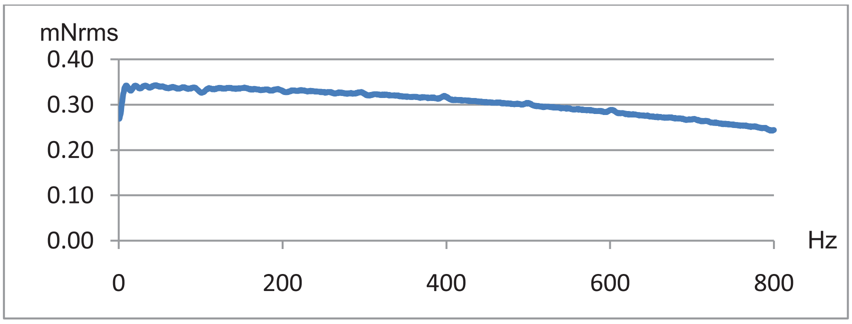
(a)



(b)



(c)



(d)

ภาพที่ 5.4 กราฟที่อ่านได้จากเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต

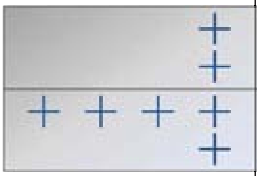
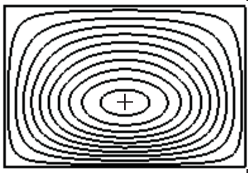
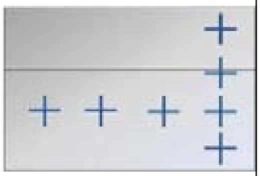
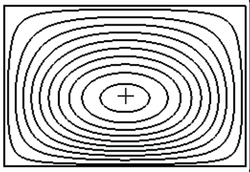
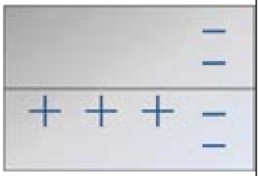
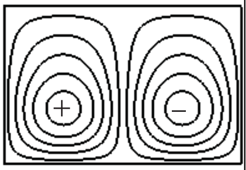
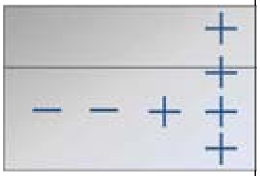
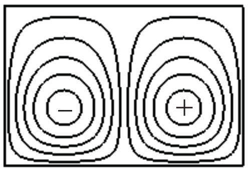
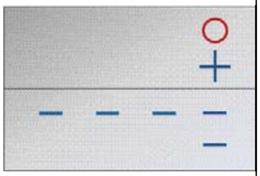
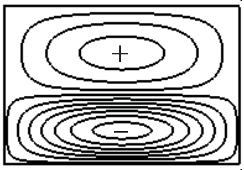
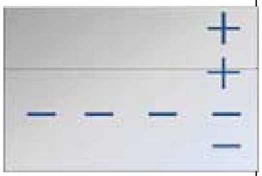
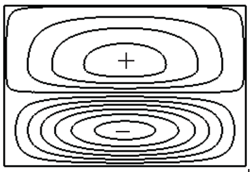
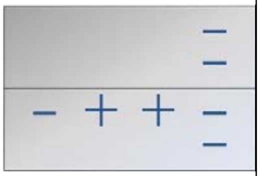
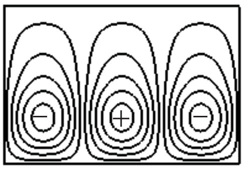
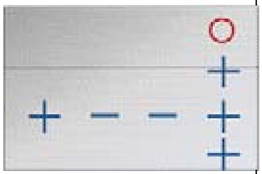
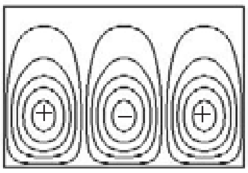
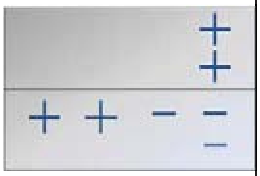
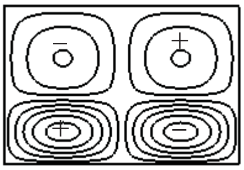
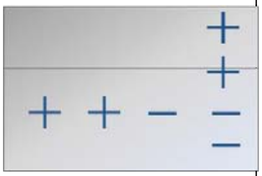
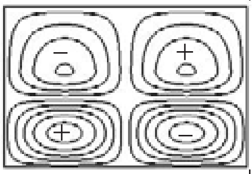
ตารางที่ 5-9 ความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ตจากการทดลองของชิ้นงานชิ้นที่ 1

เงื่อนไขขอบเขต		mode				
		1	2	3	4	5
SSSS	Kantorovich	172.84	361.27	561.41	630.60	708.73
	ผลการทดลอง	166.2	336.75	564.5	624.5	720.25
	ความคลาดเคลื่อน (%)	4.00	7.28	-0.55	0.98	-1.60
SCSF	Kantorovich	99.40	306.93	323.48	560.40	640.70
	ผลการทดลอง	93.5	306.25	319.5	506	616.67
	ความคลาดเคลื่อน (%)	6.31	0.22	1.25	10.75	3.90
CFCF	Kantorovich	128.55	195.97	301.65	378.14	480.08
	ผลการทดลอง	135.33	189	314.75	387.25	467.5
	ความคลาดเคลื่อน (%)	-5.01	3.69	-4.16	-2.35	2.69

จากตารางที่ 5-9 พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลองมีค่าคลาดเคลื่อนจากค่าที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เฉลี่ยประมาณ 3.13 เปอร์เซ็นต์ ยกเว้นค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดที่ 4 ของชิ้นงานทดสอบที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยสูงถึง 10.75 เปอร์เซ็นต์ ความคลาดเคลื่อนของความถี่ธรรมชาติมีค่าสูงน่าจะเกิดเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของอุปกรณ์จับยึดชิ้นงานที่ใช้ในชุดทดสอบการสั่นสะเทือน น้ำหนักของเครื่องวัดสัญญาณความเร่งและความคลาดเคลื่อนในการเก็บค่าของเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตร

ตารางที่ 5-10 เปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 5 โหมดแรก ของชิ้นงานที่ 1 และชิ้นงานที่ 2 โดยเปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการทดลองกับรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยมีเงื่อนไขการจับยึดแบบ SSSS เหมือนกันทั้ง 2 ชิ้นงาน ตัวเลขในวงเล็บคือค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ต

ตารางที่ 5-10 เปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากการทดลองของชิ้นงานที่ 1 และชิ้นงานที่ 2

โหมด	ชิ้นงานที่ 1		ชิ้นงานที่ 2	
	ผลการทดลอง	ผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์	ผลการทดลอง	ผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์
1	 (166.2)	 (172.84)	 (148.38)	 (168.58)
2	 (336.75)	 (361.27)	 (289.88)	 (335.26)
3	 (564.5)	 (561.41)	 (451.13)	 (475.18)
4	 (624.5)	 (630.6)	 (557.17)	 (560.34)
5	 (720.25)	 (708.73)	 (615.33)	 (629.75)

ในตารางที่ 5-10 ตำแหน่งของสัญลักษณ์บวก/ลบที่แสดงบนชิ้นงานในช่องผลการทดลองแสดงคือตำแหน่งที่ติดตัววัดสัญญาณความเร่ง สัญลักษณ์เครื่องหมายบวกและลบคือเครื่องหมายหน้าจำนวนจินตภาพจากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง FRF และความถี่ เครื่องหมายบวกหรือลบเหมือนกันแสดงว่าการเคลื่อนที่ในแนวนอกระนาบของชิ้นทดสอบที่ตำแหน่งทั้งสองมีทิศเดียวกัน ตำแหน่งที่แสดงด้วยสัญลักษณ์วงกลมคือตำแหน่งที่ไม่สามารถอ่านผลการทดลองได้ เนื่องจากตำแหน่งที่ติดตัววัดสัญญาณความเร่งมีการสั่นสะเทือนน้อย เมื่อเปรียบเทียบผลการทดลองกับผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์พบว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากการทดลองสอดคล้องกับรูปร่างที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทุกโหมดการสั่นสะเทือนที่ศึกษา รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนได้ละเอียดกว่ารูปร่างโหมดที่ได้จากการทดลอง รูปร่างโหมดที่ได้จากการทดลองโดยวิธีการเคาะเป็นเพียงแนวโน้มเท่านั้นและยากต่อการแปลความหมายจากข้อมูล หากต้องการลักษณะการสั่นสะเทือนที่ละเอียดขึ้นจะต้องใช้เวลาในการทดลองมากขึ้นหรือใช้เทคโนโลยีในการทดลองแบบอื่น

5.2 การสอบทวนความถูกต้องของโครงสร้างแผ่นบางทำจากวัสดุคอมโพสิท

การตรวจสอบโปรแกรมในส่วนแรกพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิกได้อย่างแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หัวข้อนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่ทำจากวัสดุคอมโพสิท การสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมทำโดยนำผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Chen และคณะ [6] และผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

5.2.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Chen และคณะ [6]

เนื่องจากในปัจจุบันยังไม่มีงานวิจัยที่ศึกษาปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่ทำจากวัสดุคอมโพสิท ดังนั้นการศึกษาในหัวข้อนี้จึงนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นมาแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่น ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกนำไปเปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากศึกษาของ Chen และคณะ ซึ่งใช้ระเบียบวิธี Element free Galerkin Method ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือน การสอบทวนในส่วนนี้ใช้แผ่นคอมโพสิททที่มีคุณสมบัติของวัสดุดังนี้

$$E_1/E_2 = 2.45 \quad G_{12}/E_2 = 0.48 \quad \nu_{12} = 0.27$$

$$\rho = 8{,}000 \text{ kg/m}^3 \quad a{=}b{=} 10 \text{ m} \quad h = 0.06 \text{ m}$$

ค่าความถี่ธรรมชาติของการศึกษาในส่วนนี้แสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย ซึ่งนิยามจาก

$$\beta = \left(\frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0}\right)^{1/2} \text{ โดยที่ } D_0 = \frac{E_1 h^3}{12\left(1\text{-}\nu_{12}\nu_{21}\right)} \qquad (5\text{-}3)$$

ผลการเปรียบเทียบแสดงในตารางที่ 5-11 ค่าความถี่ธรรมชาติ 8 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วยที่คำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงในช่อง Kantorovich ผลการศึกษาของ Chen แสดงในช่อง Chen ช่องความคลาดเคลื่อนแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของค่าในช่อง Kantorovich กับค่าในช่อง Chen คำนวณตามสมการที่ 5-2 โดย ω_{ref} คือความถี่ธรรมชาติจากผลการศึกษาของ Chen กำหนดให้ชิ้นงานที่ศึกษามีลำดับการวางตัวของเส้นใยคือ $[0]_3$ และ [0/90/0] ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต 4 แบบ คือ SSSS, CCCC, SCSC และ SSCC

จากตารางที่ 5-11 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่าน้อยกว่าผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบเกือบทุกโหมดการสั่นสะเทือน ยกเว้นโหมดการสั่นสะเทือนที่ 5 ของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ [0/90/0] และชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSCC ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3$ ค่าความถี่ธรรมชาติที่น้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Chen แสดงว่าคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าลู่เข้าสู่ค่าผลเฉลยแม่นตรงมากกว่า [11] ความคลาดเคลื่อนกรณีเงื่อนไขการจับยึดแบบ SSSS มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดคือมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ -0.35 เปอร์เซ็นต์ ในขณะที่เงื่อนไขขอบเขตแบบ SSCC และ CCCC มีความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น โดยที่เงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSC มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด คือประมาณ -1.21 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนี้ผลการศึกษาส่วนนี้ยังแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาแผ่นลามิเนตแบบสมมาตรที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ได้ โดยชิ้นงานที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0]_3$ และ [0/90/0] มีค่าความคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกัน จึงอาจสรุปได้ว่าความแม่นยำของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไม่ขึ้นกับการวางตัวของเส้นใยไฟเบอร์

ตารางที่ 5-11 ความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (β) จากผลการศึกษาของ Chen กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

การเรียงตัวของเส้นใย		$[0]_3$			[0/90/0]		
เงื่อนไขขอบเขต	โหมด	Kantorovich	Chen	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kantorovich	Chen	ความคลาดเคลื่อน (%)
SSSS	1	15.17	15.18	-0.07	15.17	15.18	-0.07
	2	33.25	33.34	-0.27	33.73	33.82	-0.27
	3	44.39	44.51	-0.27	44.02	44.14	-0.27
	4	60.68	60.79	-0.18	60.68	60.79	-0.18
	5	64.46	64.8	-0.52	65.77	66.12	-0.53
	6	90.15	90.39	-0.27	90.91	91.16	-0.27
	7	93.63	94.23	-0.64	92.71	93.31	-0.64
	8	108.46	109.4	-0.86	110.94	108.8	1.97
CCCC	1	29.09	29.27	-0.61	29.09	29.27	-0.61
	2	50.78	51.21	-0.84	51.49	51.93	-0.85
	3	67.26	67.94	-1.00	66.73	67.4	-0.99
	4	85.60	86.25	-0.75	85.60	86.25	-0.75
	5	87.07	87.97	-1.02	88.83	89.76	-1.04
	6	118.42	119.3	-0.74	119.42	120.3	-0.73
	7	126.11	127.6	-1.17	124.89	126.4	-1.19
	8	136.77	138.5	-1.25	139.89	141.6	-1.21

ตารางที่ 5-11 (ต่อ) ความถี่ธรรมชาติในรูปไร้หน่วย (β) จากผลการศึกษาของ Chen กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

การเรียงตัวของเส้นใย		$[0]_3$			[0/90/0]		
เงื่อนไขขอบเขต	โหมด	Kantorovich	Chen	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kantorovich	Chen	ความคลาดเคลื่อน (%)
SCSC	1	20.40	20.55	-0.73	20.62	20.77	-0.72
	2	45.63	46.41	-1.68	46.51	46.92	-0.87
	3	46.99	47.18	-0.40	46.75	47.32	-1.20
	4	69.41	70.52	-1.57	69.78	70.9	-1.58
	5	83.63	85.02	-1.63	85.52	86.92	-1.61
	6	95.24	96.06	-0.85	94.40	95.22	-0.86
	7	106.00	107.5	-1.40	107.34	108.8	-1.34
	8	115.03	116.7	-1.43	114.66	116.3	-1.41
SSCC	1	21.40	21.62	-1.02	21.40	21.62	-1.02
	2	41.42	41.64	-0.53	42.01	42.24	-0.54
	3	55.17	55.66	-0.88	54.73	55.21	-0.87
	4	72.47	72.81	-0.47	72.47	72.82	-0.48
	5	75.26	75.92	-0.87	76.79	77.47	-0.88
	6	103.65	104.3	-0.62	104.53	105.2	-0.64
	7	109.23	110.5	-1.15	108.17	109.4	-1.12
	8	125.18	123.7	1.20	124.45	125.4	-0.76

5.2.2 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

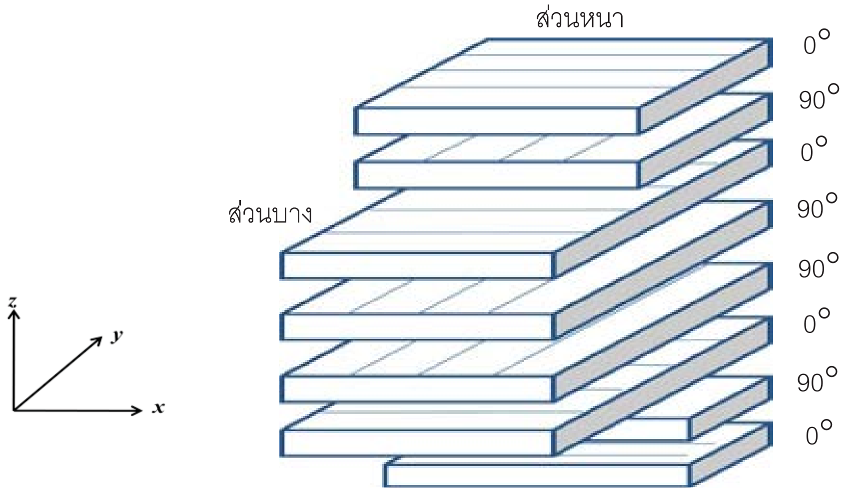
จากการศึกษาข้างต้นพบว่าสามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทที่มีความหนาเท่ากันได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำแล้ว หัวข้อนี้จะนำโปรแกรมไปศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น การยืนยันความถูกต้องทำได้โดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จาก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วัสดุคอมโพสิทที่นำมาศึกษาคือกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 ซึ่งมีคุณสมบัติตามเอกสารอ้างอิง [24] คือ

$$E_1 = 131 \text{ GPa} \quad E_2 = 10.8 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.24$$

$$G_{12} = 5.65 \text{ GPa} \quad \rho = 1{,}540 \text{ kg/m}^3 \quad t = 0.127 \text{ mm}$$

ตารางที่ 5-12 แสดงผลการเปรียบเทียบระหว่างค่าความถี่ธรรมชาติ 5 โหมดแรกของการสั่นสะเทือน ค่าความถี่ธรรมชาติที่คำนวณได้จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นแสดงในช่อง Kantorovich ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในช่อง FEM และคิดเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนตามสมการที่ 5-2 โดย ω_{ref} คือความถี่ธรรมชาติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วแสดงในช่องความคลาดเคลื่อน กำหนดการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง 0 ถึง b_1 คือ $[0/90]_s$ และการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง b_1 ถึง b คือ $[0/90]_{2s}$ ดังภาพที่ 5.5 ความยาวด้าน b มีค่าเท่ากับ 300 mm อัตราส่วน b_1/b มีค่า 0.5 อัตราส่วนความยาวด้าน a/b มีค่าเท่ากับ 0.5, 1 และ 1.5 โครงสร้างมีการจับยึดด้วยเงื่อนไขขอบเขตทั้งหมด 4 แบบ คือ SSSS, CCCC, SCSF และ SSCC ตามลำดับ จากตารางที่ 5-12 พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติมีความคลาดเคลื่อนน้อยมากในทุกเงื่อนไขขอบเขต



ภาพที่ 5.5 ชิ้นงานคอมโพสิทที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

ตารางที่ 5-12 ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคอมโพสิทมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_s$ และ $[0/90]_{2s}$

เงื่อนไขขอบเขต		SSSS			CCCC		
a/b	โหมด	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.5	1	111.55	111.53	0.02	224.84	225.04	-0.09
	2	159.38	159.36	0.01	302.48	303.04	-0.18
	3	219.22	219.15	0.03	381.16	381.84	-0.18
	4	301.63	301.63	0.00	452.03	453.10	-0.24
	5	372.24	372.32	-0.02	572.66	573.55	-0.16
1	1	38.17	38.16	0.01	80.19	80.18	0.01
	2	79.70	79.66	0.05	128.88	128.90	-0.01
	3	111.55	111.55	0.00	167.86	167.93	-0.04
	4	159.38	159.38	0.00	226.27	226.29	-0.01
	5	160.91	160.89	0.01	235.80	235.89	-0.04
1.5	1	22.12	22.11	0.01	50.65	50.65	0.01
	2	60.01	60.00	0.01	93.40	93.40	0.00
	3	72.32	72.32	0.00	110.25	110.25	0.00
	4	95.15	95.14	0.00	141.18	141.20	-0.01
	5	111.55	111.55	0.00	151.76	151.80	-0.03

ตารางที่ 5-12 (ต่อ) ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคอมโพสิทมีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_s$ และ $[0/90]_{2s}$

เงื่อนไขขอบเขต		SCSF			SSCC		
a/b	โหมด	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.5	1	122.23	122.23	0.00	157.44	157.45	-0.01
	2	160.95	160.95	0.00	221.27	221.29	-0.01
	3	181.98	181.96	0.01	286.73	286.85	-0.04
	4	271.07	271.06	0.01	371.10	371.32	-0.06
	5	368.42	368.47	-0.01	464.55	464.74	-0.04
1	1	39.12	39.13	0.00	56.17	56.16	0.02
	2	53.12	53.11	0.02	98.83	98.81	0.01
	3	112.99	112.98	0.00	133.15	133.15	0.00
	4	122.23	122.24	-0.01	191.38	191.15	0.12
	5	160.95	160.96	0.00	196.04	196.26	-0.11
1.5	1	18.59	18.59	0.00	37.57	37.57	0.01
	2	36.81	36.81	0.01	72.39	72.38	0.02
	3	65.60	65.60	0.00	85.70	85.70	0.00
	4	78.50	78.50	0.01	114.46	114.44	0.02
	5	106.62	106.62	0.00	125.66	125.68	-0.01

ในหัวข้อนี้ยังศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/b_1 ต่อค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบาง โดยในการศึกษากำหนดให้อัตราส่วน b/b_1 มีค่า 1.5, 2 และ 3 ในขณะที่สมบัติต่าง ๆ ของโครงสร้างยังเหมือนเดิม คือ ชิ้นงานทำจากวัสดุกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 มีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสี่ด้าน มีอัตราส่วน a/b คือ 1 ลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยคือ $[0/90]_s$ ที่ช่วงความสูง 0 ถึง b_1 และ $[0/90]_{2s}$ ที่ช่วงความสูง b_1 ถึง b ผลการศึกษาแสดงในตารางที่ 5-13 โดยพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 5 โหมดแรกที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แสดงในช่อง

Kantorovich และ FEM ตามลำดับ คำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนตามสมการที่ 5-2 แล้วแสดงในช่อง “ความคลาดเคลื่อน” โดย ω_{ref} คือความถี่ธรรมชาติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากนี้ยังศึกษารูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือน รูปร่างการสั่นสะเทือนจะแสดงด้วยสัญลักษณ์ $[m,n]$ โดยที่ m และ n คือ จำนวนคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูก (half-sine wave) ซึ่งแสดงรูปร่างโหมดของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

ตารางที่ 5-13 ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่มีอัตราส่วน b/b_1 ต่างกัน

b/b_1	โหมด	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
1.5	1	33.70	33.69	0.02	[1,1]
	2	63.76	63.76	0.01	[1,2]
	3	100.12	100.12	0.00	[2,1]
	4	134.91	134.91	0.00	[1,3]
	5	138.16	138.15	0.01	[2,2]
2	1	38.17	38.16	0.02	[1,1]
	2	79.70	79.66	0.05	[1,2]
	3	111.55	111.55	0.00	[2,1]
	4	159.38	159.38	0.00	[2,2]
	5	160.91	160.89	0.01	[1,3]
3	1	42.71	42.71	0.01	[1,1]
	2	95.79	95.77	0.02	[1,2]
	3	136.21	136.21	0.00	[2,1]
	4	178.61	178.60	0.01	[2,2]
	5	181.25	181.25	0.00	[1,3]

จากผลการศึกษาในตารางที่ 5-13 พบว่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าน้อยมาก แสดงว่าอัตราส่วน b/b_1 ไม่ส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติ แต่ผลการศึกษาในส่วนนี้แสดงให้เห็นว่าอัตราส่วน b/b_1 ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างของแต่ละโหมดการ

สั่นสะเทือน อัตราส่วน b/b_1 แสดงถึงอัตราส่วนความยาวของโครงสร้างที่ความสูงต่าง ๆ กัน โครงสร้างจะมีส่วนที่มีความหนามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอัตราส่วนนี้ เช่น เมื่ออัตราส่วน b/b_1 มีค่าเท่ากับ 3 ชิ้นงานจะมีช่วง 0 ถึง b_1 อยู่เพียง 1 ใน 3 ของความยาวด้าน b จากภาพที่ 5.1 จะเห็นว่าชิ้นงานจะมีส่วนที่มีความหนาน้อยอยู่เพียง 1 ใน 3 ของความยาว ชิ้นงานจึงมีค่าความถี่ธรรมชาติสูงกว่าชิ้นงานที่อัตราส่วน b/b_1 มีค่า 2 และ 1.5 สำหรับรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่เปลี่ยนไปจะขึ้นกับลักษณะทางกายภาพของชิ้นงาน บริเวณชิ้นงานที่บางจะมีการสั่นสะเทือนที่มีแอมพลิจูดสูงกว่าเนื่องจากมีค่าโมดูลัสความแข็งเกร็ง (modulus of rigidity) ต่ำกว่า

นอกจากนี้ยังได้ศึกษาผลของการวางตัวของเส้นใยที่อาจมีต่อความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสี่ด้าน อัตราส่วน a/b คือ 1 และ b/b_1 คือ 2 แต่เปลี่ยนให้การวางตัวของเส้นใยช่วง 0 ถึง b_1 ความหนาเท่ากับ h_1 และช่วง b_1 ถึง b ความหนาเท่ากับ h_2 มีค่าต่างกันดังแสดงในตารางที่ 5-14 จากค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แสดงในช่อง Kantorovich และ FEM ตามลำดับ เมื่อนำไปคำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนตามสมการ 5-2 แสดงในช่อง “ความคลาดเคลื่อน” พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นยังให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำอยู่เมื่อเปรียบเทียบคำตอบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากค่าความถี่ธรรมชาติแล้ว รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ก็ถูกต้องแม่นยำเช่นกัน

ตารางที่ 5-14 ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่มีการวางตัวของเส้นใยเปลี่ยนไป

กรณีศึกษา	โหมด	Kantorovich	FEM	ความคลาดเคลื่อน (%)	รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน
[0/90]2s และ [0/90]s	1	38.17	38.16	0.01	[1,1]
	2	79.70	79.66	0.05	[1,2]
	3	111.55	111.55	0.00	[2,1]
	4	159.38	159.38	0.00	[2,2]
	5	160.91	160.89	0.01	[1,3]
[90/0/ $\overline{90}$]s และ [0/90/0]	1	21.35	21.34	0.02	[1,1]
	2	50.95	50.95	0.01	[1,2]
	3	70.08	70.08	0.00	[2,1]
	4	89.87	89.88	0.00	[2,2]
	5	115.21	115.21	0.00	[1,3]
[(90/0)2/ $\overline{90}$]s และ [90/0/ $\overline{90}$]s	1	44.37	44.37	0.01	[1,1]
	2	109.32	109.31	0.01	[2,1]
	3	149.36	149.35	0.01	[1,2]
	4	190.60	190.58	0.01	[2,2]
	5	195.32	195.31	0.01	[3,1]

สรุป

จากการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช พบว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความน่าเชื่อถือเนื่องจากให้ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ใกล้เคียงกับผลการศึกษาในอดีตและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการแก้ปัญหาได้ใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ประกอบด้วยฟังก์ชันพจน์เดียวซึ่งเพียงพอต่อการแก้ปัญหาโครงสร้างที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิกและวัสดุคอมโพสิทชนิด cross-ply ที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ 0 องศาและ 90 องศาเท่านั้น ดังนั้นเมื่อได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่มีความน่าเชื่อถือแล้ว ในขั้นตอนต่อไปจะนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์เพื่อศึกษาพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางมีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นที่มีความซับซ้อนของปัญหามากขึ้นต่อไป

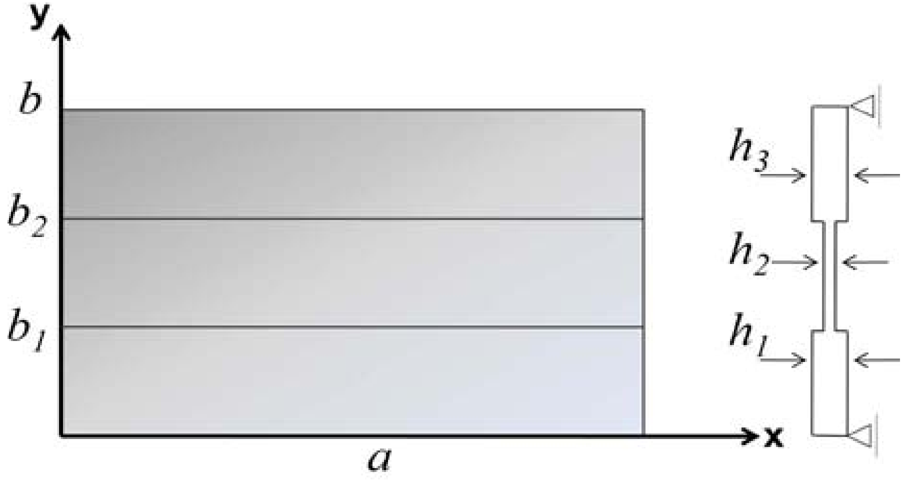
บทที่ 6
การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับโครงสร้างที่มีจำนวนขั้นมากขึ้น

ในบทที่ 5 ได้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1 ขั้น ชิ้นงานที่นำมาศึกษามีเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กันและทำจากวัสดุชนิดไอโซทรอปิกและคอมโพสิท ผลการศึกษาพบว่าสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ ดังนั้นในบทนี้จะได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาประยุกต์เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนที่มีความซับซ้อนมากขึ้น หัวข้อสำคัญที่ต้องการศึกษาในบทนี้คือการประยุกต์แนวคิดที่นำเสนอในการแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น โดยในขั้นตอนแรกจะสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ปรับเปลี่ยนแล้ว โดยนำไปแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของวัสดุไอโซทรอปิกแล้วเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Xiang [2] ขั้นที่สองจะขยายการศึกษาถึงลักษณะโครงสร้างแบบต่าง ๆ ที่มีความหนาเปลี่ยนไปจำนวน 2 ขั้น ท้ายที่สุดศึกษาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างที่ทำจากวัสดุคอมโพสิท โดยศึกษาตำแหน่งและทิศทางการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือน

6.1 โครงสร้างแผ่นบางไอโซทรอปิกที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น

การศึกษานี้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ได้มาจากการประยุกต์โปรแกรมที่ใช้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปจำนวน 1 ขั้น วิธีการตรวจสอบทำโดยหาค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เปรียบเทียบกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการศึกษาในอดีตของ Xiang โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้นคือชิ้นงานที่มีความกว้าง a และความยาว b โดยด้านยาวจะถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วนตามช่วงความยาวคือ ช่วง 0 ถึง b_1 มีความสูง h_1 ช่วงความยาว b_1 ถึง b_2 มีความสูง h_2 ช่วงความยาว b_2 ถึง b มีความสูง h_3 ดังแสดงในภาพที่ 6.1 การศึกษานี้กำหนดให้คุณสมบัติของวัสดุเป็นดังนี้ E_1 = E_2 = 68.9 GPa, ν_{12} = 0.33 $G_{12} = \dfrac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$ และ ρ = 2,544.34 kg/m^3 กำหนดให้อัตราส่วนของ h_2/h_1 มีค่าเท่ากับ 1.5 อัตราส่วนของ h_3/h_1 มีค่าเท่ากับ 1 และ 2 อัตราส่วนของ a/b มีค่าเท่ากับ 1 และ 2 โดยที่

a มีค่าเท่ากับ 300 mm ระยะระหว่าง 0 ถึง b_1 มีค่าเท่ากับระยะห่างระหว่าง b_1ถึง b_2 และเท่ากับระยะทางระหว่าง b_2 ถึง b ค่าความถี่ธรรมชาติแสดงในรูปพารามิเตอร์ไร้หน่วย $\Phi = \frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho h_1}{D_{11}^{1}}}$ ผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติ 6 โหมดแรกของการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS, SCSC, SFSF และ SCSF แสดงในตารางที่ 6-1 ผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นแสดงในช่อง Kantorovich ผลการศึกษาของ Xiang แสดงไว้ในช่อง Xiang สำหรับเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนคำนวณจากสมการที่ 5-2 โดยให้ ω_{ref} คือค่าความถี่ธรรมชาติจากผลการศึกษาของ Xiang



ภาพที่ 6.1 โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น

ตารางที่ 6-1 ค่าความถี่ธรรมชาติ (Φ) ของโครงสร้างมีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น

a/b	h_3/h_1	โหมด	SSSS			SCSC		
			Kanto-rovich	Xiang	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	Xiang	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	1	1	2.269	2.263	0.265	3.225	3.217	0.249
		2	5.568	5.585	-0.304	6.733	6.727	0.089
		3	6.099	6.101	-0.033	7.694	7.708	-0.182
		4	9.300	9.339	-0.418	11.112	11.152	-0.359
		5	11.834	11.830	0.034	13.086	13.097	-0.084
		6	12.465	12.484	-0.152	15.389	15.392	-0.019
	2	1	2.874	2.884	-0.347	4.219	4.226	-0.166
		2	7.081	7.103	-0.310	7.910	7.929	-0.240
		3	7.097	7.105	-0.113	9.852	9.863	-0.112
		4	11.693	11.712	-0.162	13.838	13.867	-0.209
		5	13.495	13.534	-0.288	14.333	14.368	-0.244
		6	14.576	14.571	0.034	19.030	19.025	0.026
2	1	1	1.525	1.525	0.000	1.683	1.682	0.059
		2	2.325	2.335	-0.428	2.778	2.788	-0.359
		3	3.801	3.799	0.053	4.619	4.620	-0.022
		4	5.241	5.252	-0.209	5.443	5.453	-0.183
		5	5.623	5.624	-0.018	6.023	6.042	-0.314
		6	5.632	5.647	-0.266	6.755	6.753	0.030

ตารางที่ 6-1 (ต่อ) ค่าความถี่ธรรมชาติ (Φ) ของโครงสร้างมีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้น

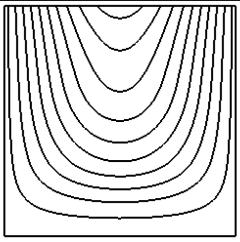
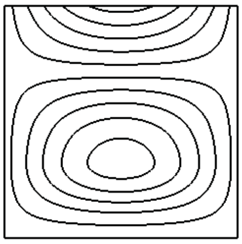
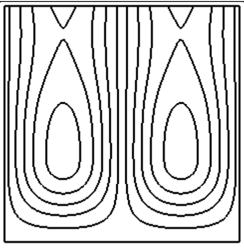
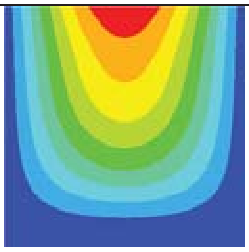
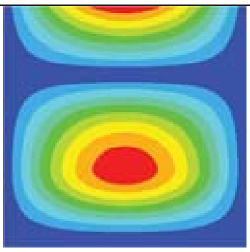
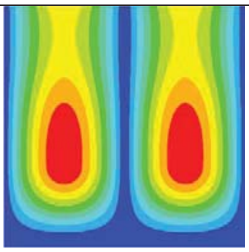
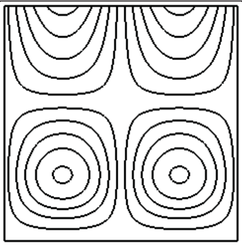
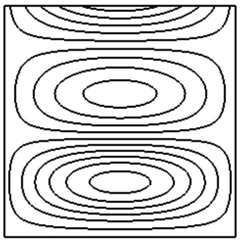
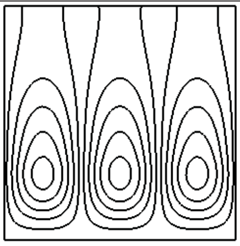
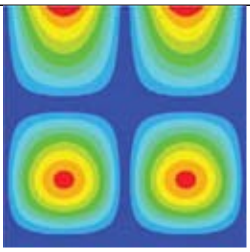
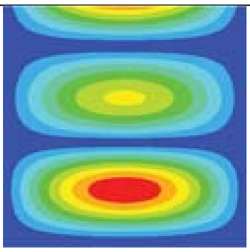
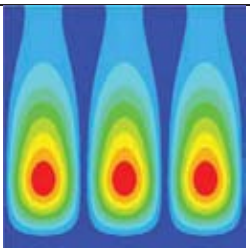
a/b	h_3/h_1	โหมด	SFSF			SCSF		
			Kanto-rovich	Xiang	ความคลาดเคลื่อน (%)	Kanto-rovich	Xiang	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	1	1	1.168	1.178	-0.849	1.508	1.526	-1.180
		2	1.952	1.988	-1.811	3.827	3.837	-0.261
		3	4.341	4.363	-0.504	4.819	4.863	-0.905
		4	4.566	4.602	-0.782	7.441	7.460	-0.255
		5	5.196	5.259	-1.198	8.030	8.055	-0.310
		6	8.164	8.201	-0.451	10.075	10.150	-0.739
	2	1	1.452	1.469	-1.157	2.088	2.097	-0.429
		2	2.492	2.519	-1.072	4.806	4.842	-0.743
		3	4.921	4.973	-1.046	7.098	7.113	-0.211
		4	5.284	5.328	-0.826	9.669	9.722	-0.545
		5	7.582	7.613	-0.407	10.311	10.348	-0.358
		6	10.117	10.196	-0.775	14.206	14.239	-0.232
2	1	1	1.141	1.151	-0.869	1.205	1.216	-0.905
		2	1.299	1.315	-1.217	1.860	1.865	-0.268
		3	2.041	2.050	-0.439	2.974	2.990	-0.535
		4	3.151	3.173	-0.693	4.296	4.322	-0.602
		5	4.277	4.302	-0.581	4.791	4.800	-0.187
		6	4.317	4.344	-0.622	5.589	5.601	-0.214

จากตารางที่ 6-1 พบว่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าใกล้เคียงกับผลการวิจัยในอดีตที่นำมาเปรียบเทียบโดยมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยประมาณ -0.4 เปอร์เซ็นต์ เป็นที่น่าสังเกตว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าน้อยกว่าเมื่อเทียบกับค่าที่คำนวณได้จากวิธี state-space แสดงว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่า

จากการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่เป็นวัสดุไอโซทรอปิกและมีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น พบว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถขยายขอบเขตการแก้ปัญหาเป็นปัญหาที่ใหญ่ขึ้นได้เป็นอย่างดีสำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ โปรแกรมที่ถูกปรับเปลี่ยนให้สามารถแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไป 2 ขั้นมีความน่าเชื่อถือเนื่องจากให้ค่าความถี่ธรรมชาติใกล้เคียงกับการศึกษาในอดีต สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน เนื่องจากยังไม่มีงานวิจัยที่ตีพิมพ์รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างลักษณะดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงเปรียบเทียบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยนำชิ้นงานตัวอย่างที่แสดงในตารางที่ 6-1 ที่มีขนาด a เท่ากับ 1 อัตราส่วนของ h_2/h มีค่าเท่ากับ 1.5 อัตราส่วนของ h_3/h_1 มีค่าเท่ากับ 2 มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF ผลการคำนวณ 6 โหมดแรกแสดงในตารางที่ 6-2 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงในช่อง Kantorovich และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในช่อง FEM ตามลำดับ โดยที่ค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ตที่ได้จากทั้ง 2 วิธีถูกแสดงในวงเล็บใต้ภาพรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนนั้น ๆ

จากตารางที่ 6-2 พบว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีรูปร่างคล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทุกโหมดการสั่นสะเทือนที่ศึกษา โดยมีลักษณะของเส้นคอนทัวร์ซึ่งแสดงแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่นอกระนาบตำแหน่งต่าง ๆ บนชิ้นงานมีลักษณะคล้ายกันค่าความถี่ธรรมชาติแต่ละโหมดการสั่นสะเทือนที่แสดงในวงเล็บก็มีค่าใกล้เคียงกันมาก จึงเป็นการยืนยันว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่นำมาเปรียบเทียบกันนั้นเป็นโหมดการสั่นสะเทือนเดียวกัน

ตารางที่ 6-2 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

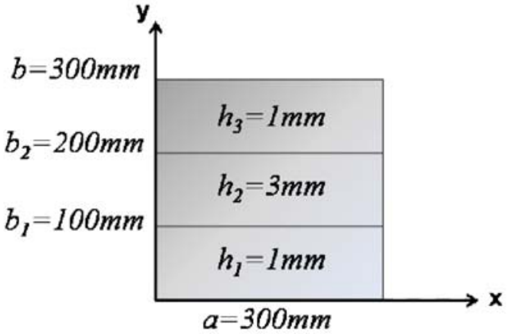
โหมด	1	2	3
Kantorovich	 (57.99)	 (133.48)	 (197.11)
FEM	 (57.94)	 (133.05)	 (197.02)
โหมด	**4**	**5**	**6**
Kantorovich	 (268.52)	 (286.34)	 (394.50)
FEM	 (267.9)	 (285.73)	 (394.16)

งานวิจัยในอดีตที่กล่าวถึงข้างต้นสามารถแก้ปัญหาเมื่อโครงสร้างด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นและมีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายเท่านั้น และระยะความยาวของด้านที่มีความหนาเปลี่ยนไปต้องเท่ากัน คือ ช่วงความยาว 0 ถึง b_1 ต้องมีค่าเท่ากับช่วงความยาว b_1 ถึง b_2 และเท่ากับช่วงความยาว b_2 ถึง b ดังนั้นในหัวข้อ 6.2 และ 6.3 จะขยายขอบเขตของปัญหาออกไปให้มีความหลากหลายมากขึ้น แล้วใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นแก้ปัญหาการสั่นสะเทือน

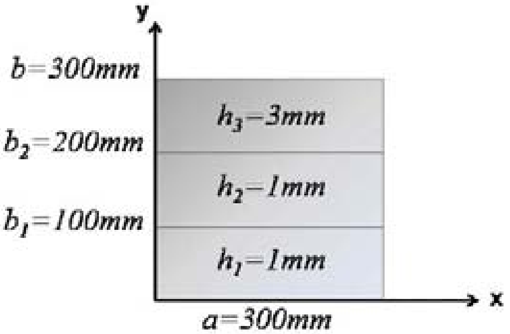
6.2 การศึกษาโครงสร้างแผ่นบางที่มีปริมาตรเท่ากัน

เป็นที่ทราบกันดีว่าค่ายังโมดูลัส ความแข็งแรง ณ จุดคราก ความเค้นแตกหัก ความหนาแน่น ความทนความร้อน ฯลฯ เป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัสดุแต่ละประเภทซึ่งไม่ขึ้นกับรูปร่างของชิ้นงาน แต่ในการออกแบบอาจต้องคำนึงถึงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนและการโก่งงอซึ่งมีพฤติกรรมเปลี่ยนไปตามลักษณะรูปร่างของชิ้นงาน เช่น รูปร่าง ขนาด และความหนาของชิ้นงาน เป็นต้น ในส่วนของพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีลักษณะเหมือนกันทุกประการ ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนจะแตกต่างกันได้หากชิ้นงานนั้นมีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกัน นอกจากนี้ชิ้นงานที่มีขนาดหรือปริมาตรของวัสดุเท่ากัน แต่มีความหนาของชิ้นงานแต่ละตำแหน่งไม่เท่ากันก็อาจมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่ไม่เหมือนกันด้วย

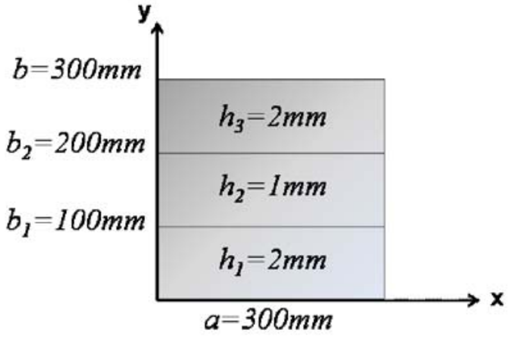
การศึกษาในหัวข้อนี้จึงเปรียบเทียบพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีขนาดและปริมาตรเท่ากันแต่มีความหนาแต่ละตำแหน่งแตกต่างกันทั้งหมด 4 ลักษณะ ชิ้นงานทุกชิ้นที่นำมาศึกษามีขนาด 300 x 300 mm^2 โดยแบ่งชิ้นงานด้านความยาว (แกน y) ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน ชิ้นงานที่ 1 มีความสูงบริเวณ b_1 ถึง b_2 มากเป็นสามเท่าของบริเวณอื่น ชิ้นงานชิ้นที่ 2 มีความสูงบริเวณ b_2 ถึง b มากเป็นสามเท่าของบริเวณอื่น ชิ้นงานชิ้นที่ 3 มีความสูงช่วง 0 ถึง b_1 และ b_2 ถึง b มากกว่าช่วง b_1 ถึง b_2 สองเท่า และชิ้นงานที่ 4 มีความสูงเท่ากันตลอดทั้งชิ้นงาน ความสูงของชิ้นงานทั้งสี่แสดงไว้บนภาพที่ 6.2 ถึงภาพที่ 6.5 ตามลำดับ



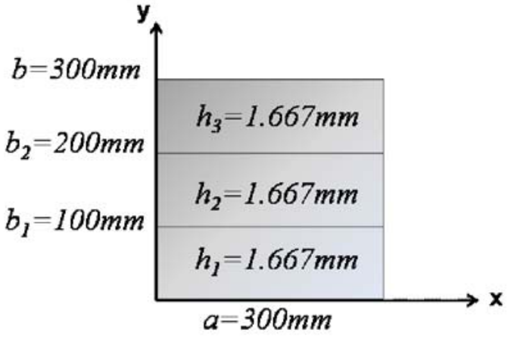
ภาพที่ 6.2 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 1



ภาพที่ 6.3 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 2



ภาพที่ 6.4 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 3



ภาพที่ 6.5 โครงสร้างไอโซทรอปิกบางชิ้นที่ 4

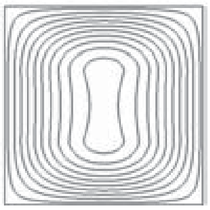
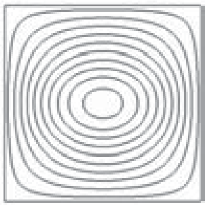
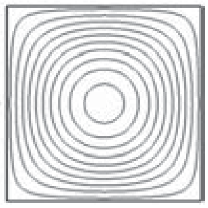
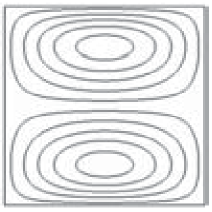
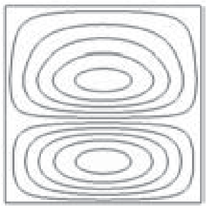
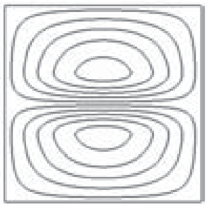
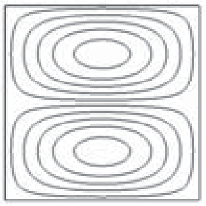
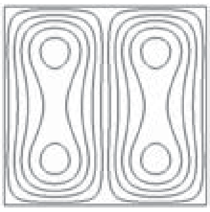
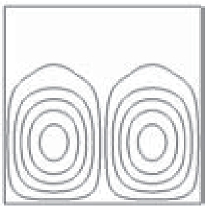
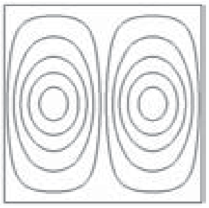
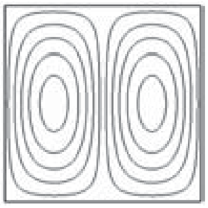
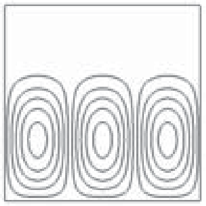
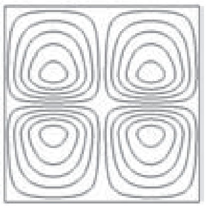
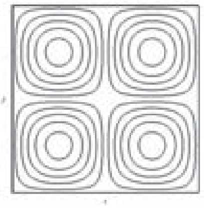
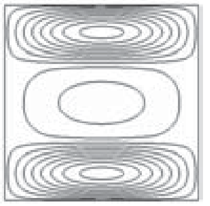
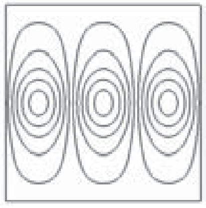
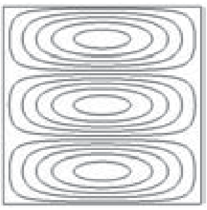
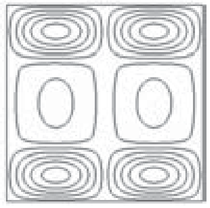
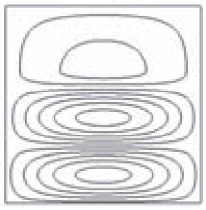
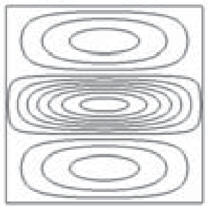
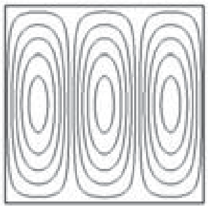
ตารางที่ 6-3 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 6 โหมดแรกของชิ้นงานทั้ง 4 ลักษณะ ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกัน 3 แบบ คือ การจับยึดแบบ SSSS, SCSF และ CCCF เพื่อให้สอดคล้องกับรูปแบบการจับยึดที่สามารถพบได้ในงานทางวิศวกรรม ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแสดงในช่อง Kantorovich และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของชิ้นงานแสดงในช่องรูปร่างโหมดโดยแสดงเป็นจำนวนคลื่นรูปไซน์ครึ่งลูก

จากตารางที่ 6-3 พบว่าชิ้นงานทั้ง 4 ที่มีการจับยึดเหมือนกันมีค่าความถี่ธรรมชาติต่างกันรวมทั้งรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนก็มีลักษณะแตกต่างกัน ตารางที่ 6-4 จะแสดงตัวอย่างโหมดการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS ตารางดังกล่าวแสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 6 โหมดแรกของชิ้นงานทั้งสี่ รูปแสดงในตารางได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์และวาดกราฟฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบแบบคอนทัวร์ จากตารางที่ 6-4 พบว่าโหมดการสั่นสะเทือนที่ 1 ถึง 3 ของชิ้นงานทั้ง 4 มีลักษณะเหมือนกัน คือ [1,1], [1,2] และ [2,1] ตามลำดับ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 4 ถึง 6 มีรูปร่างแตกต่างกันและไม่อาจทำนายรูปร่างการสั่นสะเทือนจากลักษณะของชิ้นงานได้ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ปรากฏของชิ้นงานที่ 1, 2 และ 3 มีการสั่นสะเทือนสูงบริเวณชิ้นงานที่มีความหนาน้อยเนื่องจากเป็นบริเวณที่มีโมดูลัสความแข็งเกร็งน้อยกว่า และตำแหน่งสูงสุดของระยะการสั่นสะเทือนจากตำแหน่งอ้างอิงจะอยู่ค่อนมาทางบริเวณที่ชิ้นงานมีความหนาน้อยกว่าอีกด้วย ชิ้นงานที่ 4 เป็นพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีความสมมาตรทั้งลักษณะชิ้นงานและเงื่อนไขขอบเขต จะเห็นได้ว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ปรากฏจะมีความสมมาตรกัน โหมดการสั่นสะเทือนที่ 3 และ 4 ของชิ้นงานที่ 2 ซึ่งมีความหนาไม่สมมาตรตามแกน y แสดงให้เห็นชัดเจนว่าบริเวณชิ้นงานที่มีความหนามากกว่าจะเกิดการสั่นสะเทือนน้อยมากหรือไม่เกิดเลย

ตารางที่ 6-3 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีปริมาตรเท่ากันแต่ความหนาไม่เท่ากัน 3 ขั้น

เงื่อนไขขอบเขต		SSSS		SCSF		CCCF	
ชิ้นงานที่	mode	Kanto-rovich	รูปร่างโหมด	Kanto-rovich	รูปร่างโหมด	Kanto-rovich	รูปร่างโหมด
1	1	83.79	[1,1]	69.03	[1,1]	111.33	[1,1]
	2	220.60	[1,2]	123.34	[1,2]	188.26	[1,2]
	3	280.44	[2,1]	172.65	[2,1]	451.91	[2,1]
	4	382.55	[2,2]	280.00	[1,3]	313.80	[1,3]
	5	412.68	[1,3]	307.42	[2,2]	391.47	[3,1]
	6	510.84	[2,3]	310.15	[3,1]	451.91	[2,2]
2	1	95.64	[1,1]	74.48	[1,1]	143.49	[1,1]
	2	184.83	[1,2]	150.28	[1,2]	197.55	[1,2]
	3	185.73	[2,1]	207.11	[2,1]	256.15	[2,1]
	4	322.48	[3,1]	289.30	[1,3]	325.40	[1,3]
	5	350.04	[2,2]	314.31	[2,2]	416.81	[3,1]
	6	366.07	[1,3]	339.98	[3,1]	442.71	[2,2]
3	1	94.41	[1,1]	62.55	[1,1]	122.52	[1,1]
	2	200.05	[1,2]	159.48	[1,2]	190.80	[1,2]
	3	230.24	[2,1]	205.08	[2,1]	302.86	[2,1]
	4	342.09	[2,2]	290.49	[1,3]	315.31	[1,3]
	5	424.46	[3,1]	299.77	[2,2]	384.02	[2,2]
	6	470.14	[1,3]	417.85	[3,1]	520.63	[2,3]
4	1	92.57	[1,1]	58.95	[1,1]	112.10	[1,1]
	2	231.42	[1,2]	154.33	[1,2]	187.07	[1,2]
	3	231.42	[2,1]	194.70	[2,1]	296.11	[2,1]
	4	370.28	[2,2]	294.25	[2,2]	359.28	[1,3]
	5	462.85	[1,3]	338.93	[1,3]	376.95	[2,2]
	6	462.85	[3,1]	423.67	[3,1]	545.85	[2,3]

ตารางที่ 6-4 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่ 1 ถึง 4 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS

โหมด	ชิ้นงานที่			
	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
5				
6				

การศึกษานี้สามารถนำไปสู่การประยุกต์การออกแบบโครงสร้างแผ่นบางให้มีความหนาเปลี่ยนไป โดยผู้ออกแบบสามารถวิเคราะห์และคำนวณเพื่อเพิ่มหรือลดความหนาของชิ้นงานที่ตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อปรับเปลี่ยนคุณสมบัติการสั่นสะเทือนของชิ้นงานให้อยู่ในช่วงค่าความถี่ธรรมชาติที่ต้องการ หรือเป็นค่าความถี่ธรรมชาติที่ไม่ถูกรบกวนจากการสั่นสะเทือนของสิ่งแวดล้อม การออกแบบให้ตำแหน่งบางตำแหน่งของชิ้นงานมีความหนาเปลี่ยนไปเช่นนี้ไม่ทำให้รูปร่างลักษณะของชิ้นงานเปลี่ยนไป ยกตัวอย่างเช่นหากค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นส่วนที่ใช้งานมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ดำเนินงาน ผลคือการสั่นสะเทือนจะรุนแรงขึ้นเนื่องจากปรากฏการณ์เรโซแนนซ์ การนำเนื้อวัสดุไปติดเพิ่มที่ชิ้นงานส่งผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติของชิ้นงานนั้นเปลี่ยนไปจากเดิม การสั่นสะเทือนจะลดลงได้ ข้อดีของการทราบรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนนำไปสู่การออกแบบชิ้นส่วนต่างของเครื่องจักรหรืออุปกรณ์ทางกลต่างๆ ที่ต้องการให้บางส่วนของชิ้นงานไม่มีการสั่นสะเทือนหรือมีการสั่นสะเทือนน้อยที่สุดเพื่อให้ไม่รบกวนการทำงาน ชิ้นงานที่ 2 เป็นหนึ่งตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า การออกแบบชิ้นงานให้ขอบด้านหนึ่งมีความหนามากกว่าบริเวณอื่นทำให้บริเวณขอบมีการกระจัดของความสูงของการสั่นสะเทือนน้อยมากจนแทบไม่มีเลย

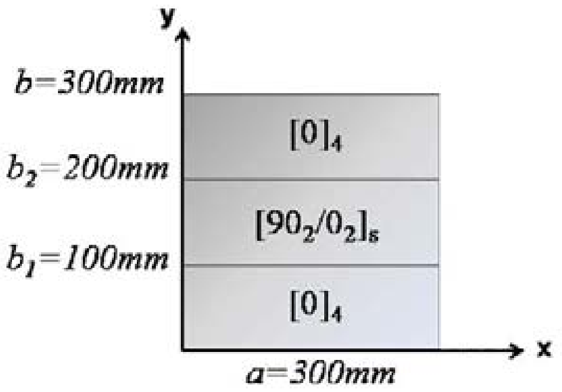
6.3 ชิ้นงานคอมโพสิทที่มีจำนวนขั้น 2 ขั้น

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้ศึกษาชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิกที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น พร้อมทั้งประยุกต์ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีปริมาตรเท่ากันแต่มีความสูงของส่วนต่าง ๆ ไม่เท่ากันมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคอมโพสิทบางที่ความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น โดยในหัวข้อนี้จะแบ่งการศึกษาออกเป็นสองส่วน คือ ศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทเมื่อเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนไป และพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเมื่อมีลักษณะการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกัน

6.3.1 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ

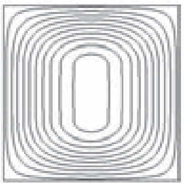
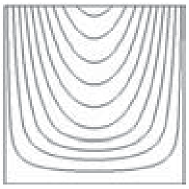
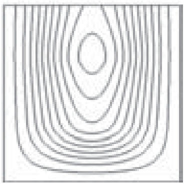
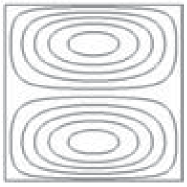
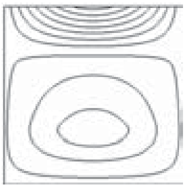
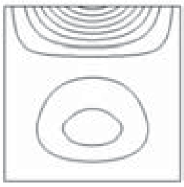
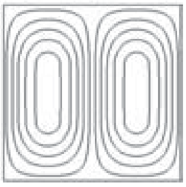
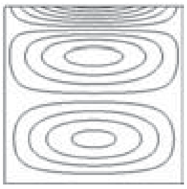
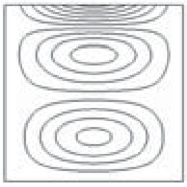
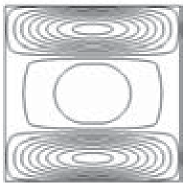
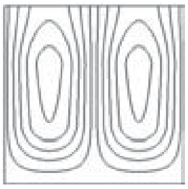
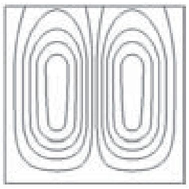
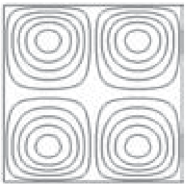
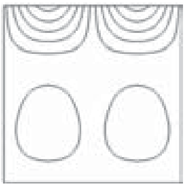
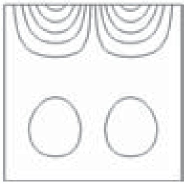
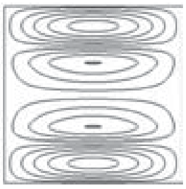
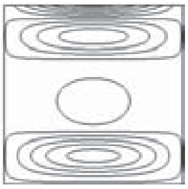
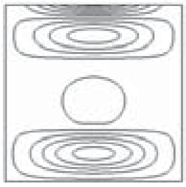
การศึกษานี้จำลองลักษณะการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางมีขนาดความกว้างและความยาว คือ 300 mm ทำจากวัสดุกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 มีความหนาของชั้นลามิเนตแต่ละชั้นเท่ากับ 0.127 mm รูปร่างของชิ้นงานที่ศึกษาในหัวข้อนี้แสดงดังภาพที่ 6.6 ชุดตัวเลขที่แสดงบนชิ้นงานหมายถึงจำนวนชั้นของแผ่นลามิเมตและองศาการเรียงตัวของเส้นใยแต่ละชั้น ช่วงความสูง 0 ถึง b_1 และ b_2 ถึง b เป็นชั้นลามิเนตที่มีการเรียงตัวของเส้นใย 0 องศาทั้งหมด 4 ชั้น และที่

ช่วงความสูง b_1 ถึง b_2 มีแผ่นลามิเนต 8 ชั้น โดยชั้นที่ 3 ถึงชั้นที่ 6 มีการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนช่วง 0 ถึง b_1 และ b_2 ถึง b และมีชั้นลามิเมตที่มีเส้นใยทำมุม 90 องศาสองชั้นติดอยู่ด้านบนและด้านล่าง โดยแต่ละชั้นของแผ่นลามิเนตถือว่าติดสนิทจนเป็นเนื้อเดียวกัน ตารางที่ 6-5 แสดงพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชของโครงสร้างแผ่นบางที่กล่าวมา โดยรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 6 โหมดแรกถูกแสดงในช่องตามลักษณะเงื่อนไขขอบเขต คือ การจับยึดแบบ SSSS, SCSF และ CCCF ตัวเลขที่แสดงในวงเล็บใต้ภาพคือค่าความถี่ธรรมชาติของโหมดการสั่นสะเทือนนั้น ๆ ในหน่วยเฮิร์ต



ภาพที่ 6.6 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น (ชิ้นงานที่ 1)

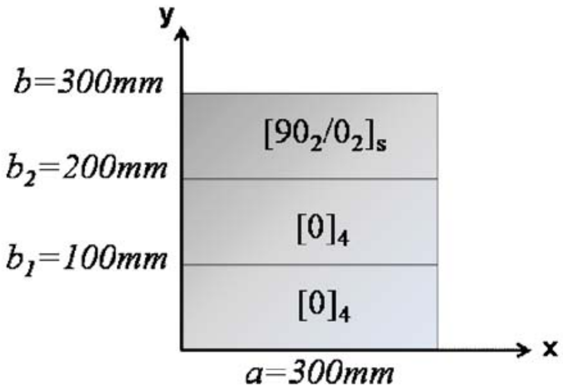
ตารางที่ 6-5 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น จำนวน 2 ขั้น

โหมด	เงื่อนไขขอบเขต		
	SSSS	SCSF	CCCF
1	 (25.37)	 (24.29)	 (51.54)
2	 (51.24)	 (37.55)	 (60.96)
3	 (89.80)	 (66.91)	 (84.08)
4	 (111.43)	 (89.74)	 (138.19)
5	 (119.47)	 (103.43)	 (153.70)
6	 (144.88)	 (152.50)	 (161.27)

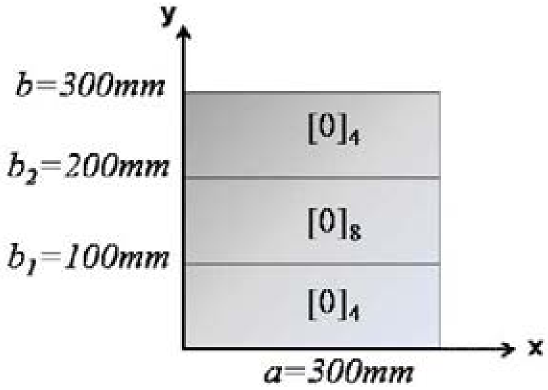
จากตารางที่ 6-5 พบว่าชิ้นงานโครงสร้างแผ่นบางคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกัน มีค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแตกต่างกัน แต่ยังคงมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่เหมือนกับวัสดุไอโซทรอปิกคือชิ้นงานบริเวณที่มีความหนามากจะมีการสั่นสะเทือนต่ำกว่าบริเวณข้างเคียง ชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSF และ CCCF มีรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโหมดสั่นสะเทือนที่ 1 ถึง 6 คล้ายกัน แต่การจับยึดแบบ SCSF มีค่าความถี่ธรรมชาติของแต่ละโหมดต่ำกว่า ข้อมูลนี้ชี้ให้เห็นว่าการคำนวณเพื่อทราบพฤติกรรมการสั่นสะเทือนเบื้องต้นมีประโยชน์คือช่วยในการออกแบบลักษณะของอุปกรณ์จับยึด เช่นการเลือกใช้อุปกรณ์จับยึดของชิ้นส่วนต่าง ๆ เพื่อให้ชิ้นส่วนเหล่านั้นมีค่าความถี่ธรรมชาติอยู่ในช่วงที่ต้องการ

6.3.2 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทที่มีลักษณะการวางตัวของเส้นใยต่างกัน

หัวข้อนี้นำเสนอพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทบางที่มีลักษณะการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกัน โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิทที่ทำจากวัสดุกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 มีขนาดความกว้างและความยาวเท่ากับ 300x300 mm^2 แผ่นลามิเนตแต่ละชั้นมีความหนา 0.127 mm ชิ้นงานที่ 1 มีลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยตามภาพที่ 6.6 ซึ่งเป็นชิ้นงานที่มีการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกับชิ้นงานที่ใช้ศึกษาในหัวข้อ 6.2.1 ชิ้นงานที่ 2 และ 3 มีลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยดังแสดงในภาพที่ 6.7 และ 6.8 ตามลำดับ โดยชิ้นงานที่ 2 จำลองการนำแผ่นลามิเนตมาติดที่ชิ้นงานเดิมในตำแหน่งที่แตกต่างกับชิ้นงานที่ 1 คือติดแผ่นลามิเนตเพิ่มที่ความยาวช่วง b_2 ถึง b ชิ้นงานที่ 3 แสดงการติดแผ่นลามิเนตเพิ่มที่ตำแหน่งเดียวกับชิ้นงานที่ 1 แตกต่างที่องศาของการเรียงตัวของเส้นใยของแผ่นลามิเนตที่ติดเพิ่มมีทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกับแนวการเรียงตัวของเส้นใยเดิม รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน 6 โหมดแรกของชิ้นงานทั้ง 3 เมื่อมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSS แสดงในตารางที่ 6-6 ตัวเลขในวงเล็บใต้ภาพคือค่าความถี่ธรรมชาติของแต่ละโหมดการสั่นสะเทือนในหน่วยเฮิร์ต

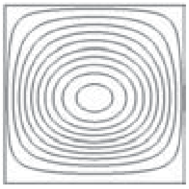
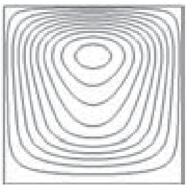
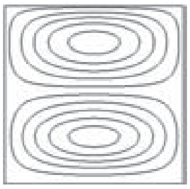
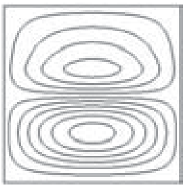
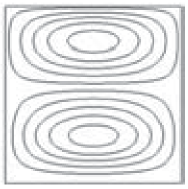
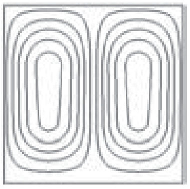
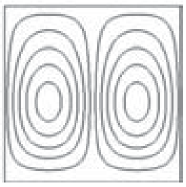
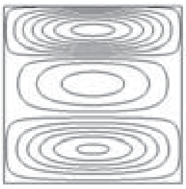
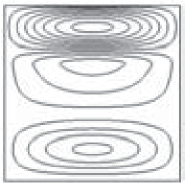
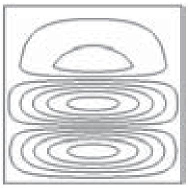
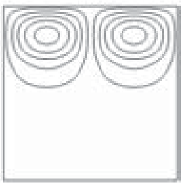
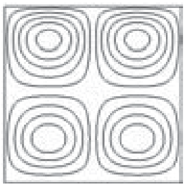
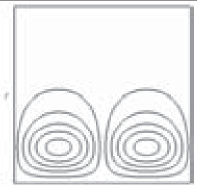
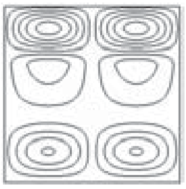
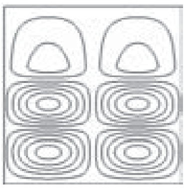
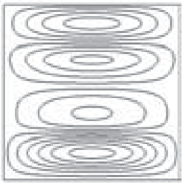


ภาพที่ 6.7 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น (ชิ้นงานที่ 2)



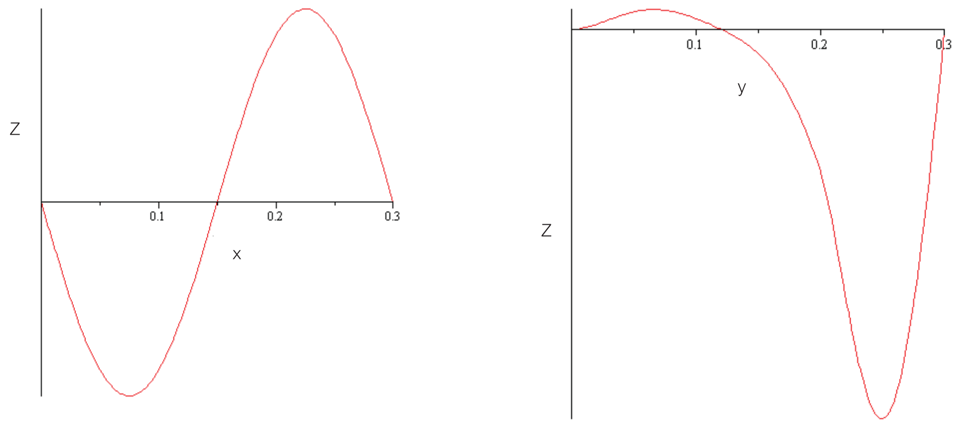
ภาพที่ 6.8 ลักษณะโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็น 2 ขั้น (ชิ้นงานที่ 3)

ตารางที่ 6-6 พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบ SCSS และมีการเรียงตัวของเส้นใยแตกต่างกัน

โหมด	ชิ้นงาน		
	1	2	3
1	(27.32)	 (32.13)	 (44.17)
2	 (57.55)	 (56.40)	 (61.33)
3	 (90.35)	 (100.12)	 (108.81)
4	 (123.30)	 (113.53)	 (123.88)
5	 (123.35)	(115.47)	 (148.67)
6	 (168.44)	 (159.62)	 (160.01)

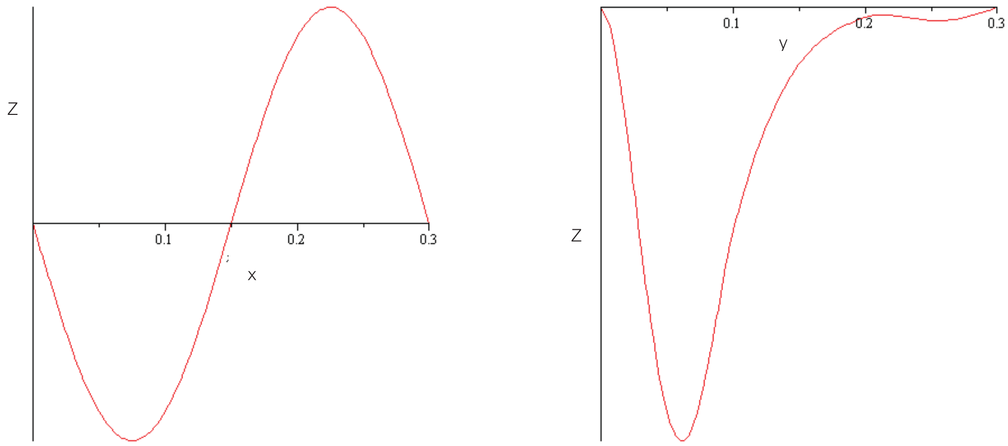
จากตารางที่ 6-6 พบว่าสำหรับโหมดสั่นสะเทือนเดียวกันของชิ้นงานทั้งสามมีค่าความถี่ธรรมชาติใกล้เคียงกัน เมื่อเปรียบพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่ 1 และ 2 ตามตารางที่ 6-7 พบว่าเมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งในการติดแผ่นลามิเนตลักษณะเดียวกันและมีองศาทางการเรียงตัวของเส้นใยเหมือนกัน จะทำให้รูปร่างการสั่นสะเทือนของชิ้นงานสำหรับโหมดการสั่นสะเทือนเดียวกันมีลักษณะการสั่นสะเทือนที่แตกต่างกัน ชิ้นงานที่ 1 แสดงให้ว่าแม้ว่าชิ้นงานจะมีความสมมาตร แต่ผลของเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่นบริเวณ $y = 0$ ส่งผลชิ้นงานมีแอมพลิจูดการสั่นสะเทือนสูงบริเวณชิ้นงานที่มีการจับยึดแบบง่าย ($y = b$) เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายมีอิสระในการสั่นสะเทือนมากกว่า ชิ้นงานที่ 2 แสดงให้เห็นว่าบริเวณชิ้นงานที่มีความหนามากจะมีแอมพลิจูดการสั่นสะเทือนต่ำกว่าบริเวณอื่น

สำหรับการเปรียบเทียบชิ้นงานที่ 1 และ 3 พบว่าลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยที่ไม่เหมือนกันของแผ่นลามิเนตที่ติดเพิ่มบนชิ้นงานที่ตำแหน่งเดียวกันทำให้ชิ้นงานมีรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดเจน ถึงแม้ความถี่ธรรมชาติจะไม่ต่างกันมากก็ตาม พฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่น่าสนใจของชิ้นงานที่ 3 คือรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 4 และ 5 จากตารางที่ 6-7 จะเห็นว่าโหมดการสั่นสะเทือนที่ 4 จะมีการสั่นสะเทือนสูงบริเวณ $y = 0.15$ m ถึง $y = 0.3$ m โดยชิ้นงานบริเวณ $y = 0$ m ถึง $y = 0.15$ m มีการสั่นสะเทือนในทิศทางตรงกันข้ามแต่มีระยะกระจัดจากระยะอ้างอิงน้อยมาก ดังแสดงในภาพที่ 6.9 ซึ่งแสดงระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบบนเส้น $y = 0.24$ m และเส้น $x = 0.06$ m ในขณะที่รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 5 แสดงในภาพที่ 6.10 ซึ่งแสดงระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบบนเส้น $y = 0.06$ m และเส้น $x = 0.06$ m จากภาพที่ 6.10 จะเห็นว่ามีการสั่นสะเทือนสูงบริเวณ $y = 0$ m ถึง $y = 0.15$ m และมีการสั่นสะเทือนเล็กน้อยในทิศทางเดียวกันบริเวณ $y = 0.15$ m ถึง $y = 0.3$ m การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชทำให้สามารถวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างได้ก่อนการสร้างจริง และยังมีประโยชน์ในการช่วยให้วิศวกรออกแบบโครงสร้างเข้าใจพฤติกรรมการสั่นสะเทือนมากขึ้น



(a) W บนเส้น y = 0.24 m (b) W บนเส้น x = 0.06 m

ภาพที่ 6.9 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 4 ของชิ้นงานที่ 3



(a) W บนเส้น y = 0.06 m (b) W บนเส้น x = 0.06 m

ภาพที่ 6.10 รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ 5 ของชิ้นงานที่ 3

สรุป

ในบทนี้ได้ศึกษาโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิทที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น ในส่วนแรกเป็นการสอบทวนความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประยุกต์มาใช้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น หลังจากนั้นจึงนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างลักษณะต่าง ๆ ซึ่งจากการศึกษาในแต่ละหัวข้อทำให้เห็นถึงความสำคัญของพารามิเตอร์ โดยเน้นไปที่การศึกษาความหนาที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนโครงสร้างแผ่นบางที่มีความ

หนาเปลี่ยนไป และการศึกษาผลการของเรียงตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการสั่นสะเทือนเมื่อชิ้นงานเป็นวัสดุคอมโพสิท การศึกษาในบทนี้ยืนยันว่าสามารถประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการหาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางได้เป็นอย่างดี

บทที่ 7

บทสรุป

7.1 บทสรุป

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางมีอย่างแพร่หลายในหลายทศวรรษที่ผ่านมา เนื่องจากโครงสร้างแผ่นบางถูกนำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรม โดยเฉพาะงานทางด้านอากาศยาน และงานทางด้านอาคารและโครงสร้างต่าง ๆ การสั่นสะเทือนเป็นอีกหนึ่งพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบางที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบ โครงสร้างที่มีการสั่นสะเทือนรุนแรงอาจนำมาซึ่งความเสียหายต่อโครงสร้างโดยรวมได้ การทราบพฤติกรรมการสั่นสะเทือนจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีเบื้องต้นทำให้ผู้ออกแบบทราบค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนก่อน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการออกแบบใหม่หรือสามารถควบคุมลักษณะการสั่นสะเทือนที่ไม่พึ่งประสงค์ได้ เช่น การป้องกันปรากฏการณ์การสั่นพ้องหรือเรโซแนนส์ เป็นต้น

ปัจจุบันการวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางเริ่มมีความซับซ้อนมากขึ้น ทั้งในด้านลักษณะและรูปร่าง เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้งานจริงทางวิศวกรรม โดยมีการศึกษาโครงสร้างรูปสามเหลี่ยม วงกลม โครงสร้างที่มีรูตรงกลาง รวมถึงโครงสร้างที่มีความหนาเปลี่ยนไป นอกจากลักษณะของโครงสร้างแล้วยังมีการนำวัสดุคอมโพสิทมาใช้เพื่อลดน้ำหนักและเพิ่มความแข็งแรงอีกด้วย

การหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนเป็นพารามิเตอร์สำคัญของปัญหาการสั่นสะเทือน การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางอาจทำได้โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ วิธีเชิงตัวเลข และวิธีการทดลอง ซึ่งแต่ละวิธีก็มีข้อได้เปรียบ ข้อด้อย และข้อจำกัดแตกต่างกันออกไป วิธีเชิงตัวเลขเป็นที่นิยมในปัจจุบันเพราะสะดวก รวดเร็ว และมีค่าใช้จ่ายน้อย นอกจากนี้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหลายวิธีได้รับการยอมรับและมีการใช้งานอย่างกว้างขวางเพราะสามารถให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงได้ ยกตัวอย่างเช่น ระเบียบวิธีริทซ์ ระเบียบวิธี differential quadrature ระเบียบวิธีกาเลอคิน ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขส่วนใหญ่มักมีพื้นฐานมาจากหลักการพลังงาน (energy principle)

ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีข้อได้เปรียบเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นคือ เป็นระเบียบวิธีกึ่งวิเคราะห์กึ่งเชิงเลขชนิดหนึ่งที่มีประสิทธิภาพสูง เนื่องจากสามารถลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ในรูปของสมการครอบคลุมและสมการเงื่อนไขขอบเขต

โดยสมมติให้ทราบฟังก์ชันเริ่มต้นของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งก่อน แล้วใช้หลักการแปรผันของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด ท้ายที่สุดจะได้ปัญหาในรูปของปัญหาค่าเจาะจงซึ่งต้องใช้การคำนวณซ้ำเพื่อให้ค่าเจาะจงมีค่าลู่เข้าสู่คำตอบ ค่าเจาะจงที่ได้คือค่าความถี่ธรรมชาติ และเวกเตอร์เจาะจงสามารถนำไปหารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้ วิธีการนี้นำมาซึ่งผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงเนื่องจากเป็นการแก้ปัญหาจากสมการครอบคลุมโดยตรง ฟังก์ชันเริ่มต้นสำหรับการคำนวณครั้งแรกของระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต จากผลการศึกษาในอดีตพบว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเท่ากัน ทำจากวัสดุไอโซทรอปิกหรือวัสดุคอมโพสิทชนิด cross-ply ได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำ ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชยังสามารถแก้ปัญหาได้ทุกเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างซึ่งแตกต่างจากระเบียบวิธีอื่นที่มีข้อจำกัดเรื่องเงื่อนไขขอบเขต

สำหรับงานวิจัยเกี่ยวกับโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นในปัจจุบันมีอยู่น้อยมาก มีข้อจำกัดในส่วนของเงื่อนไขขอบเขต และยังไม่มีการศึกษาในส่วนของวัสดุคอมโพสิท ดังนั้นวิทยานิพนธ์เล่มนี้จึงเน้นศึกษาเรื่องการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นสามส่วนหลักคือการสอบทวนความถูกต้องของชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิก การสอบทวนความถูกต้องของชิ้นงานทำจากวัสดุคอมโพสิท และเมื่อพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องแม่นยำแล้ว จะนำโปรแกรมไปประยุกต์เพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของวัสดุที่มีความซับซ้อนมากขึ้นต่อไป

เนื่องจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จึงศึกษาผลของจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นและผลของจำนวนเลขนัยสำคัญที่มีผลต่อการลู่เข้าของผลลัพธ์ เพื่อป้องกันความผิดพลาดต่าง ๆ เช่น ความผิดพลาดจากการปัดเศษ ผลการศึกษาพบว่าพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อจำนวนเลขนัยสำคัญที่ใช้คำนวณ ได้แก่ ฟังก์ชันเริ่มต้นที่สมมติ เงื่อนไขขอบเขต ลักษณะของชิ้นงาน ได้แก่ ขนาด และความหนาของชิ้นงานแต่ละชั้น รวมถึงชนิดของวัสดุของชิ้นงาน ดังนั้นการนำโปรแกรมไปหาผลเฉลยจะต้องคำนึงถึงความถูกต้องของผลเฉลยด้วย โดยต้องใช้จำนวนสัมประสิทธิ์และจำนวนเลขนัยสำคัญของฟังก์ชันเริ่มต้นให้มากพอที่คำตอบจะลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง

1. การตรวจสอบความถูกต้องชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิก

การศึกษาในส่วนแรกคือการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างไอโซทรอปิกบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

จำนวน 1 ขั้น ผลการศึกษาพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีค่าใกล้เคียงกับผลการศึกษาของ Xiang และคณะ และค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาก นอกจากนี้ผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชยังมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าการศึกษาในอดีตด้วย เมื่อผลเฉลยจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความน่าเชื่อถือ จึงขยายการศึกษาออกไปศึกษาโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่มีความหลายหลายมากขึ้น คือ CCCC, CFCF, CCSC และ CCSF ผลเฉลยถูกนำมาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าสามารถใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชวิเคราะห์พฤติกรรมการสั่นสะเทือนโดยให้ผลเฉลยคือค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ถูกต้องโดยไม่มีข้อจำกัดของเงื่อนไขขอบเขต

นอกจากการคำนวณโดยใช้วิธีเชิงตัวเลขแล้ว งานวิจัยนี้ยังได้สร้างชุดทดลองการสั่นสะเทือนโดยวิธีการเคาะ การทดลองใช้ชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนไป 1 ขั้น ทำจากวัสดุสเตนเลส 304 จำนวน 2 ชิ้น โดยชิ้นงานทั้งสองเหมือนกันทุกประการยกเว้นอัตราส่วน b_1/b การทดลองกำหนดให้เงื่อนไขขอบเขต 3 แบบ คือ SSSS, SCSF และ CFCF เมื่อวิเคราะห์ผลการทดลองพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความคลาดเคลื่อนจากผลการทดลองประมาณ 3.13 เปอร์เซ็นต์ สาเหตุที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนมีค่ามากคือสมมติฐานของโครงสร้างแผ่นบาง และความไม่เป็นอุดมคติของอุปกรณ์จับยึดชิ้นงาน ถึงแม้จะมีการออกแบบและสอบทวนความถูกต้องของการจัดตั้งชุดทดลองแล้วก็ตาม การทดลองสามารถศึกษารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนได้เช่นกันแต่มีขั้นตอนที่ยุ่งยากและใช้เวลามาก ผลการทดลองพบว่ารูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนที่ได้มีรูปร่างเหมือนผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

2. การตรวจสอบความถูกต้องชิ้นงานทำจากวัสดุคอมโพสิท

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของวัสดุคอมโพสิทเริ่มจากการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้แก้ปัญหาการสั่นสะเทือนเช่นเดียวกันกับวัสดุไอโซทรอปิก โดยหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply 2 แบบ คือ $[0]_3$ และ [0/90/0] โครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเท่ากันตลอดแผ่นและมีเงื่อนไขขอบเขตต่างกัน 4 ลักษณะ ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้นำไปเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Chen และคณะ พบว่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของค่าความถี่ธรรมชาติอยู่ในช่วง 0.35 ถึง 1.21 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างแผ่นบางได้อย่างน่าเชื่อถือ จากนั้นนำโปรแกรมไปแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

จำนวน 1 ขั้น กำหนดการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง 0 ถึง b_1 คือ $[0/90]_s$ และการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง b_1 ถึง b คือ $[0/90]_{2s}$ ผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมาก

เมื่อโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนได้ผลเฉลยที่แม่นยำแล้ว จึงนำโปรแกรมไปศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของ b/b_1 ของโครงสร้างคอมโพสิท โดยในการศึกษาจะกำหนดให้อัตราส่วน b/b_1 มีค่า 1.5, 2 และ 3 ตามลำดับ ผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย 0.01 เปอร์เซ็นต์ และมีรูปร่างการสั่นสะเทือนเหมือนกันทุกโหมดการสั่นสะเทือน ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/b_1 ไม่มีผลต่อความถูกต้องในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช แต่อัตราส่วน b/b_1 ที่เปลี่ยนไปส่งผลให้ชิ้นงานมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแตกต่างกัน โดยชิ้นงานบริเวณที่มีค่าโมดูลัสความแข็งเกร็งต่ำจะมีการสั่นสะเทือนมาก และชิ้นงานที่มีส่วนความหนามากจะมีค่าความถี่ธรรมชาติสูงกว่าทุกโหมดการสั่นสะเทือน

นอกจากนี้ยังได้ศึกษาผลของการวางตัวต่อเส้นใยที่อาจมีต่อความคลาดเคลื่อนของค่าความถี่ธรรมชาติ โดยเปลี่ยนให้การวางตัวของเส้นใยช่วง 0 ถึง b_1 และช่วง b_1 ถึง b มีลักษณะต่างกัน คือ $[0/90]_{2s}$ และ $[0/90]_s$, $[90/0/\overline{90}]_s$ และ $[0/90/0]$ และ $[(90/0)_2/\overline{90}]_s$ และ $[90/0/\overline{90}]_s$ พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นยังให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3. การประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่ซับซ้อน

การศึกษาขั้นต่อไปคือการประยุกต์ใช้โปรแกรมแก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 2 ขั้น งานในส่วนแรกคือการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประยุกต์ขึ้นกับงานวิจัยในอดีตของ Xiang และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนได้อย่างถูกต้องแม่นยำ หลังจากนั้นศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีขนาดและปริมาตรเท่ากัน แบ่งชิ้นงานด้านความยาว (แกน y) ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วกำหนดให้ชิ้นงานมีความหนาแต่ละส่วนต่างกันทั้งหมด 4 ลักษณะ ชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกัน 3 แบบ คือ การจับยึดแบบ SSSS, SCSF และ CCCF จากการศึกษาพบว่าลักษณะความหนาที่ไม่เหมือนกันของชิ้นงานทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของชิ้นงานแต่ละชิ้นแตกต่างกัน โดยบริเวณชิ้นงานที่มีความหนาน้อย มีค่า

โมดูลัสความแข็งเกร็งต่ำ จะมีแอมพลิจูดของการสั่นสะเทือนสูงกว่า และตำแหน่งสูงสุดของระยะการสั่นสะเทือนจากตำแหน่งอ้างอิงมีแนวโน้มจะอยู่ค่อนลงมาทางบริเวณที่ชิ้นงานมีความหนาน้อยกว่าอีกด้วย ข้อมูลเหล่านี้เป็นประโยชน์ในการออกแบบ เช่น หากชิ้นงานมีการจับยึดแบบ CCCF ผู้ออกแบบสามารถลดการสั่นสะเทือนบริเวณขอบของชิ้นงานด้านที่มีการจับยึดแบบปล่อยอิสระได้ด้วยการออกแบบให้ชิ้นงานมีความหนาบริเวณขอบที่ปล่อยอิสระมากกว่าบริเวณอื่น เนื่องจากบริเวณที่มีความหนามากจะเกิดการสั่นสะเทือนน้อยกว่า ข้อดีของการทราบพฤติกรรมการสั่นสะเทือนล่วงหน้าคือ สามารถออกแบบโครงสร้างโดยหลีกเลี่ยงความถี่ที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์สั่นพ้องโดยการนำเนื้อวัสดุไปติดเพิ่มที่ชิ้นงาน ซึ่งจะทำให้พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานนั้นเปลี่ยนไปจากเดิม

งานในส่วนสุดท้ายเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนในส่วนของวัสดุคอมโพสิท การศึกษามี 2 หัวข้อหลักคือ การศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของชิ้นงานคอมโพสิทเมื่อเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนไป และพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเมื่อมีลักษณะการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกัน หัวข้อแรกพบว่าโครงสร้างแผ่นบางคอมโพสิทที่มีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกันมีค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนแตกต่างกัน แต่ยังคงมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนที่เหมือนกับวัสดุไอโซทรอปิกคือบริเวณชิ้นงานที่มีความหนามากจะมีการสั่นสะเทือนต่ำกว่าบริเวณข้างเคียง การศึกษานี้สามารถนำไปใช้ออกแบบลักษณะอุปกรณ์จับยึดของโครงสร้างต่าง ๆ เพื่อให้ชิ้นส่วนเหล่านั้นมีค่าความถี่ธรรมชาติอยู่ในช่วงที่ต้องการ

สำหรับการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของแผ่นคอมโพสิทเมื่อมีลักษณะการวางตัวของเส้นใยแตกต่างกัน การศึกษาทำโดยจำลองการติดแผ่นลามิเนตเพิ่มบนชิ้นงานที่ตำแหน่งต่างๆ และปรับเปลี่ยนองศาการติดแผ่นลามิเมตผลศึกษาพบว่า ตำแหน่งในการติดแผ่นลามิเนตและองศาการวางตัวเส้นใยของแผ่นลามิเมต จะทำให้ชิ้นงานมีพฤติกรรมการสั่นสะเทือนแตกต่างกัน การติดแผ่นลามิเมตเพิ่มในตำแหน่งและองศาการวางตัวของเส้นใยที่เหมาะสมจะช่วยลดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างตามที่ต้องการได้

จากที่กล่าวมาทั้งหมดทำให้ทราบว่าการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชทำให้สามารถวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างได้ก่อนการสร้างจริง และยังมีประโยชน์ในการช่วยให้วิศวกรออกแบบโครงสร้างเข้าใจพฤติกรรมการสั่นสะเทือนมากขึ้น เนื่องจากพฤติกรรมการสั่นสะเทือนจะเปลี่ยนแปลงตามลักษณะทางกายภาพของโครงสร้าง จึงคลาดเดาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของโครงสร้างได้ยาก โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ที่เขียนขึ้นจะแสดงกระบวนการแก้ปัญหาตามขั้นตอน สามารถตรวจสอบและวิเคราะห์ความหมายได้อย่างสะดวก

7.2 ประโยชน์ที่ได้รับและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ผลการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ที่สำคัญดังนี้

ประโยชน์ข้อแรกซึ่งเป็นส่วนสำคัญของวิทยานิพนธ์นี้คือ สามารถนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น และสามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการแก้สมการ โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถนำไปหาผลเฉลยซึ่งก็คือค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนของของโครงสร้าง ที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น โครงสร้างทำจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ cross-ply ภายใต้เงื่อนไขการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ

ประโยชน์ส่วนถัดมาคือ การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้ในการศึกษาพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น การศึกษานี้ทำให้ทราบถึงพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง เช่น ผลของขนาดสัดส่วนชิ้นงาน ผลของเงื่อนไขของเขตการจับยึด ผลของอัตราส่วน b_1/b และอัตราส่วนของลักษณะการเรียงตัวของเส้นใยกรณีโครงสร้างทำจากวัสดุคอมโพสิท

ประโยชน์ส่วนสุดท้ายคือ ทำให้ทราบว่าระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น นอกจากนี้การศึกษานี้สามารถเป็นแนวทางในการนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไปใช้ในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อนแบบอื่น รวมถึงขยายไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้น

ข้อแนะนำสำหรับการใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในการแก้ปัญหาอื่นในอนาคตคือ การเพิ่มจำนวนพจน์ของฟังก์ชันเริ่มต้นในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากจะสามารถนำไปวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของวัสดุคอมโพสิทที่มีการเรียงตัวของเส้นใยแบบ angle-ply ได้ งานวิจัยในอนาคตที่น่าสนใจอีกส่วนหนึ่งคือ การนำระเบียบวิธีแคนโทโรวิชไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการดัดของแผ่นบาง เป็น

ต้น ข้อควรระวังในการนำโปรแกรมไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นควรศึกษาจำนวนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเริ่มต้นให้มีจำนวนพจน์และเลขนัยสำคัญที่เหมาะสมกับปัญหาที่กำลังศึกษา

รายการอ้างอิง

[1] ปราโมทย์ เดชะอำไพ.ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550.

[2] Xiang, Y. Exact buckling and vibration solutions for stepped rectangular plates. Journal of Sound and Vibration 250 (2002) : 503-517.

[3] Leissa, A.W. Vibration of plates. The United States of America: Office of technology utilization national aeronautics and space administration, 1969.

[4] Xing, Y.F and Liu B. Exact solutions for free vibrations of orthotropic rectangular Mindlin plate. Composite Structures 89 (2009) : 567-574.

[5] Thanawut P. Vibration of symmetrically laminates plates with various boundary conditions using extendrd Kantorovich method. Master thesis Graduate School, Chulalongkorn University, 2010.

[6] Chen, X.L., Liu, G.R., and Lim, S.P. An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape. Composite Structures 59 (2003) : 279-289.

[7] Ungbhakorn V and Singhatanadgid P. Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method. Composite Structures 73 (2006) : 120-128.

[8] Reddy JN. Theory and analysis of elastic plates. Philadelphia, PA. Taylor & Francis, 1999.

[9] Chai GB. Buckling of generally laminate composite plates with various edge support conditions. Comput Struct (1994) : 299-310

[10] Sakata T. and Takahashi K.. Natural frequencies of orthotropic rectangular plates obtained by iterative reduction of the partial differential equation. Journal of Sound and Vibration 189 (1996) : 89-101.

[11] Shufrin, I., Rabinovitch, O., and Eisenberger, M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions-A semi analytical approach. Composite Structures 82 (2008) : 521-531.

[12] Malekzadeh, P. and Shahpari, S.A. Free vibration analysis of variable thickness thin and moderately thick plates with elastically restrained edges by DQM., Thin-walled structures 43 (2005) : 1037-1050.

[13] Lam K.Y. and Amrutharaj G. Natural frequencies of rectangular stepped plates using polynomial beam functions with subsectioning. Applied Acoustics (1995).

[14] Gno SJ., Keane AJ., and Moshreefi-Torbati M. Vibration analysis of stepped thickness plates. Journal of Sound and Vibration 204 : 45-57.

[15] Hull, P.V. and Buchanan, G.R. Vibration of moderately thick square orthotropic stepped thickness plates, Applied acoustics 64 (2003) : 753-763.

[16] Yuan and Dickinson S.M.. The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method. Journal of Sound and Vibration 159 : 39-55.

[17] Eisenberger M. and Alexandrov A.. Computational methods for shell and spatial structure (2000).

[18] Bert, C.W. and Malk, M. Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: A semi-analytical approach. Journal of Sound and Vibration 190 (1996) : 41-63.

[19] Cortinez,V.H. and Laura, P.A.A. Analysis of vibrating rectangular plates of discontinuously varying thickness by means of the Kantorovich extended method, Journal of Sound and Vibration 137(1990) : 457-461.

[20] Turvey, G.J., Mulcahy, N., Widden, M.B. Experimental and computed natural frequencies of square pultruded GRP plates : effects of anisotropy, hole size ratio and edge conditions. Composite structures 50 (2000) : 391-403.

[21] Chaudhuri,R.A., Balaraman, K., Kunukkasseril, V.X. A combined theoretical and experimental investigation on free vibration of thin symmetrically laminated anisotropic plates. Composite structures 67 (2005) : 85-97

[22] Ronald F. Gibson. Principles of composite material mechanics. 1994.

[23] ปราโมทย์ เดชะอำไพ.ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,2550.

[24] Herakovich, C.T. Mechanics of fibrous composites. John Wiley & Sons, Inc : New York, 1998.

[25] Parunya T. The design of boundary condition of plates for vibration experiment. Bachelor of Engineering Mechanical Engineering Chulalongkorn University,2010.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดและคำอธิบายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นสำหรับวิทยานิพนธ์นี้ แบ่งการคำนวณออกเป็น 3 ส่วน ตามรายละเอียดในรูป 4.1 ได้แก่

ส่วนที่ 1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่หาค่าเมตริกซ์ทราบค่าจากฟังก์ชันเริ่มต้นที่ทราบค่า

ส่วนที่ 2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่หาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าเริ่มต้น

ส่วนที่ 3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่แก้ปัญหาค่าเจาะจง โดยพล๊อตกราฟหาค่าเจาะจงที่ทำให้พลังงานรวมมีค่าต่ำสุด แล้วนำค่าเจาะจงที่ได้ไปหาเวกเตอร์เจาะจงสำหรับให้เป็นฟังก์ชันเริ่มต้นในการคำนวณซ้ำรอบต่อไป

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น แบ่งออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่กำหนดฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้น และส่วนที่กำหนดฟังก์ชัน $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้น

หมายเหตุ; - โปรแกรม Maple เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมในวิทยานิพจน์นี้

- ข้อความที่แสดงไว้หลังเครื่องหมาย # เป็นข้อความที่ใช้อธิบายรายละเอียดของโปรแกรมเท่านั้น ไม่มีผลต่อการคำนวณ
- โปรแกรมที่แสดงในภาคผนวกนี้ เป็นตัวอย่างของโปรแกรมที่ใช้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนของชิ้นงานที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นจำนวน 1 ขั้นของชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิก มีเงื่อนไขขอบเขตคือ SCSF

โปรแกรมแรกแสดงการทำซ้ำรอบแรก โดยกำหนดฟังก์ชัน $X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

โปรแกรมส่วนที่หนึ่งแสดงการทำซ้ำในรอบแรก

โดยสมมติฟังก์ชัน *X(x)* เป็นฟังก์ชั่นเริ่มต้น รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

```
> # Vibration Analysis by using Kantorovic Method
> # Assume knowing X (x)
> restart;
> Digits := 150 :
> Nterm := 1 :                # Number of term of X(x)
> Iterm := 80 :
> #Input all of  material properties.
> E1 := 68.9e9 :              # Longitudinal modulus , (Pa)
> E2 := E1 :                  # Transverse modulus , (Pa)
> v12 := 0.33 :               # Poisson ratio
> G12 := E1/(2·(1 + v12)) :   # In-plane shear modulus , (Pa)
> density := 2544.34:         # Density  , kg/m^3
> v21 := v12 * E2 / E1 :
> #Defind geometry of a plate.
> a := 0.2 :                  # Length of the  plates, (m)
> b := 0.2 :                  # Width of the  plates, (m)
> #define step property
> Nstep := 2 :                # number of stepped   +1
> b1 := 0.1 :                 # Width of the first stepped plates, (m)
> b2 := 0.1 :                 # Width of the second stepped plates, (m)
> t[1] := 0.001 :             # Thick of the first stepped plates, (m)
> t[2] := 0.002 :             # Thick of the second stepped plates, (m)
> tt := array(1 ..Nstep, 1 ..1) :
> for i from 1 to Nstep do  tt[i, 1] := t[i];  end do:
> dd11 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd11 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd12 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd22 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd66 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd16 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> dd26 := array(1 ..2, 1 ..1) :
> # frist stepped
> t := tt[1, 1] :
> N := 1 :                    # Number of ply (for composite material)
> N1 := N :
> phi := vector([0]) :        # Stacking sequence
> theta := 0 :                # Angle of rotation
> read "c:/ABD.txt":          # find ABD matrix  ( sub.program1)
```

```
> dd11[1, 1] := D11 :   dd12[1, 1] := D12 :
  dd22[1, 1] := D22 :   dd66[1, 1] := D66 :
  dd16[1, 1] := D16 :   dd26[1, 1] := D26 :
> # second stepped
> t := tt[2, 1] :
> N := 1 :
> N2 := N :
> phi := vector([0]) :
> theta := 0 :
> read "c:/ABD.txt":
> dd11[2, 1] := D11 :   dd12[2, 1] := D12 :
  dd22[2, 1] := D22 :   dd66[2, 1] := D66 :
  dd16[2, 1] := D16 :   dd26[2, 1] := D26 :
> D11 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd11[1, 1]], [dd11[2, 1]]]) :
> D12 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd12[1, 1]], [dd12[2, 1]]]) :
> D22 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd22[1, 1]], [dd22[2, 1]]]) :
> D66 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd66[1, 1]], [dd66[2, 1]]]) :
> D16 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd16[1, 1]], [dd16[2, 1]]]) :
> D26 := array(1 ..Nstep, 1 ..1, [[dd26[1, 1]], [dd26[2, 1]]]) :
> ##-----------------------------Part 1-----------------------------------------##
> #  assume function X(x)
> XX[1] := x^9 :
> with(linalg) :
> X := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Xx := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Xxx := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> for i from 1 to Nterm do
    X[i, 1] := XX[i];
    Xx[i, 1] := diff(X[i, 1], x);
    Xxx[i, 1] := diff(X[i, 1], x, x);
  end do:
> Xt := transpose(X) :
> Xxt := transpose(Xx) :
> Xxxt := transpose(Xxx) :
> #calculate [R] Matrix
> rr1 := evalm(X&*Xt) :
> rr2 := evalm(Xxx&*Xt) :
> rr3 := evalm(X&*Xxt) :
> rr4 := evalm(Xxx&*Xxxt) :
> rr5 := evalm(Xxx&*Xxt) :
> rr6 := evalm(Xx&*Xxt) :
> R1 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
> R2 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
> R3 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
> R4 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
> R5 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
> R6 := array(1 ..Nterm, 1 ..Nterm) :
```

```
>
  for i from 1 to Nterm do
    for j from 1 to Nterm do
      R1[i,j] := evalf(int(rr1[i,j], x = 0..a));
      R2[i,j] := evalf(int(rr2[i,j], x = 0..a));
      R3[i,j] := evalf(int(rr3[i,j], x = 0..a));
      R4[i,j] := evalf(int(rr4[i,j], x = 0..a));
      R5[i,j] := evalf(int(rr5[i,j], x = 0..a));
      R6[i,j] := evalf(int(rr6[i,j], x = 0..a));
    end do;
  end do;
> R1t := transpose(R1) :
> R2t := transpose(R2) :
> R3t := transpose(R3) :
> R4t := transpose(R4) :
> R6t := transpose(R6) :
> R1i := inverse(R1) :
> ##------------------------------Part 2-----------------------------------------##
> # Calculate [M] Matrix
> with(LinearAlgebra) : IM := IdentityMatrix(Nterm) :
```

> $M1_1 := evalm\left(\left(\frac{2\cdot D26[1,1]}{D22[1,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R3 - R3t))\right):$

> $M2_1 := evalm\left(\left(\left(\frac{D12[1,1]}{D22[1,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R2 + R2t))\right) - \left(\left(\frac{4\cdot D66[1,1]}{D22[1,1]}\right)\cdot(R1i\&*R6t)\right)\right):$

> $M3_1 := evalm\left(\left(\frac{2\cdot D16[1,1]}{D22[1,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R5 - R5t))\right):$

> $M4_1 := evalm\left(\left(\frac{D11[1,1]}{D22[1,1]}\right)\cdot(R1i\&*R4t)\right):$

> $M5_1 := evalm\left(\frac{tt[1,1]\cdot N1\cdot IM}{D22[1,1]}\cdot density\right):$

> $M6_1 := evalm((D22[1,1])\cdot(R1t)):$

> $M7_1 := evalm((2\cdot D26[1,1])*R3):$

> $M8_1 := evalm(D12[1,1]\cdot R2t):$

> $M9_1 := evalm((-D22[1,1])\cdot R1t):$

> $M10_1 := evalm((2\cdot D26[1,1])\cdot(R3t - R3)):$

> $M11_1 := evalm(((4\cdot D66[1,1])\cdot R6t) - ((D12[1,1])\cdot R2t)):$

> $M12_1 := evalm((2\cdot D16[1,1])\cdot R5t):$

> $M1_2 := evalm\left(\left(\frac{2\cdot D26[2,1]}{D22[2,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R3 - R3t))\right):$

> $M2_2 := evalm\left(\left(\left(\frac{D12[2,1]}{D22[2,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R2 + R2t))\right) - \left(\left(\frac{4\cdot D66[2,1]}{D22[2,1]}\right)\cdot(R1i\&*R6t)\right)\right):$

> $M3_2 := evalm\left(\left(\frac{2\cdot D16[2,1]}{D22[2,1]}\right)\cdot(R1i\&*(R5 - R5t))\right):$

> $M4_2 := evalm\left(\left(\frac{D11[2,1]}{D22[2,1]}\right)\cdot(R1i\&*R4t)\right):$

```
> M5[2] := evalm( (tt[2, 1]·N2·IM)/(D22[2, 1]) ·density ) :
> M6[2] := evalm( (D22[2, 1]) ·(R1t) ) :
> M7[2] := evalm( (2·D26[2, 1])*R3 ) :
> M8[2] := evalm( D12[2, 1]·R2t ) :
> M9[2] := evalm( (−D22[2, 1])·R1t ) :
> M10[2] := evalm( (2·D26[2, 1]) · (R3t − R3) ) :
> M11[2] := evalm( ((4·D66[2, 1])·R6t) − ((D12[2, 1])·R2t) ) :
> M12[2] := evalm( (2·D16[2, 1])· R5t ) :
> # The recurrence formula.
>
  for i from 1 to Nstep do
    MM[i][0] := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
    MM[i][1] := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
    MM[i][2] := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
    MM[i][3] := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
  end do:

> #first stepped
>
  for i from 1 to Nterm do
  MM[1][0][i, 1] := mm[1][i, 0];
  MM[1][1][i, 1] := mm[1][i, 1];
  MM[1][2][i, 1] := mm[1][i, 2];
  MM[1][3][i, 1] := mm[1][i, 3];
  end do:

>
  for i from 0 to Iterm − 4 do
   MM[1][i + 4] := evalm(simplify(expand(−1·((M1[1]&*MM[1][i + 3]
      ·(1/(i + 4)))
    + (evalf(M2[1]&*MM[1][i + 2]*(1/(i + 3)/(i + 4))))
    + (evalf(M3[1]&*MM[1][i + 1]*(1/(i + 2)/(i + 3)/(i + 4))))
    + (evalf((M4[1] − alpha·M5[1])&*MM[1][i]*(1/(i + 1)/(i + 2)/(i
      + 3)/(i + 4))))))));
  end do:

> for i from 0 to Iterm − 4 do
    MMM[1][i + 4] := (evalm(simplify(MM[1][i + 4])));
  end do:

> MMM[1][0] := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> MMM[1][1] := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> MMM[1][2] := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> MMM[1][3] := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> MMM[1][3] := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
```

```
> for i from 1 to Nterm do
    MMM_1[0][i, 1] := mm_1[i, 0];
    MMM_1[1][i, 1] := mm_1[i, 1];
    MMM_1[2][i, 1] := mm_1[i, 2];
    MMM_1[3][i, 1] := mm_1[i, 3];
  end do:
> #second stepped
> for i from 1 to Nterm do
  MM_2[0][i, 1] := mm_2[i, 0];
  MM_2[1][i, 1] := mm_2[i, 1];
  MM_2[2][i, 1] := mm_2[i, 2];
  MM_2[3][i, 1] := mm_2[i, 3];
  end do:
> for i from 0 to Iterm - 4 do
   MM_2[i + 4] := evalm(simplify(expand(-1·((M1_2&*MM_2[i + 3]
      ·(1/(i + 4)))
    + (evalf(M2_2&*MM_2[i + 2]*(1/(i + 3)/(i + 4))))
    + (evalf(M3_2&*MM_2[i + 1]*(1/(i + 2)/(i + 3)/(i + 4))))
    + (evalf(M4_2 - alpha·M5_2)&*MM_2[i]*(1/(i + 1)/(i + 2)/(i
      + 3)/(i + 4)))))));
  end do:
> for i from 0 to Iterm - 4 do
    MMM_2[i + 4] := (evalm(simplify(MM_2[i + 4])));
  end do:
> MMM_2[0] := array(1..Nterm, 1..1) :
> MMM_2[1] := array(1..Nterm, 1..1) :
> MMM_2[2] := array(1..Nterm, 1..1) :
> MMM_2[3] := array(1..Nterm, 1..1) :
> for i from 1 to Nterm do
    MMM_2[0][i, 1] := mm_2[i, 0];
    MMM_2[1][i, 1] := mm_2[i, 1];
    MMM_2[2][i, 1] := mm_2[i, 2];
    MMM_2[3][i, 1] := mm_2[i, 3];
  end do:
> #[Y] matrix
> with(linalg) :
> Yh1[1] := 0 :
> Yh2[1] := 0 :
```

```
> for i from 0 to Iterm do
    Yh1[1] := expand(Yh1[1] + MMM_1[i][1, 1]·y^i) :
    Yh2[1] := expand(Yh2[1] + MMM_2[i][1, 1]·y^i) :
  end do:
> Y1 := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
> Y2 := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
> for i from 1 to Nterm do
   Y1[i, 1] := Yh1[i];
   Y2[i, 1] := Yh2[i];
  end do:
> #change variable
> for i from 1 to Nterm do
    for j from 0 to 3 do
      mm_1[i,j] := cb[(4·(i − 1)) + j];
      mm_2[i,j] := cb[(4·(i − 1)) + j + 4];
    end do:
  end do:
> #find y driff
> for i from 1 to Nterm do
   YY1[i] := Y1[i, 1];
   YY2[i] := Y2[ i, 1];
  end do:
> Y1y := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Y1yy := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Y1yyy := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Y2y := array(1 .. Nterm, 1 .. 1) :
> Y2yy := array(1 .. Nterm, 1 .. 1) :
> Y2yyy := array(1 .. Nterm, 1 .. 1) :
> for i from 1 to Nterm do
    Y1y[i, 1] := diff(YY1[i], y);
    Y1yy[i, 1] := diff(YY1[i], y, y);
    Y1yyy[i, 1] := diff(YY1[i], y, y, y);
    Y2y[i, 1] := diff(YY2[i], y);
    Y2yy[i, 1] := diff(YY2[i], y, y);
    Y2yyy[i, 1] := diff(YY2[i], y, y, y);
  end do:
> # Natural Boundary condition
> Mx1 := evalm((M6_1&*Y1yy) + (M7_1&*Y1y) + (M8_1&*Y1)) :
> Mx2 := evalm((M6_2&*Y2yy) + (M7_2&*Y2y) + (M8_2&*Y2)) :
> Qx1 := evalm((M9_1&*Y1yyy) + (M10_1&*Y1yy) + (M11_1&*Y1y)
        + (M12_1&*Y1)) :
> Qx2 := evalm((M9_2&*Y2yyy) + (M10_2&*Y2yy) + (M11_2&*Y2y)
        + (M12_2&*Y2)) :
> #Apply boundary condition on y=0
```

```
> BC[1] := evalf(subs(y = 0, Mx1[1, 1])) :
> BC[2] := evalf(subs(y = 0, Y1[1, 1])) :
> #Apply boundary condition on y=b1
> BC[3] := evalf(subs(y = b1, Y1[1, 1] − Y2[1, 1])) :
> BC[4] := evalf(subs(y = b1, Mx1[1, 1] − Mx2[1, 1])) :
> BC[5] := evalf(subs(y = b1, Y1y[1, 1] − Y2y[1, 1])) :
> BC[6] := evalf(subs(y = b1, Qx1[1, 1] − Qx2[1, 1])) :
> #Apply boundary condition on y=b
> BC[7] := evalf(subs(y = b, My2[1, 1])) :
> BC[8] := evalf(subs(y = b, Y2[1, 1])) :
> ##-----------------------------Part 3-----------------------------------------##
> # eigenvalue problem
> R := array(1 ..8· Nterm, 1 ..8· Nterm) :
>
  for i from 1 to 8·Nterm do
    for j from 1 to 8·Nterm do
      R[i,j] := diff(BC[i], cb[j − 1]);
    end do;
  end do;
> with(linalg) :
> bbbb := evalf(det(R)) :
> plot(bbbb · 1e−1, alpha = 0 ..1500000);
> read "D:/maple/newton.txt":
> result1 := Newton([bbbb · 1e−1 = 0], [alpha = 1e6], output
      = {variables, functions});
> alpha := subs(%, alpha) :
> ω := sqrt(alpha) :
> hz := evalf(ω/(2·Pi)) : # Natural frequency, (hz)
> for z from 1 to 4 ·Nterm·Nstep do    eq[z] := BC[z] = 0; end do:
> cb[0] := 0 :
> cb[7] := 1 :
> sols := solve({ eq[3], eq[4], eq[5], eq[6], eq[7], eq[8]}) :
> #cb[0] := subs(sols, cb[0]) :
> cb[1] := subs(sols, cb[1]) :
> cb[2] := subs(sols, cb[2]) :
> cb[3] := subs(sols, cb[3]) :
> cb[4] := subs(sols, cb[4]) :
> cb[5] := subs(sols, cb[5]) :
> cb[6] := subs(sols, cb[6]) :
> #cb[7] := subs(sols, cb[7]) :
> # Check satisfy boundary condition
> for z from 1 to 4·Nterm·Nstep do
        eq[z] := BC[z] = 0;
  end do;
> # Change variables
```

```
> for i from 1 to Nterm do
    for j from 0 to 3 do
      cb[(4·(i − 1)) + j] := mm_1[i,j];
      cb[((4·(i − 1)) + j + 4)] := mm_2[i,j];
    end do:
  end do:

> for i from 1 to Nterm do
    YY1[i] := Y1[i, 1];
    YY2[i] := Y2[i, 1];
  end do:
> YY1N1step1 := YY1[1] :
> save YY1N1step1, "D:/maple/1YY1N1step1.txt":
> YY1N1step2 := YY2[1] :
> save YY1N1step2, "D:/maple/1YY1N1step2.txt":
> YY := piecewise (y > 0 and y ≤ b1, YY1[1], y > b1 and y < b, YY2[1]);
> save YY, "D:/maple/YY1N1.txt":
> w := XX[1]*YY :
> plot3d(w/1e1, x = 0 ..a, y = 0 ..b);        # Plot mode shape
> with(plots) :
> contourplot (w, x = 0 ..a, y = 0 ..b, grid= [25, 25]);     # Plot mode shape-contour
>##-------------------------------End program-------------------------------##
```

โปรแกรมส่วนที่สองแสดงการทำซ้ำในรอบที่สอง

โดยนำฟังก์ชัน *Y(y)* ที่ได้จากการทำซ้ำในรอบแรกเป็นฟังก์ชั่นเริ่มต้น

รายละเอียดของโปรแกรมมีดังนี้

```
> # Vibration Analysis by using Kantorovic Method   ` `
> #  knowing Y (y)
> restart;
> Digits := 150 :
> Nterm := 1 :                # Number of term of X(x`
> Iterm := 80 :
> #Input all of  material properties.
> E1 := 68.9e9 :              # Longitudinal modulus , (Pa)
> E2 := E1 :                  # Transverse modulus , (Pa)
> v12 := 0.33 :               # Poisson ratio
> G12 := E1/(2·(1 + v12)) :   # In-plane shear modulus , (Pa)
> density := 2544.34:         # Density  , kg/m^3
> v21 := v12*E2/E1 :
> #Defind geometry of a plate.
> a := 0.2 :                  # Length of the  plates, (m)
> b := 0.2 :                  # Width of the  plates, (m)
```

```
> #define step property
> Nstep := 2 :                 # number of stepped  +1
> b1 := 0.1 :                  # Width of the first stepped plates, (m)
> b2 := 0.1 :                  # Width of the second stepped plates, (m)
> t[1] := 0.001 :              # Thick of the first stepped plates, (m)
> t[2] := 0.002 :              # Thick of the second stepped plates, (m)
> tt := array(1..Nstep, 1..1) :
> for i from 1 to Nstep do  tt[i, 1] := t[i];  end do:
> dd11 := array(1..2, 1..1) :
> dd12 := array(1..2, 1..1) :
> dd22 := array(1..2, 1..1) :
> dd66 := array(1..2, 1..1) :
> dd16 := array(1..2, 1..1) :
> dd26 := array(1..2, 1..1) :
> # frist stepped
> t := tt[1, 1] :
> N := 1 :                     # Number of ply (for composite material)
> N1 := N :
> phi := vector([0]) :         # Stacking sequence
> theta := 0 :                 # Angle of rotation
> read "c:/ABD.txt":           # find ABD matrix  ( sub.program1)
> dd11[1, 1] := D11 :   dd12[1, 1] := D12 :
  dd22[1, 1] := D22 :   dd66[1, 1] := D66 :
  dd16[1, 1] := D16 :   dd26[1, 1] := D26 :

> # second stepped
> t := tt[2, 1] :
> N := 1 :
> N2 := N :
> phi := vector([0]) :
> theta := 0 :
> read "c:/ABD.txt":
> dd11[2, 1] := D11 :   dd12[2, 1] := D12 :
  dd22[2, 1] := D22 :   dd66[2, 1] := D66 :
  dd16[2, 1] := D16 :   dd26[2, 1] := D26 :

> D11 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd11[1, 1]], [dd11[2, 1]]]) :
> D12 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd12[1, 1]], [dd12[2, 1]]]) :
> D22 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd22[1, 1]], [dd22[2, 1]]]) :
> D66 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd66[1, 1]], [dd66[2, 1]]]) :
> D16 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd16[1, 1]], [dd16[2, 1]]]) :
> D26 := array(1..Nstep, 1..1, [[dd26[1, 1]], [dd26[2, 1]]]) :
> ##----------------------------Part 1----------------------------------------##
> #  input function Y(y)
> read "D:/maple/1YY1N1step1.txt":
> YY1[1] := YY1N1step1 :
> read "D:/maple/1YY1N1step2.txt":
> YY2[1] := YY1N1step2 :
> #Calculate [S] Matrix.
> with(linalg) :
```

```
> Y1 := array(1..Nterm, 1..1) :
> Y1y := array(1..Nterm, 1..1) :
> Y1yy := array(1..Nterm, 1..1) :
> Y2 := array(1..Nterm, 1..1) :
> Y2y := array(1..Nterm, 1..1) :
> Y2yy := array(1..Nterm, 1..1) :
>
  for i from 1 to Nterm do
    Y1[i, 1] := YY1[i] :
    Y1y[i, 1] := diff(Y1[i, 1], y) :
    Y1yy[i, 1] := diff(Y1[i, 1], y, y) :
    Y2[i, 1] := YY2[i] :
    Y2y[i, 1] := diff(Y2[i, 1], y) :
    Y2yy[i, 1] := diff(Y2[i, 1], y, y) :
  end do:
> Y1t := transpose(Y1) :
> Y1yt := transpose(Y1y) :
> Y1yyt := transpose(Y1yy) :
> Y2t := transpose(Y2) :
> Y2yt := transpose(Y2y) :
> Y2yyt := transpose(Y2yy) :
> #calculate [S] Matrix
> ss11 := evalm(Y1&*Y1t) :
> ss21 := evalm(Y1&*Y1yyt) :
> ss31 := evalm(Y1&*Y1yt) :
> ss41 := evalm(Y1yy&*Y1yyt) :
> ss51 := evalm(Y1yy&*Y1yt) :
> ss61 := evalm(Y1y&*Y1yt) :
> ss12 := evalm(Y2&*Y2t) :
> ss22 := evalm(Y2&*Y2yyt) :
> ss32 := evalm(Y2&*Y2yt) :
> ss42 := evalm(Y2yy&*Y2yyt) :
> ss52 := evalm(Y2yy&*Y2yt) :
> ss62 := evalm(Y2y&*Y2yt) :
> sss11 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss21 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss31 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss41 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss51 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss61 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss12 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss22 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss32 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss42 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss52 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> sss62 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
```

```
>
  for i from 1 to Nterm do
    for j from 1 to Nterm do
      sss11[i,j] := evalm(expand(ss11[i,j]));
      sss21[i,j] := evalm(expand(ss21[i,j]));
      sss31[i,j] := evalm(expand(ss31[i,j]));
      sss41[i,j] := evalm(expand(ss41[i,j]));
      sss51[i,j] := evalm(expand(ss51[i,j]));
      sss61[i,j] := evalm(expand(ss61[i,j]));

      sss12[i,j] := evalm(expand(ss12[i,j]));
      sss22[i,j] := evalm(expand(ss22[i,j]));
      sss32[i,j] := evalm(expand(ss32[i,j]));
      sss42[i,j] := evalm(expand(ss42[i,j]));
      sss52[i,j] := evalm(expand(ss52[i,j]));
      sss62[i,j] := evalm(expand(ss62[i,j]));
    end do:
  end do:
```

```
> S1h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S2h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S3h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S4h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S5h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S6h1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S1h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S2h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S3h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S4h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S5h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S6h2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
for i from 1 to Nterm do
  for j from 1 to Nterm do
    S1h1[i,j] := (int(sss11[i,j], y));
    S2h1[i,j] := (int(sss21[i,j], y));
    S3h1[i,j] := (int(sss31[i,j], y));
    S4h1[i,j] := (int(sss41[i,j], y));
    S5h1[i,j] := (int(sss51[i,j], y));
    S6h1[i,j] := (int(sss61[i,j], y));
    S1h2[i,j] := (int(sss12[i,j], y));
    S2h2[i,j] := (int(sss22[i,j], y));
    S3h2[i,j] := (int(sss32[i,j], y));
    S4h2[i,j] := (int(sss42[i,j], y));
    S5h2[i,j] := (int(sss52[i,j], y));
    S6h2[i,j] := (int(sss62[i,j], y));
  end do:
end do:
```

```
> S11 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S21 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S31 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S41 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S51 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S61 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
```

```
> S12 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S22 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S32 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S42 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S52 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S62 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> for i from 1 to Nterm do
    for j from 1 to Nterm do
        S11[i,j] := evalf((subs(y = b1, S1h1[i,j])) - (subs(y = 0, S1h1[i,j])));
        S21[i,j] := evalf((subs(y = b1, S2h1[i,j])) - (subs(y = 0, S2h1[i,j])));
        S31[i,j] := evalf((subs(y = b1, S3h1[i,j])) - (subs(y = 0, S3h1[i,j])));
        S41[i,j] := evalf((subs(y = b1, S4h1[i,j])) - (subs(y = 0, S4h1[i,j])));
        S51[i,j] := evalf((subs(y = b1, S5h1[i,j])) - (subs(y = 0, S5h1[i,j])));
        S61[i,j] := evalf((subs(y = b1, S6h1[i,j])) - (subs(y = 0, S6h1[i,j])));
        S12[i,j] := evalf((subs(y = b, S1h2[i,j])) - (subs(y = b1, S1h2[i,j])));
        S22[i,j] := evalf((subs(y = b, S2h2[i,j])) - (subs(y = b1, S2h2[i,j])));
        S32[i,j] := evalf((subs(y = b, S3h2[i,j])) - (subs(y = b1, S3h2[i,j])));
        S42[i,j] := evalf((subs(y = b, S4h2[i,j])) - (subs(y = b1, S4h2[i,j])));
        S52[i,j] := evalf((subs(y = b, S5h2[i,j])) - (subs(y = b1, S5h2[i,j])));
        S62[i,j] := evalf((subs(y = b, S6h2[i,j])) - (subs(y = b1, S6h2[i,j])));
    end do:
  end do:
> S1 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S2 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S3 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S4 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S5 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S6 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S7 := array(1..Nterm, 1..Nterm) :
> S1 := evalm((D11[1, 1]·S11) + (D11[2, 1]·S12)) :
> S2 := evalm((D12[1, 1]·S21) + (D12[2, 1]·S22)) :
> S3 := evalm((D16[1, 1]·S31) + (D16[2, 1]·S32)) :
> S4 := evalm((D22[1, 1]·S41) + (D22[2, 1]·S42)) :
> S5 := evalm((D26[1, 1]·S51) + (D26[2, 1]·S52)) :
> S6 := evalm((D66[1, 1]·S61) + (D66[2, 1]·S62)) :
> S7 := evalm((tt[1, 1]·N1·S11) + (tt[2, 1]·N2·S12)) :
> S1t := transpose(S1) :
> S2t := transpose(S2) :
> S3t := transpose(S3) :
> S4t := transpose(S4) :
> S5t := transpose(S5) :
> S6t := transpose(S6) :
> S7t := transpose(S7) :
> S1i := inverse(S1) :
> ##-----------------------------Part 2-----------------------------------------##
> # Calculate [N] Matrix
> with(LinearAlgebra) :
> IM := IdentityMatrix(Nterm) :
> N1 := evalm(2·(S1i&*(S3 - S3t))) :
```

```
> N2 := evalm( (S1i&*(S2 + S2t))−(4· S1i&* S6t)) :
> N3 := evalm(2·(S1i&*(S5 − S5t))) :
> N4 := evalm(S1i&*S4t) :
> N5 := evalm(density·(S1i&*IM&*S7)) :
> N6 := evalm(S1t) :
> N7 := evalm(2·S3t) :
> N8 := evalm(S2) :
> N9 := evalm(−S1t) :
> N10 := evalm(2·(S3t − S3)) :
> N11 := evalm((4·S6 t) − (S2)) :
> N12 := evalm(2·S5t) :
> NN[0] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NN[1] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NN[2] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NN[3] := array(1..Nterm, 1..1) :
>
  for i from 1 to Nterm do
    NN[0][i, 1] := nn[i, 0];
    NN[1][i, 1] := nn[i, 1];
    NN[2][i, 1] := nn[i, 2];
    NN[3][i, 1] := nn[i, 3];
  end do:

> # The recurrence formula
> for i from 0 to Iterm − 4 do
    NN[i + 4] := evalm(simplify(expand(−1·((N1&*NN[i + 3]·(1/(i
        + 4)))
      + (evalf(N2&*NN[i + 2]*(1/(i + 3)/(i + 4))))
      + (evalf(N3&*NN[i + 1]*(1/(i + 2)/(i + 3)/(i + 4))))
      + (evalf(N4 − lambda·N5)&*NN[i]*(1/(i + 1)/(i + 2)/(i
        + 3)/(i + 4)))))));

  end do:
> NNN[0] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NNN[1] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NNN[2] := array(1..Nterm, 1..1) :
> NNN[3] := array(1..Nterm, 1..1) :
>
  for i from 1 to Nterm do
    NNN[0][i, 1] := nn[i, 0];
    NNN[1][i, 1] := nn[i, 1];
    NNN[2][i, 1] := nn[i, 2];
    NNN[3][i, 1] := nn[i, 3];
  end do:

>
  for i from 0 to Iterm − 4 do
    NNN[i + 4] := (evalm(simplify(NN[i + 4])));
  end do:

> # find X Matrix
> Xh[1] := 0 :
>
  for i from 0 to Iterm do
    Xh[1] := expand(Xh[1] + NNN[i][1, 1]· x^i);
  end do:
```

```
> with(linalg) :
> X := array(1 ..Nterm, 1 ..1);
> for i from 1 to Nterm do
      X[i, 1] := Xh[i];
  end do:
> #change variable
> for i from 1 to Nterm do
     for j from 0 to 3 do
       nn[i, j] := ca[(4·(i − 1)) + j];
     end do;
  end do;
> #find x driff
> for i from 1 to Nterm do   XX[i] := X[i, 1];  end do:
> Xx := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Xxx := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> Xxxx := array(1 ..Nterm, 1 ..1) :
> for i from 1 to Nterm do
     Xx[i, 1] := diff(XX[i], x);
     Xxx[i, 1] := diff(XX[i], x, x);
     Xxxx[i, 1] := diff(XX[i], x, x, x);
  end do:
> # Natural Boundary condition
> My := evalm((N6&*Xxx) + (N7&*Xx) + (N8&*X)) :
> Qy := evalm((N9&*Xxxx) + (N10&*Xxx) + (N11&*Xx) + (N12
      &*X)) :
> #Apply boundary condition on y=0
> BC[1] := evalf(subs(x = 0, X[1, 1])) :
> BC[2] := evalf(subs(x = 0, Xx[1, 1])) :
> BC[3] := evalf(subs(x = a, My[1, 1])) :
> BC[4] := evalf(subs(x = a, Qy[1, 1])) :
> ##------------------------------Part 3------------------------------------------##
> # eigenvalue problem
> S := array(1 ..4· Nterm, 1 ..4·Nterm);
> for i from 1 to 4·Nterm do
      for j from 1 to 4·Nterm do
        S[i, j] := diff(BC[i], ca[j − 1]);
     end do;
  end do;
> with(linalg) :
> aaaa := evalf(det(S)) :
> plot(aaaa / 1e−10, lambda= 0 ..200000);
> read "D:/maple/newton.txt":
> result1 := Newton([aaaa / 1e−6 = 0], [lambda= 1e6], output= {variables, functions})
> lambda := subs(%, lambda) :
> ω := sqrt(evalf(lambda)) :
> hz := evalf(ω/(2·Pi)) :
> for z from 1 to 4·Nterm do   eq[z] := BC[z] = 0 :  end do:
```

```
> ca[0] := 0 :
> ca[3] := 1 :
> sols := solve({eq[3], eq[4]}) :
> #ca[0]:=subs(sols,ca[0]):
> ca[1] := subs(sols, ca[1]) :
> ca[2] := subs(sols, ca[2]) :
> #ca[3]:=subs(sols,ca[3]):
> # Check satisfy boundary condition
> for z from 1 to 4·Nterm do
      eq[z] := BC[z] = 0;
  end do:
> # Change variables
>
   for i from 1 to Nterm do
     for j from 1 to Nterm do
       ca[(4·(i−1)) + j] := nn[i,j];
     end do:
   end do:
> for i from 1 to Nterm do   XX[i] := X[i, 1];  end do:
> XX2N1step := XX[1] :
> save XX2N1step, "D:/maple/2XX2N1step.txt":
> read "D:/maple/YY1N1.txt":
> w := XX[1]*YY:
> plot3d(w/1e1, x = 0..a, y = 0..b) :     # Plot mode shape
> with(plots) :
> contourplot(w, x = 0..a, y = 0..b, grid= [25, 25]);       # Plot mode shape-contour
>##------------------------------End program------------------------------##
```

โปรแกรมย่อยที่ 1 (*Sub.program1*) โปรแกรม ABD.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/ABD.txt

เป็นโปรแกรมที่ใช้เพื่อคำนวณ [ABD] ตามสมการที่ 3-6 ถึงสมการที่ 3-8

รายละเอียดของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

```
> #### DETERMINATION OF [ABD] AT THETA ANGLE ROTATION ####
> #### Input material properties and stacking sequence###
> #Calculate the lamina stiffness matrix [Q] in material axis
> Q11:=E1^2/(E1-v12^2*E2):
> Q12:=v12*E1*E2/(E1-v12^2*E2):
> Q22:=E1*E2/(E1-v12^2*E2):
> Q66:=G12:
> #Calculate invariants U
> U1:= (3*Q11+3*Q22+2*Q12+4*Q66)/8:
> U2:= (Q11-Q22)/2:
> U3:= (Q11+Q22-2*Q12-4*Q66)/8:
> U4:= (Q11+Q22+6*Q12-4*Q66)/8:
> U5:= (Q11+Q22-2*Q12+4*Q66)/8:
> #Calculate the distance from midplane to the edge of each ply, z[1] to z[N+1]
```

```
> for i from 1 to N+1 do
     z[i]:=t*(i-1-N/2)
  od:
> #Calculate the invariants V (a total of 15 invariants)
> VA0 := N*t: VB0:=0: VD0:=(N*t)^3/12:
> VA1:=0:
  for i from 1 to N do
     VA1:=VA1+cos(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
  od:
> VA2:=0:
  for i from 1 to N do
     VA2:=VA2+sin(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
  od:
> VA3:=0:
  for i from 1 to N do
     VA3:=VA3+cos(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
  od:
> VA4:=0:
  for i from 1 to N do
     VA4:=VA4+sin(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
  od:
> VB1:=0:
  for i from 1 to N do
     VB1:=VB1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
  od:
  VB1:=VB1/2:
> VB2:=0:
  for i from 1 to N do
     VB2:=VB2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
  od:
  VB2:=VB2/2:
> VB3:=0:
  for i from 1 to N do
     VB3:=VB3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
  od:
  VB3:=VB3/2:
> VB4:=0:
  for i from 1 to N do
     VB4:=VB4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
  od:
  VB4:=VB4/2:
> VD1:=0:
  for i from 1 to N do
     VD1:=VD1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
  od:
  VD1:=VD1/3:
> VD2:=0:
  for i from 1 to N do
     VD2:=VD2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
  od:
  VD2:=VD2/3:
> VD3:=0:
  for i from 1 to N do
     VD3:=VD3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
  od:
```

```
    VD3:=VD3/3:
>   VD4:=0:
    for i from 1 to N do
      VD4:=VD4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
    od:
    VD4:=VD4/3:
>   #This are the results: [ABD] w.r.t. the rotated axis.
>A11:=evalf(U1*VA0+U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VA2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
> A22:=evalf(U1*VA0-U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
>A12:=evalf(U4*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
>A66:=evalf(U5*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
>A16:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)+2*U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> A26:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)-2*U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:

>B11:=evalf(U1*VB0+U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VB2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
> B22:=evalf(U1*VB0-U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
>B12:=evalf(U4*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
>B66:=evalf(U5*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
>B16:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)+2*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> B26:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)-2*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:

>D11:=evalf(U1*VD0+U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VD2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D22:=evalf(U1*VD0-U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD2*sin(2*theta*Pi/180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D12:=evalf(U4*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D66:=evalf(U5*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
> D16:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)+2*U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
> D26:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)-2*U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:

>ABD:=linalg[matrix](6,6,[[A11,A12,A16,B11,B12,B16],[A12,A22,A26,B12,B22,B26],[A16,A26,A66,B16,B26,B66],[B11,B12,B16,D11,D12,D16],[B12,B22,B26,D12,D22,D26],[B16,B26,B66,D16,D26,D66]]);

>##----------------------eng sub.program1-------------------------------##
```

ภาคผนวก ข

ขั้นตอนการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ภาคผนวก ข

ขั้นตอนการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ภาคผนวก ข. แสดงขั้นตอนการใช้โปรแกรม Ansys (Mechanical APDL) ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้าง (Structure) ที่สนใจ รายละเอียดและขั้นตอนการดำเนินงานนั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนตามประเภทของชิ้นงาน ได้แก่ ชิ้นงานที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก และชิ้นงานทำจากวัสดุคอมโพสิท ในการแก้ปัญหานั้น เมนูหลักที่แสดงอยู่ทางด้านซ้ายมือของโปรแกรมจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนที่จำเป็น 3 ส่วน ได้แก่

1. Preprocessor ส่วนนี้เป็นการกำหนดหรือสร้างชิ้นงานที่ต้องการวิเคราะห์ โดยการสร้างโมเดลของชิ้นงาน แล้วกำหนดคุณสมบัติของวัสดุที่ต้องการศึกษา รวมถึงการแบ่งชิ้นงานเป็นเอลิเมนต์เล็ก ๆ เพื่อเตรียมสำหรับวิเคราะห์ข้อมูล

2. Solution ส่วนนี้เป็นการเลือกชนิดการวิเคราะห์ของชิ้นงาน การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต รวมถึงการหาผลลัพธ์

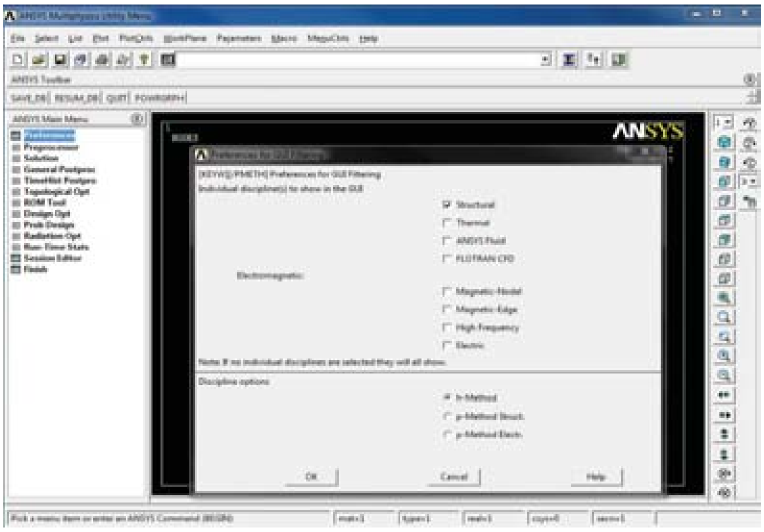
3. General Posproc เป็นส่วนที่ใช้แสดงผลเฉลยของโปรแกรม สำหรับงานวิจัยนี้มุ่งหาคำตอบที่เป็นค่าความถี่ธรรมชาติ และรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

ข.1 การใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างทำจากวัสดุไอโซทรอปิก

หัวข้อนี้แสดงขั้นตอนการใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นทำจากวัสดุไอโซทรอปิก โดยกำหนดให้ชิ้นงานทำจากวัสดุที่มีค่า E คือ 68.9 GPa ν คือ 0.33 และความหนาแน่นมีค่าเท่ากับ 2544.34 kg/cm^3 ชิ้นงานมีขนาดกว้าง (a) คือ 300 mm. ยาว (b) คือ 200 mm. มีอัตราส่วน b_1/b มีค่าเท่ากับ 0.5 h_1 มีค่า 2 mm. และ h_2 มีค่า 1 mm. การหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือนมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดชนิดการวิเคราะห์

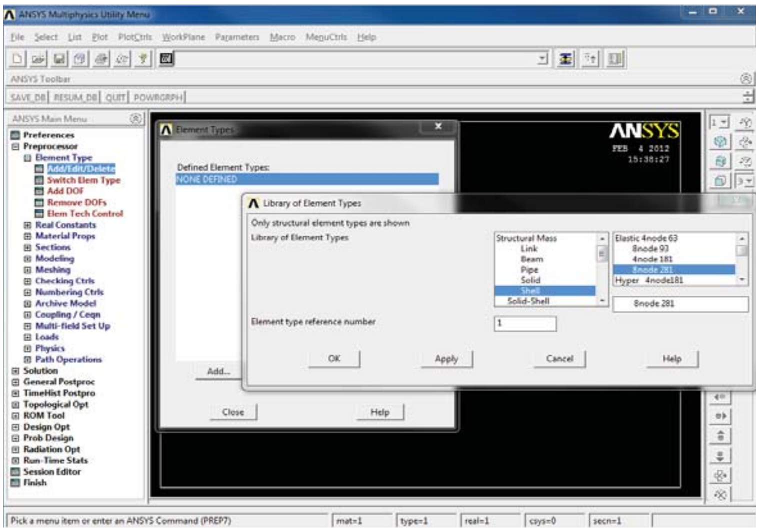
   : Preferences > Structural > OK



ภาพที่ ข.1 การกำหนดชนิดการวิเคราะห์เป็น Structure

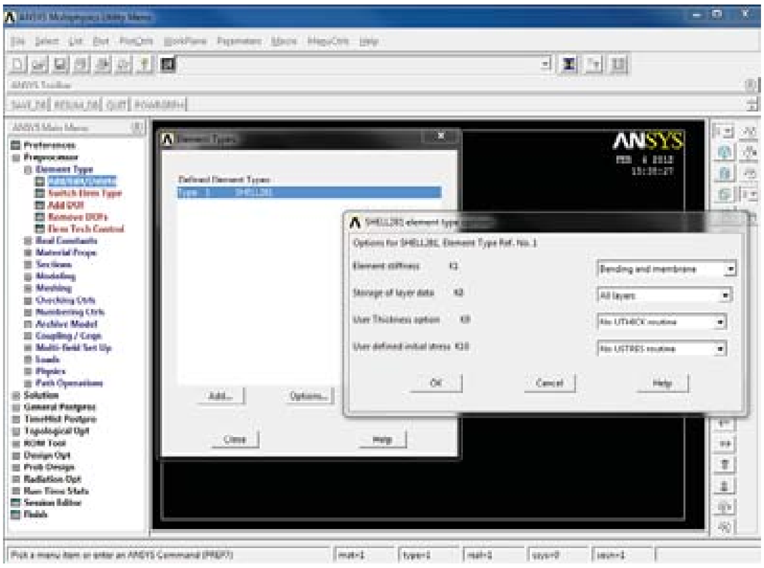
2. กำหนดชนิดของชิ้นงาน

: Preprocessor > Element type > Add/Edit/Delete > Add… > เลือก Shell > เลือก 8 node 281 สำหรับวัสดุไอโซทรอปิก > OK



ภาพที่ ข.2 การกำหนดชนิดชิ้นงานของวัสดุไอโซทรอปิก

เลือก Options… > เปลี่ยน Storage of layer data (K8) เป็น All layers > OK > Close

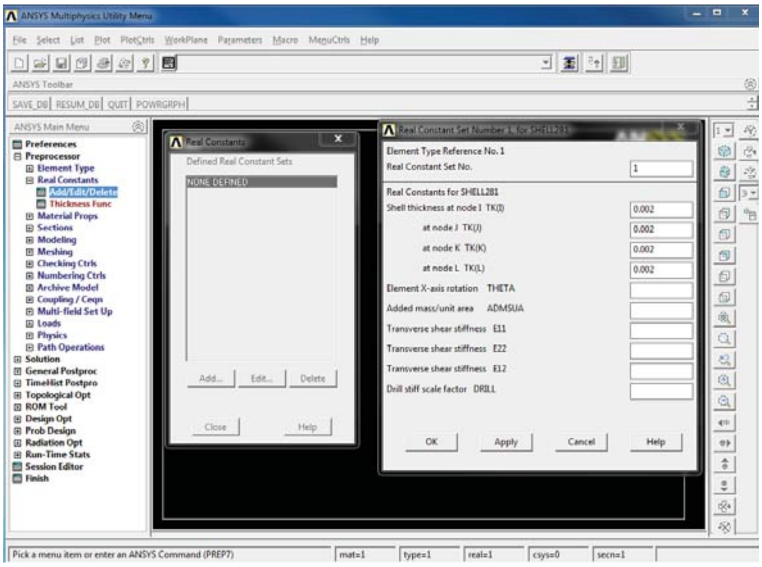


ภาพที่ ข.3 การแก้ไขชนิดชิ้นงานของวัสดุไอโซทรอปิก

3. กำหนดลักษณะส่วนย่อยของชิ้นงาน

เป็นการกำหนดลักษณะของชิ้นส่วนต่าง ๆ ของชิ้นงาน ในที่นี้ชิ้นงานที่มีความหนาต่างกัน 2 ความหนา ความหนาที่ 1 กำหนดให้คือ Real Constant Set No.1 ความหนาที่ 2 กำหนดให้คือ Real Constant Set No.2

: Preprocessor > Real Constants > Add/Edit/Delete > Add… > เลือก Type 1 SHELL 281 > OK > ใส่ความสูงของชั้นที่ 1 เช่น 0.002 m. > OK

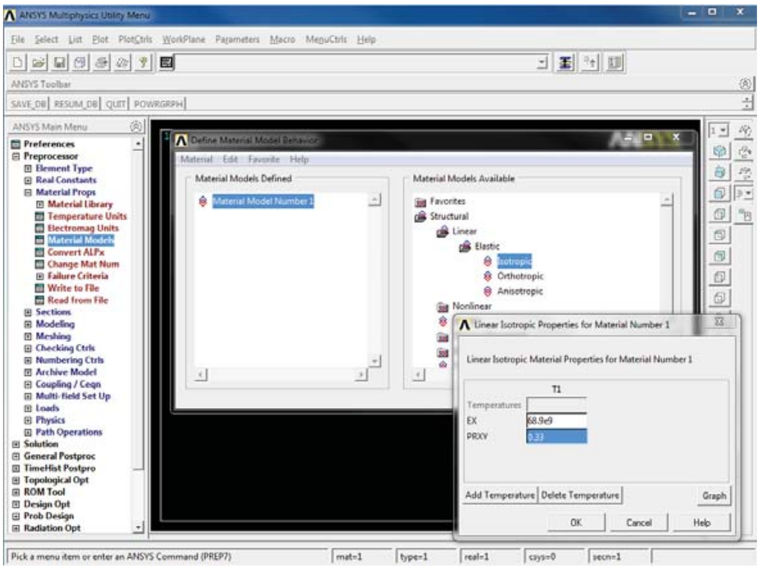


ภาพที่ ข.4 การกำหนดลักษณะของชิ้นงานตามความสูงของแต่ละชั้น

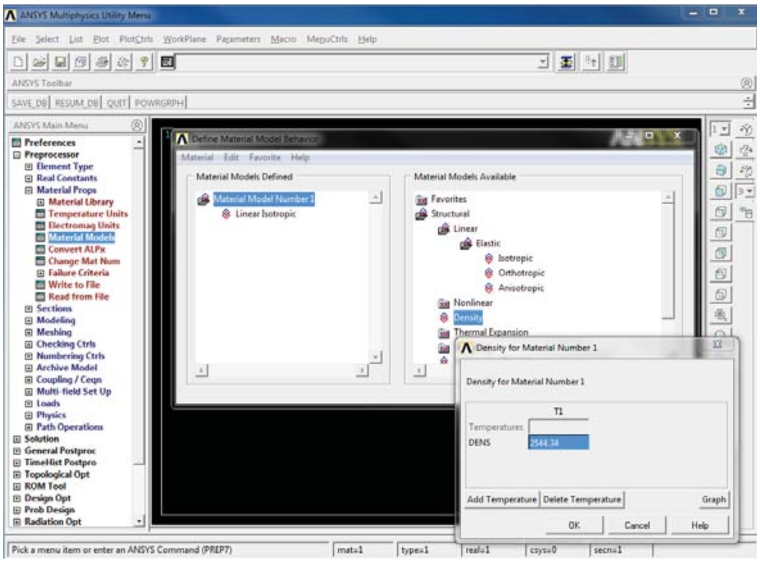
กำหนดชิ้นส่วนที่สองเพิ่ม โดยการเลือก Add… แล้วทำเดิม แต่เปลี่ยนความสูงของขั้นที่สอง คือ 0.001 m. แล้ว Close หน้าต่างออกมา

4. กำหนดคุณสมบัติของวัสดุ

: Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic > ใส่ค่ายังมอดูลัสและอัตราส่วนปัวซอง > OK > Density > OK > Material > Exit



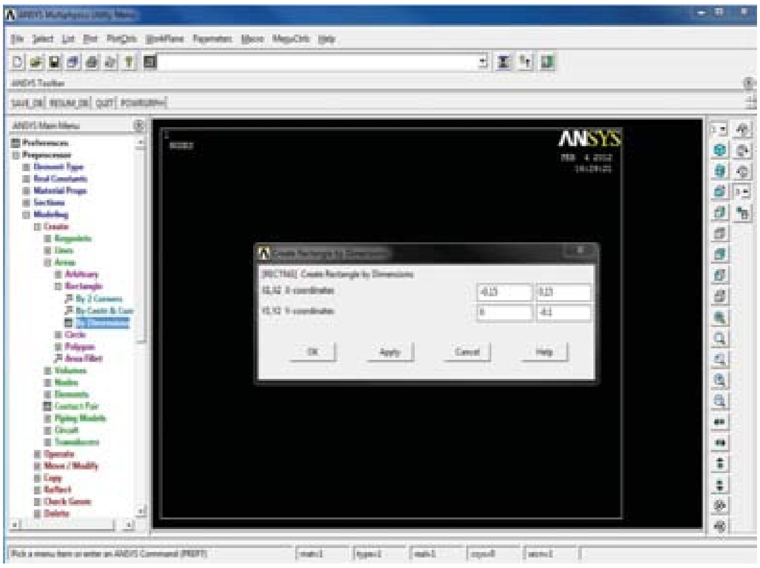
ภาพที่ ข.5 การกำหนดค่ายังมอดูลัสและอัตราส่วนปัวซอง



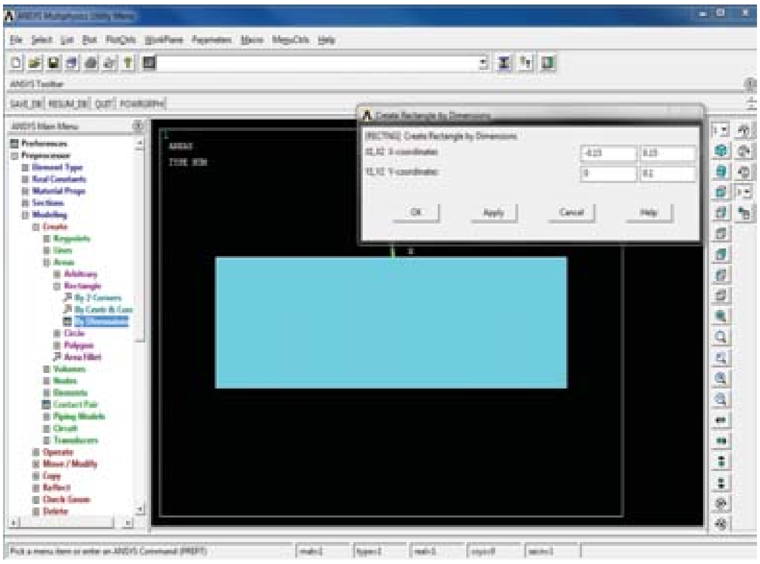
ภาพที่ ข.6 การกำหนดค่าความหนาแน่น

5. สร้างชิ้นงาน

: Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle > By Dimensions > กำหนดขนาดชิ้นงานส่วนที่ 1 > เลือก Apply > กำหนดขนาดชิ้นงานส่วนที่ 2 > OK



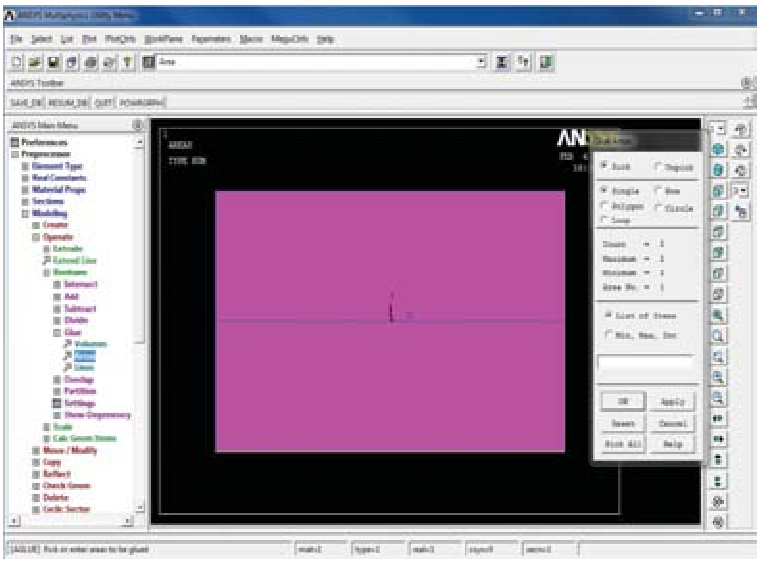
ภาพที่ ข.7 กำหนดขนาดชิ้นงานส่วนที่ 1



ภาพที่ ข.8 กำหนดขนาดชิ้นงานส่วนที่ 2

6. ติดชิ้นงานเข้าด้วยกัน

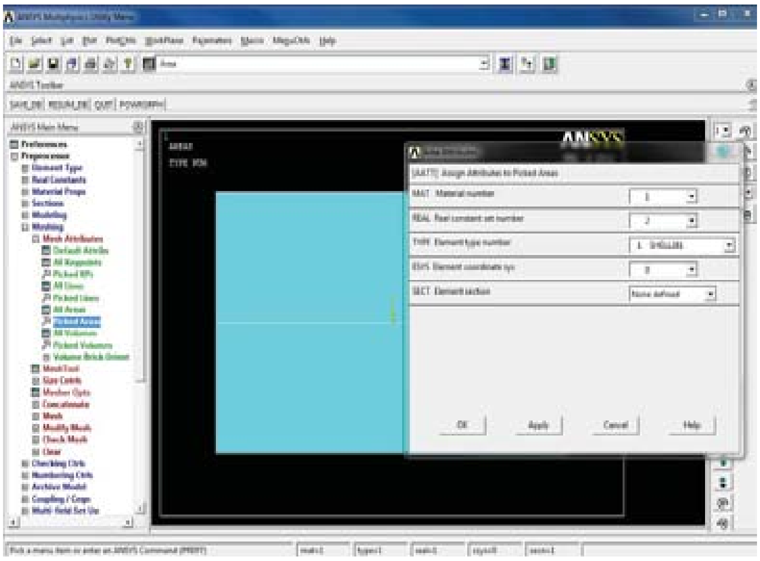
: Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Glue > Area > เลือกชิ้นงาน > OK



ภาพที่ ข.9 การติดชิ้นงานเข้าด้วยกัน

7. กำหนดลักษณะชิ้นงาน

: Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Picked Areas > เลือก Area > OK > เลือกค่า Real Constant set number ตามที่กำหนดไว้ด้านบน



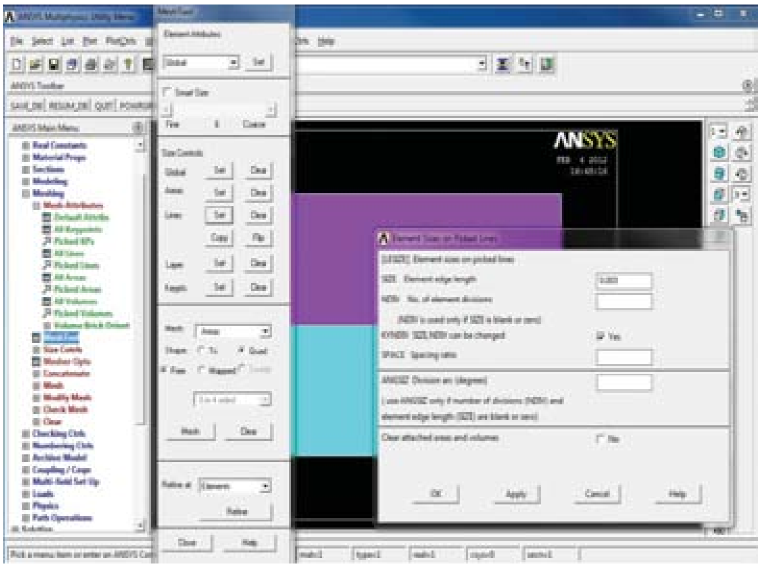
ภาพที่ ข.10 การกำหนดลักษณะชิ้นงาน

หากต้องการให้หน้าจอแสดงตัวอักษรเพื่อบอกลักษณะชิ้นงาน สามารถตั้งค่าได้ดังนี้

: PlotCtrls > Numbering… > กำหนด Elem/Attrib numbering เป็น real const num > OK

8. แบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยใช้จำนวนเอลิเมนต์ย่อยให้มากพอจนกระทั่งผลเฉลยที่ได้ไม่เปลี่ยนแปลง

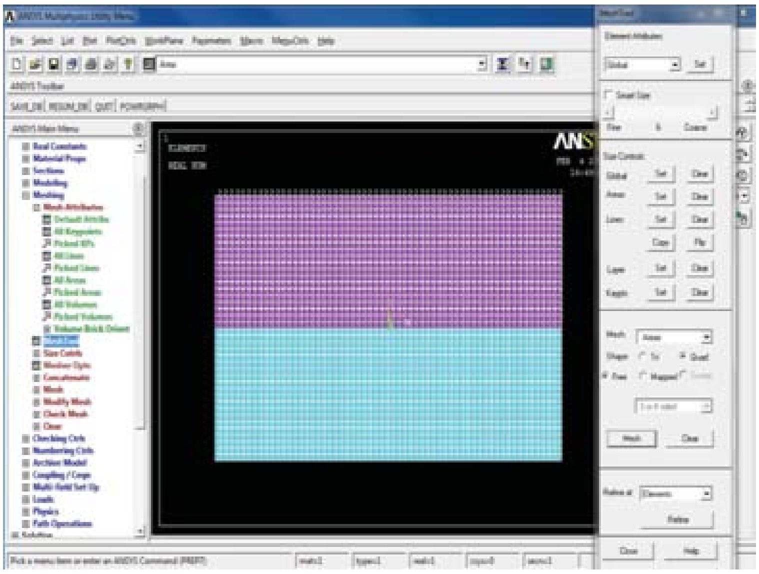
: Preprocessor > Meshing > Mesh Tool > Lines > Set > เลือกขอบทุกด้าน > OK > ใส่ค่าความยาวของแต่ละเอลิเมนต์ที่ต้องการแบ่ง >OK



ภาพที่ ข.11 การแบ่งขนาดเอลิเมนต์ย่อย

หากต้องการให้หน้าจอแสดงผลการแบ่งเอลิเมนต์ สามารถทำได้ดังนี้

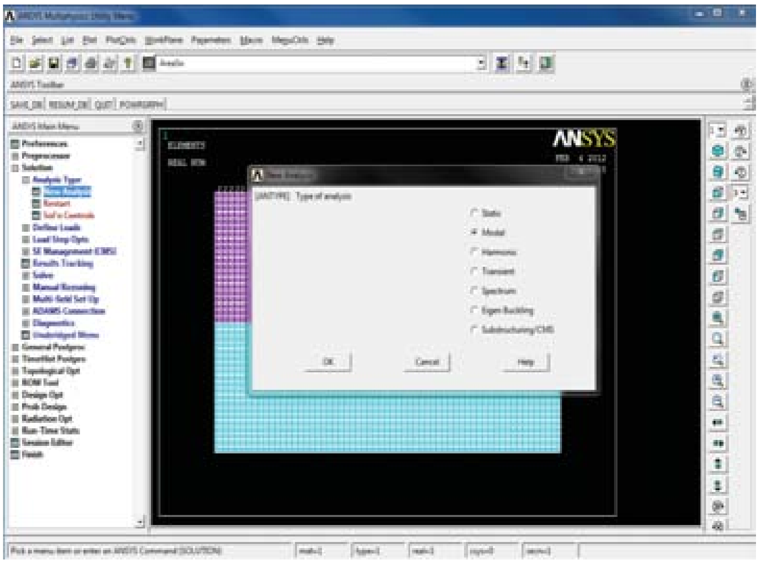
: Preprocessor > Meshing > Mesh Tool > Mesh > Pick All



ภาพที่ ข.12 หน้าจอแสดงผลการแบ่งเอลิเมนต์

9. กำหนดชนิดการวิเคราะห์

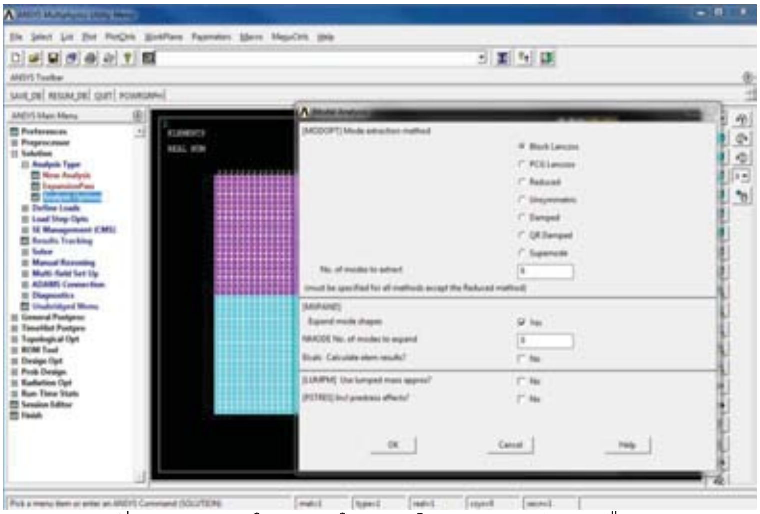
:Solution > Analysis Type > New Analysis > Modal > OK



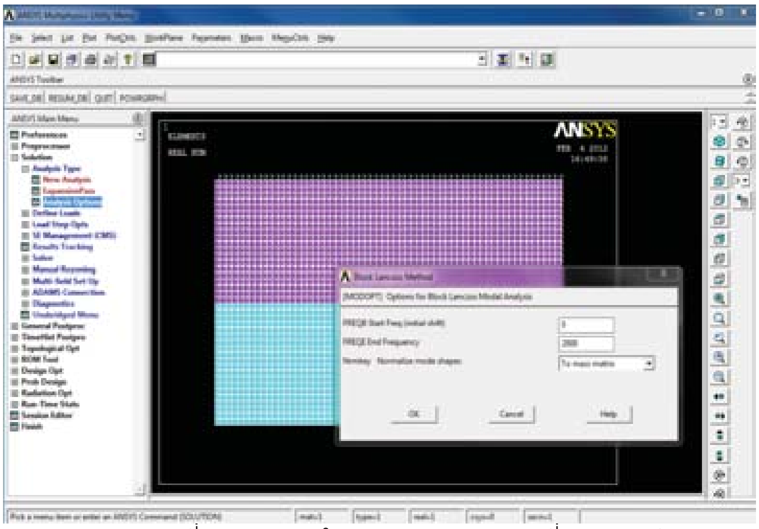
ภาพที่ ข.12 การกำหนดชนิดการวิเคราะห์

เมื่อเลือกชนิดการวิเคราะห์คือ Modal แล้วต้องใส่จำนวนโหมดการสั่นสะเทือนที่สนใจศึกษาและช่วงของช่วงของค่าความถี่ธรรมชาติที่จะให้โปรแกรมคำนวณ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

:Solution > Analysis Type > Analysis Options > ใส่จำนวนโหมดการสั่นสะเทือนที่ต้องการให้แสดงผล ในช่อง No. of modes to extract > OK > กำหนดช่วงขอบเขตของค่าความถี่ธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ตของชิ้นงาน โดยกำหนดค่าความถี่ธรรมชาติที่น้อยที่สุดในช่อง FREQB Start Freq และค่าความถี่ธรรมชาติที่มากที่สุดในช่อง FREQB End Frequency



ภาพที่ ข.13 การกำหนดจำนวนโหมดการสั่นสะเทือน



ภาพที่ ข.14 การกำหนดช่วงค่าความถี่ธรรมชาติ

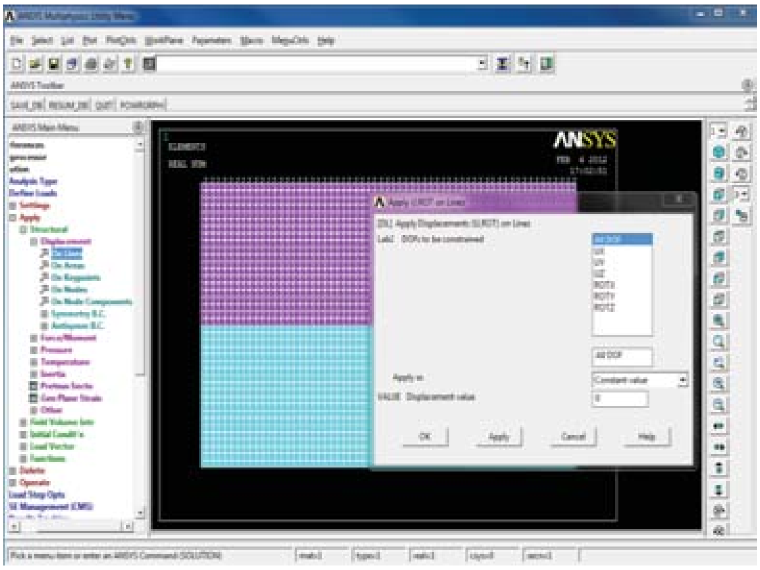
10. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต

:Solution > Define Loads > Apply >Structure > Displacement > On Lines > เลือกเส้นขอบนอกของชิ้นงาน เพื่อกำหนดค่า DOF ต่าง ๆ

ถ้าเงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบง่าย กำหนด Ux Uy Uz =0

ถ้าเงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบยึดแน่น กำหนด All DOF = 0

ถ้าเงื่อนไขขอบเขตคือการจับยึดแบบปล่อยอิสระ ปล่อยปลายทิ้งไว้เฉยๆ



ภาพที่ ข.15 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

11. คำสั่งประมวลผล

:Solution > Solve > Current LS > OK > รอจนโปรแกรมประมวลผลเสร็จ จะมีหน้าต่าง Solution is done! > Close

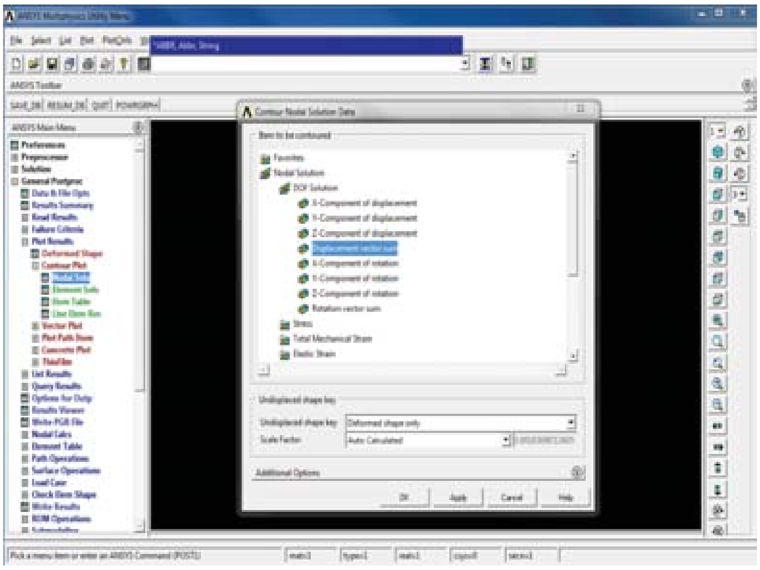
12. แสดงค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการคำนวณ

: General Posproc > Results Summary

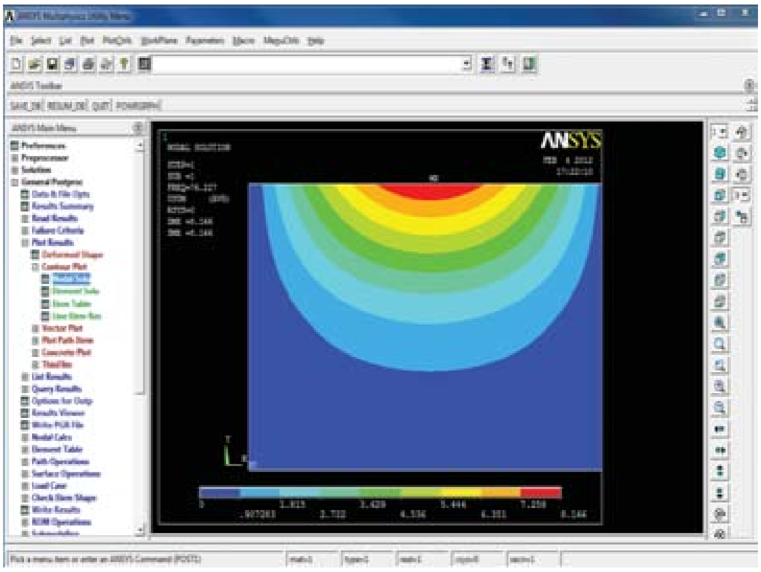
13. แสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

: General Posproc > Read Results > First Set

: General Posproc > Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu > DOF solution > Displacement vector sum > OK



ภาพที่ ข.16 คำสั่งแสดงรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน



ภาพที่ ข.17 จอแสดงผลรูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน

สำหรับคำสั่ง Read Results > First Set เป็นการแสดงผลของโหมดการสั่นสะเทือนแรก หากต้องการให้แสดงผลโหมดการสั่นสะเทือนที่ต่อไป ให้เลือก

: General Posproc > Read Results > Next Set แล้วใช้คำสั่ง Plot Results ตามขั้นตอนเดิม

ข.2 การใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างทำจากวัสดุคอมโพสิท

การใช้โปรแกรม Ansys วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิทบางที่มีความหนาเปลี่ยนไปเป็นขั้นมีลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาเหมือนกับกรณีชิ้นงานทำจากวัสดุไอโซทรอปิก แตกต่างที่การกำหนดชนิดชิ้นงานให้เหมาะกับวัสดุ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนำเสนอในส่วนของการกำหนดค่าเริ่มต้นเมื่อชิ้นงานทำจากวัสดุคอมโพสิทเท่านั้น (ขั้นตอนที่ 1 ถึง 4) ขั้นตอนการสร้างชิ้นงาน การกำหนดเอลิเมนต์ย่อย การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต รวมถึงขั้นตอนการวิเคราะห์และการอ่านผล มีขั้นตอนตามที่ได้กล่าวไว้แล้วข้างต้นจึงไม่ขอนำเสนอในส่วนนี้

สมมติให้ชิ้นงานทำจากกราไฟต์-อีพอกซี่ T300/5208 มีคุณสมบัติดังนี้

$$E_1 = 131\,GPa \quad E_2 = 10.8\,GPa \quad \nu_{12} = 0.24$$

$$G_{12} = 5.65\,GPa \quad \rho = 1540\,kg/m^3 \quad t = 0.127\,mm$$

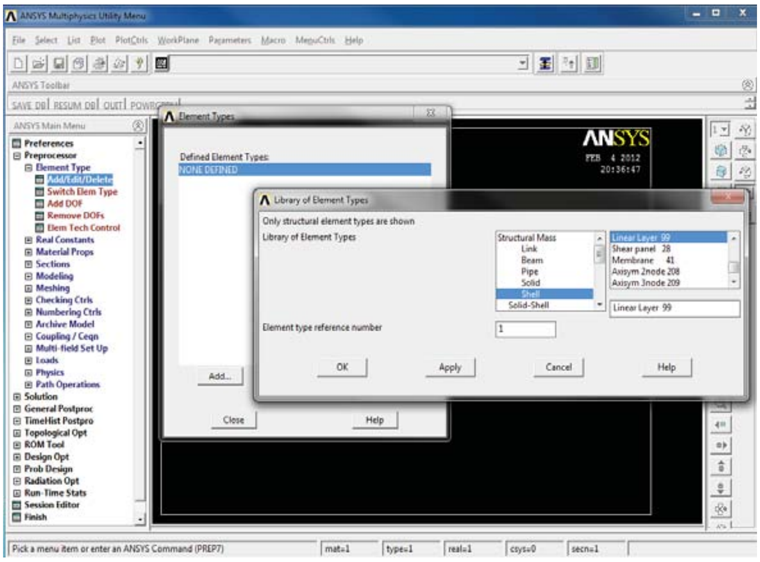
และกำหนดการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง 0 ถึง b_1 คือ $[0/90]_s$ และการวางตัวของเส้นใยในช่วงระหว่าง b_1 ถึง b คือ $[0/90]_{2s}$ ดังภาพที่ 5.1 การกำหนดค่าเริ่มต้นของชิ้นงานคอมโพสิทมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดชนิดการวิเคราะห์

: Preferences > Structural > OK

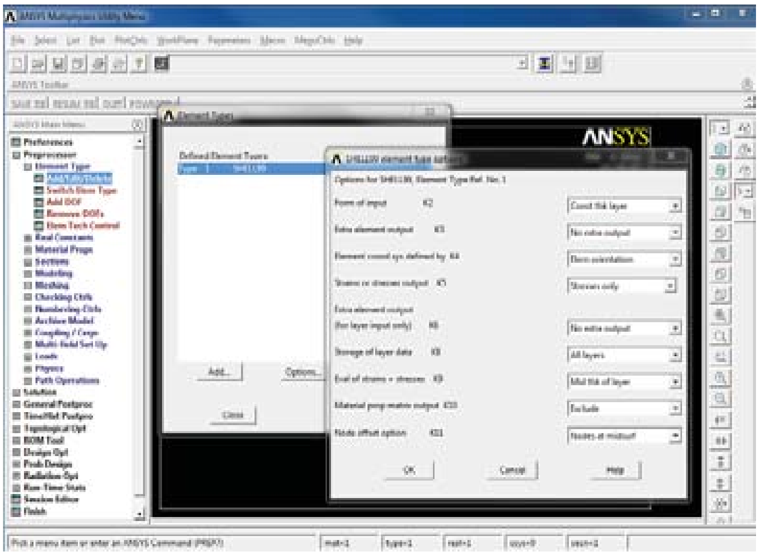
2. กำหนดชนิดชิ้นงาน

: Preprocessor > Element type > Add/Edit/Delete > Add… > เลือก Shell > เลือก Linear Layer 99 สำหรับวัสดุคอมโพสิท > OK



ภาพที่ ข.18 การกำหนดชนิดชิ้นงานของวัสดุคอมโพสิท

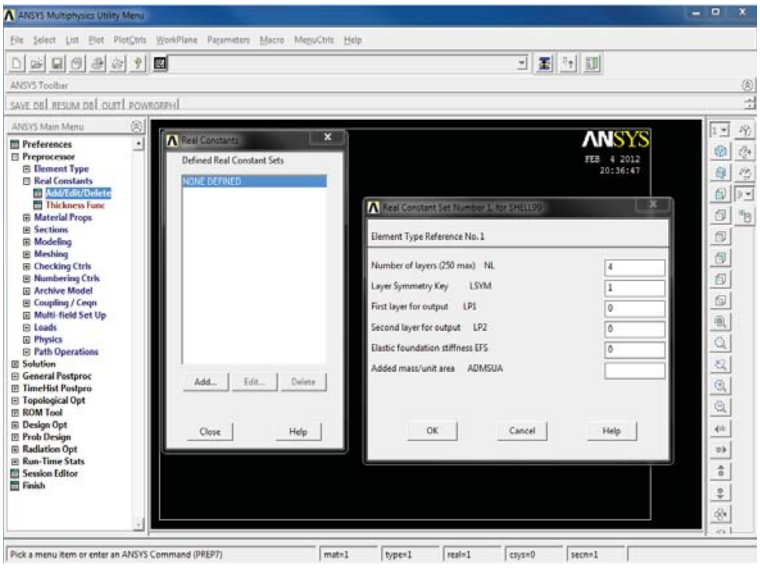
เลือก Options… > เปลี่ยน Storage of layer data (K8) เป็น All layers เปลี่ยน Eval of strains + stresses (K9) เป็น Mid thk of layer เปลี่ยน Node offset option (K11) เป็น Nodes at midsurf > OK > Close



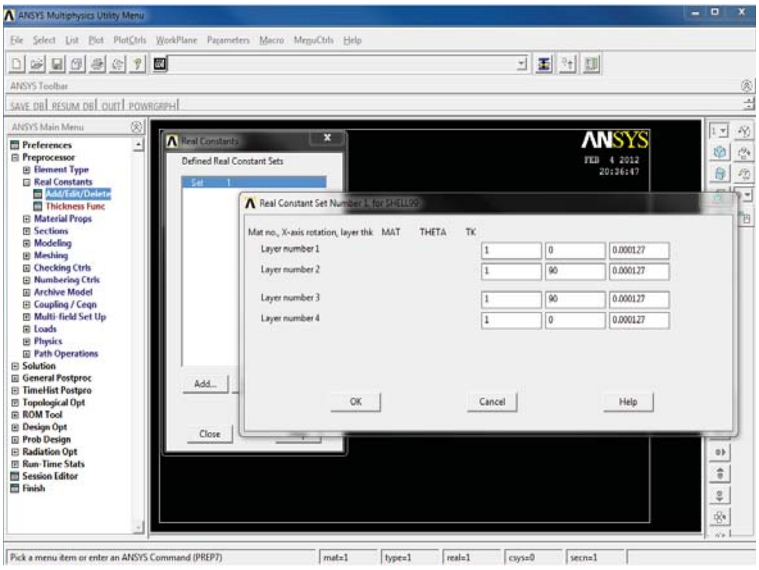
ภาพที่ ข.19 การแก้ไขชนิดชิ้นงานของวัสดุคอมโพสิท

3. กำหนดชิ้นส่วนที่ต้องการกำหนดค่า

: Preprocessor > Real Constants > Add/Edit/Delete > Add… > เลือก Type 1 SHELL 99 > OK > ที่ช่อง Real Constant Set No. คือเลข 1 > OK > ใส่จำนวนชั้นของแผ่นลามิเนตในช่อง Number of layers NL > กำหนดค่า Layer Symmetry Key LSYM คือ 1 > OK > กำหนดค่าของแต่ละชั้นลามิเนต โดย MAT คือ ตัวเลขแสดงลักษณะส่วนย่อยของชิ้นงาน THETA คือ องศาการวางตัวของเส้นใย TK คือ ความหนาของแต่ละชั้น > OK



ภาพที่ ข.20 การกำหนดจำนวนชั้นของแผ่นลามิเนต

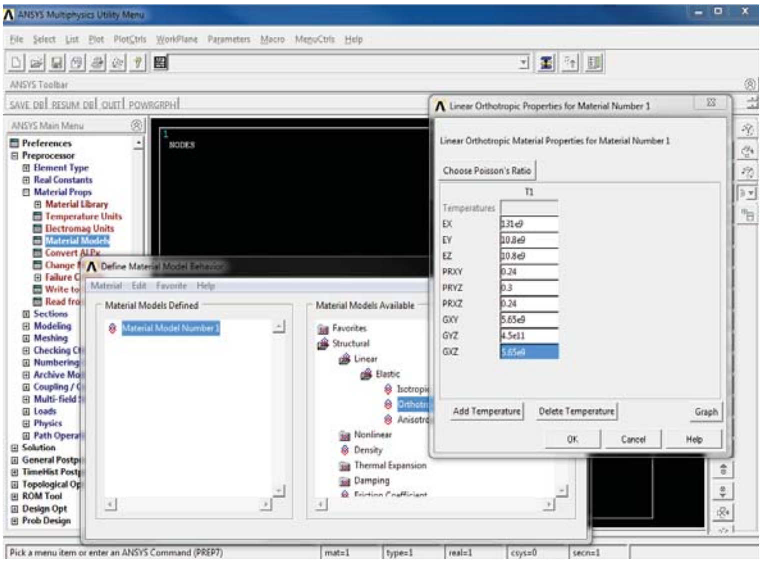


ภาพที่ ข.21 การกำหนดลักษณะองศาการวางตัวของเส้นใยและความสูงของแผ่นลามิเนต

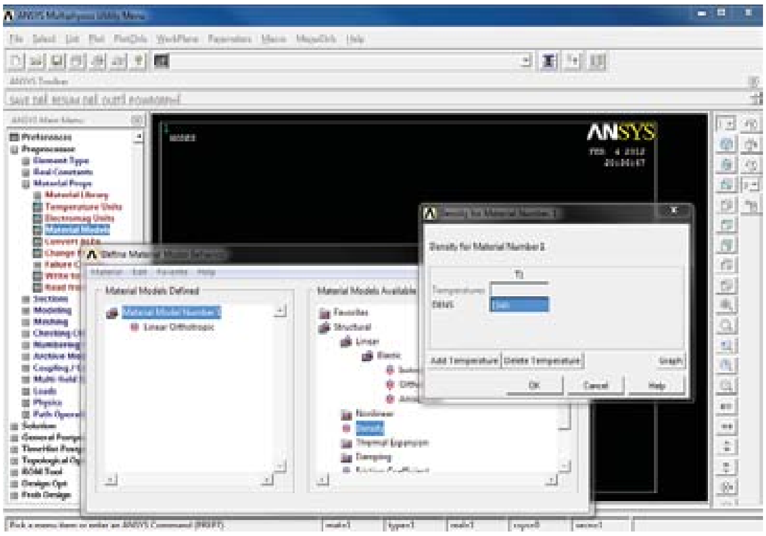
หลังจากกำหนดชิ้นส่วนที่ 1 Real Constant Set No.เรียบร้อย ให้กำหนดชิ้นส่วนที่ 2,3.. ให้ครบตามจำนวนขั้นที่ต้องการ

4. กำหนดคุณสมบัติของวัสดุ

: Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Orthotropic > ใส่ค่ามอดูลัสและอัตราส่วนปัวซอง > OK > Density > OK > Material > Exit



ภาพที่ ข.22 การกำหนดค่ามอดูลัสและอัตราส่วนปัวซอง



ภาพที่ ข.23 การกำหนดค่าความหนาแน่น

หมายเหตุ ค่า PRYZ และ ค่า GYZ ได้มาจากการ Trial and error คำตอบที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 5 เป็นต้นไปเหมือนกับวิธีการวิเคราะห์ของวัสดุไอโซทรอปิก

ภาคผนวก ค

การตั้งค่าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต

ภาคผนวก ค
การตั้งค่าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัต

การตั้งค่าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตมีขั้นตอนดังนี้

1. ปิด auto calibrate
2. ตั้งค่า Display format เป็น QUAD เพื่อให้แสดงผล 4 หน้าจอย่อ โดยหน้าจอแรกแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเฟสการสั่นของ FRF และความถี่ หน้าจอที่สองแสดงขนาดแอมปลิจูดการสั่นของ FRF และความถี่ หน้าจอที่สามแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ส่วนจินตภาพการสั่นของ FRF และความถี่ หน้าจอที่สี่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของแรงกระตุ้นของค้อนเคาะสัญญาณและความถี่
3. ตั้งค่า measure data ให้หน้าจอย่อที่หนึ่งถึงสามแสดงค่า freq resp 2/1 ส่วนหน้าจอย่อที่สี่แสดงค่า lin spec.
4. ตั้งค่า trace coordinate ของหน้าจอย่อที่หนึ่งเป็น phase ส่วนหน้าจอย่อที่สองถึงสี่เป็น linear scale เพื่อตั้งค่าสเกลของแกนตั้ง
5. ตั้งค่า inst mode เลือกให้เครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตวิเคราะห์แบบ FFT โดยให้รับค่าจาก CH 2 เทียบกับค่าจาก CH 1 (สัญญาณความเร่งต่อสัญญาณการกระตุ้นจากค้อนเคาะ)
6. ตั้งค่า freq. ปรับช่วงการวัดค่าสัญญาณให้อยู่ในช่วง 0-800 เฮิร์ต ซึ่งครอบคลุมทุกกรณีการวัดคือสามโหมดแรกของการสั่นสะเทือน และปรับค่าความละเอียด (resolution) ในการแสดงผลเป็น 1600
7. ตั้งค่า window เป็น force expo โดยให้ CH 1 (ค้อนเคาะสัญญาณ) เป็น force และ CH 2 (ตัววัดสัญญาณความเร่ง) เป็น expo เลือก force width ให้มีค่า 100 ms และเลือก expo decay ให้มีค่า 150 ms (ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความแรงและจังหวะในการเคาะของแต่และคน)
8. ตั้งค่า input เป็น fix range เพื่อจะกำหนดช่วงของค่า input โดยให้ CH 1 มีค่า 199.763 mVpk และ CH 2 มีค่า 1.0012 Vpk เลือก XDCR เพื่อตั้งหน่วยของการวัดโดยให้ CH 1 มี

ค่า 10.2 mV/EU โดยที่ EU มีหน่วยคือ N และ CH 2 มีค่า 6.98 mV/EU โดยที่ EU มีหน่วยคือ g (ค่า sensitivity ของเครื่องมือ)

9. ตั้งค่า front end set up ใน input โดยให้ CH 1 เป็น Gnd (ground) และให้ icp supply เป็น off ส่วน CH 2 เป็น float และให้ icp supply เป็น on คือเครื่องวิเคราะห์สัญญาณพลวัตจะจ่ายไฟให้แก่ตัววัดสัญญาณความเร่ง
10. ตั้งค่า trigger เป็น CH 1 คือในการวิเคราะห์ข้อมูลให้รอสัญญาณจากค้อนเคาะ

หมายเหตุ : ตั้งค่า number average เป็น 5 คือนำผลการเคาะทั้ง 5 ครั้งมาเฉลี่ยต่อการอ่านค่า 1 ผลการทดลอง

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวปรัณยา ธารณเจษฎา เกิดเมื่อวันที่ 9 มีนาคม พ.ศ.2532 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมยานยนต์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2554 หลังจบการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทันที มีผลงานทางวิชาการที่ได้เผยแพร่ ดังนี้

Parunya Taranajetsada and Pairod Singhatanadgid, A Semi-Analytical-Numerical Study on Vibration of Stepped Plates, The 25th Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand, 19 – 21 October 2011, Krabi, Thailand.