

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ป้อมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา
เพื่อการวิเคราะห์ห้วงจรนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แอนไอโซทรอปิก 2 มิติ

นายปิยณัฐ ลิมปิจรรยาวงศ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2554

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

FINITE-ELEMENT TIME-DOMAIN BEAM PROPAGATION METHOD
FOR ANALYZING 2-D ANISOTROPIC PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDE CIRCUITS

Mr. Piyanat Limjunyawong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2011

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา
เพื่อการวิเคราะห์ห้วงจรนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แอนไอโซทรอปิก
2 มิติ

โดย

นายปิยณัฐ ลิมปิจรรยาวงศ์


สาขาวิชา

วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

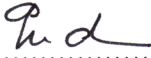
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว

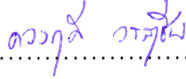
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยรับเป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบริหารบัณฑิต



..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร. บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชัย รัตนธรรมพันธ์)


..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดวงฤดี วรสุชีพ)


..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ศาสตราจารย์ ดร. ประยุทธ์ อัครเอกมาลิน)

ปิยณัฐ ลิ้มปิจรรยาวงศ์ : ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมาตรโพพาเกชันในโดเมนเวลาเพื่อ
การวิเคราะห์วงจรมำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แอนไอโซทรอปิก 2 มิติ. (FINITE-ELEMENT
TIME-DOMAIN BEAM PROPAGATION METHOD FOR ANALYZING 2-D
ANISOTROPIC PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDE CIRCUITS) อ.ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร. ทับทิม อ่างแก้ว, 84 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อวิเคราะห์วงจรมำคลื่นแสงในผลึกโฟโต
นิกส์โครงสร้าง 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมาตรโพพาเกชันในโดเมนเวลา การวิเคราะห์
ในโดเมนเวลาเป็นการจำลองการแพร่กระจายคลื่นแสงของวงจรมำคลื่นแสงในผลึกโฟโตนิกส์

วิธีการคำนวณที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ การคำนวณวิเคราะห์
โครงสร้างแถบความถี่ของผลึกโฟโตนิกส์ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนความถี่ และการ
คำนวณวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นแสงในวงจรมำคลื่นแสงผลึกโฟโตนิกส์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิ
เมนต์ในโดเมนเวลา

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคำนวณที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ ทำโดยการ
เปรียบเทียบผลการจำลองการแพร่กระจายคลื่นในวงจรมำคลื่นแสงผลึกโฟโตนิกส์ที่มีผู้วิจัยนำเสนอไว้แล้ว ผล
ปรากฏว่า วิธีการที่นำเสนอสามารถคำนวณได้ผลเช่นเดียวกับผลของงานวิจัยที่มีการนำเสนอไว้
แล้ว

เพื่อแสดงถึงประโยชน์ของวิธีที่นำเสนอ ได้ทำการออกแบบและจำลองผลการคำนวณ
วงจรมำคลื่นแสงผลึกโฟโตนิกส์ที่ทำหน้าที่แยกคลื่นแสงโหมด TE/TM ที่ความยาวคลื่น 1.49 μm .
กับ 1.55 μm .

ภาควิชา.....วิศวกรรมไฟฟ้า.....ลายมือชื่อนิสิต ปิยณัฐ ลิ้มปิจรรยาวงศ์
สาขาวิชา.....วิศวกรรมไฟฟ้า.....ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ท.อ.
ปีการศึกษา.....2554.....

5270679221 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEYWORDS : Time-domain Beam Propagation Method (TD-BPM) / Finite-element method (FEM) / Anisotropic photonic crystal waveguides

PIYANAT LIMJUNYAWONG : FINITE-ELEMENT TIME-DOMAIN BEAM PROPAGATION METHOD FOR ANALYZING 2-D ANISOTROPIC PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDE CIRCUITS. ADVISOR : ASST.PROF. TUPTIM ANGKAEW, Ph.D., 84 pp.

The time-domain beam propagation based on finite element method for analyzing lightwave propagation in 2-dimensional anisotropic photonic crystal waveguide structure has been proposed in this thesis. The time-domain beam propagation analysis is a useful numerical tool for simulating lightwave propagation in photonic crystal waveguide structures. In addition, the finite element code for analyzing band structure in infinite photonic crystal structure has been developed in order to determine the guided operating frequency range of photonic crystal. The verification of the proposed time-domain beam propagation method has been carried out by comparing the computed results with the results of previous works in numerical examples.

To demonstrate the usefulness of the proposed method, a novel 4 ports TE/TM polarization and wavelength splitter has been designed and computational simulated for operating at wavelength 1.49 μm. and 1.5 μm.

Department :Electrical Engineering..... Student's Signature ปิยนัต ลิ้มจุนยวงค์
Field of Study : ...Electrical Engineering..... Advisor's Signature ทศพร
Academic Year : 2011.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จเสร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องด้วยความอนุเคราะห์ของบุคคลหลายท่านซึ่งไม่สามารถกล่าวถึงได้ทั้งหมด ผู้มีพระคุณท่านแรกที่ใคร่ขอกราบขอบพระคุณคือ อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ผู้สอนวิชาความรู้ที่จำเป็นและเป็นประโยชน์ในการทำวิจัย คอยให้คำปรึกษาด้านต่างๆทั้งในการทำวิจัย และการใช้ชีวิตในสังคมของนักวิจัย ตลอดจนเป็นผู้ผลักดันในงานวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี บุคคลอีกท่านหนึ่งที่ต้องกล่าวขอบพระคุณคือ รศ. ดร. ลัญฉกร วุฒิสัทติกุลกิจ ผู้สั่งสอน และแนะนำวิธีการใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งเป็นส่วนสำคัญอีกส่วนในงานวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบคุณสำนักงานคณะกรรมการกิจการโทรคมนาคมแห่งชาติ(The National Telecommunications Commission) ที่สนับสนุนเครื่องคอมพิวเตอร์ และลิขสิทธิ์โปรแกรมที่ใช้ในการทำวิจัย และสถานที่ในการทำวิจัย ณ ห้องปฏิบัติการศูนย์เชี่ยวชาญเฉพาะด้านเทคโนโลยีโทรคมนาคม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ชั้น 13 อาคารเจริญวิศวกรรม คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขอขอบคุณพี่เรืองรอง แก้วอินทนิล(พี่ดาว) ที่ช่วยเหลือเรื่องเอกสารทุกอย่างตลอดเวลาที่ศึกษา และขอขอบคุณ พี่ทรรศพร อินทร์ไชยา (พี่อ้อ) ที่เป็นธุระในการดำเนินการต่างๆในสาขาเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณพี่ เพื่อน และน้องในห้องปฏิบัติการวิจัยโทรคมนาคมทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ ผู้เป็นที่รัก คอยให้การสนับสนุนด้านต่างๆ และให้กำลังใจตลอดเวลาที่ได้ทำการศึกษาและวิจัย จนกระทั่งสำเร็จการศึกษาได้ด้วยดี

ทุกสิ่งทุกอย่างที่ได้รับตลอดการทำวิจัย และใช้ชีวิตในห้องปฏิบัติการล้วนเป็นส่วนสำคัญที่ผลักดันให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วง ไม่มีคำกล่าวใดสามารถพรรณนาถึงสิ่งเหล่านั้นได้มีเพียงคำขอบคุณจากใจเท่านั้น ขอขอบคุณทุกท่านสำหรับความทรงจำดีๆที่เกิดขึ้นตลอดเวลาที่ได้ใช้เวลาร่วมกัน หวังว่าสักวันคงได้มีโอกาสได้ใช้เวลาดีๆที่ได้อยู่ร่วมกันอีก ขอขอบคุณครับ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ณ
สารบัญภาพ	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	5
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	5
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
1.5 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน.....	6
บทที่ 2 หลักการและทฤษฎี	7
2.1 การแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์ (Domain Discretization)	8
2.2 ฟังก์ชันรูปร่าง(Shape function or Interpolation function)	10
2.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น (Linear interpolation function).....	10
2.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อ (Six-node Quadratic Triangular Element)	14
2.2.3 ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function).....	16
2.3 สมการทั่วไปของคลื่นในวัสดุไอโซทรอปิก	17
2.4 บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (TD-BPM).....	18
บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาเพื่อการวิเคราะห์ห้วงจรที่นำ คลื่นผลึกโฟโตนิกส์แอนไอโซทรอปิก	22
3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก.....	22
3.1.1 สมการแมกซ์เวลล์(Maxwell's Equation)	22
3.1.2 สมการทั่วไปของคลื่น TE และ TM (General Form of TE and TM Wave).....	24
3.1.3 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition).....	25

3.1.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(Finite Element Method)	28
3.2 การวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ (Photonic Band gap : PBG)	33
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์และจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมวลโฟโตนิกส์	38
4.1 ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์.....	40
4.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์	42
4.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้	46
4.4 ผลการจำลองการแพร่กระจายของคลื่น	49
4.5 การออกแบบอุปกรณ์ทางแสงวงจรถ่อนำคลื่นมวลโฟโตนิกส์	59
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	67
5.1 สรุปผลการวิจัย	67
5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	68
รายการอ้างอิง.....	69
ภาคผนวก.....	71
ภาคผนวก ก.....	72
ภาคผนวก ข.....	81
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	84

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 2.1 ค่าพารามิเตอร์ (S) ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์.....	18
ตารางที่ 3.1 ค่าพารามิเตอร์ในสมการทั่วไปของคลื่น สำหรับคลื่น TE และ TM.....	25
ตารางที่ 3.2 ตารางความสัมพันธ์ระหว่างเอลิเมนต์กับจุดต่อของภาพที่ 2.2	31
ตารางที่ 4.1 ตารางความยาวคู่ควบของคลื่น TE และ TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu m$ และ $\lambda=1.55\mu m$ โดยมีค่าคงที่แลตทิซ $a=0.38\mu m$ และรัศมี $r=0.35 \times a$	60
ตารางที่ ก.1 ค่าพารามิเตอร์ในวิธีการประมาณค่าแบบถ่วงน้ำหนักกำลังสองของเกาส์.....	79
ตารางที่ ข.1 ตารางคุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์.....	82
ตารางที่ ข.2 ตารางเวลาเฉลี่ยในขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ครอบคลุม	82
ตารางที่ ข.3 ตารางเวลาที่ใช้ในการคำนวณในขั้นตอนการหาโครงสร้างแถบความถี่.....	83
ตารางที่ ข.4 ตารางเวลาที่ใช้ในการคำนวณของ 1 ชั้นระยะเวลา.....	83

สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 1.1 ตัวอย่างผลึกโฟโตนิกส์	1
ภาพที่ 1.2 ภาพผลึกโฟโตนิกส์	1
ภาพที่ 1.3 โครงสร้างเส้นใยผลึกโฟโตนิกส์	2
ภาพที่ 1.4 โครงสร้างท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์	2
ภาพที่ 2.1 ภาพวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ (PML)	7
ภาพที่ 2.2 ภาพตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์	8
ภาพที่ 2.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $X - Y$	10
ภาพที่ 2.4 สามเหลี่ยมหลัก (Master element) วางตัวในระนาบ $\zeta - \eta$	11
ภาพที่ 2.5 ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมเชิงเส้น	12
ภาพที่ 2.6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในพิกัดพื้นที่	13
ภาพที่ 2.7 สามเหลี่ยมหกจุดต่อวางตัวในระนาบ $X - Y$	14
ภาพที่ 2.8 สามเหลี่ยมหลักหกจุดต่อวางตัวในระนาบ $\zeta - \eta$	15
ภาพที่ 2.9 ขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา	21
ภาพที่ 3.1 ภาพเซลล์หนึ่งหน่วยของผลึกโฟโตนิกส์	33
ภาพที่ 3.2 The First Brillouin Zone	37
ภาพที่ 4.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์และการจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์	38
ภาพที่ 4.2 โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ในสองมิติ	39
ภาพที่ 4.3 ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์	40
ภาพที่ 4.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์	41
ภาพที่ 4.5 การแบ่งพื้นที่ออกเป็นเอลิเมนต์ของเซลล์หนึ่งหน่วย	44
ภาพที่ 4.6 ภาพเปรียบเทียบช่องว่างแถบความถี่ของคลื่น TM ที่ได้จากวิธีการกระจายคลื่นระนาบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ	44
ภาพที่ 4.7 ภาพช่องว่างแถบความถี่ของเซลล์หนึ่งหน่วยที่มีวัสดุเป็นแท่งเทลลูไรด์วางตัวในอากาศ รัศมีของแท่งวัสดุ $r = 0.35 \times a$	45
ภาพที่ 4.8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของรัศมีของแท่งวัสดุเทียบกับค่าคงที่แลตทิซในแกนขนานกับช่องว่างแถบความถี่ในแกนตั้ง	45

ภาพที่ 4.9	ขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้	46
ภาพที่ 4.10	การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่ไม่มีตำหนิ	47
ภาพที่ 4.11	การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 1 ช่อง	48
ภาพที่ 4.12	การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 2 ช่อง	48
ภาพที่ 4.13	ขั้นตอนการจำลองผลด้วย ขั้นตอนวิธีของของแควงค์-นิโคลสัน	50
ภาพที่ 4.14	โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศา	51
ภาพที่ 4.15	ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศา	52
ภาพที่ 4.16	โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกึ่งตัว T	53
ภาพที่ 4.17	ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกึ่งตัว T	54
ภาพที่ 4.18	โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$	54
ภาพที่ 4.19	ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$	56
ภาพที่ 4.20	ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$	56
ภาพที่ 4.21	โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกความยาวคลื่น $\lambda=1.31\mu\text{m}$, $\lambda=1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ออกจากกัน	57
ภาพที่ 4.22	ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.31\mu\text{m}$	58
ภาพที่ 4.23	ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu\text{m}$	58
ภาพที่ 4.24	ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$	58
ภาพที่ 4.25	วงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แยกคลื่น TE และ TM ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$	59
ภาพที่ 4.26	กราฟแสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนรัศมี r_m ในช่วง 0.29 ถึง 0.37 กับความยาวคู่ควบ ของคลื่น TE และ TM	61
ภาพที่ 4.27	ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบด้วย $r_m = 0.30$ ของความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu\text{m}$	63

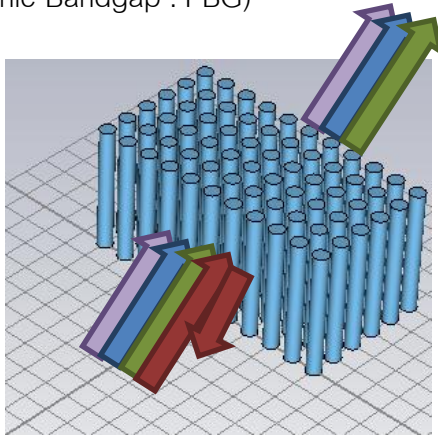
- ภาพที่ 4.28 ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ
ด้วย $r_m = 0.30$ ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu m$ 63
- ภาพที่ 4.29 ผลการจำลองคลื่น TE ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu m$ แพร่กระจายในวงจรถ่อนำ
คลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น
 $\lambda = 1.49 \mu m$ และ $\lambda = 1.55 \mu m$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรยมที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรยม
ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$ 64
- ภาพที่ 4.30 ผลการจำลองคลื่น TE ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu m$ แพร่กระจายในวงจรถ่อนำ
คลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น
 $\lambda = 1.49 \mu m$ และ $\lambda = 1.55 \mu m$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรยมที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรยม
ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$ 64
- ภาพที่ 4.31 ผลการจำลองคลื่น TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu m$ แพร่กระจายในวงจรถ่อนำ
คลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น
 $\lambda = 1.49 \mu m$ และ $\lambda = 1.55 \mu m$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรยมที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรยม
ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$ 65
- ภาพที่ 4.32 ผลการจำลองคลื่น TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu m$ แพร่กระจายในวงจรถ่อนำ
คลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น
 $\lambda = 1.49 \mu m$ และ $\lambda = 1.55 \mu m$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรยมที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรยม
ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$ 65

บทที่ 1

บทนำ

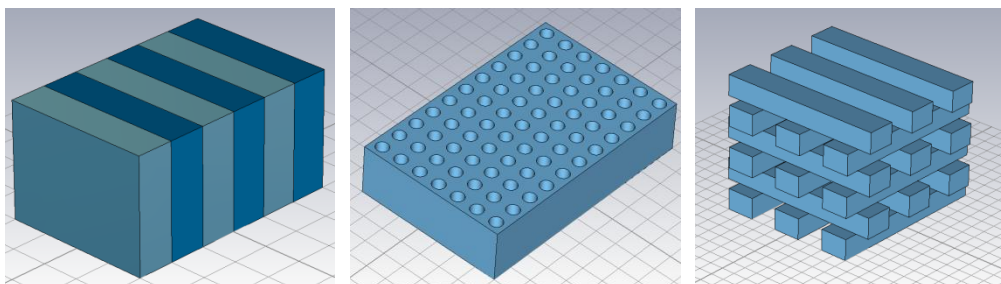
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystals) เป็นตัวกลางชนิดใหม่ที่สามารถสร้างขึ้นได้จากการสร้างเซลล์หนึ่งหน่วย (Unit cell) ซึ่งเป็นเซลล์ที่มีขนาดเล็กที่สุดด้วยวัสดุอย่างน้อยสองชนิด โดยการจัดเรียงกันเป็นรายคาบอย่างสม่ำเสมอ ดังภาพที่ 1.1 คุณสมบัติพิเศษของผลึกโฟโตนิกส์คือจะไม่ยอมให้คลื่นในบางย่านความถี่แพร่กระจายผ่านได้ โดยที่ย่านความถี่นั้นจะถูกเรียกว่า ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ (Photonic Bandgap : PBG)



ภาพที่ 1.1 ตัวอย่างผลึกโฟโตนิกส์

ผลึกโฟโตนิกส์แบ่งได้เป็น 3 ประเภท คือ 1 มิติ 2 มิติ และ 3 มิติ ดังแสดงดังภาพที่ 1.2



(ก.) 1 มิติ

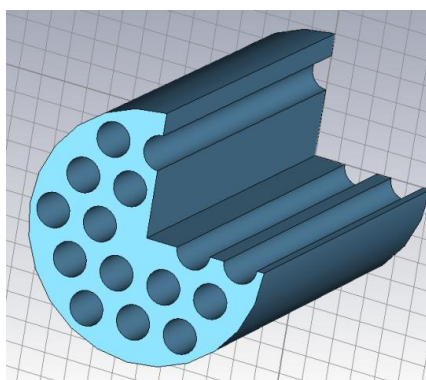
(ข.) 2 มิติ

(ค.) 3 มิติ

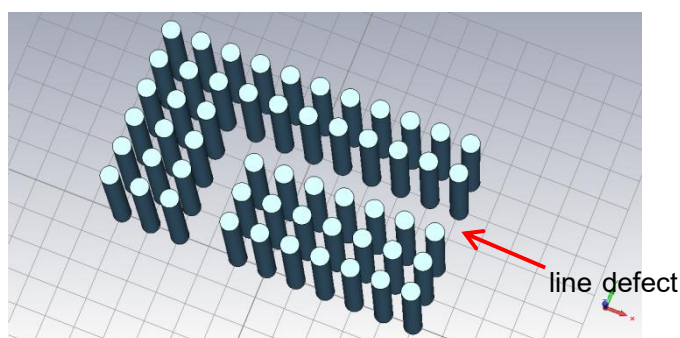
ภาพที่ 1.2 ภาพผลึกโฟโตนิกส์

ผลึกโฟโตนิกส์ได้รับความสนใจครั้งแรกในปีค.ศ. 1987 เป็นผลงานของ Yablonovitch[1] และ John[2] หลังจากนั้นในช่วงระยะเวลาตลอด 20 กว่าปีที่ผ่านมา งานวิจัยของผลึกโฟโตนิกส์

ได้รับการศึกษาอย่างต่อเนื่องตลอดมา เนื่องจากคุณสมบัติพิเศษที่ไม่ยอมให้คลื่นความถี่บางย่านแพร่กระจายผ่านไปได้ ทำให้ไม่เกิดการสูญเสียในขณะแพร่กระจายผ่านตัวกลาง ผลึกโฟโตนิกส์แบ่งเป็นประเภทใหญ่ได้ 2 ประเภท ได้แก่ เส้นใยผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic Crystal Fiber : PCF) [3] ภาพที่ 1.3 และท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic Crystal Waveguides : PCW) ภาพที่ 1.4 ท่อนำคลื่นโฟโตนิกส์สามารถสร้างได้ด้วยการนำผลึกโฟโตนิกส์ที่เป็นเซลล์หนึ่งหน่วย มาวางเรียงกันเป็นรายคาบต่อเนื่องกันไป แต่จะมีบางบริเวณที่เป็นตำหนิ (Defect) ซึ่งในการสร้างท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์นั้นตำหนิที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเรียงตัวติดกันเป็นเส้น (Line defect) เพื่อที่จะสามารถใช้ในการส่งผ่านคลื่นผ่านทางตำหนิเหล่านั้น เปรียบเสมือนเส้นที่เกิดจากตำหนิเป็นท่อนำคลื่น จากหลักการดังกล่าวทำให้คลื่นสามารถส่งผ่านท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ได้ หลังจากนั้นได้มีงานวิจัยนำหลักการเหล่านั้นมาประยุกต์ใช้ในการสร้างอุปกรณ์ทางแสงต่างๆมากมาย เช่น วงจรแบ่งกำลัง (Power splitter) [4] วงจรกรองความถี่ (Filter) [5] วงจรคู่ควบแบบมีทิศทาง (Directional coupler) [6] - [7] เป็นต้น โดยเรียกอุปกรณ์ต่างๆดังกล่าวโดยรวมว่า วงจรผลึกโฟโตนิกส์ (Photonic crystal circuit)



ภาพที่ 1.3 โครงสร้างเส้นใยผลึกโฟโตนิกส์



ภาพที่ 1.4 โครงสร้างท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์

การวิเคราะห์การจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมลิกโฟโตนิกส์ โดยทั่วไปจะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา (Finite Difference Time-Domain : FDTD) เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ [4] - [7] เนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลาสามารถคำนวณและเขียนโปรแกรมได้ไม่ซับซ้อน แต่อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมลิกโฟโตนิกส์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา ยังมีข้อจำกัดที่เห็นได้ชัดเจนอยู่บางประการ กล่าวคือ

1. ในปัญหาการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมลิกโฟโตนิกส์นั้นจะเห็นได้ว่าลักษณะของแท่งฉนวน (Dielectric rods) นั้นมีลักษณะเป็นวงกลมเมื่อมองในมุมมองด้านบน (Top view) ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลาจะทำการการแบ่งพื้นที่เป็นตารางกริดลักษณะสี่เหลี่ยมทำให้ไม่สามารถประมาณค่าบริเวณที่เป็นเส้นโค้งได้อย่างมีประสิทธิภาพมากนัก

2. ปัญหาที่สำคัญอีกประการคือขนาดของแต่ละกริดจะแปรผกผันกับความถี่ เมื่อความถี่สูงขึ้นทำให้จำเป็นต้องแบ่งกริดให้มีขนาดเล็กลง เพื่อที่จะสามารถคำนวณให้ได้ผลที่แม่นยำ ส่งผลให้ปริมาณของกริดเพิ่มมากขึ้น และเมื่อทำการแบ่งจำนวนตารางกริดให้มากขึ้นนั้นได้ส่งผลกระทบต่อปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมาก และยังส่งผลกระทบต่อระยะเวลาในการคำนวณที่เพิ่มขึ้นจากเดิมด้วย

จากข้อจำกัดของระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา ในปีค.ศ. 2000 ได้มีงานวิจัยโดยนักวิจัยในกลุ่มของ Koshiba ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (Finite Element Time Domain Beam Propagation Method : FE-TD-BPM) ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของแสงในวงจรถ่อนนำคลื่นมลิกโฟโตนิกส์ในแบบต่างๆ ซึ่งได้มีการแก้ไขข้อจำกัดของระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลาที่กล่าวอ้างมาก่อนหน้าทั้ง 2 ประการดังกล่าวคือ

1. การแบ่งเอลิเมนต์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจะแบ่งพื้นที่เป็นพื้นที่ย่อยๆที่สามารถวางตัวเข้ากับรูปทรงต่างๆได้อย่างเหมาะสมส่งผลให้สามารถประมาณค่าของรูปทรงต่างๆได้อย่างแม่นยำกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา

2. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจะคำนวณการแพร่กระจายของคลื่นจากคลื่นมอดูเลต (Modulated wave) ซึ่งมีความถี่ต่ำกว่าคลื่นพาห้ (Carrier wave) มาก ส่งผลให้จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณไม่มากเท่ากับระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา

จากข้อดีที่ได้กล่าวมานั้น จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาเป็นวิธีการที่เหมาะสมในการวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์มากกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนทีในโดเมนเวลา ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาในการวิเคราะห์วงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์

จากการศึกษางานวิจัยในกลุ่มของ Koshiba พบว่างานวิจัยในกลุ่มนี้ได้พัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาในตัวกลางชนิดไอโซทรอปิก (Isotropic) [8] -[9] และได้พัฒนาระเบียบวิธีไปถึงตัวกลางชนิดแอนไอโซทรอปิก (Anisotropic) [10] โดยตั้งต้นจากสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) ในโดเมนของความถี่ (Frequency domain) และวิเคราะห์สมการจนได้สมการพื้นฐานของคลื่น (Basic equation) ในโดเมนของตำแหน่ง (Space domain) หลังจากนั้นได้นำสมการพื้นฐานของคลื่นมาทำการสร้างสมการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา

จากที่ได้กล่าวมาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ขอเสนอวิธีการสร้างสมการทั่วไปของคลื่น (General equation) ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา โดยวิเคราะห์สมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนของเวลา และนำสมการดังกล่าวประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่ โดยในบทที่ 2 จะกล่าวถึงพื้นฐานทั่วไปในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตั้งแต่ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่สนใจเป็นเอลิเมนต์เพื่อใช้ในการประมาณค่าสนาม ต่อด้วยฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ และสมการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันของงานวิจัยในอดีตที่มีวัสดุชนิดไอโซทรอปิก และขั้นตอนทั่วไปของการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในบทที่ 3 ได้นำเสนอสมการทั่วไปของคลื่นในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจากสมการแมกซ์เวลล์ ในการวิเคราะห์วงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่มีวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก และการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่ และในบทที่ 4 ทำการเขียนโปรแกรมจำลองผลการแพร่กระจายของคลื่นแสงจากสมการทั่วไปในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ด้วยโปรแกรม Matlab โดยทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลการจำลองกับงานวิจัยในอดีต และนำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจากสมการทั่วไปของคลื่นไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบอุปกรณ์นำคลื่นแสงจากวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ โดยในวิทยานิพนธ์นี้มุ่งเน้นไปที่การประยุกต์ใช้หลักการของวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ (Coupler)

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อสร้างสมการทั่วไปของคลื่นในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจากสมการแมกซ์เวลล์ ในการวิเคราะห์ห้วงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์
2. เพื่อสร้างโปรแกรมวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจากสมการทั่วไปที่สร้างขึ้น
3. เพื่อออกแบบอุปกรณ์พื้นฐานทางแสงที่อาศัยหลักการของวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. สร้างสมการทั่วไปของคลื่นในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจากสมการแมกซ์เวลล์ เพื่อใช้วิเคราะห์ห้วงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์วัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก
2. นำสมการทั่วไปที่สร้างขึ้น ใช้ในการวิเคราะห์และเขียนโปรแกรมวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นในวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ วัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก ที่มีโครงสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส
3. ใช้โปรแกรมจำลองการแพร่กระจายของคลื่นที่ได้พัฒนาขึ้นในการวิเคราะห์และออกแบบอุปกรณ์ทางแสงที่ใช้หลักการของวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โครงสร้างแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยมุ่งเน้นไปที่การประยุกต์ใช้หลักการของวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สมการและโปรแกรมในการวิเคราะห์และออกแบบวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา
2. ความรู้และความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานทางด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
3. ความรู้และความเข้าใจในการวิเคราะห์ และออกแบบวงจรที่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา

1.5 ขั้นตอนและวิธีการดำเนินงาน

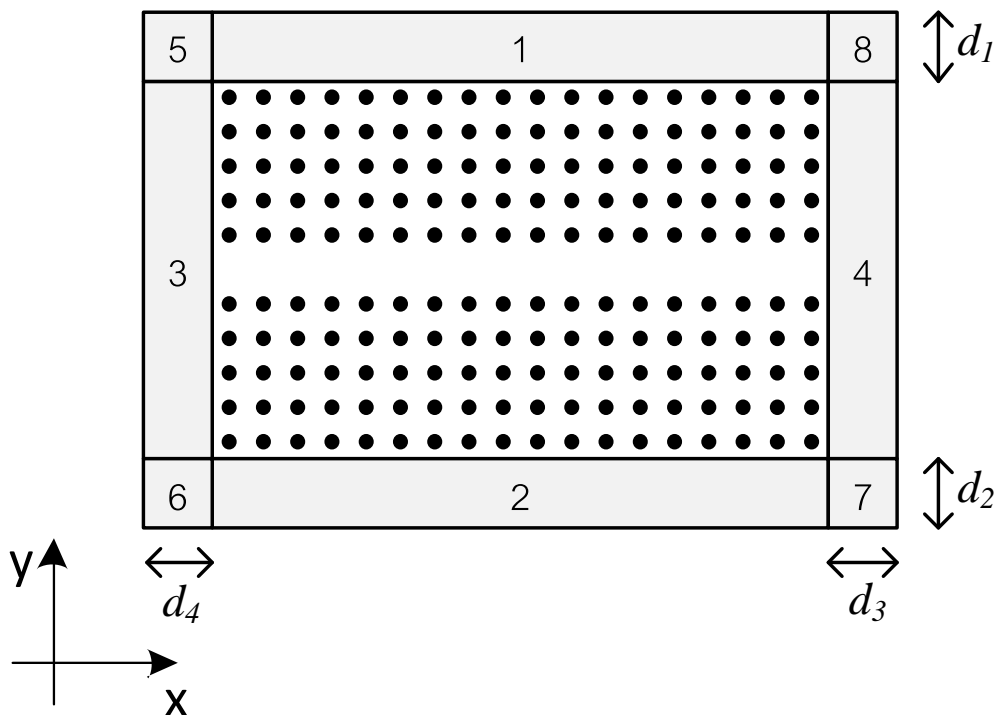
1. ศึกษาทฤษฎีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปืมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาในการจำลองการแพร่กระจายของคลื่น
2. ศึกษาวิธีการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ(Eigenvalue) และการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์
3. ทำการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ที่สามารถวิเคราะห์ที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่มีวัสดุเป็นแอนไอโซทรอปิก โดยใช้หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปืมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา
4. เขียนโปรแกรมวิเคราะห์ และจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์จากสมการที่สร้างขึ้น
5. ทำการเปรียบเทียบความถูกต้องของโปรแกรมที่เขียนขึ้นกับระเบียบวิธีมาตรฐาน
6. ออกแบบวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ให้เป็นอุปกรณ์ทางแสง
7. วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง
8. เขียนวิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [11] ที่มีวัสดุชนิดไอโซทรอปิก โดยเริ่มต้นจากการแบ่งพื้นที่สนใจออกเป็นพื้นที่ขนาดเล็กหรือเรียกว่า เอลิเมนต์ ในขั้นตอนต่อไป จะกล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการทั่วไปของคลื่นในวัสดุชนิดไอโซทรอปิกซึ่งถูกนำเสนอในกลุ่มงานวิจัยของ Koshiha การประมาณค่าด้วยวิธีการของพาเค้ และ ขั้นตอนวิธีของแครงค์-นิโคลสัน

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้วิเคราะห์ผลึกโฟโตนิกส์ที่มีโครงสร้าง 2 มิติ วางตัวในระนาบ $X - Y$ กล่าวคือ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแกน Z ดังแสดงในภาพที่ 2.1 ความยาวคลื่นที่ใช้จะอยู่ในความยาวคลื่นแสง

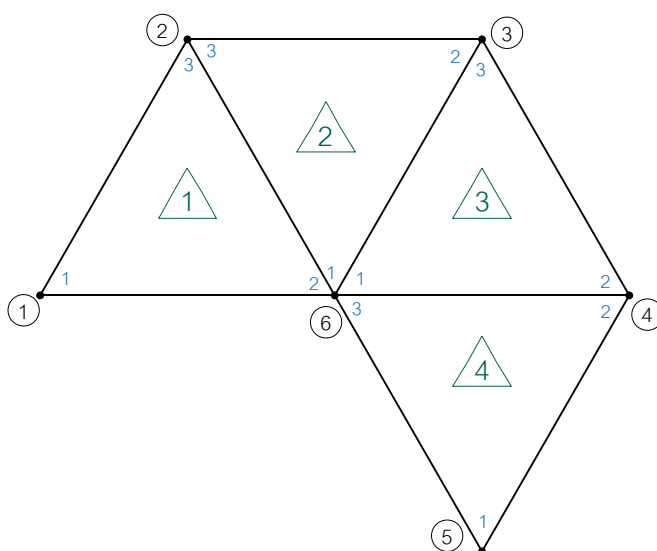


ภาพที่ 2.1 ภาพวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบรูณ์ (PML)

2.1 การแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์ (Domain Discretization)

รูปร่างพื้นฐานของเอลิเมนต์ คือ รูปร่างของสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular) แต่เนื่องจากพื้นที่สนใจนั้นเป็นพื้นที่รูปร่างใดๆที่มีส่วนโค้งและมุมที่ไม่เป็นมุมฉาก ส่งผลให้การแบ่งรูปร่างออกเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นมาก ดังนั้นจึงมีการเปลี่ยนรูปร่างให้มีการเหมาะสมกับพื้นที่มากขึ้นโดยการใช้รูปร่างสามเหลี่ยม (Triangle) หรือรูปร่างแบบสี่เหลี่ยม (Quadrilateral) แทนการใช้รูปร่างสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้รูปร่างแบบสามเหลี่ยมเนื่องจากเป็นวิธีการที่เป็นมาตรฐานทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยมีเงื่อนไขในการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์ที่ดีดังนี้

1. ความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมต้องมีขนาดใกล้เคียงกันหรือเท่ากัน
2. จำนวนของสามเหลี่ยมต้องเพียงพอในแต่ละบริเวณของพื้นที่
3. หมายเลขของจุดต่อ (Node) ต้องเริ่มจาก หมายเลข 1
4. ต้องไม่มีการซ้อนทับกันของแต่ละเอลิเมนต์
5. สามเหลี่ยมที่ติดกันต้องใช้ด้านร่วมกัน
6. จุดต่อที่ไม่ได้อยู่ที่ขอบของพื้นที่ ต้องมีการใช้ร่วมกันอย่างน้อย 3 เอลิเมนต์



ภาพที่ 2.2 ภาพตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์

พื้นที่ที่แบ่งเป็นเอลิเมนต์จะประกอบด้วยจุดต่อ ซึ่งแต่ละจุดต่อจะมีหมายเลขกำกับอยู่ 2 ประเภทคือ หมายเลขของจุดต่อเฉพาะที่ (Local node) และหมายเลขของจุดต่อครอบคลุม (Global node)

หมายเลขของจุดต่อเฉพาะที่ (Local node) คือ หมายเลขของจุดต่อภายในแต่ละเอลิเมนต์มีตั้งแต่หมายเลข 1 ถึงจำนวนจุดต่อทั้งหมดภายในเอลิเมนต์ ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้เอลิเมนต์ประเภทสามเหลี่ยมดังนั้นหมายเลขจุดต่อเฉพาะที่จะมีเฉพาะหมายเลข 1 ถึง 3 เท่านั้น ดังแสดงในภาพที่ 2.2 ในส่วนของตัวเลขที่ไม่มีเส้นล้อมรอบ

หมายเลขของจุดต่อครอบคลุม (Global node) คือ หมายเลขของจุดต่อทั้งหมดที่มีในพื้นที่ ดังแสดงในภาพที่ 2.2 เป็นตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบ

ในแต่ละเอลิเมนต์ หรือหมายเลขที่มีสามเหลี่ยมล้อมรอบในภาพที่ 2.2 จะประกอบด้วยจุดต่อ 3 จุดต่อ ตัวอย่างเช่น ในเอลิเมนต์หมายเลข 2 ประกอบด้วยจุดต่อทั่วไปหมายเลข 1, 2 และ 3 เมื่อพิจารณาจุดต่อแบบจุดต่อครอบคลุมจะประกอบด้วยจุดต่อครอบคลุมหมายเลข 6, 3 และ 2 ตามลำดับ กล่าวคือ

จุดต่อเฉพาะที่หมายเลข 1 ในเอลิเมนต์หมายเลข 2 คือจุดต่อครอบคลุมหมายเลข 6

จุดต่อเฉพาะที่หมายเลข 2 ในเอลิเมนต์หมายเลข 2 คือจุดต่อครอบคลุมหมายเลข 3 และ

จุดต่อเฉพาะที่หมายเลข 3 ในเอลิเมนต์หมายเลข 2 คือจุดต่อครอบคลุมหมายเลข 2

จุดต่อเฉพาะที่ใช้สำหรับการคำนวณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในแต่ละเอลิเมนต์ ก่อนที่จะนำแต่ละจุดต่อเฉพาะที่ของเอลิเมนต์ประกอบเข้าด้วยกันด้วยหมายเลขของจุดต่อครอบคลุม กล่าวคือ ในแต่ละเอลิเมนต์จะคำนวณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในแต่ละจุดต่อเฉพาะที่ หลังจากนั้นจะนำจุดต่อเฉพาะที่ที่มีหมายเลขจุดต่อครอบคลุมเดียวกันมารวมกัน ซึ่งขั้นตอนการรวมกันจะกล่าวอย่างละเอียดในบทที่ 3

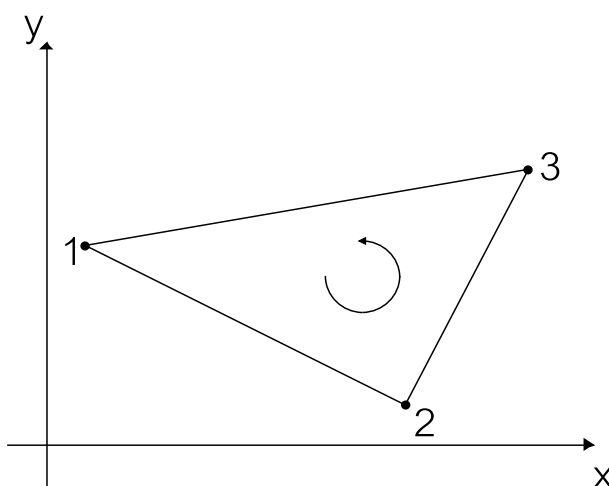
โดยปกติการแบ่งพื้นที่ออกเป็นเอลิเมนต์จะใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปเป็นเครื่องมือช่วย แต่เนื่องด้วยซอฟต์แวร์ที่มีทั่วไปนั้นเป็นซอฟต์แวร์ทางการค้า ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการประยุกต์ใช้ชุดคำสั่งของโปรแกรม Matlab ซึ่งมีลิขสิทธิ์อย่างถูกต้องอยู่ในห้องปฏิบัติการ โดยทำการพัฒนาโปรแกรมแบ่งเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับรูปร่างของวงจรมลิกโฟโตนิคส์

2.2 ฟังก์ชันรูปร่าง(Shape function or Interpolation function)

ฟังก์ชันรูปร่างจำเป็นต้องเลือกให้เหมาะสมกับรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ทำการแบ่งมาจากโปรแกรมแบ่งเอลิเมนต์ โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึง ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้น (Linear triangle) เป็นฟังก์ชันรูปร่างอย่างง่ายที่นิยมใช้กันในการศึกษาและทำความเข้าใจพื้นฐาน ฟังก์ชันรูปร่างแบบที่สองที่จะกล่าวถึงคือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อ (Six-node quadratic triangular) เป็นฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้ในงานของกลุ่ม Koshiba จำเป็นต้องมีการเพิ่มจุดในตำแหน่งตรงกลางด้านแต่ละด้านของสามเหลี่ยม และฟังก์ชันรูปร่างแบบสุดท้ายที่จะกล่าวถึงคือฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function) เป็นฟังก์ชันรูปร่างสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยม (polygon)[15] โดยวิทยานิพนธ์นี้จะนำมาประยุกต์ใช้กับรูปร่างแบบสามเหลี่ยม

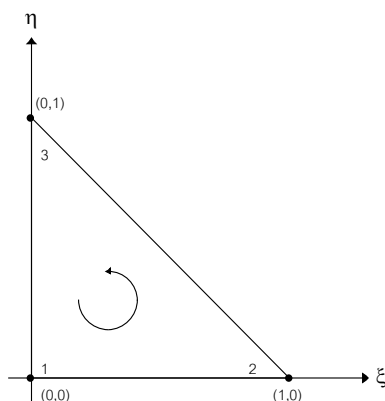
2.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น (Linear interpolation function)

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $X - Y$ แสดงดังภาพที่ 2.3 ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นจะมีสามจุดยอด (Vertex) สัมพันธ์กับสามจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ และการเรียงหมายเลขของแต่ละจุดต่อจะเรียงตัวแบบทวนเข็มนาฬิกา เพื่อหลีกเลี่ยงพื้นที่ของแต่ละสามเหลี่ยมมีค่าติดลบ



ภาพที่ 2.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมวางตัวในระนาบ $X - Y$

เพื่อให้่ายในการวิเคราะห์ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะถูกแปลงให้อยู่ในระนาบที่แกนอ้างอิง ทั้งสองตั้งฉากกัน ดังแสดงในภาพที่ 2.4 โดยที่เรียกสามเหลี่ยมในระนาบ $\xi - \eta$ ว่าสามเหลี่ยมหลัก (Master element) โดยแต่ละฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น $N_1(\xi, \eta)$, $N_2(\xi, \eta)$ และ $N_3(\xi, \eta)$ จะสัมพันธ์กับจุดต่อ 1, 2 และ 3 ของแต่ละเอลิเมนต์ตามลำดับ



ภาพที่ 2.4 สามเหลี่ยมหลัก (Master element) วางตัวในระนาบ $\xi - \eta$

สมการเชิงเส้นของฟังก์ชันรูปร่างสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.1) โดยมีเงื่อนไขคือ $N_i(\xi, \eta)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 ที่จุดต่อที่ i และอีก 2 จุดต่อที่เหลือมีค่าเท่ากับ 0 แสดงดังภาพที่ 2.5

$$N_i(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \quad (2.1)$$

เมื่อ i คือ หมายเลขของฟังก์ชันรูปร่าง ($i = 1, 2, 3$)

ดังนั้นฟังก์ชันรูปร่าง $N_1(\xi, \eta)$ มีค่าเป็น 1 ที่จุดต่อที่ 1 และจุดต่อที่ 2 กับ 3 มีค่าเป็น 0 จากสมการที่ (2.1) จะสามารถเขียนได้ว่า

$$N_1(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \quad (2.2)$$

การแก้สมการหาค่า c_1 , c_2 และ c_3 สามารถทำได้จากการแก้สมการที่แต่ละจุดต่อโดยการแทนค่า ξ, η ของแต่ละจุดต่อลงในสมการที่ (2.2) ดังนั้นจะได้

$$\text{ที่จุดต่อที่ 1 } \xi = 0, \eta = 0$$

$$\text{ที่จุดต่อที่ 2 } \xi = 1, \eta = 0$$

$$N_1(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$$

$$N_2(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$$

$$1 = c_1 + c_2(0) + c_3(0)$$

$$0 = 1 + c_2(1) + c_3(0)$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = -1$$

ที่จุดต่อที่ 3 $\xi = 0, \eta = 1$

$$\begin{aligned} N_3(\xi, \eta) &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta \\ 0 &= 1 + (-1)(0) + c_3(1) \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

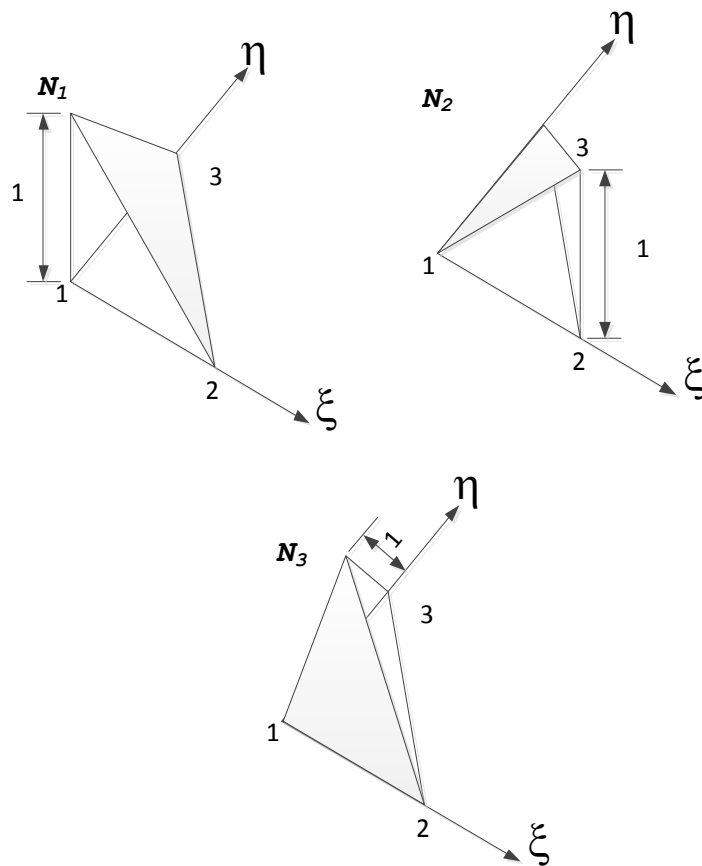
สามารถเขียนสมการฟังก์ชันรูปร่างของ $N_1(\xi, \eta)$ ได้ดังสมการที่ (2.3)

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (2.3)$$

ด้วยวิธีการเดียวกันสามารถเขียนฟังก์ชันรูปร่างของ $N_2(\xi, \eta)$ และ $N_3(\xi, \eta)$ ได้ดังนี้

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad (2.4)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (2.5)$$



ภาพที่ 2.5 ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมเชิงเส้น

ฟังก์ชันรูปร่างทั้งสามสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดพื้นที่ (Area coordinate) ได้
ดังนี้

$$N_1 = \frac{A_1}{A} \quad (2.6)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A} \quad (2.7)$$

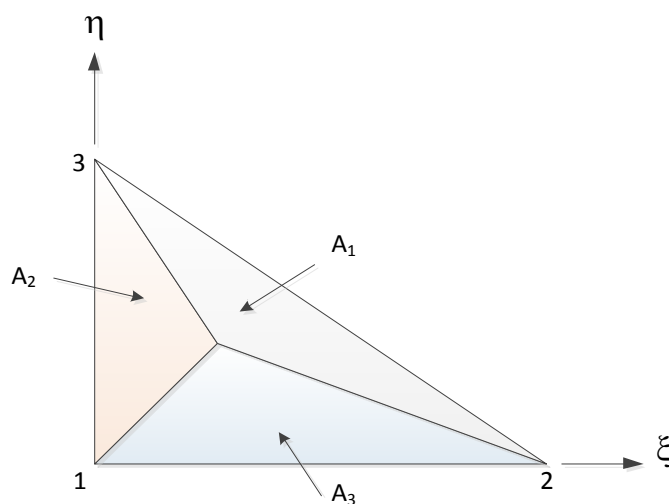
$$N_3 = \frac{A_3}{A} \quad (2.8)$$

เมื่อบวกฟังก์ชันรูปร่างทั้งสามเข้าด้วยกันจะได้

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} \\ &= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} \\ &= \frac{A}{A} \\ N_1 + N_2 + N_3 &= 1 \end{aligned}$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ทั้งหมดของสามเหลี่ยมหลัก

A_1 , A_2 และ A_3 คือพื้นที่ของสามเหลี่ยมย่อยที่เกิดจากการเพิ่มจุดใดๆลงในสามเหลี่ยมหลัก แสดงในภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในพิกัดพื้นที่

ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตัวแปรไม่ทราบค่า (u) ในแต่ละเอลิเมนต์ จะสามารถหาได้จาก ผลรวมของตัวแปรไม่ทราบค่าของแต่ละจุดต่อในเอลิเมนต์คูณด้วยฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละจุดต่อ สำหรับฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$u = u_1^e N_1 + u_2^e N_2 + u_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 u_i^e N_i \quad (2.9)$$

และสำหรับในโดเมน $X - Y$ จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$x = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^e N_i \quad (2.10)$$

$$y = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 y_i^e N_i \quad (2.11)$$

แทนค่าสมการที่ (2.3)-(2.5) ลงในสมการที่ (2.10) และ (2.11) จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

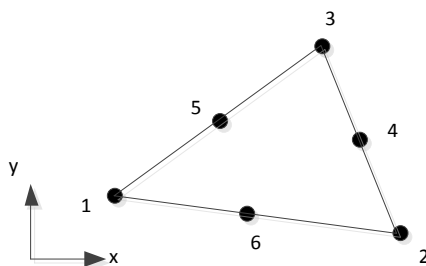
$$x = x_1^e + \bar{x}_{21}\xi + \bar{x}_{31}\eta \quad (2.12)$$

$$y = y_1^e + \bar{y}_{21}\xi + \bar{y}_{31}\eta \quad (2.13)$$

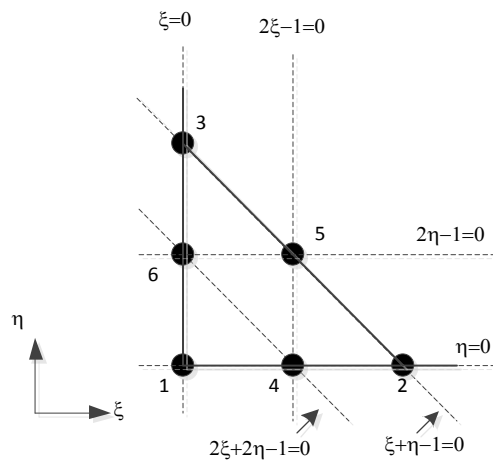
เมื่อ $\bar{x}_{ij} = x_i^e - x_j^e$ และ $\bar{y}_{ij} = y_i^e - y_j^e$

2.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อ (Six-node Quadratic Triangular Element)

ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อสามารถสร้างได้จากการเพิ่มจุดต่อที่จุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของของสามเหลี่ยม ดังแสดงในภาพที่ 2.7 และรูปสามเหลี่ยมหลักในภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.7 สามเหลี่ยมหกจุดต่อวางตัวในระนาบ $X - Y$



ภาพที่ 2.8 สามเหลี่ยมหลักหกจุดต่อวางตัวในระนาบ $\xi - \eta$

จากสมการที่ (2.9) ตัวแปรไม่ทราบค่าของฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อสามารถเขียนได้ดังนี้

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i^e N_i \quad (2.14)$$

$$y = \sum_{i=1}^6 y_i^e N_i \quad (2.15)$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างจะมีค่าดังนี้

$$N_1 = (2\xi + 2\eta - 1)(\xi + \eta - 1) \quad (2.16)$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1) \quad (2.17)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1) \quad (2.18)$$

$$N_4 = -4\xi(\xi + \eta - 1) \quad (2.19)$$

$$N_5 = 4\xi\eta \quad (2.20)$$

$$N_6 = -4\eta(\xi + \eta - 1) \quad (2.21)$$

2.2.3 ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรส (Wachspress's shape function)

ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสเป็นฟังก์ชันรูปร่างสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม อาศัยหลักการของพิกัดแบริเซนตริก (Barycentric coordinates) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$N_i^e(x, y) = \frac{w_i^e(x, y)}{\sum_{j=1}^N w_j^e(x, y)} \quad (2.22)$$

โดยที่ $w_i^e(x, y)$ คือ พิกัดแบริเซนตริกของโหนดที่ i ของเอลิเมนต์หมายเลขที่ e สามารถหาได้จากสมการ

$$w_i^e = \frac{A(i-1, i, i+1)}{A(p, i-1, i)A(p, i, i+1)} \quad (2.23)$$

เมื่อ $A(i-1, i, i+1)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยจุดต่อเฉพาะที่ $i-1, i$ และ $i+1$ ตามลำดับ

$A(p, j, k)$ คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยจุด p และจุดต่อเฉพาะที่ j และ k
 p คือ จุดใดๆ ในเอลิเมนต์ที่สนใจ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้จุดเซนทรอยด์ของเอลิเมนต์นั้นๆ

สำหรับเอลิเมนต์รูปร่างสามเหลี่ยม ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาชสเปรสจะมีฟังก์ชันรูปร่างทั้งหมด 3 ค่า คือ $N_1^e(x, y)$, $N_2^e(x, y)$ และ $N_3^e(x, y)$ จำนวนของพิกัดแบริเซนตริกทั้งหมด 3 ค่า ได้แก่

$$w_1^e = \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)} \quad (2.24)$$

$$w_2^e = \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} \quad (2.25)$$

$$w_3^e = \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j^e(x, y) &= \frac{A(3,1,2)}{A(p,3,1)A(p,1,2)} + \frac{A(1,2,3)}{A(p,1,2)A(p,2,3)} + \frac{A(2,3,1)}{A(p,2,3)A(p,3,1)} \\ &= \frac{A(3,1,2)^2}{A(p,1,2)A(p,2,3)A(p,3,1)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

จากสมการที่(2.22)และกลุ่มสมการพิกัดแบรีเซ็นทริก (2.24)-(2.26) จะได้ ฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละจุดต่อไปนี้

$$N_1^e(x, y) = \frac{A(p, 2, 3)}{A(3, 1, 2)} \quad (2.28)$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{A(p, 3, 1)}{A(1, 2, 3)} \quad (2.29)$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{A(p, 1, 2)}{A(2, 3, 1)} \quad (2.30)$$

เมื่อ $A(3, 1, 2) = A(1, 2, 3) = A(2, 3, 1) =$ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่สนใจ

$$A(p, 1, 2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y$$

$$A(p, 2, 3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y$$

$$A(p, 3, 1) = (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y$$

2.3 สมการทั่วไปของคลื่นในวัสดุไอโซทรอปิก

เมื่อพิจารณาวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกในสองมิติ ดังแสดงในภาพที่ 2.1 จะสามารถพิจารณาคลื่นได้ด้วยสมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนเวลา โดยใช้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ (Perfectly matched layer : PML)[9] สมการคลื่นที่แพร่กระจายในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{S_y}{S_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{S_x}{S_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - S_x S_y \frac{q}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

เมื่อ $\phi = E_z$, $p = 1$, $q = n^2$ สำหรับ TE โหมด

$\phi = H_z$, $p = \frac{1}{n^2}$, $q = 1$ สำหรับ TM โหมด

S_x, S_y คือ ค่าพารามิเตอร์ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์

E_z คือ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน z

H_z คือ องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวแกน z

c คือ ความเร็วแสงในอากาศ

n คือ ค่าดัชนีหักเหของแสง

ตารางที่ 2.1 ค่าพารามิเตอร์ (S) ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบรูณ์

พารามิเตอร์ PML	บริเวณของ PML จากภาพที่ 2.1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
S_x	1	1	S_4	S_3	S_4	S_4	S_3	S_3
S_y	S_1	S_2	1	1	S_1	S_2	S_1	S_2

ค่าพารามิเตอร์ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบรูณ์ ตามตารางที่ 2.1 S_k ($k = 1, 2, 3, 4$) สามารถหาได้จาก สมการที่ (2.32) [10]

$$S_k = 1 - j \left(\frac{\rho}{d_k} \right)^2 \tan \delta_k \quad (2.32)$$

เมื่อ ρ คือ ระยะห่างจากขอบของ PML ถึงเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา

δ_k คือ มุมของการสูญเสีย (Loss angle)

d_k คือ ความหนาของ PML แต่ละชั้น

2.4 บีบโพรพาเกชันในโดเมนเวลา (TD-BPM)

กำหนดให้คลื่นอยู่ในรูปของผลคูณของคลื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดอย่างช้าๆ และแปรตามฟังก์ชันของเวลา t กับคลื่นพาห่ที่มีความถี่สูงโดยมีความถี่เชิงมุมเป็น ω_0 ดังสมการ

$$\phi(x, y, t) = \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) \quad (2.33)$$

จากสมการที่ (2.33) เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับสอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(t) \exp(j\omega_0 t)) \\ &= \Phi(t) \frac{\partial \exp(j\omega_0 t)}{\partial t} + \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \\ &= (j\omega_0) \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left((j\omega_0) \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[(j\omega_0) \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right] \\
&= \left[(j\omega_0) \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} \exp(j\omega_0 t) + (j\omega_0) \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right] \\
&\quad + \left[\exp(j\omega_0 t) \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \exp(j\omega_0 t) \right] \\
&= \left[(j\omega_0)^2 \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) + (j\omega_0) \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right] \\
&\quad + \left[\exp(j\omega_0 t) \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} + (j\omega_0) \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right] \\
\frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial t^2} &= -\omega_0^2 \Phi(t) \exp(j\omega_0 t) + (j2\omega_0) \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + \exp(j\omega_0 t) \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

แทนสมการที่ (2.34) และ(2.35) ลงในสมการ(2.31) และทำการจัดรูปใหม่จะได้สมการออกมาดังนี้

$$-\frac{1}{c^2} [M] \frac{\partial^2 \{\Phi\}}{\partial t^2} - \frac{j2\omega_0}{c^2} [M] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial t} + \left([K] + \frac{\omega_0^2}{c^2} [M] \right) \{\Phi\} = \{0\} \tag{2.36}$$

โดยที่

$$[K] = \sum_e \iint_e \left[-p \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} - p \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right] dx dy$$

$$[M] = \sum_e \iint_e s_x s_y \{N\} \{N\}^T dx dy$$

$\{\Phi\}$ เวกเตอร์ของสนามที่ตำแหน่ง(จุดต่อ)ต่างๆ

$\{0\}$ เวกเตอร์ศูนย์(Null vector)

จะเห็นได้ว่าในสมการที่ (2.36) จะมีพจน์ที่เป็นอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับสองอยู่ด้วย เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ด้วยวิธีการของแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) ซึ่งเป็นการหาคำตอบของอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับหนึ่งจะกระทำการลดอันดับของอนุพันธ์ให้เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งก่อนด้วยวิธีการประมาณแบบพาเด่ (Padé approximation)[12] จะได้สมการดังนี้

$$-\frac{j2\omega_0}{c^2}[\tilde{M}] \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left([K] + \frac{\omega_0^2}{c^2} [M] \right) \{\Phi\} = \{0\} \quad (2.37)$$

โดยที่

$$[\tilde{M}] = [M] - \frac{1}{4\omega_0^2} \left([K] + \frac{\omega_0^2}{c^2} [M] \right) \quad (2.38)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่(2.37) ผ่านวิธีการประมาณแบบพาเด่ ออกมานั้นจะเหลือเพียงอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับหนึ่ง จึงสามารถที่จะประมาณคำตอบของสมการได้ด้วยวิธีการของแครงค์-นิโคลสัน ดังนี้

$$[A]_i \{\Phi\}_{t=(i+1)\Delta t} = [B]_i \{\Phi\}_{t=(i)\Delta t} \quad (2.39)$$

โดยที่

$$[A]_i = \frac{-2j\omega_0}{c^2} [\tilde{M}]_i + 0.5\Delta t \left([K]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2} [\tilde{M}]_i \right) \quad (2.40)$$

$$[B]_i = \frac{-2j\omega_0}{c^2} [\tilde{M}]_i - 0.5\Delta t \left([K]_i + \frac{\omega_0^2}{c^2} [\tilde{M}]_i \right) \quad (2.41)$$

Δt คือ ระยะเวลาระหว่างจุดเวลา

$\{\Phi\}_{t=(i)\Delta t}$ คือ สนาม ณ เวลาที่ $(i) \times \Delta t$

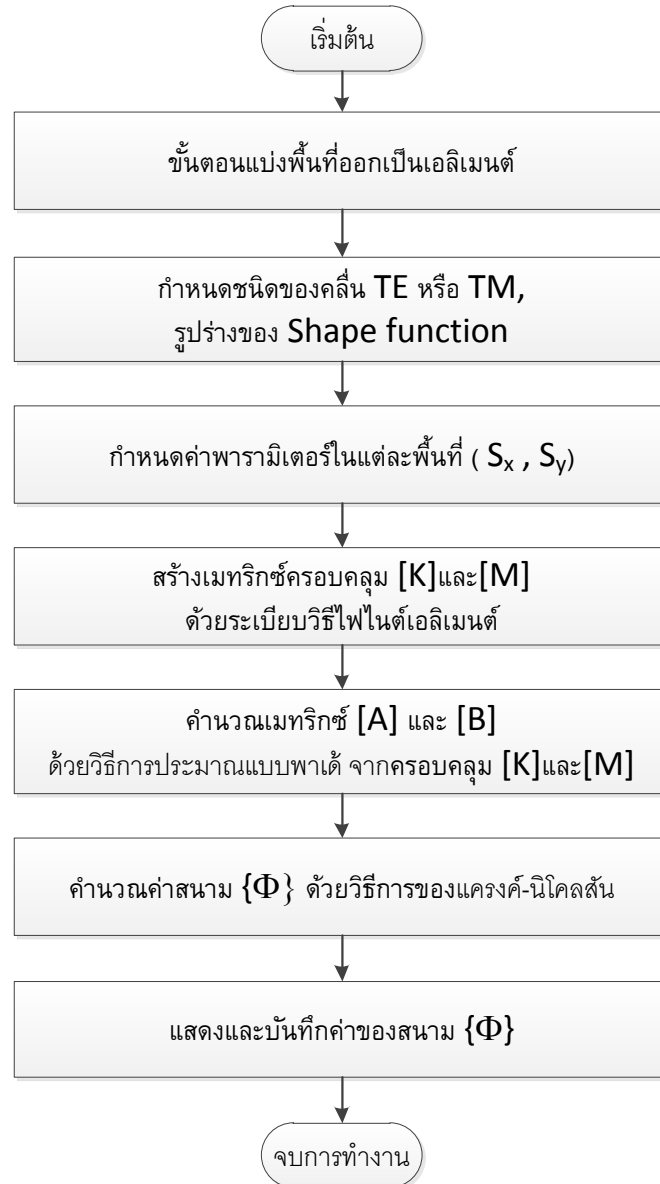
$\{\Phi\}_{t=(i+1)\Delta t}$ คือ สนาม ณ เวลาที่ $(i+1) \times \Delta t$

ระยะเวลาระหว่างจุดเวลา Δt ที่เหมาะสมที่ใช้ในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะมีความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของ คูแรนท์-เฟดริค-เลวี (Courant-Friedrich-Levy Condition) ดังสมการ

$$\Delta t = \frac{\min(l)}{c} \quad (2.42)$$

โดยที่ $\min(l)$ คือความยาวที่สั้นที่สุดของขอบเอลิเมนต์

สามารถสรุปขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้



ภาพที่ 2.9 ขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาเพื่อการวิเคราะห์

วงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แอนไอโซทรอปิก

ในบทนี้กล่าวถึงการสร้างสมการทั่วไปของคลื่นในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก การรวมเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ให้เป็นเมทริกซ์ครอบคลุม หลังจากนั้นประยุกต์ใช้สมการในการหาโครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์

3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมโพรพาเกชันในโดเมนเวลาวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก

3.1.1 สมการแมกซ์เวลล์(Maxwell's Equation)

กำหนดให้ผลึกโฟโตนิกส์ที่มีโครงสร้าง 2 มิติ วางตัวในระนาบ $X - Y$ และวัสดุที่ใช้เป็นชนิดแอนไอโซทรอปิก ซึ่งมีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า (Permittivity: $\bar{\epsilon}$) และค่าความซึมซาบแม่เหล็ก (Permeability: $\bar{\mu}$) อยู่ในรูปของเทนเซอร์ (Tensor) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ (Perfectly matched layer : PML) ได้ดังนี้

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} & 0 \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

โดยที่ $\tilde{\epsilon}_{xx} = \frac{S_y S_z}{S_x} \epsilon_{xx}$, $\tilde{\epsilon}_{yy} = \frac{S_x S_z}{S_y} \epsilon_{yy}$, $\tilde{\epsilon}_{zz} = \frac{S_x S_y}{S_z} \epsilon_{zz}$, $\tilde{\epsilon}_{xy} = S_z \epsilon_{xy}$, $\tilde{\epsilon}_{yx} = S_z \epsilon_{yx}$

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{xx} & \tilde{\mu}_{xy} & 0 \\ \tilde{\mu}_{yx} & \tilde{\mu}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

โดยที่ $\tilde{\mu}_{xx} = \frac{S_y S_z}{S_x} \mu_{xx}$, $\tilde{\mu}_{yy} = \frac{S_x S_z}{S_y} \mu_{yy}$, $\tilde{\mu}_{zz} = \frac{S_x S_y}{S_z} \mu_{zz}$, $\tilde{\mu}_{xy} = S_z \mu_{xy}$, $\tilde{\mu}_{yx} = S_z \mu_{yx}$

ค่าพารามิเตอร์ของเงื่อนไขขอบเขตแบบชั้นแมตซ์เฟสสมบูรณ์ มีค่าตามตารางที่ 2.1

แทนค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า และค่าความซึมซาบแม่เหล็ก ลงในสมการแมกซ์เวลล์ สามารถเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนเวลาของวัสดุแอนไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสียสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\bar{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \bar{\epsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

เนื่องจากกำหนดให้โครงสร้างของวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน Z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ จะทำการแยกองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่ขนานกับการเคลื่อนที่ซึ่งก็คือระนาบ $X-Y$ และส่วนที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ในแนวแกน Z ดังนั้นสามารถเขียนสมการของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$\nabla_p \times E_z = -\bar{\mu}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_p}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\nabla_p \times \mathbf{E}_p = -\tilde{\mu}_{zz} \frac{\partial H_z \mathbf{a}_z}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\nabla_p \times H_z = \bar{\epsilon}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\nabla_p \times \mathbf{H}_p = \tilde{\epsilon}_{zz} \frac{\partial E_z \mathbf{a}_z}{\partial t} \quad (3.8)$$

โดยที่ p คือ ระนาบขนาน (Parallel plane) ในวิทยานิพนธ์นี้คือระนาบ $X-Y$

$$\nabla_p = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \bar{\epsilon}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yy} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{xx} & \tilde{\mu}_{xy} \\ \tilde{\mu}_{yx} & \tilde{\mu}_{yy} \end{bmatrix}$$

3.1.2 สมการทั่วไปของคลื่น TE และ TM (General Form of TE and TM Wave)

จากกลุ่มของสมการที่ (3.5)-(3.8) สามารถจัดกลุ่มได้เป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่มของคลื่น TE และคลื่น TM ซึ่งกลุ่มของ TE จะประกอบด้วยสมการที่ (3.5) และ (3.8) มีองค์ประกอบของ $E_z \mathbf{a}_z$ กับ \mathbf{H}_p สามารถจัดรูปและเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \mathbf{H}_p}{\partial t} = -(\bar{\mu}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times E_z \mathbf{a}_z \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = (\tilde{\epsilon}_{zz})^{-1} (\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times \mathbf{H}_p) \quad (3.10)$$

และกลุ่มของ TM จะประกอบด้วยสมการที่ (3.6) และ (3.7) ซึ่งมีองค์ประกอบของ \mathbf{E}_p กับ $H_z \mathbf{a}_z$ สามารถจัดรูปและเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} = (\bar{\epsilon}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times H_z \mathbf{a}_z \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -(\tilde{\mu}_{zz})^{-1} (\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times \mathbf{E}_p) \quad (3.12)$$

เพื่อที่จะทำการจัดรูปแบบของสมการให้เป็นสมการทั่วไป จะจัดสมการที่อยู่ในรูปของอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับหนึ่ง ให้เป็นอนุพันธ์อันดับสองด้วยขั้นตอนดังนี้

สำหรับคลื่น TE นำสมการที่ (3.10) คูณด้วย $\frac{\partial}{\partial t}$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ดังสมการที่ (3.13)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = (\tilde{\epsilon}_{zz})^{-1} \left(\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times \frac{\partial \mathbf{H}_p}{\partial t} \right) \quad (3.13)$$

แทนค่าสมการ (3.9) ใน สมการ (3.13) สมการอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับสองของคลื่น TE จะได้ดังสมการที่ (3.14)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = (\epsilon_{zz})^{-1} \left(\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times -(\bar{\mu}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times E_z \mathbf{a}_z \right) \quad (3.14)$$

สำหรับคลื่น TM ด้วยขั้นตอนแบบเดียวกันกับคลื่น TE นำ $\frac{\partial}{\partial t}$ คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (3.12) จะได้

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = -(\tilde{\mu}_{zz})^{-1} \left(\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} \right) \quad (3.15)$$

แทนค่าสมการ (3.11) ในสมการ (3.15) สมการอนุพันธ์เทียบเวลาอันดับสองของคลื่น TM จะได้ดังสมการที่ (3.16)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = -(\tilde{\mu}_{zz})^{-1} \left(\mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{\epsilon}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times \mathbf{H}_z \right) \quad (3.16)$$

จากสมการที่ (3.14) และ (3.16) สามารถสรุปออกมาเป็นสมการทั่วไปของคลื่นได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = p \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \phi \mathbf{a}_z) \quad (3.17)$$

โดยที่ ค่า ϕ , p และ \bar{q} จะมีค่าตามตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ค่าพารามิเตอร์ในสมการทั่วไปของคลื่น สำหรับคลื่น TE และ TM

Wave Type	ϕ	p	\bar{q}
TE	E_z	$-(\tilde{\epsilon}_{zz})^{-1}$	$(\bar{\mu}_p)^{-1}$
TM	H_z	$-(\tilde{\mu}_{zz})^{-1}$	$(\bar{\epsilon}_p)^{-1}$

3.1.3 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

เงื่อนไขขอบเขตเป็นความสัมพันธ์ที่มีความจำเป็นอย่างมากในการหาคำตอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เงื่อนไขขอบเขตนั้นแบ่งได้ 3 ประเภท ได้แก่ ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (Perfect Electric Conductor : PEC) ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (Perfect Magnetic Conductor : PMC) และรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด เงื่อนไขขอบเขตสามารถพิสูจน์ได้จากสมการของแมกซ์เวลล์ในรูปของอินทิกรัล (Integral form) ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

ในตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (PEC) องค์ประกอบในแนวสัมผัส (Tangential component) ของสนามไฟฟ้าต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.18)$$

ในตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (PMC) องค์ประกอบในแนวสัมผัสของสนามแม่เหล็กต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.19)$$

รอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด องค์ประกอบในแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \text{continuous function} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \text{continuous function} \quad (3.21)$$

โครงสร้างของวงจรถ่อนาคคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่สนใจไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน Z ดังนั้นเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย (Unit normal vector) ที่บริเวณขอบรอยต่อจะวางตัวในระนาบ $X - Y$ โดยกำหนดให้ \mathbf{n}_p แทนเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย ที่จุดที่สนใจบริเวณขอบรอยต่อ

ในกรณีที่คลื่นเป็นคลื่น TE จะประกอบด้วย 3 องค์ประกอบคือ \mathbf{E}_z และ \mathbf{H}_p จากสมการ (3.18) เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (PEC) คือ

$$\mathbf{n}_p \times E_z \mathbf{a}_z = 0 \quad (3.22)$$

ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$E_z = 0 \quad (3.23)$$

จากสมการที่ (3.9) และสมการที่ (3.19) เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (PMC) ที่ต้องการคือ

$$\mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_p = 0 \quad (3.24)$$

ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\mathbf{n}_p \times \left((\bar{\mu}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times E_z \mathbf{a}_z \right) = 0 \quad (3.25)$$

จากสมการที่ (3.9), (3.20) และ(3.21) เงื่อนไขขอบเขตระหว่างรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด คือ

$$E_z = \text{continuous function} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{n}_p \times \left((\bar{\mu}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times E_z \mathbf{a}_z \right) = \text{continuous function} \quad (3.27)$$

ในกรณีของคลื่น TM สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับคลื่น TE เงื่อนไขขอบเขตจะได้ จากสมการ (3.19) เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (PMC) ที่ต้องการคือ

$$H_z = 0 \quad (3.28)$$

จากสมการ (3.18) และสมการ (3.11) เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (PEC) ที่ต้องการ

$$\mathbf{n}_p \times \left((\bar{\epsilon}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times H_z \mathbf{a}_z \right) = 0 \quad (3.29)$$

จากสมการที่ (3.11), (3.20) และ (3.21) เงื่อนไขขอบเขตระหว่างรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด

$$H_z = \text{continuous function} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{n}_p \times \left((\bar{\epsilon}_p)^{-1} \cdot \nabla_p \times H_z \mathbf{a}_z \right) = \text{continuous function} \quad (3.31)$$

สามารถบอกได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตที่สัมพันธ์กับสมการทั่วไปของคลื่น TE และคลื่น TM ในสมการที่ (3.17) เป็นดังนี้

สำหรับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (PEC)

$$\phi = 0 \quad (\text{TE WAVE}) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{n}_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \phi \mathbf{a}_z) = 0 \quad (\text{TM WAVE}) \quad (3.33)$$

สำหรับตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (PMC)

$$\mathbf{n}_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \phi \mathbf{a}_z) = 0 \quad (\text{TE WAVE}) \quad (3.34)$$

$$\phi = 0 \quad (\text{TM WAVE}) \quad (3.35)$$

สำหรับรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด

$$\phi = \text{continuous function(TE WAVE)} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{n}_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \phi \mathbf{a}_z) = \text{continuous function(TM WAVE)} \quad (3.37)$$

3.1.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(Finite Element Method)

เนื่องจากการแบ่งพื้นที่เป็นพื้นที่ย่อยหรือเอลิเมนต์นั้น ค่าคำตอบของสนาม (ϕ) จะถูกประมาณค่าให้อยู่บนจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ และค่าคำตอบของสนามสามารถประมาณได้เท่ากับผลรวมของฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละจุดต่อคูณกับค่าของสนามของแต่ละจุดต่อซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า สมการการประมาณค่าคำตอบของสนามสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\phi^e(x, y) \cong \hat{\phi}(x, y) = \sum_{n=1}^N N_n(x, y) \phi_n \quad (3.38)$$

โดยที่ $\hat{\phi}$ คือ คำตอบของสนามประมาณค่า
 N_n คือ ฟังก์ชันรูปร่างที่จุดต่อ n
 N คือ จำนวนของจุดต่อ

แทนคำตอบของสนามประมาณค่าในสมการที่ (3.38) ลงในสมการทั่วไปของคลื่นสมการที่ (3.17) สามารถเขียนสมการทั่วไปของคลื่น TE และ TM ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} = p \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \phi \mathbf{a}_z) \quad (3.39)$$

เมื่อนำสมการที่(3.39) วิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างแบบกาเลอคิน สามารถเขียนสมการของเศษตค่าง $R(x, y)$ ดังนี้

$$R(x, y) = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} - p \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \quad (3.40)$$

ในการหาคำตอบของสนามจะทำการขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการคูณสมการที่ (3.40) ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weight function) หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ และสุดท้ายบังคับให้เท่ากับศูนย์ จากวิธีการของกาเลอคินฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะเป็นฟังก์ชันเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} RN_m dS = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} N_m dS - \int_{\Omega} p \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) N_m dS = 0 \quad (3.41)$$

โดยที่ $m = (1, 2, 3, \dots, N)$ สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{\Omega} N_m \hat{\phi} dS \right) = \int_{\Omega} p \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) N_m dS \quad (3.42)$$

จากเอกลักษณ์ของเวกเตอร์ $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ ผังขวาของสมการที่ (3.42) จะได้สมการความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p N_m \mathbf{a}_z \cdot \nabla_p \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) dS &= \int_{\Omega} \nabla_p \cdot \left((\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \times p N_m \mathbf{a}_z \right) \cdot dS \\ &+ \int_{\Omega} (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \cdot (\nabla_p \times p N_m \mathbf{a}_z) dS \end{aligned} \quad (3.43)$$

ประยุกต์ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจน (Divergence theorem) กับผังขวาพจน์ที่หนึ่งของสมการที่ (3.43) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_p \cdot \left((\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \times p N_m \mathbf{a}_z \right) dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{n}_{po} \cdot \left((\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \times p N_m \mathbf{a}_z \right) dL \\ &= \oint_{\Gamma} p N_m \mathbf{a}_z \cdot \left(\mathbf{n}_{po} \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \right) dL \end{aligned} \quad (3.44)$$

แทนค่าสมการที่ (3.43) และ (3.44) ลงในสมการที่(3.42) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p} N_m \hat{\phi} dS \right) &= \oint_{\Gamma} N_m \mathbf{a}_z \cdot \left(\mathbf{n}_{po} \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \right) dL \\ &+ \int_{\Omega} (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \cdot (\nabla_p \times N_m \mathbf{a}_z) dS \end{aligned} \quad (3.45)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตจากส่วน3.1.3 การอินทิกรัลแบบเส้น (Line integral) จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ บังคับด้วยเงื่อนไข

ที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (PEC) เงื่อนไขสามารถหาได้จากการบังคับให้

$$N_m = 0 \quad (\text{TE WAVE}) \quad (3.46)$$

ที่ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (PMC) เงื่อนไขสามารถหาได้จากการบังคับให้

$$N_m = 0 \quad (\text{TM WAVE}) \quad (3.47)$$

และบริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด เงื่อนไขสามารถหาได้จากการบังคับให้

$$N_m = \text{continuous function}(\text{TE และ TM WAVE}) \quad (3.48)$$

หลังจากการบังคับเงื่อนไขขอบเขต สมการระบบของระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค้างสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p} N_m \hat{\phi} dS \right) = \int_{\Omega} (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z) \cdot (\nabla_p \times N_m \mathbf{a}_z) dS \quad (3.49)$$

นำสมการที่ (3.38) แทนค่าในสมการที่ (3.49) สมการของระบบจะสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[M^e] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi^e\} = [K^e] \{\phi^e\} \quad (3.50)$$

โดยที่ $\{\phi^e\}$ เป็นคอลัมน์เวกเตอร์ (Column vector) ของคำตอบของสนาม $[M^e]$ และ $[K^e]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $N \times N$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & \cdots & M_{1N}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & \cdots & M_{2N}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1}^e & M_{N2}^e & \cdots & M_{NN}^e \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & \cdots & K_{1N}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & \cdots & K_{2N}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1}^e & K_{N2}^e & \cdots & K_{NN}^e \end{bmatrix} \text{ เมื่อ}$$

$$K_{mn}^e = \int_{\Omega} (\nabla_p \times N_m \mathbf{a}_z) \cdot (\bar{q} \cdot \nabla_p \times N_n \mathbf{a}_z) dS \quad (3.51)$$

$$M_{mn}^e = \int_{\Omega} \frac{1}{p} N_m N_n dS \quad (3.52)$$

$$m = (1, 2, 3, \dots, N), \quad n = (1, 2, 3, \dots, N)$$

เมื่อได้เมทริกซ์ที่เป็นตัวแทนของแต่ละเอลิเมนต์ ในขั้นตอนต่อไปจะทำการรวมเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เข้าเป็นเมทริกซ์ครอบคลุมได้สมการดังนี้

$$K = \sum_e \int_{\Omega} (\nabla_p \times N_m \mathbf{a}_z) \cdot (\bar{q} \cdot \nabla_p \times N_n \mathbf{a}_z) dS \quad (3.53)$$

$$M = \sum_e \int_{\Omega} \frac{1}{p} N_m N_n dS \quad (3.54)$$

ดังนั้นสมการที่ (3.50) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ครอบคลุมได้

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} = [K] \{\phi\} \quad (3.55)$$

โดยที่การรวมเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เป็นเมทริกซ์ครอบคลุมนั้นอ้างอิงหมายเลขจุดต่อครอบคลุมของแต่ละเอลิเมนต์ ตัวอย่างการประกอบเอลิเมนต์ จากภาพที่ 2.2 สามารถสร้างตารางความสัมพันธ์ระหว่างเอลิเมนต์กับจุดต่อครอบคลุมได้ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ตารางความสัมพันธ์ระหว่างเอลิเมนต์กับจุดต่อของภาพที่ 2.2

หมายเลข เอลิเมนต์	หมายเลขจุดต่อ		
	1	2	3
1	1	6	2
2	6	3	2
3	6	4	3
4	5	4	6

เมทริกซ์ครอบคลุม $[K]$ ก่อนเริ่มขั้นตอนการรวมเมทริกซ์ จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีค่าศูนย์และมีขนาดเท่ากับจำนวนจุดต่อทั้งหมด ในขั้นตอนการประกอบจะนำค่าจากแต่ละเอลิเมนต์บวกกับค่าที่มีอยู่ในตำแหน่งเดิมของเมทริกซ์ครอบคลุม $[K]$ และทำการปรับค่าของเมทริกซ์ครอบคลุม $[K]$ ให้เป็นปัจจุบัน โดยเริ่มต้นตั้งแต่เอลิเมนต์หมายเลขที่ 1 ไปจนถึงหมายเลขสุดท้าย ตำแหน่งสามารถหาได้จากหมายเลขจุดต่อครอบคลุม ตัวอย่างเช่น ในเอลิเมนต์หมายเลขที่ 1

$K_{11}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{11} ของเมทริกซ์ครอบคลุม

$K_{12}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{16} ของเมทริกซ์ครอบคลุม

$K_{13}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{12} ของเมทริกซ์ครอบคลุม

$K_{21}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{61} ของเมทริกซ์ครอบคลุม

$K_{22}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{66} ของเมทริกซ์ครอบคลุม

$K_{23}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{62} ของเมทริกซ์ครอปกคลุม

$K_{31}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{21} ของเมทริกซ์ครอปกคลุม

$K_{32}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{26} ของเมทริกซ์ครอปกคลุม

$K_{33}^{e=1}$ จะทำการบวกกับ K_{22} ของเมทริกซ์ครอปกคลุม

สามารถสรุปเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{e=1} & K_{13}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & K_{12}^{e=1} \\ K_{31}^{e=1} & K_{33}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & K_{32}^{e=1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{e=1} & K_{23}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & K_{22}^{e=1} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

สำหรับเอลิเมนต์หมายเลข 2 ด้วยวิธีการเช่นเดียวกับเอลิเมนต์หมายเลข 1 จะได้เมทริกซ์ครอปกคลุม

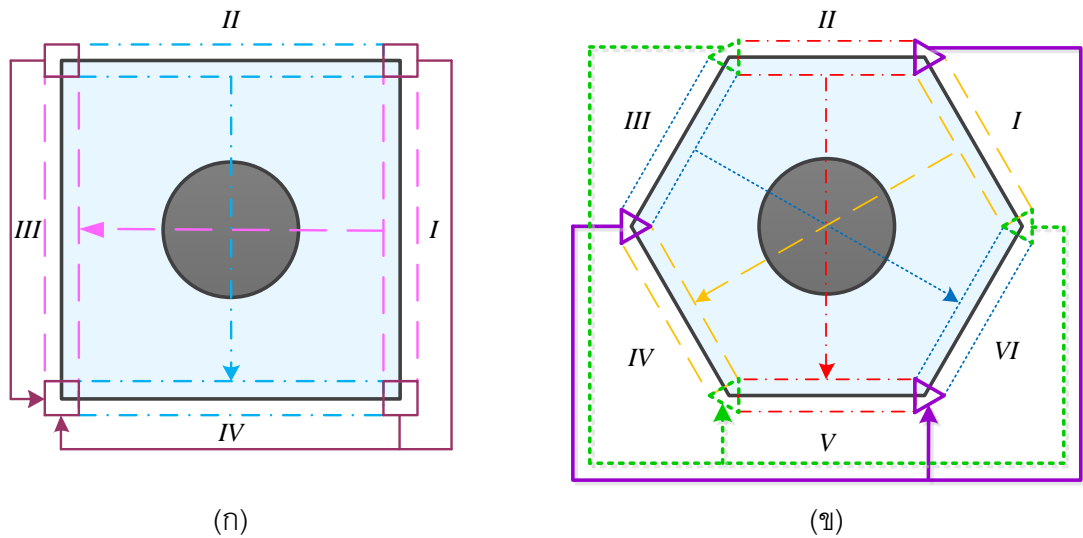
$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{e=1} & K_{13}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & K_{12}^{e=1} \\ K_{31}^{e=1} & K_{33}^{e=1} + K_{33}^{e=2} & K_{32}^{e=2} & 0 & 0 & K_{32}^{e=1} + K_{31}^{e=2} \\ 0 & K_{23}^{e=2} & K_{22}^{e=2} & 0 & 0 & K_{21}^{e=2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{e=1} & K_{23}^{e=1} + K_{13}^{e=2} & K_{12}^{e=2} & 0 & 0 & K_{22}^{e=1} + K_{11}^{e=2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

และเมื่อนำเอลิเมนต์หมายเลข 3 และ 4 มาพิจารณา จะได้เมทริกซ์ครอปกคลุม

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{e=1} & K_{13}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & K_{12}^{e=1} \\ K_{31}^{e=1} & K_{33}^{e=1} + K_{33}^{e=2} & K_{32}^{e=2} & 0 & 0 & K_{32}^{e=1} + K_{31}^{e=2} \\ 0 & K_{23}^{e=2} & K_{22}^{e=2} + K_{33}^{e=3} & K_{32}^{e=3} & 0 & K_{21}^{e=2} + K_{31}^{e=3} \\ 0 & 0 & K_{23}^{e=3} & K_{22}^{e=3} + K_{22}^{e=4} & K_{21}^{e=4} & K_{21}^{e=3} + K_{23}^{e=4} \\ 0 & 0 & 0 & K_{12}^{e=4} & K_{11}^{e=4} & K_{13}^{e=4} \\ K_{21}^{e=1} & K_{23}^{e=1} + K_{13}^{e=2} & K_{12}^{e=2} + K_{13}^{e=3} & K_{12}^{e=3} + K_{32}^{e=4} & K_{31}^{e=4} & K_{22}^{e=1} + K_{11}^{e=2} + K_{11}^{e=3} + K_{33}^{e=4} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

เมทริกซ์ครอปกคลุม $[M]$ สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับเมทริกซ์ครอปกคลุม $[K]$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^{e=1} & M_{13}^{e=1} & 0 & 0 & 0 & M_{12}^{e=1} \\ M_{31}^{e=1} & M_{33}^{e=1} + M_{33}^{e=2} & M_{32}^{e=2} & 0 & 0 & M_{32}^{e=1} + M_{31}^{e=2} \\ 0 & M_{23}^{e=2} & M_{22}^{e=2} + M_{33}^{e=3} & M_{32}^{e=3} & 0 & M_{21}^{e=2} + M_{31}^{e=3} \\ 0 & 0 & M_{23}^{e=3} & M_{22}^{e=3} + M_{22}^{e=4} & M_{21}^{e=4} & M_{21}^{e=3} + M_{23}^{e=4} \\ 0 & 0 & 0 & M_{12}^{e=4} & M_{11}^{e=4} & M_{13}^{e=4} \\ M_{21}^{e=1} & M_{23}^{e=1} + M_{13}^{e=2} & M_{12}^{e=2} + M_{13}^{e=3} & M_{12}^{e=3} + M_{32}^{e=4} & M_{31}^{e=4} & M_{22}^{e=1} + M_{11}^{e=2} + M_{11}^{e=3} + M_{33}^{e=4} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$



ภาพที่ 3.1 ภาพเซลล์หนึ่งหน่วยของผลึกโฟโตนิกส์

3.2 การวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ (Photonic Band gap : PBG)

เนื่องจากคุณสมบัติที่วางเรียงตัวกันเป็นรายคาบของผลึกโฟโตนิกส์ ทำให้สามารถใช้เซลล์หนึ่งหน่วย เป็นตัวแทนของของโครงสร้างทั้งหมด ในการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ ในกระบวนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์จะวิเคราะห์ผลตอบสนองในโดเมนความถี่ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบรายคาบ (Periodic boundary condition) ให้กับจุดต่อบริเวณขอบของเซลล์หนึ่งหน่วย หลังจากนั้นจะทำการหาผลตอบสนองด้วยวิธีการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ จากสมการที่ (3.45) และขั้นตอนการรวมแต่ละเอลิเมนต์เป็นเมทริกซ์ครอบคลุม สามารถเขียนสมการที่ (3.45) ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ครอบคลุม ได้ดังนี้

$$[K]\{\phi\} - \omega^2 [M]\{\phi\} = \{\Psi\} \quad (3.60)$$

$$\text{เมื่อ } \{\Psi\} = \sum_e \oint_{\Gamma} N_m \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n}_{po} \times (\bar{q} \cdot \nabla_p \times \hat{\phi} \mathbf{a}_z)) dL$$

โครงสร้างของเซลล์หนึ่งหน่วย ของผลึกโฟโตนิกส์นั้นมีอยู่ 2 ประเภทคือ โครงสร้างแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Square unit cell) และ หกเหลี่ยมด้านเท่า (Hexagonal unit cell) และแต่ละด้านของภาพ จะทำการติดหมายเลขของแต่ละด้านไว้ดังแสดงในภาพที่ 3.1 ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เฉพาะ โครงสร้างของเซลล์หนึ่งหน่วยที่มีรูปร่างแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้น ดังนั้นจะไม่ขอกล่าวถึงการวิเคราะห์ของโครงสร้างที่เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า

สำหรับโครงสร้างแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสเงื่อนไขขอบเขตแบบรายการคาบ [13] ดังแสดงในภาพที่ 3.1 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\phi|_I = e^{-jk_x a} \phi|_{III} \quad (3.61)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_I = e^{-jk_x a} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{III} \quad (3.62)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_I = e^{-jk_x a} \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{III} \quad (3.63)$$

$$\phi|_{II} = e^{-jk_y a} \phi|_{IV} \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{II} = e^{-jk_y a} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{IV} \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{II} = e^{-jk_y a} \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{IV} \quad (3.66)$$

โดยที่ k_x คือ wavenumber ในทิศทาง X
 k_y คือ wavenumber ในทิศทาง Y
 a คือ lattice distance

จากเงื่อนไขจะเห็นได้ว่าขอบที่ I และ III จะสัมพันธ์กันตามสมการที่ (3.61)-(3.63) และขอบที่ II และ IV จะสัมพันธ์กันตามสมการที่ (3.64)-(3.66) ด้วยวิธีระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องแบ่งพื้นที่ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ และทำการรวมแต่ละเอลิเมนต์ย่อยนั้นให้กลายเป็นเมทริกซ์ครอบลูม ด้วยวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้วในส่วนก่อนหน้า สามารถแบ่งให้อยู่เป็นกลุ่มตามเงื่อนไขขอบเขตแบบรายการคาบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} & [K]_{15} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} & [K]_{25} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [K]_{35} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [K]_{45} \\ [K]_{51} & [K]_{52} & [K]_{53} & [K]_{54} & [K]_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_z\}_0 \\ \{\phi_z\}_I \\ \{\phi_z\}_{II} \\ \{\phi_z\}_{III} \\ \{\phi_z\}_{IV} \end{bmatrix} \\
& -\omega^2 \begin{bmatrix} [M]_{11} & [M]_{12} & [M]_{13} & [M]_{14} & [M]_{15} \\ [M]_{21} & [M]_{22} & [M]_{23} & [M]_{24} & [M]_{25} \\ [M]_{31} & [M]_{32} & [M]_{33} & [M]_{34} & [M]_{35} \\ [M]_{41} & [M]_{42} & [M]_{43} & [M]_{44} & [M]_{45} \\ [M]_{51} & [M]_{52} & [M]_{53} & [M]_{54} & [M]_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_z\}_0 \\ \{\phi_z\}_I \\ \{\phi_z\}_{II} \\ \{\phi_z\}_{III} \\ \{\phi_z\}_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{\Psi\}_I \\ \{\Psi\}_{II} \\ \{\Psi\}_{III} \\ \{\Psi\}_{IV} \end{bmatrix} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\{\phi\}_0$ เป็นเวกเตอร์ของสนามที่อยู่บริเวณตรงกลางของโครงสร้าง

จากสมการเงื่อนไขขอบเขตแบบรายคาบ และสมการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถยุบรวมคอลัมน์ที่ 2 รวมกับคอลัมน์ที่ 4 ได้ด้วยสมการที่ (3.61) และรวมคอลัมน์ที่ 3 รวมกับคอลัมน์ที่ 5 ได้ด้วยสมการที่ (3.64) และยังสามารถรวมแถวที่ 2 เข้ากับแถวที่ 4 ได้ด้วยการหารแถวที่ 2 ด้วย $e^{-jk_x a}$ และนำไปบวกเข้ากับแถวที่ 4 ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\{\Psi\}_I$ และ $\{\Psi\}_{III}$ จะหักล้างกันเป็นศูนย์ด้วยสมการเงื่อนไขที่ (3.62) และ (3.63) ด้วยวิธีการเดียวกันสามารถรวมแถวที่ 3 เข้ากับแถวที่ 5 ได้ด้วยการหารแถวที่ 3 ด้วย $e^{-jk_y a}$ และนำไปบวกเข้ากับแถวที่ 5 ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\{\Psi\}_{II}$ และ $\{\Psi\}_{IV}$ จะหักล้างกันเป็นศูนย์ด้วยสมการเงื่อนไขที่ (3.65) และ (3.66) จะได้แสดงสมการออกมาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{14} + e^{-jk_x a} [K]_{12} \\ [K]_{41} + \frac{1}{e^{-jk_x a}} [K]_{21} & ([K]_{44} + e^{-jk_x a} [K]_{42}) + \frac{1}{e^{-jk_x a}} ([K]_{24} + e^{-jk_x a} [K]_{22}) \\ [K]_{51} + \frac{1}{e^{-jk_y a}} [K]_{31} & ([K]_{54} + e^{-jk_x a} [K]_{52}) + \frac{1}{e^{-jk_y a}} ([K]_{34} + e^{-jk_x a} [K]_{32}) \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} [K]_{15} + e^{-jk_y a} [K]_{13} \\ ([K]_{45} + e^{-jk_y a} [K]_{43}) + \frac{1}{e^{-jk_x a}} ([K]_{25} + e^{-jk_y a} [K]_{23}) \\ ([K]_{55} + e^{-jk_y a} [K]_{53}) + \frac{1}{e^{-jk_x a}} ([K]_{35} + e^{-jk_y a} [K]_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_z\}_0 \\ \{\phi_z\}_{III} \\ \{\phi_z\}_{IV} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

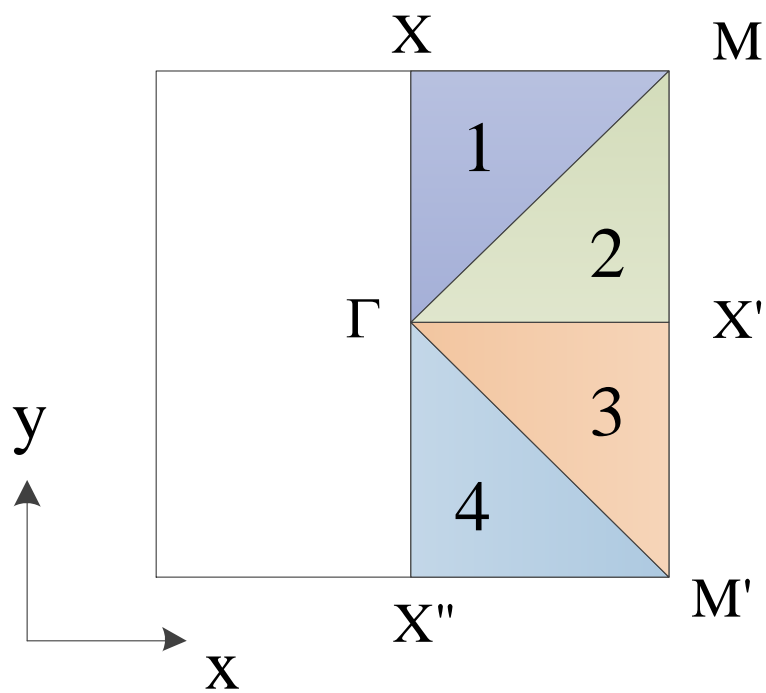
$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \begin{bmatrix} [M]_{11} & [M]_{14} + e^{-jk_x a} [M]_{12} \\ [M]_{41} + \frac{1}{e^{-jk_x a}} [M]_{21} & ([M]_{44} + e^{-jk_x a} [M]_{42}) + \frac{1}{e^{-jk_x a}} ([M]_{24} + e^{-jk_x a} [M]_{22}) \\ [M]_{51} + \frac{1}{e^{-jk_y a}} [M]_{31} & ([M]_{54} + e^{-jk_x a} [M]_{52}) + \frac{1}{e^{-jk_y a}} ([M]_{34} + e^{-jk_x a} [M]_{32}) \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} [M]_{15} + e^{-jk_y a} [M]_{13} \\ ([M]_{45} + e^{-jk_y a} [M]_{43}) + \frac{1}{e^{-jk_x a}} ([M]_{25} + e^{-jk_y a} [M]_{23}) \\ ([M]_{55} + e^{-jk_y a} [M]_{53}) + \frac{1}{e^{-jk_y a}} ([M]_{35} + e^{-jk_y a} [M]_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_z\}_0 \\ \{\phi_z\}_{III} \\ \{\phi_z\}_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (3.68)
\end{aligned}$$

โดยที่ค่าของ wave number \mathbf{k} สามารถหาค่าได้จาก brillouin zone ดังแสดงใน ภาพที่ 3.2

ค่าของ wave number \mathbf{k} นั้นคือที่ขอบของแต่ละโซน ตัวอย่างเช่น ในวัสดุแบบไอโซทรอปิกจะมีความสมดุกันในทุกทิศทางดังนั้นในการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ จะวิเคราะห์เพียงแค่สามเหลี่ยมโซนใดก็ได้ ในที่นี้จะเลือกสามเหลี่ยม ΓMX ค่า \mathbf{k} จะมีค่าอยู่ที่บริเวณขอบ นั่นคือ จะมีค่าตามเส้น $\Gamma - \text{M} - \text{X} - \Gamma$ โดยที่ค่าแต่ละจุดจะมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{ที่จุด } \Gamma & \quad k_x = 0 \text{ และ } k_y = 0 \\
\text{M} & \quad k_x = \frac{\pi}{a} \text{ และ } k_y = \frac{\pi}{a} \\
\text{X} & \quad k_x = 0 \text{ และ } k_y = \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

ในกรณีที่เป็นวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิก นั้นจำเป็นต้องวิเคราะห์ในสามเหลี่ยมทั้ง 4 โซน เนื่องจากค่าสภาพยอมทางไฟฟ้านั้นไม่เท่ากันในแต่ละทิศทาง

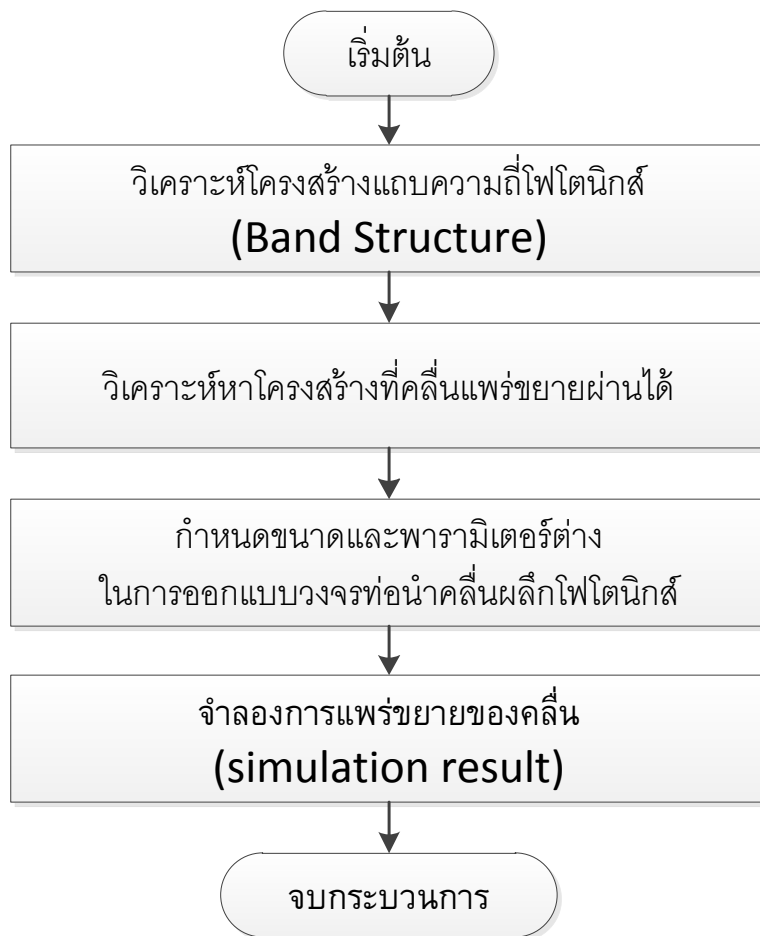


ภาพที่ 3.2 The First Brillouin Zone

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์และจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมวลิกโฟโตนิกส์

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึง ขั้นตอนการวิเคราะห์และจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรถ่อนำคลื่นมวลิกโฟโตนิกส์ โดยขั้นตอนจะเป็นดังภาพที่ 4.1

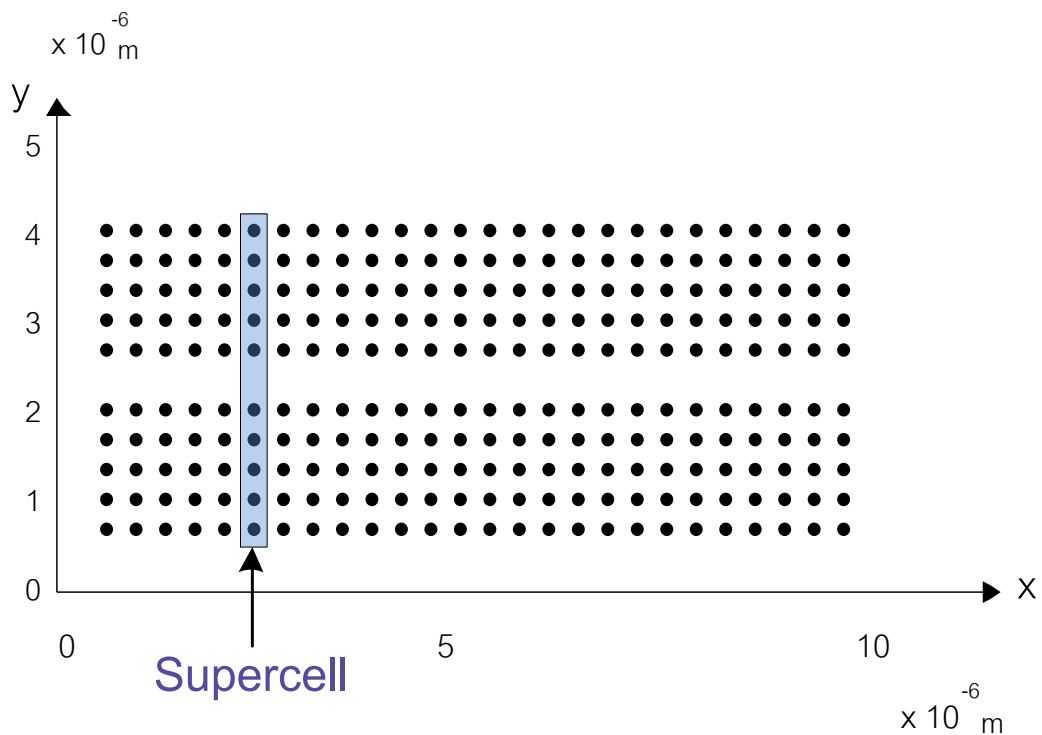


ภาพที่ 4.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์และจำลองการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรมวลิกโฟโตนิกส์

ในขั้นตอนแรกจะใช้เซลล์หนึ่งหน่วยในการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่โฟโตนิกส์ เพื่อให้ทราบว่าวัสดุที่ใช้ในการออกแบบไม่ยอมให้คลื่นในย่านความถี่ใดแพร่กระจายผ่านโครงสร้างไปได้ ในขั้นตอนที่สองใช้ซูเปอร์เซลล์ (Super cell) วิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกันกับขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ เพื่อวิเคราะห์ความกว้างของตำหนิแบบเส้นหรือความกว้างของท่อ นำคลื่นที่ยอมให้คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้ ซูเปอร์เซลล์ คือ

กลุ่มของเซลล์หนึ่งหน่วยที่เป็นตัวแทนของโครงสร้างของวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่เป็นรายคาบในแกนใดแกนหนึ่ง ดังแสดงในภาพที่ 4.2 ในขั้นตอนต่อไปจะนำค่าต่างๆที่ได้จากการวิเคราะห์ทั้งสองขั้นตอนข้างต้นมาทำการออกแบบวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ และทำการจำลองผลการแพร่กระจายในขั้นตอนสุดท้าย โดยที่ในทุกๆขั้นตอนจะมีการเปรียบเทียบผลกับวิธีมาตรฐานหรืองานวิจัยในอดีต

หลังจากที่สามารถยืนยันได้ว่าระเบียบวิธีการที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้อง ในขั้นตอนต่อไปจะทำการออกแบบอุปกรณ์ทางแสงจากหลักการของวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะมุ่งเน้นไปที่ตัวควบคุม

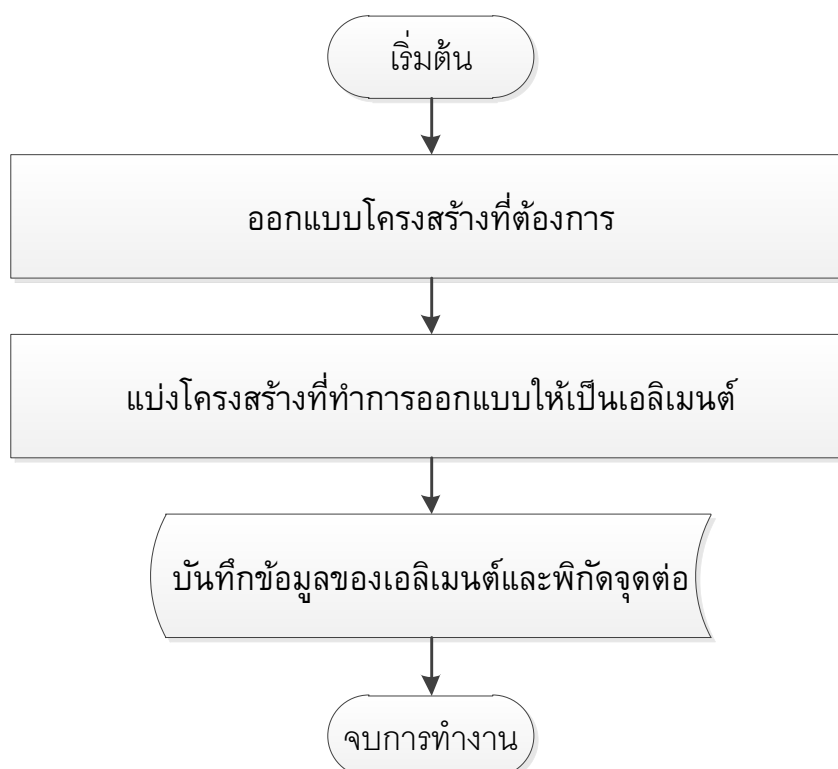


ภาพที่ 4.2 โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ในสองมิติ

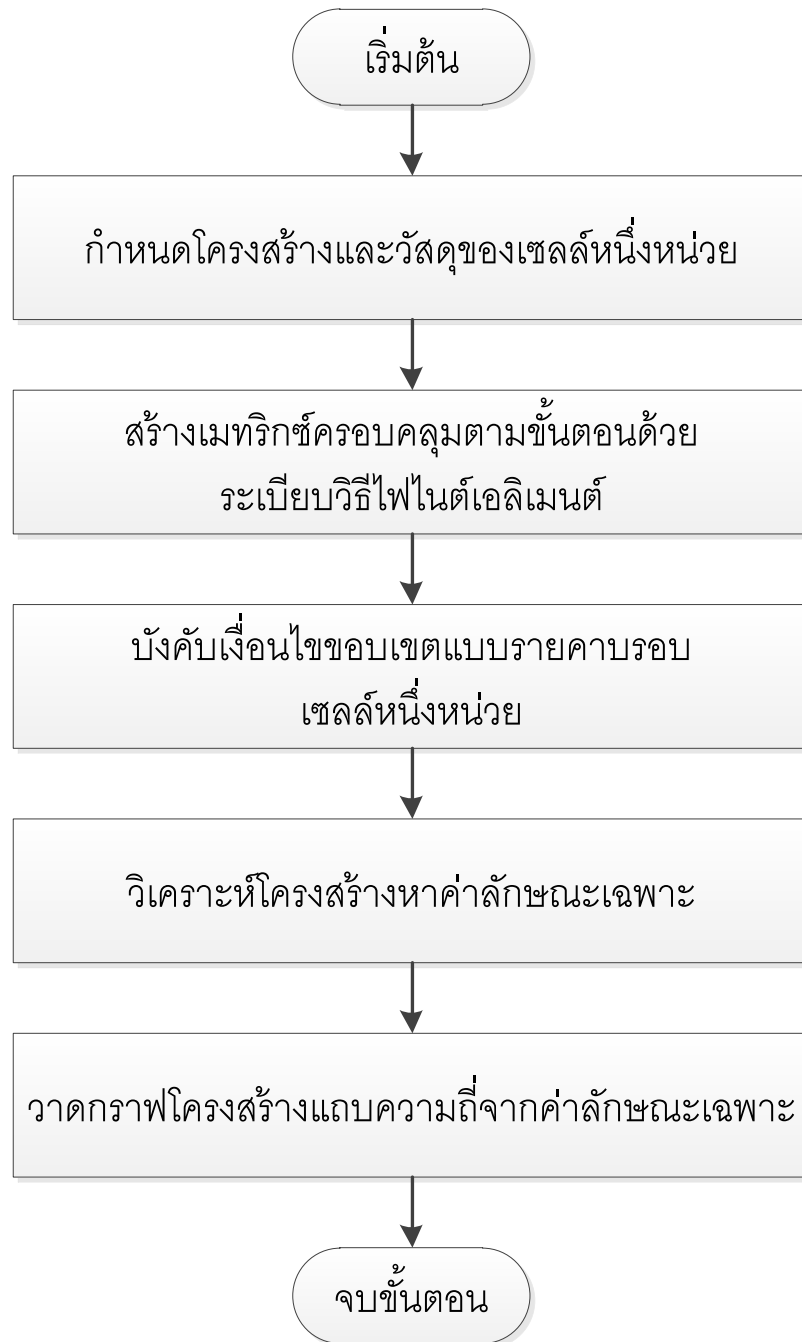
4.1 ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้พัฒนาโปรแกรม MATLAB ในการแบ่งเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับการสร้างโครงสร้างของวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ โดยพัฒนาโปรแกรมที่ดึงชุดคำสั่งพื้นฐานของ MATLAB มาใช้งาน และทำการบันทึกข้อมูลที่จะนำไปใช้ต่อในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนี้

- ตารางเอลิเมนต์ บันทึกค่าของหมายเลขจุดต่อครอบคลุมของทุกเอลิเมนต์ โดยเก็บค่าของหมายเลขจุดต่อวนทวนเข็มนาฬิกา
- ตารางจุดต่อ บันทึกค่าพิกัดในแกน x และแกน y ของทุกจุดต่อ
- รัศมี พิกัด และวัสดุของแท่งวัสดุ ทุกแท่ง
- ขนาดของเซลล์หนึ่งหน่วยหรือเรียกว่า ค่าคงที่แลตทิซ (Lattice constant)



ภาพที่ 4.3 ขั้นตอนการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์



ภาพที่ 4.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์

4.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์

ในขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ดังแสดงในภาพที่ 4.4 เริ่มต้นด้วยการกำหนดโครงสร้างของเซลล์หนึ่งหน่วย และวัสดุที่ใช้ หลังจากนั้นจะทำการแบ่งเอลิเมนต์บนพื้นที่ของเซลล์หนึ่งหน่วยที่สร้างขึ้น และทำตามขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จนได้เมทริกซ์ครอบคลุมตามสมการที่ (3.60) เนื่องจากคุณสมบัติความเป็นรายคาบของเซลล์หนึ่งหน่วย ดังนั้นสามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบรายคาบตามขั้นตอนที่แสดงในบทที่ 3 จนได้สมการที่ (3.68) และนำเมทริกซ์ครอบคลุมที่ได้มาทำการหาค่าลักษณะเฉพาะ ด้วยขั้นตอนการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ และนำเวกเตอร์ไอเกน (Eigenvector) ที่ได้มาเรียงลำดับ และวาดกราฟโดยกำหนดให้แกนนอนเป็น wave number และแกนตั้งเป็น normalize frequency ($\omega a / 2\pi c$)

เพื่อยืนยันความถูกต้องของระเบียบวิธีในการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ จะนำผลจากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เปรียบเทียบกับวิธีการมาตรฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ คือ วิธีการกระจายคลื่นระนาบ (Plain Wave Expansion: PWE) [14]

ในการเปรียบเทียบนั้นจำเป็นต้องกำหนดคุณสมบัติของรูปร่าง ขนาด และวัสดุที่ใช้ในเซลล์หนึ่งหน่วย โดยจะกำหนดดังนี้

- โครงสร้างผลึกโฟโตนิกส์ เป็นแบบแท่งวัสดุวางเรียงกันเป็นรายคาบในอากาศ
- โครงสร้างของเซลล์หนึ่งหน่วยมีลักษณะเป็นโครงสร้างแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- วัสดุของแท่งทรงกระบอกเป็น แท่งซิลิกอน (Silicon) มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า $\epsilon_r = 3.4^2$ และ อากาศมีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า $\epsilon_r = 1^2$
- รัศมีของแท่งซิลิกอนมีขนาด $r = 0.18 \times a$ เมื่อ a คือ ค่าคงที่แลตทิซ

รูปร่างของเซลล์หนึ่งหน่วยหลังจากการทำการแบ่งพื้นที่เป็นเอลิเมนต์แสดงดังภาพที่ 4.5

จากภาพที่ 4.6 ภาพเปรียบเทียบช่องว่างแถบความถี่ของคลื่น TM ที่ได้จากการกระจายคลื่นระนาบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ จะเห็นได้ว่าผลช่องว่างแถบความถี่ของทั้งสองวิธีนั้นมีความใกล้เคียงกัน

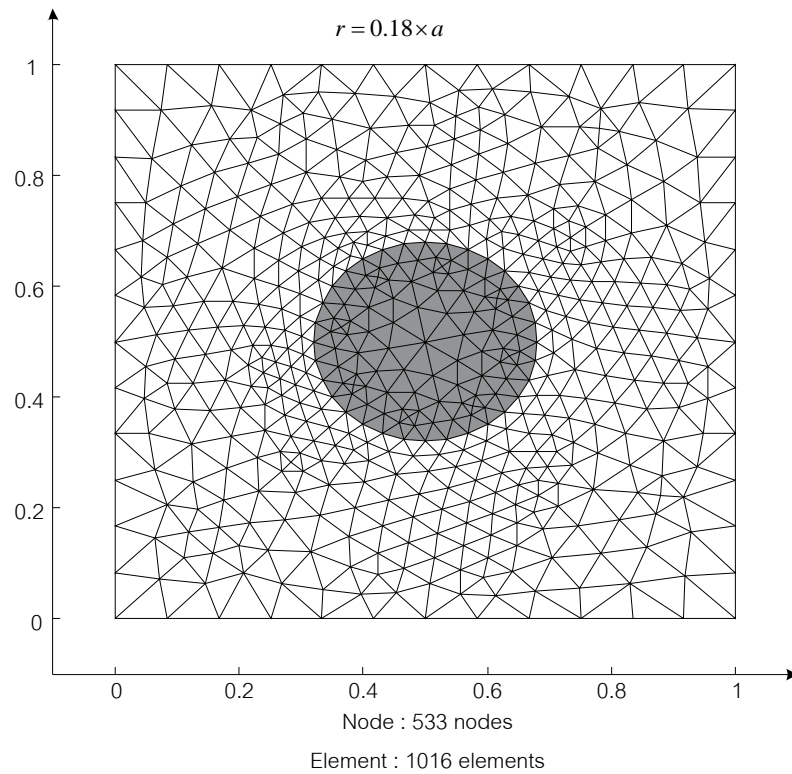
อีกตัวอย่างที่น่าสนใจในการเปรียบเทียบความถูกต้อง คือ ในกรณีนี้ที่แท่งวัสดุเป็นชนิดแอนไอโซทรอปิก โดยกำหนดให้วัสดุเป็นเทลลูเรียม(Tellurium)[7] ซึ่งมีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์ดังสมการที่(4.1) และมีรัศมีของแท่ง $r = 0.35 \times a$

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} 4.8^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

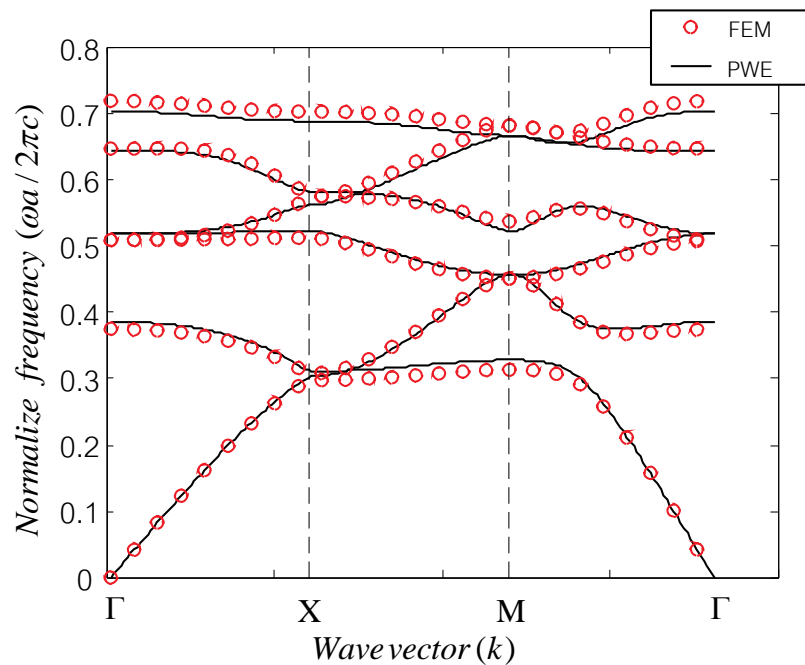
จากภาพที่ 4.7 ในส่วนที่เป็นพื้นที่สีชมพูนั้นจะเป็นย่านความถี่ที่คลื่นไม่สามารถแพร่กระจายผ่านไปได้หรือเรียกว่า ช่องว่างแถบความถี่ของคลื่น TE ส่วนที่เป็นสีน้ำเงินนั้นจะเป็นของคลื่น TM และส่วนที่เป็นสีม่วง จะเป็นย่านความถี่ที่คลื่นไม่สามารถแพร่กระจายผ่านได้ทั้งคลื่น TE และคลื่น TM หรือเรียกว่า ช่องว่างแถบความถี่สมบูรณ์ (Complete band gap) ในการออกแบบจะใช้ย่านความถี่ในช่วงที่เป็นช่องว่างแถบความถี่สมบูรณ์ จากภาพที่ 4.7 สามารถอ่านค่าได้อยู่ในช่วง $0.2253 < \omega a / 2\pi c < 0.2656$ และเมื่อนำไปเทียบกับงานวิจัย [7] ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วงของ $0.2321 < \omega a / 2\pi c < 0.2701$ จะเห็นได้ว่าค่าทั้งสองมีความใกล้เคียงกันอย่างมาก ดังนั้นเราสามารถยืนยันได้ว่าผลการคำนวณมีความถูกต้อง

ข้อจำกัดของกราฟช่องว่างแถบความถี่ในภาพที่ 4.7 คือ ในการใช้นำกราฟไปใช้ในการออกแบบจะพบปัญหาว่าสิ่งที่ต้องการออกแบบคือให้โครงสร้างของผลึกโฟโตนิกส์สามารถสะท้อนคลื่นในย่านความถี่ที่ต้องการได้ แต่กราฟในภาพที่ 4.7 นั้นสามารถบอกได้เพียงแค่ว่าโครงสร้างผลึกโฟโตนิกส์ที่มีรัศมีขนาดเท่าที่กำหนดนั้นสามารถสะท้อนคลื่นในย่านความถี่ที่ต้องการได้หรือไม่ ซึ่งถ้าไม่สามารถสะท้อนคลื่นได้จำเป็นต้องเปลี่ยนรัศมีของแท่งวัสดุไปจนกว่าจะสามารถสะท้อนคลื่นได้ และประการที่สองคือ ในบริเวณขอบของช่องว่างแถบความถี่จะมีค่าความผิดพลาดอยู่ ดังนั้นการเลือกใช้งานสมควรเลือกความถี่ที่อยู่บริเวณตรงกลางของช่องว่างแถบความถี่ส่งผลให้การหาขนาดรัศมีที่สามารถสะท้อนคลื่นได้นั้นยากยิ่งขึ้นไปอีก ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการออกแบบและการใช้งาน จะทำการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่ของทุกระศมีในช่วง $0.01 \times a < r < 0.45 \times a$ แล้วนำมาสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ดังภาพที่ 4.8

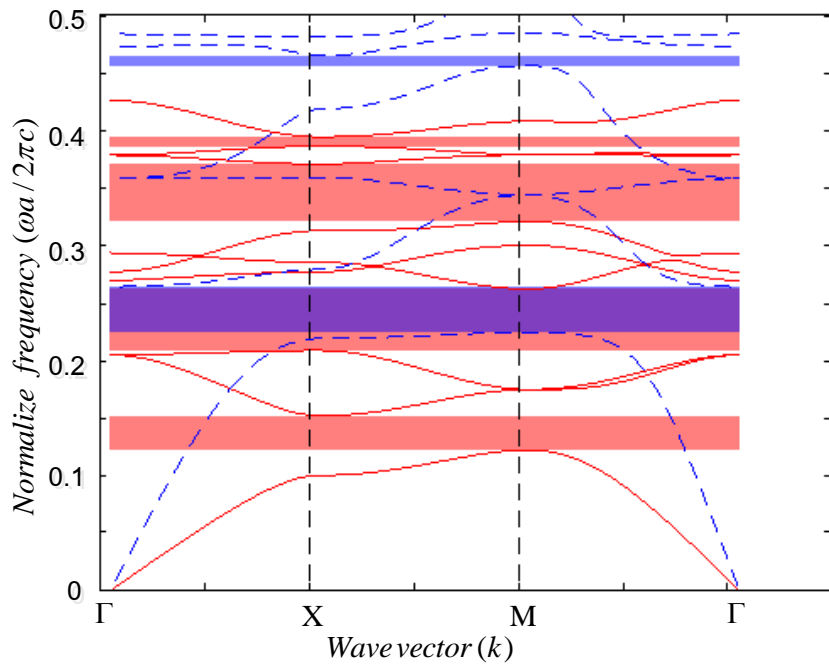
จะเห็นได้ว่าเมื่อต้องการออกแบบโครงสร้างผลึกโฟโตนิกส์ให้สามารถสะท้อนคลื่นในย่านความถี่ที่ต้องการ ภาพที่ 4.8 สามารถบอกได้ว่าโครงสร้างนั้นมีรัศมีอยู่ในช่วงใดบ้าง ทำให้ผู้ใช้งานสามารถทำการออกแบบได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น



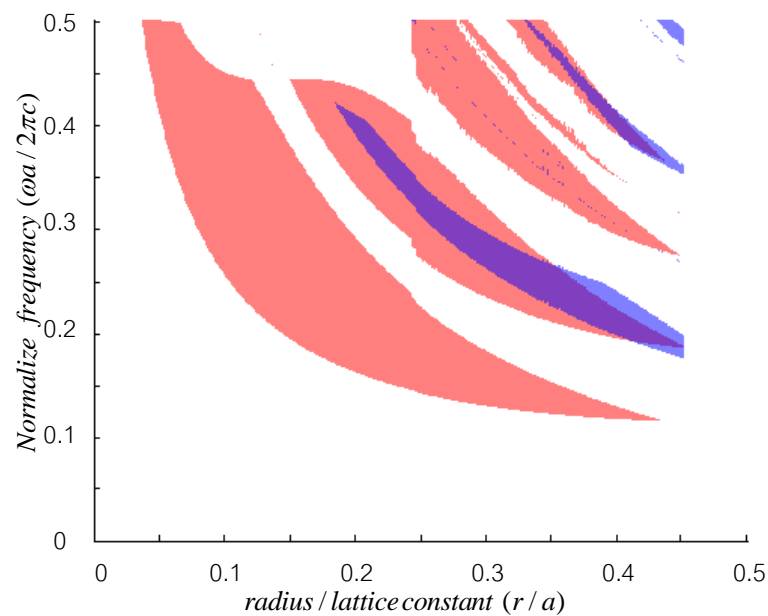
ภาพที่ 4.5 การแบ่งพื้นที่ออกเป็นเอลิเมนต์ของเซลล์หนึ่งหน่วย



ภาพที่ 4.6 ภาพเปรียบเทียบช่องว่างแถบความถี่ของคลื่น TM ที่ได้จากวิธีการกระจายคลื่นระนาบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ

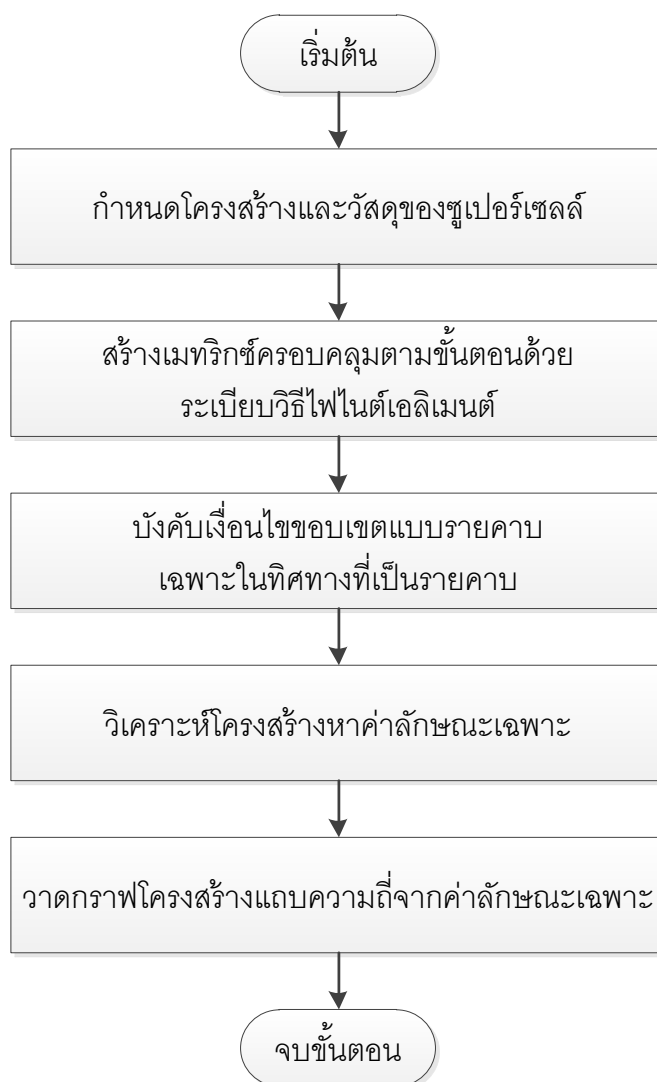


ภาพที่ 4.7 ภาพช่องว่างแถบความถี่ของเซลล์หนึ่งหน่วยที่มีวัสดุเป็นแท่งทึดลูเรียมวางตัวใน
อากาศ รัศมีของแท่งวัสดุ $r = 0.35 \times a$



ภาพที่ 4.8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของรัศมีของแท่งวัสดุเทียบกับค่าคงที่แลตทิซ
ในแกนนอนกับช่องว่างแถบความถี่ในแกนตั้ง

4.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้

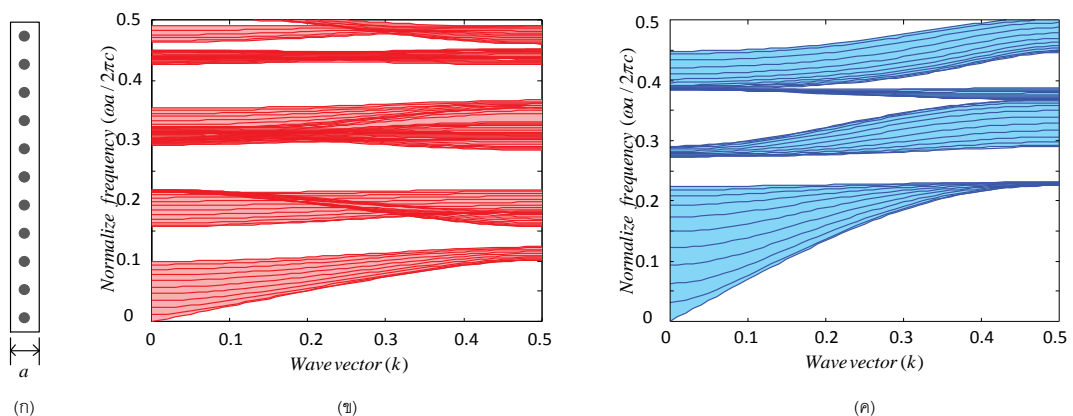


ภาพที่ 4.9 ขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้

ขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้จะมีลักษณะและขั้นตอนใกล้เคียงกับขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่โฟโตนิกส์ แต่ต่างกันที่ในขั้นตอนนี้จะใช้โครงสร้างที่เป็นซูเปอร์เซลล์ในการวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ และทำการบังคับเงื่อนไขขอบเขตเฉพาะในทิศทางของโครงสร้างที่เป็นรายการเท่านั้น โดยขั้นตอนในการวิเคราะห์จะแสดงดังภาพที่ 4.9 และการกำหนด wave vector ให้กำหนดเพียงทิศทางเดียวคือทิศทางที่คลื่นแพร่กระจายผ่านซูเปอร์เซลล์เท่านั้น

เช่นเดียวกันกับขั้นตอนการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่ ในขั้นตอนวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้จำเป็นต้องกำหนดโครงสร้าง ขนาดและวัสดุที่ใช้ก่อนเช่นกัน โดยที่ขนาด โครงสร้าง และวัสดุของเซลล์หนึ่งหน่วยสามารถหาได้จากการวิเคราะห์ช่องว่างแถบความถี่ โดยการเลือกนั้นจะต้องเลือกให้อยู่ในช่วงช่องว่างแถบความถี่สมบูรณ์ ซูเปอร์เซลล์ที่ใช้ในตัวอย่างแสดงในภาพที่ 4.10(ก) โดยในตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้

- เซลล์หนึ่งหน่วยมีวัสดุของแท่งทรงกระบอกเป็นแท่งเทลลูเรียม มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าตามสมการที่(4.1) วางตัวในอากาศ
- โครงสร้างซูเปอร์เซลล์ เกิดจากการวางเรียงตัวกันของเซลล์หนึ่งหน่วยในแกน y จำนวน 11 เซลล์
- รัศมีของแท่งเทลลูเรียมมีขนาด $r = 0.35 \times a$



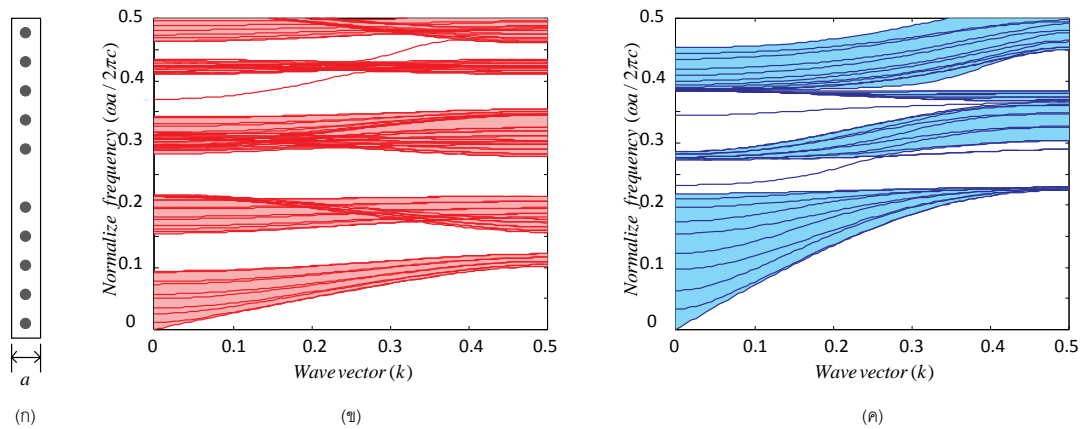
ภาพที่ 4.10 การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่ไม่มีตำหนิ

ภาพที่ 4.10 ก.) คือ ภาพแสดงซูเปอร์เซลล์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 1

ภาพที่ 4.10 ข.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TE ของซูเปอร์เซลล์ที่ไม่มีตำหนิ

ภาพที่ 4.10 ค.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TM ของซูเปอร์เซลล์ที่ไม่มีตำหนิ

จากภาพที่ 4.10 เมื่อเปรียบเทียบกับภาพที่ 4.7 จะเห็นได้ว่าย่านความถี่ที่เป็นช่องว่างแถบความถี่ ในภาพที่ 4.10 จะไม่มีเส้นโหนดวางตัวอยู่ทั้งคลื่น TE และคลื่น TM แสดงว่าในโครงสร้างนี้ไม่มีคลื่นในย่านความถี่ใดสามารถแพร่กระจายผ่านได้ ซึ่งมีความสอดคล้องกับโครงสร้างที่เป็นซูเปอร์เซลล์ที่ได้ทำการกำหนดไว้โดยไม่มีการทำตำหนิใดๆไว้

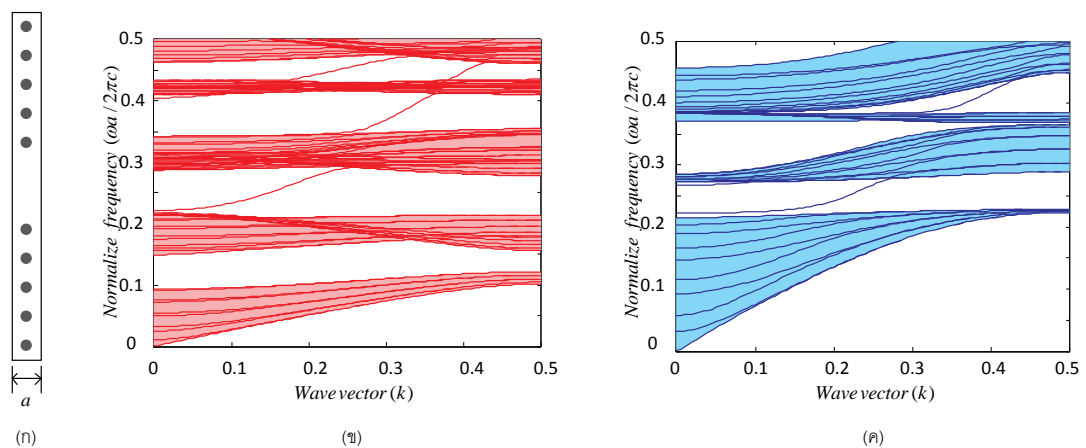


ภาพที่ 4.11 การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 1 ช่อง

ภาพที่ 4.11 ก.) คือ ภาพแสดงซูเปอร์เซลล์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 2

ภาพที่ 4.11 ข.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TE ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 1 ช่อง

ภาพที่ 4.11 ค.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TM ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 1 ช่อง



ภาพที่ 4.12 การวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 2 ช่อง

ภาพที่ 4.12 ก.) คือ ภาพแสดงซูเปอร์เซลล์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3

ภาพที่ 4.12 ข.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TE ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 2 ช่อง

ภาพที่ 4.12 ค.) คือ ภาพโครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TM ของซูเปอร์เซลล์ที่มีตำหนิ 2 ช่อง

ตัวอย่างที่ 2 จะทำตำหนิให้กับซูเปอร์เซลล์ในตำแหน่งตรงกลางของโครงสร้างโดยการถอดแท่งเทลลูเรียมออก เพื่อให้ตำหนินั้นกลายเป็นท่อนาคลิ้น โดยที่คุณสมบัติของโครงสร้างอื่นๆยังคงเหมือนกับตัวอย่างที่ 1 ภาพซูเปอร์เซลล์ของตัวอย่างที่ 2 แสดงในภาพที่ 4.11

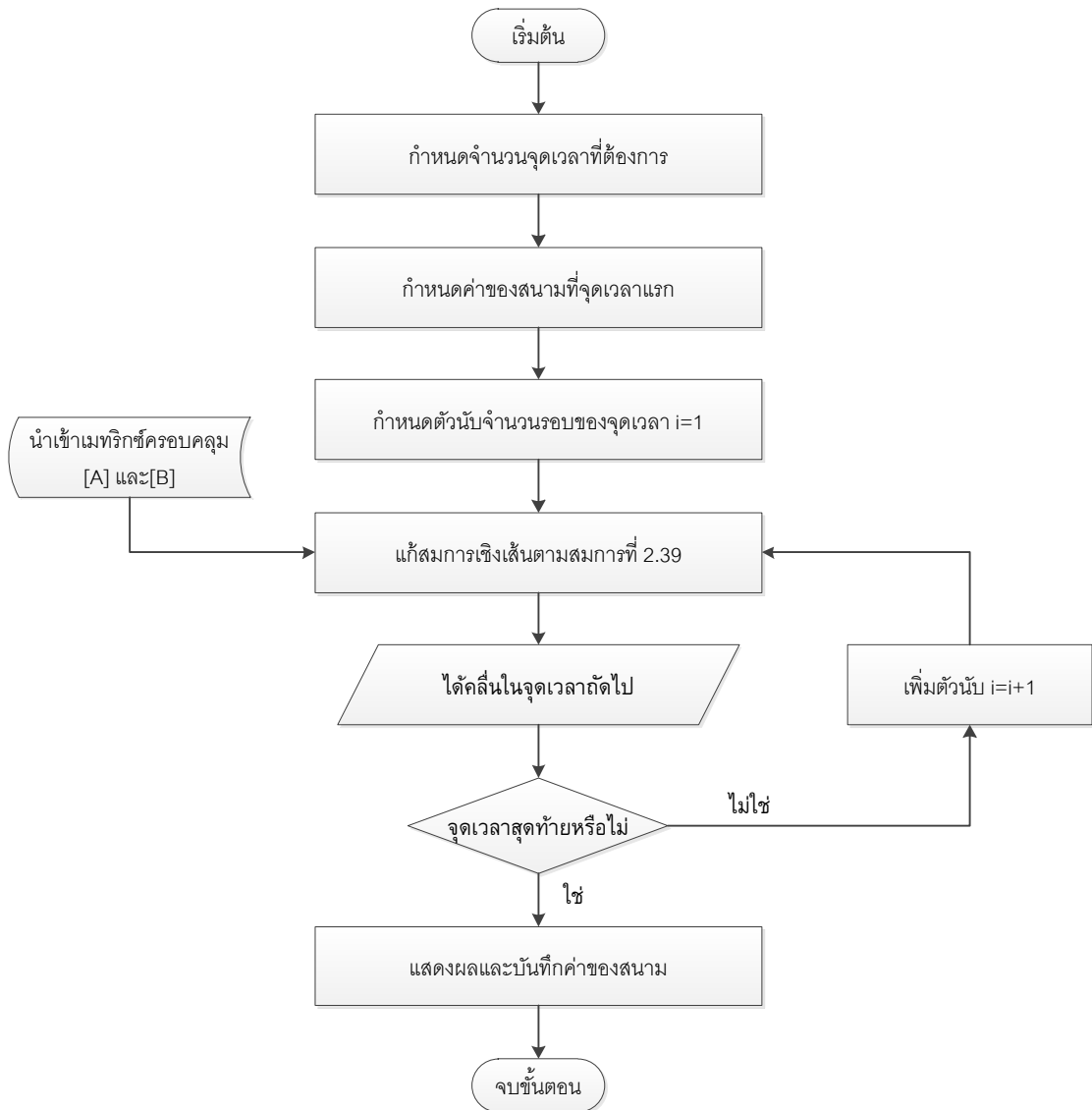
จากภาพที่ 4.11 เปรียบเทียบกับภาพที่ 4.10 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ในบริเวณช่องว่างแถบความถี่ $0.2189 < \omega a / 2\pi c < 0.2768$ โครงสร้างแถบความถี่ของคลื่น TM ในภาพที่ 4.11 มีเส้นไหมดวงตัว แสดงว่าโครงสร้างยอมให้คลื่น TM แพร่กระจายผ่านโครงสร้างได้ในตำหนิที่สร้างไว้ แต่ในคลื่น TE ยังคงไม่มีเส้นไหมดวงตัวผ่านย่านความถี่ที่อยู่ในช่องว่างแถบความถี่

ตัวอย่างที่ 3 จะทำการเพิ่มตำหนิให้กับซูเปอร์เซลล์เป็น 2 ช่อง โดยการวางแท่งเทลลูเรียมในบริเวณที่เป็นตำหนิให้ห่างกันเป็นระยะสองเท่าของค่าคงที่แลตทิซ เพื่อให้ตำหนินั้นมีความกว้างมากขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 4.12

จากภาพที่ 4.12 คลื่น TE และ TM จะมีเส้นไหมดวงตัวในบริเวณช่องว่างแถบความถี่ ทำให้คลื่นสามารถแพร่กระจายผ่านโครงสร้างได้ทั้งสองโหมด จากตัวอย่างทั้งสามตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างที่คลื่นแพร่กระจายผ่านไปได้มีความสำคัญอย่างมากในการขั้นตอนการออกแบบ นอกเหนือจากการวิเคราะห์หาช่องว่างแถบความถี่จากโครงสร้างเซลล์หนึ่ง ให้ได้ความถี่ตามต้องการแล้ว ยังจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องวิเคราะห์ด้วยว่าคลื่นจะสามารถแพร่กระจายผ่านโครงสร้างของวงจรถ่อนาคลิ้นผลึกโฟโตนิกส์ด้วยตำหนิที่มีขนาดเท่าใด

4.4 ผลการจำลองการแพร่กระจายของคลื่น

การออกแบบโครงสร้างของวงจรถ่อนาคลิ้นผลึกโฟโตนิกส์ จากข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ในขั้นตอนก่อนหน้า หลังจากนั้นทำการตามขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโดเมนเวลา และในขั้นตอนสุดท้ายจะนำค่าของสนามที่ได้มาแสดงผล และตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีต โดยขั้นตอนการจำลองผลแสดงดังภาพที่ 4.13



ภาพที่ 4.13 ขั้นตอนการจำลองผลด้วย ขั้นตอนวิธีของของแครงค์-นิโคลสัน

งานวิจัยในอดีตที่นำมาเปรียบเทียบ คือ งานวิจัยของ M. Koshiba [1] เป็นงานวิจัยที่จำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปริมโพรพาเกชันในโดเมนเวลา ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเดียวกับที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้ ในงานวิจัยของ M. Koshiba กำหนดโครงสร้างเป็นแท่งวัสดุวางตัวในอากาศโดยกำหนดคุณสมบัติของเซลล์หนึ่งหน่วยไว้ดังนี้

- แท่งวัสดุเป็นแท่งซิลิกอนที่มีค่าดัชนีหักเห $n = 3.4$
- ค่าคงที่แลตทิจมีค่าเท่ากับ $a = 0.58 \mu m$
- รัศมีของแท่งซิลิกอน เท่ากับ $r = 0.18 \times a$

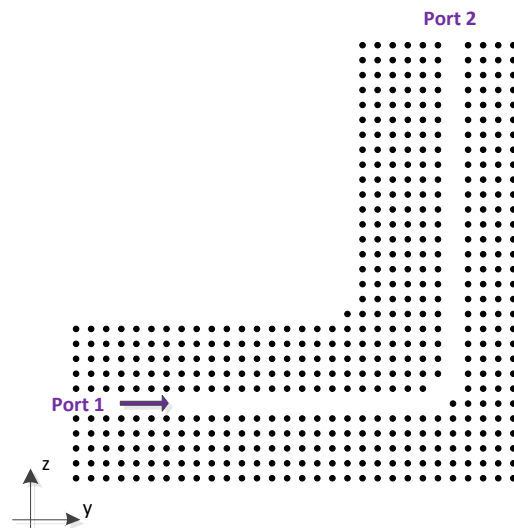
หลังจากนั้นจะนำเซลล์หนึ่งหน่วยมาจัดเรียงให้เป็นวงจรท่อนำคลื่นของผลึกโฟโตนิกส์ รูปแบบต่างๆที่มีตำหนิ 1 ช่องแบบเส้น โดยใส่คลื่น TE มีลักษณะเป็นพัลส์รูปเกาส์เซียน (Gaussian pulse) ที่มีแอมพลิจูดสูงสุดเท่ากับ A และมีค่าคงที่การแพร่กระจาย (Propagation constant) β แสดงได้ดังสมการที่(4.2)

$$\phi(y, z, t = 0) = A \exp \left[- \left(\frac{y - y_0}{W_y} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{W_z} \right)^2 \right] \times \exp [- j\beta (z - z_0)] \quad (4.2)$$

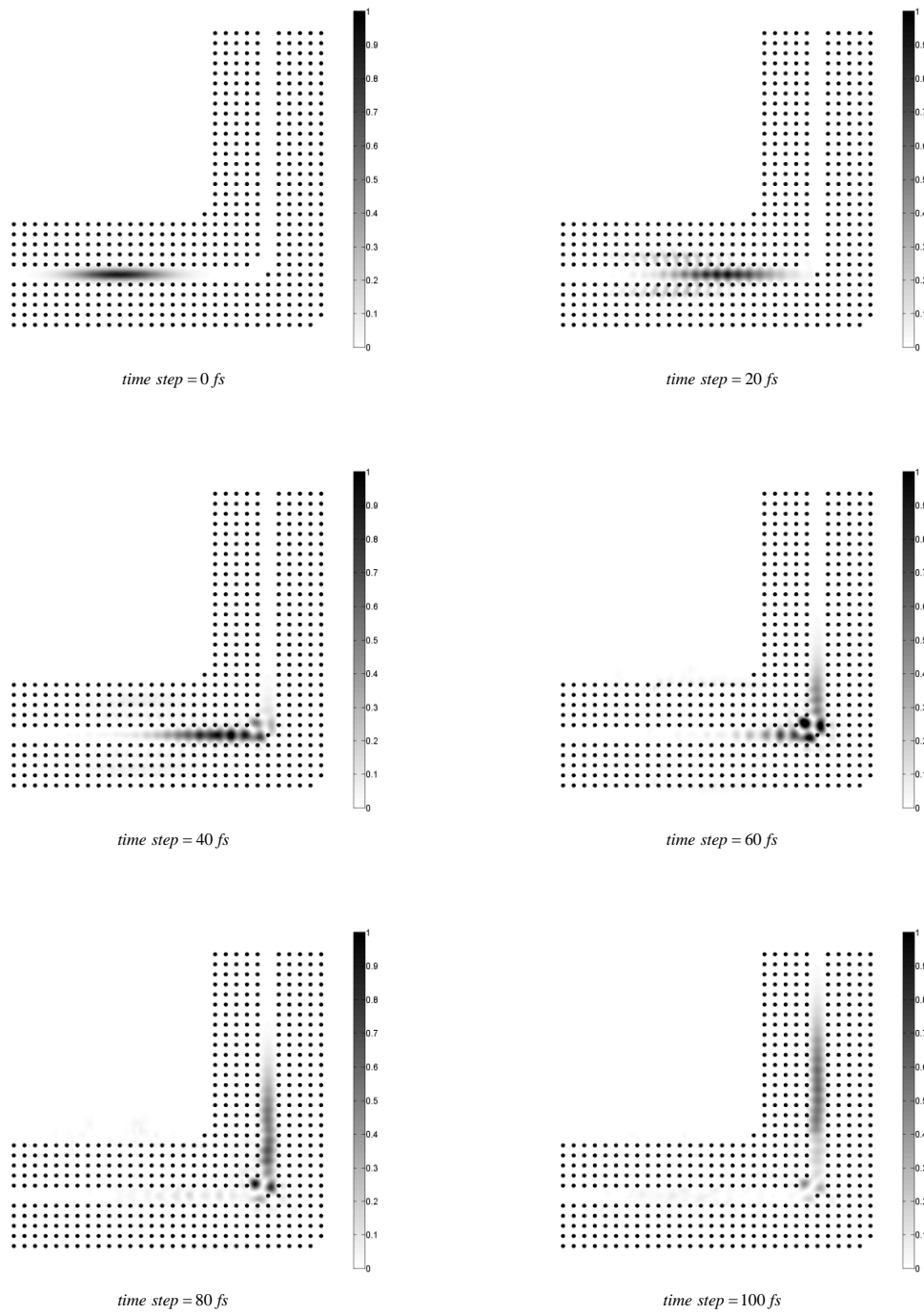
- ระยะเวลาระหว่างจุดเวลา Δt ที่เลือกใช้คือ 1.0 fs
- ความยาวคลื่นของพัลส์ $\lambda_0 = 1.45 \mu\text{m}$
- ค่าคงที่การแพร่กระจาย $\beta = 2\pi / \lambda_0$

ในงานวิจัยของ M. Koshiba จะใช้รูปร่างแบบฟังก์ชันรูปร่างสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อดังนี้ในการเปรียบเทียบจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเดียวกันกับการเปรียบเทียบ

วงจรที่นำมาเปรียบเทียบวงจรแรกคือ โครงสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศาแสดงดังภาพที่ 4.14 ผลการจำลองจะแสดงดังภาพที่ 4.15

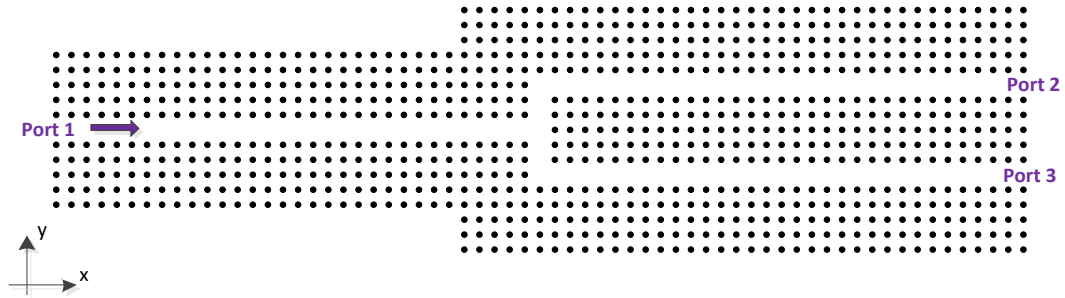


ภาพที่ 4.14 โครงสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศา

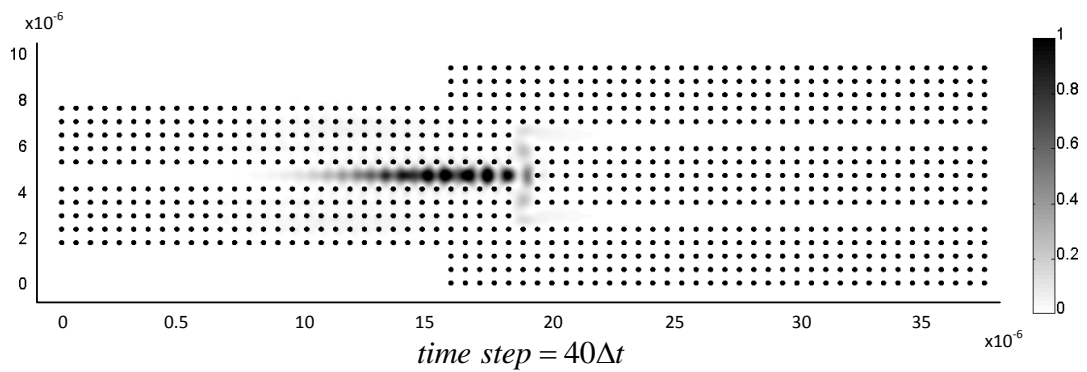
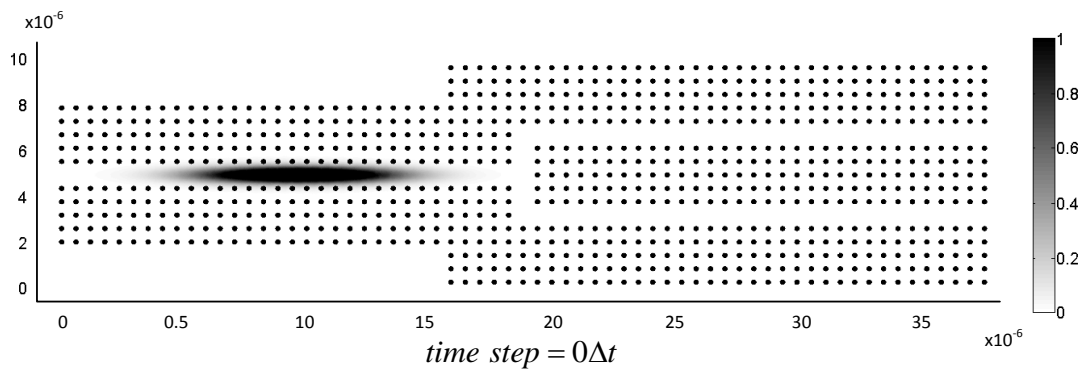


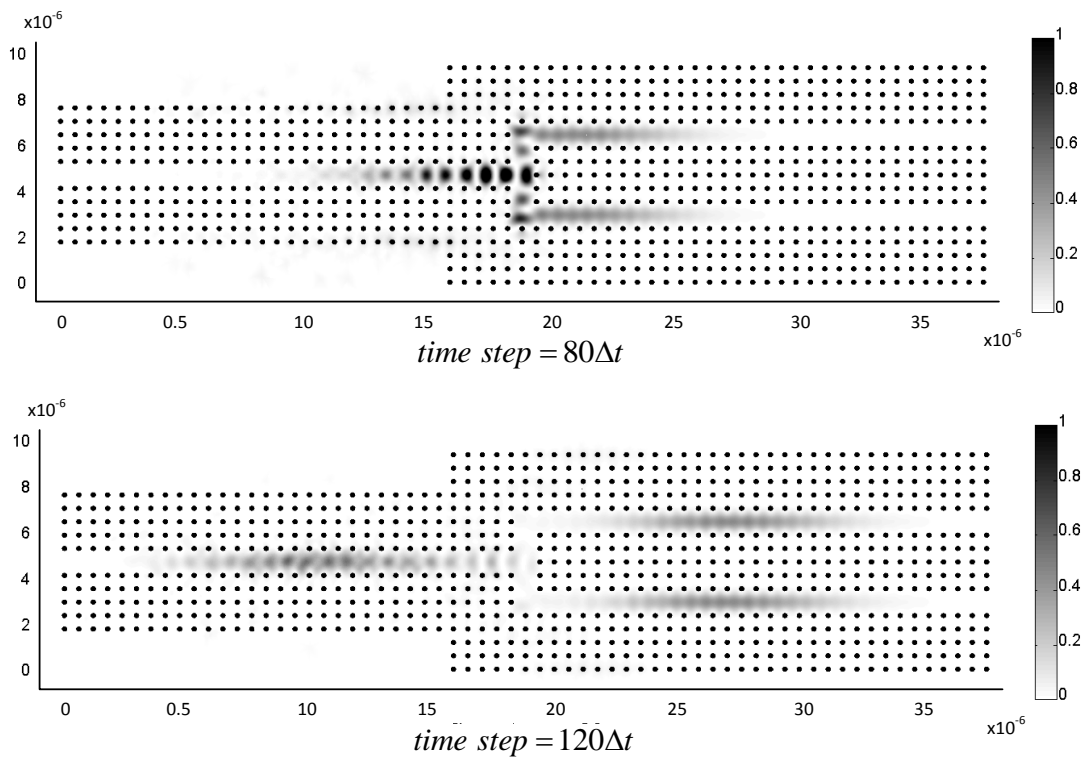
ภาพที่ 4.15 ผลการจำลองคลื่นแพร์กระจายในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศา

วงจรที่นำมาเปรียบเทียบที่สองคือ โครงสร้างวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกิ่งตัว T (T-branch) แสดงดังภาพที่ 4.16 และผลการจำลองแสดงดังภาพที่ 4.17



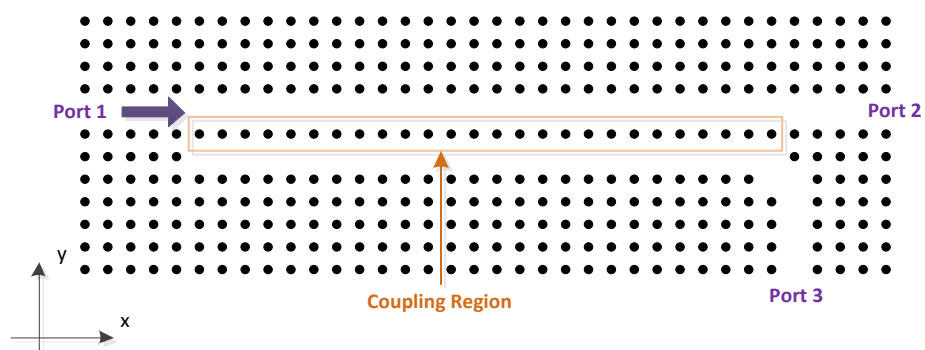
ภาพที่ 4.16 โครงสร้างวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกิ่งตัว T





ภาพที่ 4.17 ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกึ่งตัว T

จากทั้ง 2 ตัวอย่างจะเห็นได้ว่า ผลการจำลองจากสมการที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้สามารถทำการจำลองผลการคำนวณเมื่อเทียบกับงานวิจัยของ M. Koshiba ได้อย่างใกล้เคียง



ภาพที่ 4.18 โครงสร้างวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวควบคุมแยกความยาวคลื่น

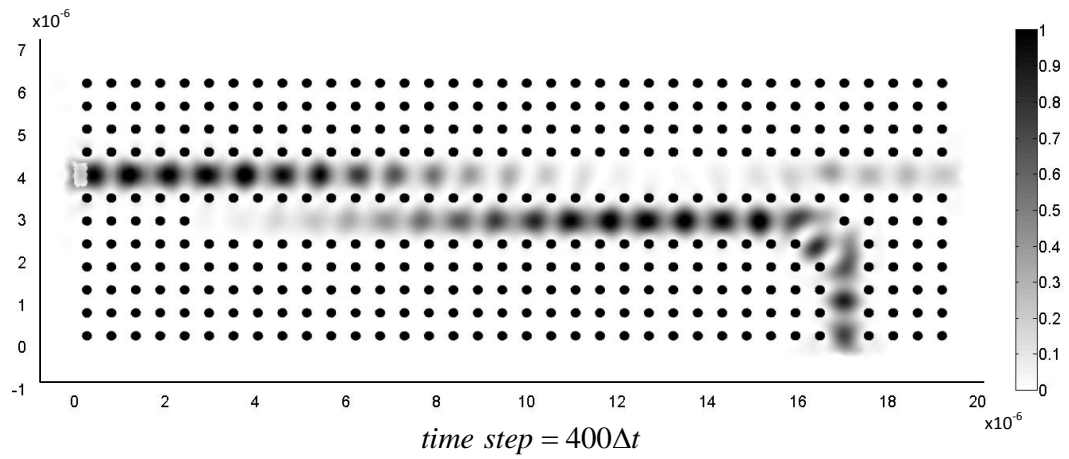
$\lambda = 1.3\ \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55\ \mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $In_{0.53}Al_{0.16}Ga_{0.31}$

งานวิจัยในอดีตตัวอย่างที่สอง คือ งานวิจัยของ Wen-Kai Wang[15] ได้ทำการออกแบบวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบเพื่อใช้ในการแยกคลื่นที่มีความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ในคลื่น TE ออกจากกันสิ่งที่น่าสนใจเป็นอย่างยิ่งในงานวิจัยนี้คือ ในงานวิจัยนี้ได้มีการสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์และทำการทดลองวัดผลจริง โดยใช้วัสดุเป็น $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$ ซึ่งมีค่าดัชนีหักเห $n=3.24$ ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ และ $n=3.13$ ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ค่าคงที่แลตทิซมีค่าเท่ากับ $a=0.54\mu\text{m}$ และรัศมีของแท่งวัสดุมีค่า $r=0.185 \times a$ โดยโครงสร้างของวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่ทำการจำลองเปรียบเทียบกับจะทำการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างเพื่อลดปริมาณการใช้หน่วยความจำของเครื่องและเพื่อเป็นการปรับปรุงโครงสร้างให้สามารถส่งผ่านคลื่นได้ดีขึ้น โดยยังคงส่วนสำคัญของโครงสร้างไว้คือความยาวของการคู่ควบ(Coupling length)เอาไว้ เพียงแค่เปลี่ยนส่วนข้อต่อของโครงสร้างที่จะเป็นท่อนำคลื่นไปยังช่องทางออก 2 ให้เป็นมุมฉาก และช่องทางที่จะไปยังทางออก 3 จะไม่มีการหักเหเพื่อลดการสูญเสียที่จะเกิดขึ้นภายในโครงสร้างจากการหักเหของท่อนำคลื่น รูปโครงสร้างที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้แสดงดังภาพที่ 4.18

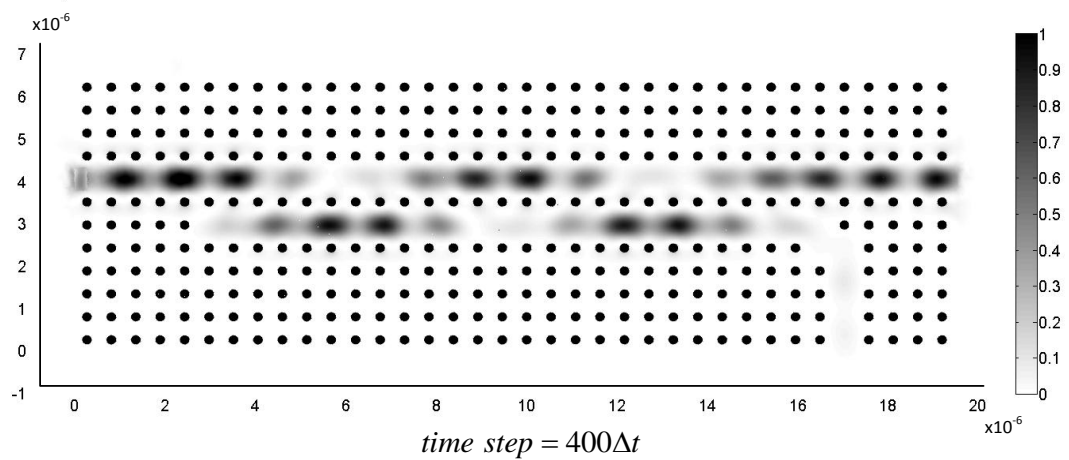
ผลการจำลองคลื่นในงานวิจัยจะใช้วิธีการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา แสดงให้เห็นว่าที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ จะแพร่กระจายผ่านไปยังช่องทาง 3 (Port3) และ ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$ จะแพร่กระจายผ่านไปยังช่องทาง 2 (Port2) โดยช่วงความยาวของการคู่ควบจะมีระยะเท่ากับ $L_c = 26a$

ในการจำลองผลในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการเปรียบเทียบความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อกำลังสอง เพื่อเป็นการเปรียบเทียบและยืนยันว่าฟังก์ชันรูปร่างทุกชนิดที่ใช้ในงานวิจัยสามารถทำการคำนวณได้อย่างถูกต้อง ส่วนของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปรสจะขอกกล่าวในการเปรียบเทียบกับงานวิจัยถัดไป ผลการจำลองของคลื่นทั้งสองความยาวคลื่นที่แพร่กระจายผ่านโครงสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แสดงดังภาพที่ 4.19 และภาพที่ 4.20

ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่าคลื่นทั้งสองความยาวคลื่นสามารถแพร่กระจายไปยังช่องทางออกที่ถูกต้อง มีผลที่ใกล้เคียงกันกับระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา และเป็นการยืนยันได้ว่าฟังก์ชันรูปร่างทั้งสอง คือ ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น และฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อกำลังสอง สามารถทำการคำนวณได้อย่างถูกต้อง



ภาพที่ 4.19 ผลการจำลองคลื่นแพร์กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยก
ความยาวคลื่น $\lambda=1.3\mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$



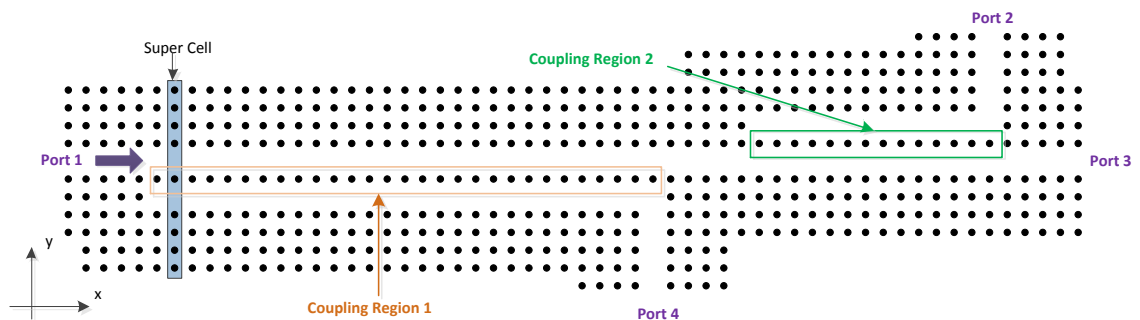
ภาพที่ 4.20 ผลการจำลองคลื่นแพร์กระจายในวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยก
ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิด $\text{In}_{0.53}\text{Al}_{0.16}\text{Ga}_{0.31}$

งานวิจัยตัวอย่างที่สามเป็นงานวิจัยของ Jin Xiao-jun[17] เป็นตัวอย่างขั้นตอนของการออกแบบวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ เพื่อใช้แยกความยาวคลื่นสามความยาวคลื่นในช่วงของความยาวคลื่นแสงได้แก่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.31\mu\text{m}$, $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ โดยในงานวิจัย ของ Jin Xiao-jun ได้วิเคราะห์หาโครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์เพื่อทำการหาช่วงความยาวของการคู่ควบ ด้วยวิธีการกระจายคลื่นระนาบ (PWE) เพื่อใช้ในการออกแบบโครงสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ และทำการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในโดเมนเวลา โดยมีโครงสร้างเป็นแท่งวัสดุที่มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า $\epsilon = 11.56$ วางตัวในอากาศ

ในขั้นตอนแรกจะทำการแยกความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ ออกจากอีกสองความยาวคลื่นด้วยความยาวของโครงสร้างเท่ากับ $L_{region1} = 29a$ หลังจากนั้นจึงแยก $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ ออกจากกันด้วยความยาวของโครงสร้างเท่ากับ $L_{region2} = 14a$

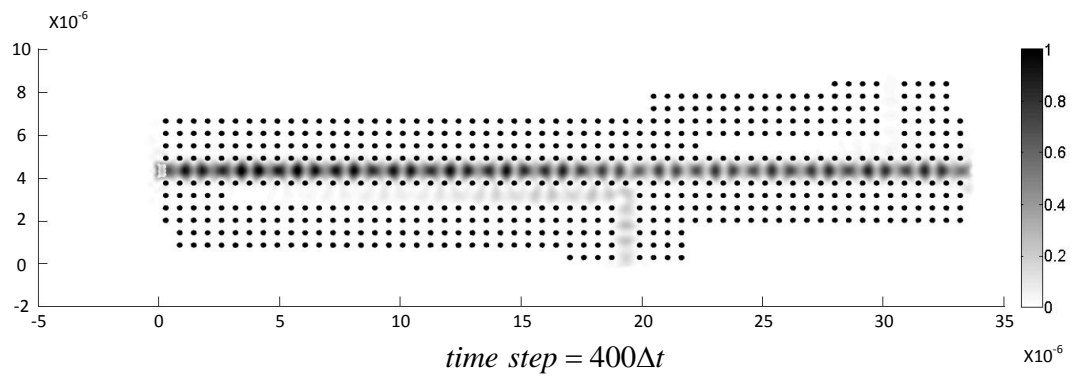
ค่าความยาวของบริเวณคู่ควบในช่วงที่ 1 (Coupling region 1) ที่ใช้สำหรับการแยกความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ หาได้จาก $L_{region1} \approx 2L_{c,\lambda=1.49\mu\text{m}} \approx 3L_{c,\lambda=1.55\mu\text{m}}$ และความยาวของบริเวณคู่ควบในช่วงที่ 2 (Coupling region 2) จะสามารถหาได้จาก $L_{region2} \approx L_{c,\lambda=1.49\mu\text{m}}$ เมื่อ $L_{c,\lambda=1.49\mu\text{m}} = 14.29a$ และ $L_{c,\lambda=1.55\mu\text{m}} = 9.8a$

ในการจำลองผลเปรียบเทียบกับในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการลดจำนวนแถว และคอลัมน์ของโครงสร้างในส่วนที่ไม่จำเป็นออกเพื่อเป็นการลดปริมาณหน่วยความจำ โดยโครงสร้างจะแสดงดังภาพที่ 4.21 และในการคำนวณจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปอร์สที่มีเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม

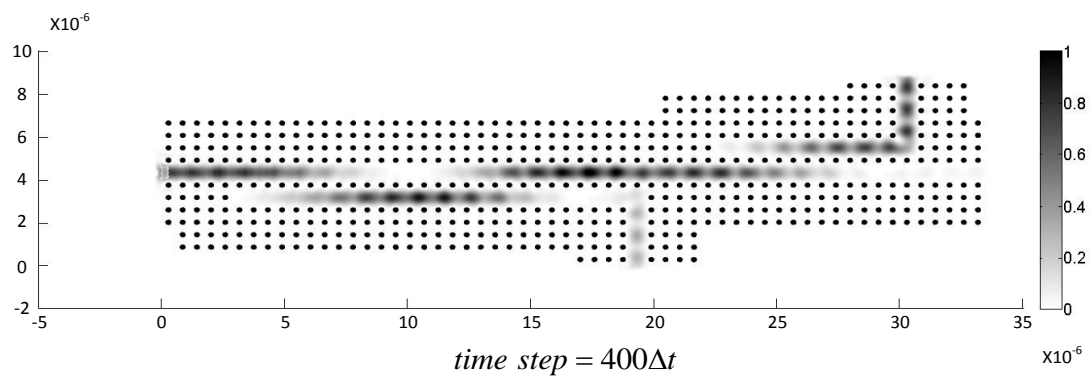


ภาพที่ 4.21 โครงสร้างวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกความยาวคลื่น

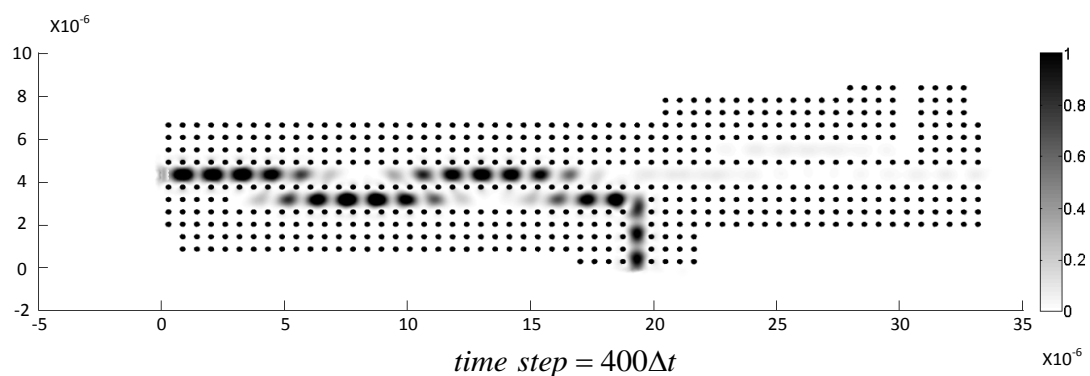
$\lambda = 1.31\mu\text{m}$, $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ ออกจากกัน



ภาพที่ 4.22 ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ
แยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.31\mu\text{m}$



ภาพที่ 4.23 ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ
แยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu\text{m}$



ภาพที่ 4.24 ผลการจำลองแพร่กระจายของคลื่นในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบ
แยกสามความยาวคลื่นที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$

ผลการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ของซูเปอร์เซลล์จากส่วนที่ 4.3 สามารถบอกค่าความยาวคู่ควบ L_c ของแต่ละความยาวคลื่นได้ จากโครงสร้างซูเปอร์เซลล์ในภาพที่ 4.21 จะได้ค่าความยาวคู่ควบออกมาดังนี้

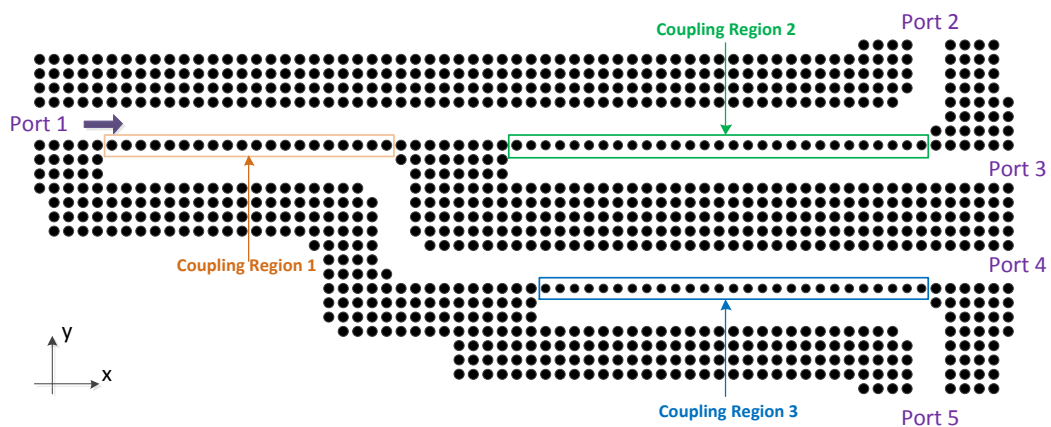
ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ จะมีความยาวคู่ควบเท่ากับ $L_{c,\lambda=1.31\mu\text{m}} = 122.2a$

ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ จะมีความยาวคู่ควบเท่ากับ $L_{c,\lambda=1.49\mu\text{m}} = 13.82a$

ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ จะมีความยาวคู่ควบเท่ากับ $L_{c,\lambda=1.55\mu\text{m}} = 10.31a$

จะเห็นได้ว่าค่าของความยาวคู่ควบมีค่าใกล้เคียงกันอย่างมากกับงานวิจัยที่นำมาเปรียบเทียบ และเมื่อพิจารณาถึงผลการจำลองจะเห็นว่าคลื่นที่มีความยาวคลื่น $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ สามารถแพร่กระจายผ่านออกไปยังช่องทางออกที่ 2 โดยไม่มีการควบคู่ไปยังท่อนำคลื่นข้างเคียง เนื่องจากความยาวคู่ควบของคลื่นนั้นมากกว่าความยาวของวงจรถ่อนำคลื่นแสดงดังภาพที่ 4.22 ส่วนในความยาวคลื่น $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ คลื่นจะมีการควบคู่ไปยังท่อนำคลื่นข้างเคียง และเลี้ยวเข้าสู่ช่องทางออกที่ 1 แสดงดังภาพที่ 4.23 ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ จะมีการควบคู่ไปยังท่อนำคลื่นข้างเคียงและเลี้ยวออกสู่ช่องทางออกที่ 3 แสดงดังภาพที่ 4.24

4.5 การออกแบบอุปกรณ์ทางแสงวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์



ภาพที่ 4.25 วงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แยกคลื่น TE และ TM ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$

จากงานวิจัยในอดีต[7] เป็นตัวอย่างการประยุกต์ใช้วงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่ใช้วัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิกในสร้างตัวคู่ควบที่สามารถแยกคลื่น TE และ TM ออกจากกันได้ที่ความยาวคลื่นต่างๆ โดยในงานวิจัยจะเลือกความยาวคลื่น $\lambda=1.657\ \mu\text{m}$

งานวิทยานิพนธ์นี้จะทำการออกแบบวงจรถ่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์จากหลักการของตัวคู่ควบเช่นเดียวกันกับ[7] โดยทำการออกแบบอุปกรณ์ทางแสงที่สามารถแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่นแสงทั้ง $\lambda=1.49\ \mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\ \mu\text{m}$ ออกจากกันได้ ด้วยวิธีการปรับเปลี่ยนรัศมี r_m ของแท่งวัสดุที่อยู่ในบริเวณคู่ควบ ระหว่างท่อนำคลื่น เพื่อให้ความยาวคู่ควบ ในบริเวณนั้นเปลี่ยนแปลง วัสดุที่เลือกใช้เป็นวัสดุแอนไอโซทรอปิกชนิดเทลลูเรียม และโครงสร้างที่ทำการออกแบบแสดงดังภาพที่ 4.25

จากภาพที่ 4.8 สามารถทราบได้ว่าช่วงมีช่องว่างแถบความถี่สมบูรณ์กว้างที่สุดจะมีค่ารัศมีเท่ากับ $r=0.35 \times a$ โดยมีค่าความถี่สมบูรณ์อยู่ในช่วง $0.2253 < \omega a / 2\pi c < 0.2656$ กำหนดให้ค่าคงที่แลตทิซ $a=0.38\ \mu\text{m}$ ดังนั้นความยาวคลื่นที่สามารถใช้ได้จะอยู่ในช่วง $1.6866 > \lambda > 1.4307$ ซึ่งครอบคลุมทั้งสองความยาวคลื่นที่ต้องการ

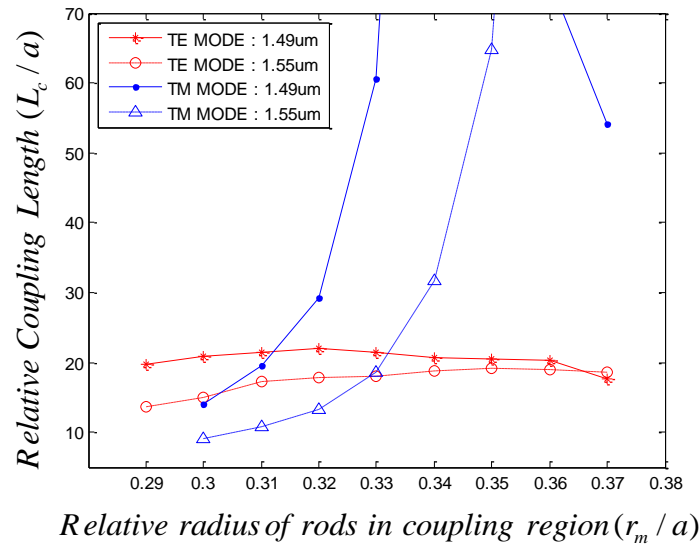
เมื่อกำหนดขนาดรัศมีของแท่งเทลลูเรียมที่มีขนาดทั่วไปแล้ว จะทำการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่จากซูเปอร์เซลล์เพื่อหาความยาวคู่ควบจากสมการที่ (4.3)

$$L_c = \frac{\pi}{|\beta_{\text{even}} - \beta_{\text{odd}}|} \quad (4.3)$$

จะได้ความยาวคู่ควบของคลื่น TE และ TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\ \mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\ \mu\text{m}$ แสดงดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ตารางความยาวคู่ควบของคลื่น TE และ TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\ \mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\ \mu\text{m}$ โดยมีค่าคงที่แลตทิซ $a=0.38\ \mu\text{m}$ และรัศมี $r=0.35 \times a$

ความยาวคลื่น (λ)	ความยาวคู่ควบ(Coupling Length)	
	TE	TM
$1.49\ \mu\text{m}$	$20.57a$	$145.6a$
$1.55\ \mu\text{m}$	$19.17a$	$64.81a$



ภาพที่ 4.26 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนรัศมี r_m ในช่วง 0.29 ถึง 0.37 กับความยาวคู่ควบ ของคลื่น TE และ TM

จะเห็นได้ว่าความยาวคู่ควบในตารางที่ 4.1 จะสามารถแยกคลื่น TE และ TM ออกจากกัน ได้ด้วยความยาวคู่ควบ $L_c = 20a$ แต่ไม่สามารถ แยกคลื่น TE ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ ออกจากกันได้ ในส่วนของคลื่น TM จะเห็นได้ว่าต้องสร้างโครงสร้างให้มี บริเวณคู่ควบ อย่างน้อยเท่ากับ $L_c = 65a$ ซึ่งเป็นวงจรมีความยาวเกินความจำเป็น ดังนั้นในการ ออกแบบเพื่อให้ได้ความยาวคู่ควบตามต้องการ วิธีการที่เป็นไปได้วิธีการหนึ่งคือการปรับเปลี่ยน รัศมี r_m ของแท่งวัสดุที่อยู่ในบริเวณคู่ควบ ซึ่งเมื่อทำการเปลี่ยนรัศมี r_m จะส่งผลให้ความยาวคู่ ควบมีการเปลี่ยนแปลง โดยในการออกแบบได้ทำการเปลี่ยนขนาดของรัศมีให้อยู่ในช่วง $0.29 < r_m < 0.37$ ความยาวคู่ควบจะแสดงได้ดังภาพที่ 4.26

จากกราฟแสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนรัศมี r_m ในภาพที่ 4.26 ค่ารัศมี r_m ที่ เหมาะสมที่สุดในการแยกคลื่น TE และ TM ออกจากกันคือ $r_m = 0.36$ ที่ความยาวคู่ควบ $L_{c,TE} = 20a$ เนื่องจากมีความแตกต่างของความยาวคู่ควบของคลื่น TE และ TM มากที่สุด ดังนั้น ในบริเวณคู่ควบหมายเลข 1 จะออกแบบให้มีความยาวเท่ากับ $20a$ ในการจำลองจะเห็นว่าคลื่น TM ของทั้งสองความยาวคลื่นจะต้องแพร่กระจายผ่านไปยังช่องทางที่ 1 และ 2 และ คลื่น TE ของ ทั้งสองความยาวคลื่นจะต้องแพร่กระจายผ่านไปยังช่องทางที่ 3 และ 4

การออกแบบบริเวณคู่ควบหมายเลข 2 ต้องพิจารณาให้สามารถแยกคลื่น TM ของความ ยาวคลื่น $\lambda = 1.49\mu\text{m}$ ออกจากความยาวคลื่น $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ ในการออกแบบจะอาศัยตำแหน่ง

ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของคลื่นในท่อนำคลื่น สำหรับท่อนำคลื่นที่ทำการปล่อยคลื่นเข้าไป ตำแหน่งสูงสุดจะสามารถหาได้จากสมการที่ (4.4) และค่าต่ำสุดสามารถหาได้จากสมการที่ (4.5)

$$d_{\max} = 2N \times L_c \quad (4.4)$$

$$d_{\min} = (2N - 1) \times L_c \quad (4.5)$$

โดยที่ $N = (1, 2, 3, \dots)$

และเมื่อท่อนำคลื่นที่ปล่อยคลื่นมีค่าสูงสุดจะส่งผลให้คลื่นในอีกท่อนำคลื่นมีค่าต่ำสุด ดังนั้นสามารถออกแบบท่อนำคลื่นได้โดยการกำหนดเงื่อนไขให้ ในท่อนำคลื่นเดียวกันตำแหน่งค่าต่ำสุดของคลื่น TE ต้องเป็นตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งค่าสูงสุดของคลื่น TM แสดงได้ดังสมการ

$$d_{\min, \lambda 1} = d_{\max, \lambda 2} \quad (4.6)$$

แทนค่าสมการที่ (4.4) และ (4.5) ลงในสมการที่ (4.6) จะได้

$$(2N_{\lambda 1} - 1) \times L_{c, \lambda 1} = 2N_{\lambda 2} \times L_{c, \lambda 2} \quad (4.7)$$

เมื่อพิจารณาค่าความยาวคู่ควบภาพที่ 4.26 ค่าที่สามารถใช้ในการออกแบบมีได้หลายค่ารัศมี r_m แต่ค่าที่เป็นไปตามสมการที่ (4.7) จะมีค่ารัศมี $r_m = 0.32$ เนื่องจากค่าความยาวคู่ควบที่ได้จากการคำนวณของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ มีค่า $L_{c, TM} = 29.16a$ และของความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ มีค่า $L_{c, TM} = 14.29a$ เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (4.7) จะได้

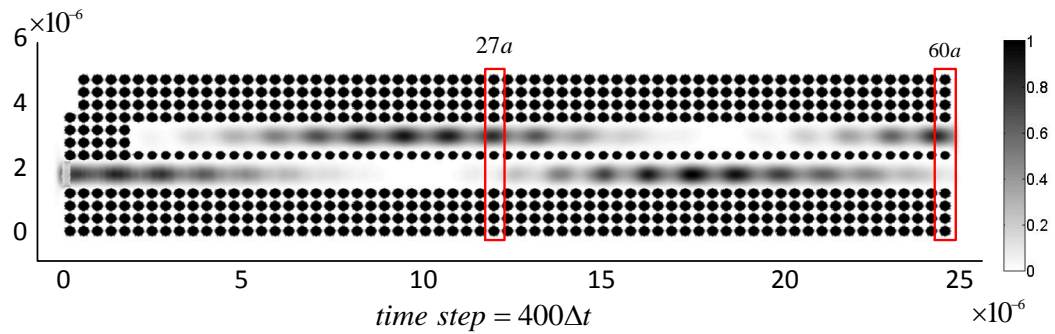
$$(2(1) - 1) \times (29.16) \approx 2(1) \times 14.29$$

$$29.16 \approx 28.58 \approx 29$$

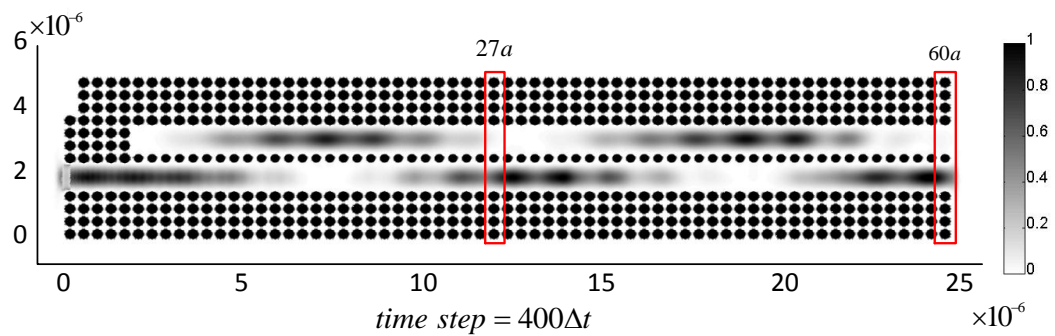
ดังนั้นในบริเวณคู่ควบหมายเลข 2 จะออกแบบให้มีความยาวเท่ากับ $29a$ เพื่อให้คลื่น TM ของความยาวคลื่น $1.49 \mu\text{m}$ แพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 3 และ ความยาวคลื่น $1.55 \mu\text{m}$ แพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 4

การออกแบบบริเวณคู่ควบหมายเลข 3 ต้องออกแบบให้สามารถแยกคลื่น TE ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ออกจากกันได้ จากกราฟความสัมพันธ์ในภาพที่ 4.26 จะได้ค่าความรัศมี r_m ที่เป็นไปตามสมการที่ (4.7) คือ $r_m = 0.30$ ด้วยความยาวคู่ควบของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ มีค่า $L_{c, TE} = 20.86a$ และของความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ มีค่า $L_{c, TE} = 15.06a$ ส่งผลให้ความยาวในบริเวณคู่ควบเท่ากับ $60a$ ซึ่งเป็นค่าที่ยาวมาก ดังนั้น

วิทยานิพนธ์นี้จึงได้ทำการจำลองผลด้วยวงจรถอดตัวของตัวคู่ควบที่มีรัศมีระหว่างท่อนำคลื่นทั้งสอง $r_m = 0.30$ มาเป็นตัวช่วยพิจารณาในการออกแบบ ผลการจำลองแสดงดังภาพที่ 4.27 และ ภาพที่ 4.28

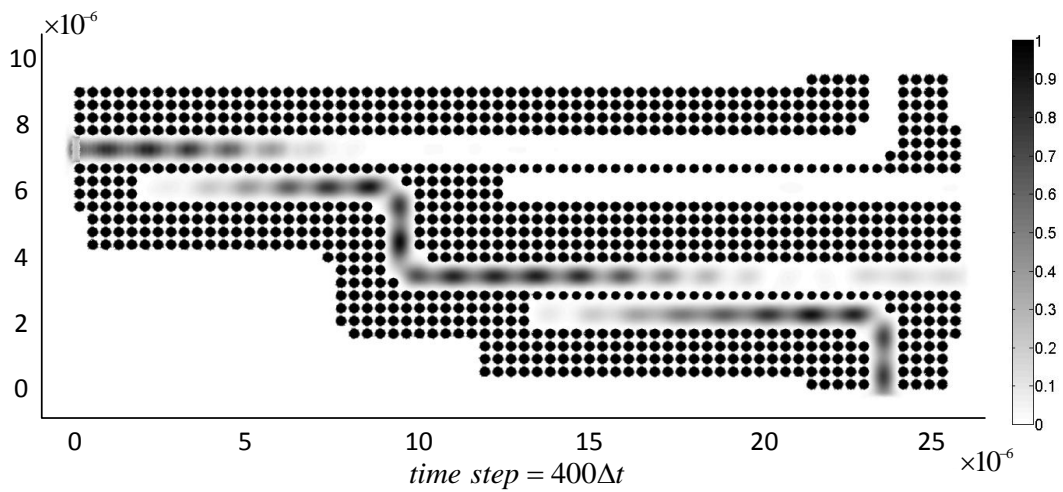


ภาพที่ 4.27 ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถอดนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบด้วย $r_m = 0.30$ ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$

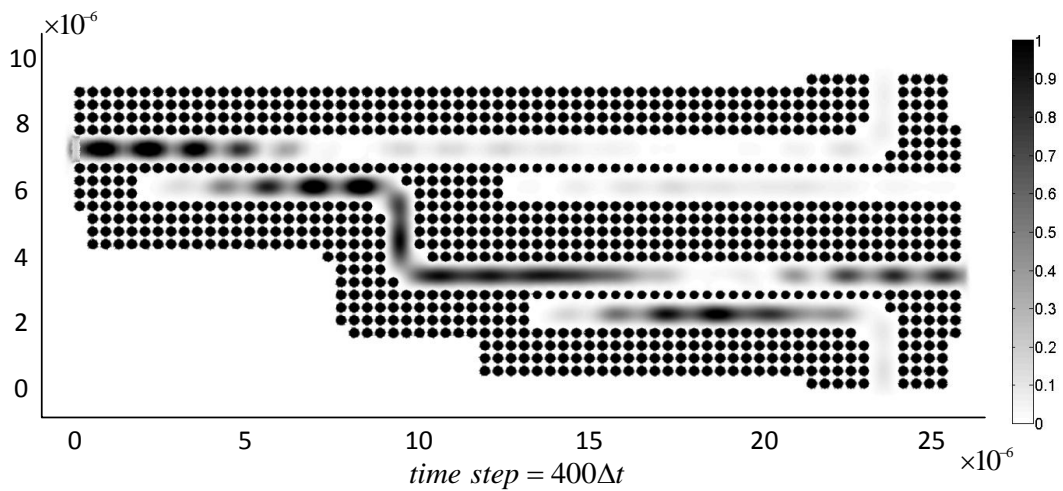


ภาพที่ 4.28 ผลการจำลองคลื่นแพร่กระจายในวงจรถอดนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบด้วย $r_m = 0.30$ ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$

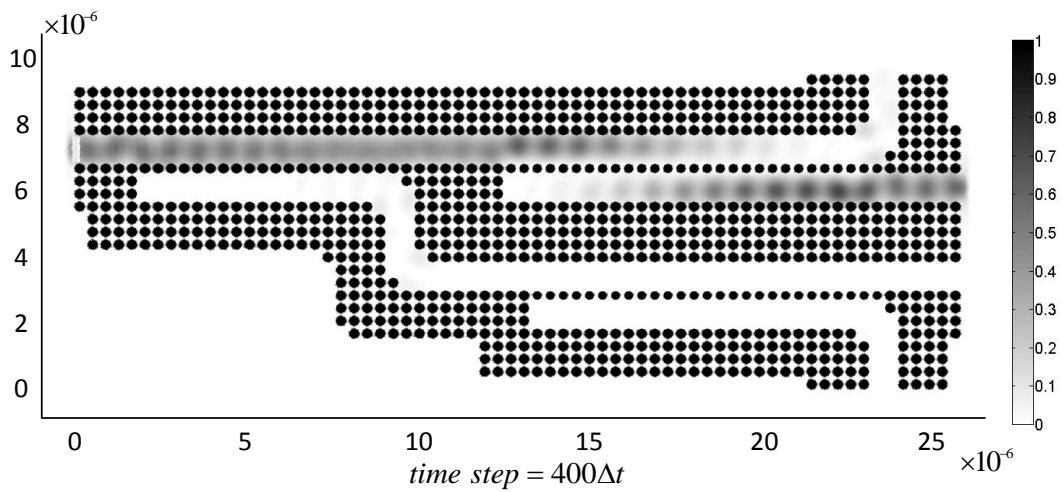
จากผลการจำลองในภาพที่ 4.27 และ ภาพที่ 4.28 จะเห็นได้ว่า ค่าความยาวในบริเวณคู่ควบเท่ากับ $27a$ ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ จะมีค่าของสนามส่วนใหญ่อยู่ในท่อนำคลื่นบน และ ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ จะมีค่าของสนามส่วนใหญ่อยู่ในท่อนำคลื่นล่าง ดังนั้นจะออกแบบให้บริเวณคู่ควบหมายเลข 3 มีความยาวเท่ากับ $27a$ ส่งผลให้วงจรถอดในภาพที่ 4.25 ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ จะแพร่กระจายไปยังช่องทางออกที่ 4 และ ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ จะแพร่กระจายไปยังช่องทางออกที่ 5 ผลการจำลองคลื่นของวงจรถอดนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ในภาพที่ 4.25 ของคลื่น TE และ TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ แสดงดังภาพที่ 4.29-ภาพที่ 4.32



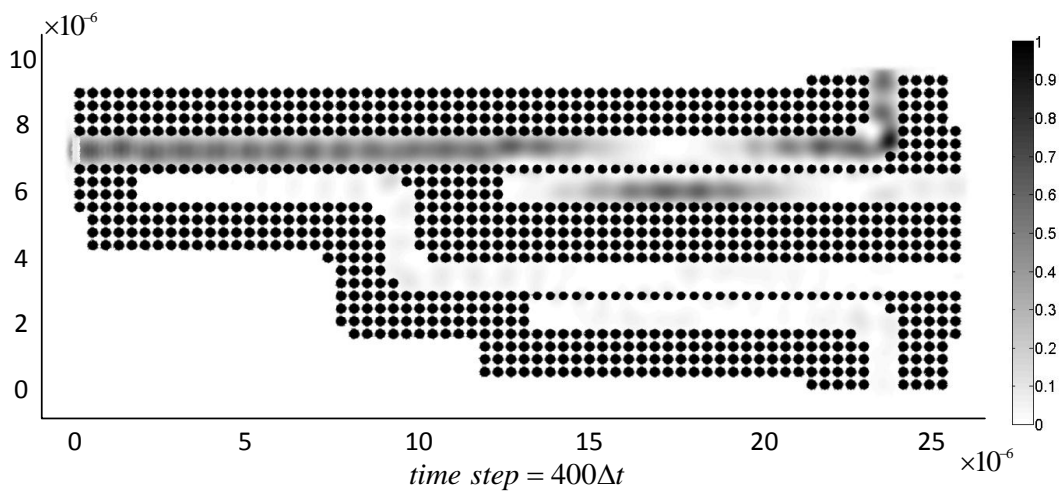
ภาพที่ 4.29 ผลการจำลองคลื่น TE ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ แพร่กระจายในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรด์ที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรด์ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$



ภาพที่ 4.30 ผลการจำลองคลื่น TE ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ แพร่กระจายในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวคู่ควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรด์ที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรด์ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$



ภาพที่ 4.31 ผลการจำลองคลื่น TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ แพร่กระจายในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรด์ที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรด์ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$



ภาพที่ 4.32 ผลการจำลองคลื่น TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ แพร่กระจายในวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ชนิดตัวควบแยกคลื่น TE และ TM ของความยาวคลื่น $\lambda = 1.49 \mu\text{m}$ และ $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ด้วยวัสดุชนิดเทลลูไรด์ที่มีรัศมีของแท่งเทลลูไรด์ในบริเวณควบคู่ $r_m = 0.35a$

ผลการจำลองคลื่นในภาพที่ 4.29 และ ภาพที่ 4.30 แสดงให้เห็นว่าคลื่น TE ของความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu m$ สามารถแพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 4 และความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu m$ สามารถแพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 5 ตรงตามที่ได้ออกแบบไว้ เช่นเดียวกันผลการจำลองคลื่นในภาพที่ 4.31 และ ภาพที่ 4.32 คลื่น TE ของความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu m$ สามารถแพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 2 และความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu m$ สามารถแพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ 1 ตรงตามที่ได้ออกแบบไว้ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าการออกแบบวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ให้เป็นอุปกรณ์ทางแสงที่ได้คำนวณไว้มีความถูกต้องสามารถแยกคลื่น TE และ TM ที่ความยาวคลื่น $\lambda=1.49\mu m$ และ $\lambda=1.55\mu m$ ออกจากกันได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอผลการทั่วไปของคลื่นในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมีโพรพาเกชันในโดเมนเวลาจากสมการแมกซ์เวลล์ เพื่อวิเคราะห์วงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ ที่มีวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก และได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่เพื่อใช้ตรวจสอบคุณสมบัติต่างๆของวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ และทำการออกแบบวงจรผลึกโฟโตนิกส์จากคุณสมบัติดังกล่าว

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมจำลองผลการแพร่กระจายของคลื่นในวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์วัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก เพื่อเป็นการตรวจสอบว่าสมการทั่วไปของคลื่นที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้อง ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมีโพรพาเกชันในโดเมนเวลา ซึ่งผลการเปรียบเทียบมีดังนี้

ในขั้นตอนแรกจะทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตของ M. Koshiba ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บีมีโพรพาเกชันในโดเมนเวลาเช่นเดียวกันกับวิทยานิพนธ์นี้ แต่สมการของ M.Koshiba วัสดุที่ใช้เป็นวัสดุชนิดไอโซทรอปิก ยังไม่ครอบคลุมถึงวัสดุชนิดแอนไอโซทรอปิก โดยได้นำวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์มาเปรียบเทียบสองวงจรคือ วงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์โค้งงอ 90 องศา และวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์แบบกึ่งตัว T ผลจากการจำลองการแพร่กระจายของคลื่นจะเห็นได้ชัดเจนว่าการแพร่กระจายของคลื่นแสงทั้งสองตัวอย่าง มีความใกล้เคียงกับงานวิจัยของ M. Koshiba เป็นอย่างมาก และเป็นที่ยืนยันได้ว่าสมการทั่วไปและโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องในระดับที่สามารถใช้งานในการจำลองผลได้

ในขั้นตอนที่สองได้นำงานวิจัยในอดีตของ Wen-Kai Wang มาเป็นตัวเปรียบเทียบ โดยในงานวิจัยของ Wen-Kai Wang ได้ทำการออกแบบวงจรที่นำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่สามารถแยกคลื่นที่มีความยาว $\lambda=1.31\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ออกจากกันได้ จุดเด่นของงานวิจัยของ Wen-Kai Wang คือ ในงานวิจัยได้ทำสร้างวงจรผลึกโฟโตนิกส์และทำการทดลองวัดผลจริง เปรียบเทียบกับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ การเปรียบเทียบงานวิจัยกับวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการเปรียบเทียบความยาวคลื่น $\lambda=1.31\mu\text{m}$ ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น และความยาวคลื่น $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อกำลังสอง เพื่อเป็นการยืนยันว่าฟังก์ชัน

รูปร่างทั้งสองชนิดที่ได้กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้สามารถทำการจำลองผลได้อย่างถูกต้อง ผลการจำลองจากทั้งสองกรณีจะเห็นได้ว่าคลื่นสามารถแพร่กระจายออกไปยังช่องทางออกที่ถูกต้องได้ เช่นเดียวกับการออกแบบในงานวิจัยของ Wen-Kai Wang

การเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Jin Xiao-jun เป็นการเปรียบเทียบเพื่อยืนยันว่าการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่ในวิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้อง โดยการเปรียบเทียบกับการศึกษาความยาวคู่ควบ และนำความยาวคู่ควบมาทำการออกแบบวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ที่สามารถแยกความยาวคลื่นในช่วงความยาวคลื่นแสงซึ่งได้แก่ $\lambda=1.31\mu\text{m}$, $\lambda=1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ออกจากกันได้ ผลจากการเปรียบเทียบจะเห็นว่าผลการจำลองการแพร่กระจายมีความถูกต้อง ดังนั้นสามารถที่ยืนยันได้ว่าการวิเคราะห์โครงสร้างแถบความถี่มีความถูกต้อง

ในขั้นตอนสุดท้ายจะทำการออกแบบอุปกรณ์ทางแสงจากวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์ โดยได้ทำการออกแบบวงจรแยกคลื่น TE และ คลื่น TM ของคลื่นที่มีความยาว $\lambda=1.49\mu\text{m}$ และ $\lambda=1.55\mu\text{m}$ ออกจากกัน โดยการเปลี่ยนรัศมีของแท่งเทลลูไรด์ในบริเวณคู่ควบส่งผลให้ความยาวคู่ควบของคลื่น TE และ TM ของแต่ละความยาวคลื่นมีการเปลี่ยนแปลงไป ทำให้สามารถออกแบบวงจรเพื่อคัดแยกคลื่นจากกันได้ ผลจากการจำลองผลสามารถยืนยันได้ว่าการออกแบบนั้นสามารถแยกคลื่นได้อย่างถูกต้อง

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในวิทยานิพนธ์นี้ได้มีการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปร์สซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างที่สามารถประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมได้ซึ่งจะส่งผลให้จำนวนจุดต่อในโครงสร้างมีจำนวนลดลง ส่งผลให้โปรแกรมทำการคำนวณได้รวดเร็วขึ้น แต่สาเหตุที่ในวิทยานิพนธ์นี้ไม่ได้นำฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปร์สไปใช้กับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมเนื่องมาจากข้อจำกัดของขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาเองซึ่งยังไม่ครอบคลุมถึงการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปหลายเหลี่ยม

อีกปัญหาที่พบในวิทยานิพนธ์นี้คือเมื่อโครงสร้างมีขนาดใหญ่มาก การคำนวณจะมีระยะเวลาขึ้นอย่างมากซึ่งเมื่อพิจารณาถึงขั้นตอนในการคำนวณจะเห็นได้ว่าในการคำนวณสามารถทำการแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนๆในการคำนวณได้ แต่จำเป็นต้องบังคับให้ตำแหน่งของจุดต่อแต่ละจุดต่อในแต่ละส่วนที่ทำการแบ่งมีความสัมพันธ์กัน ซึ่งปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยการสร้างจุดต่อให้เป็นมาตรฐานจากเซลล์หนึ่งหน่วย และนำแต่ละเซลล์มาประกอบกันเป็นวงจรท่อนำคลื่นผลึกโฟโตนิกส์

รายการอ้างอิง

- [1] Yablonovitch, E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. Physical Review Letter 58 (May 1987): 2059-2062.
- [2] John, S. Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices. Physical Review Letter 58 (June 1987): 2487-2489.
- [3] Zolla, F. Foundations of PHOTONIC CRYSTAL FIBRES. Singapore: Imperial College Press, 2005.
- [4] Liu, T., Zakharian, A. R., Fallahi, M., Moloney, V., and Mansuripur, M. Multimode Interference-Based Photonic Crystal Waveguide Power Splitter. Journal of Lightwave Technology 22 (Dec. 2004): 2842-2846.
- [5] Robinson, S. and Nakkeeran, R. Two Dimensional Photonic Crystal Ring Resonator Based Bandpass Filter for C-Band of CWDM Applications. National Conference Communications (NCC) (Jan. 2011): 1-4.
- [6] Chiu, W. Y. , et al. Directional Coupler Formed by Photonic Crystal InAlGaAs Nanorods. Journal of Lightwave Technology 26 (Mar. 2005): 488-491.
- [7] Liu, C. Y. Efficient omnidirectional couplers achieved by anisotropic photonic crystal waveguides. Phys. Lett. A 373 (July 2009): 3061-3066.
- [8] Koshiba, M., Tsuji, Y., and Hikari, M. Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits. Journal of Lightwave Technology 18 (Jan. 2000): 102-110.
- [9] Fujisawa, T. and Koshiba, M. Time-Domain Beam Propagation Method for Nonlinear Optical Propagation Analysis and Its Application to Photonic Crystal Circuits. Journal of Lightwave Technology 22 (Feb. 2004): 684-690.
- [10] Kono, N. and Tsuji, Y. A Novel Finite-Element Method for Nonreciprocal Magneto-Photonic Crystal Waveguides. Journal of Lightwave Technology 22 (July 2004): 1741-1747.
- [11] Polycarpou, A. C. Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics. United State of America: Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [12] Le, K.Q. and Bienstman, P. Application of modified Padé approximant operators to

- time-domain beam propagation methods. Journal of Optical Society of America B 26 (Dec. 2009): 2285-2289.
- [13] Hsu, S., Chen, M., and Chang, H. Investigation of band structures for 2D non-diagonal anisotropic photonic crystals using a finite element method based eigenvalue algorithm. Optics Express 15 (Apr. 2007): 5416-5430.
- [14] Sukhoivanov, I.A. and Guryev, I. V..Photonic crystals Physics and Practical. Springer Series in Optical Sciences. Springer Publishing, 2009
- [15] Thiwan Chowanadisai. Time-domain Finite-element Method with Polygonal Elements for Optical Wave Propagation Analysis in Two-dimensional Photonic crystal circuits. Master's Thesis, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 2007.
- [16] Wang, W., et al. 1.3/1.55 μm optical directional coupler by photonic crystal with a defect shifting design. Proceeding of 2005 5th IEEE Conference on Nanotechnology 1 (11-15 July 2005): 245-248.
- [17] Jin, X., and Chen, H. Photonic crystal three wavelength Division Multiplexing Based On Multimode Interference Theory. The 9th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOON 2010) (24-27 Oct. 2010): 395-398.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง

จากสมการที่ (ก.1) และ (ก.2) จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันรูปร่าง จะติดอยู่ในพจน์ของสมการซึ่งเมื่อเมื่อพิจารณาสมการทั้งสองจะเห็นได้ว่า สมการที่ (ก.1) ในพจน์ของฟังก์ชันรูปร่างจะมีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างในระนาบที่พิจารณาอยู่คือ $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ และ $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ เมื่อ i คือจำนวนของฟังก์ชันรูปร่างที่เลือกใช้

$$K_{mm}^e = \int_{\Omega} (\nabla_p \times N_m \mathbf{a}_z) \cdot (\bar{q} \cdot \nabla_p \times N_n \mathbf{a}_z) dS \quad (\text{ก.1})$$

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเพื่อที่ใช้ในการประเมินผลในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ก.1 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น (linear interpolation function)

ขั้นตอนในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นได้ถูกกล่าวถึงใน[11] โดยฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น แต่ละฟังก์ชันจะแสดงได้ดังนี้

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (\text{ก.2})$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad (\text{ก.3})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (\text{ก.4})$$

และ พิกัด x และ y ของจุดใดๆในเอลิเมนต์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$x = x_1^e + \bar{x}_{21}\xi + \bar{x}_{31}\eta \quad (\text{ก.5})$$

$$y = y_1^e + \bar{y}_{21}\xi + \bar{y}_{31}\eta \quad (\text{ก.6})$$

เมื่อ $\bar{x}_{ij} = x_i^e - x_j^e$ และ $\bar{y}_{ij} = y_i^e - y_j^e$

จากสมการที่ (ก.2) - (ก.4) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันรูปร่างอยู่ในระนาบของ $\xi - \eta$ ดังนั้นจะอาศัยกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ช่วยในการหาคำตอบ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{ก.7})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{ก.8})$$

สามารถจัดสมการที่ (ก.7) และ (ก.8) ให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.9})$$

จากสมการที่ (ก.9) ในเมทริกซ์จัตุรัสจะถูกเรียกว่า เมทริกซ์จาโคเบียน (J)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{ก.10})$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์ของแต่ละสมาชิกในเมทริกซ์จะได้ เมทริกซ์จาโคเบียนออกมาดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} & \bar{y}_{21} \\ \bar{x}_{31} & \bar{y}_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{ก.11})$$

จากสมการที่ (ก.11) เราสามารถจัดรูปสมการที่ (ก.9) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.12})$$

เมื่อ J^{-1} คือเมทริกซ์ผกผันของ J มีค่าดังนี้

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \bar{y}_{31} & -\bar{y}_{21} \\ -\bar{x}_{31} & \bar{x}_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{ก.13})$$

โดยที่

$$|J| = \bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21} = 2A_e \quad (\text{ก.14})$$

เมื่อ A_e คือพื้นที่ของสามเหลี่ยมของเอลิเมนต์

แทนค่าสมการที่ (ก.13) และ (ก.14) ลงในสมการที่ (ก.12) จะสามารถหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างในระนาบ $x - y$ ของแต่ละหมายเลขฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\bar{y}_{23}}{2A_e} \quad (\text{ก.15})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\bar{x}_{32}}{2A_e} \quad (\text{ก.16})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\bar{y}_{31}}{2A_e} \quad (\text{ก.17})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\bar{x}_{13}}{2A_e} \quad (\text{ก.18})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\bar{y}_{12}}{2A_e} \quad (\text{ก.19})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\bar{x}_{21}}{2A_e} \quad (\text{ก.20})$$

ก.2 ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อ (Quadratic Triangular Element)

ฟังก์ชันรูปร่างแบบสามเหลี่ยมกำลังสองหกจุดต่อ แต่ละหมายเลขมีค่าดังนี้

$$N_1 = (2\xi + 2\eta - 1)(\xi + \eta - 1) \quad (\text{ก.21})$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1) \quad (\text{ก.22})$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1) \quad (\text{ก.23})$$

$$N_4 = -4\xi(\xi + \eta - 1) \quad (\text{ก.24})$$

$$N_5 = 4\xi\eta \quad (\text{ก.25})$$

$$N_6 = -4\eta(\xi + \eta - 1) \quad (\text{ก.26})$$

และ พิกัด x และ y ของจุดใดๆในเอลิเมนต์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$x = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 + x_4^e N_4 + x_5^e N_5 + x_6^e N_6 \quad (\text{ก.27})$$

$$y = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 + y_4^e N_4 + y_5^e N_5 + y_6^e N_6 \quad (\text{ก.28})$$

ด้วยวิธีการเดียวกันกับ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น จะได้เมทริกซ์จาโคเบียนดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{ก.29})$$

เมื่อ $J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4^e + \frac{\partial N_5}{\partial \xi} x_5^e + \frac{\partial N_6}{\partial \xi} x_6^e$ (ก.30)

$$J_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4^e + \frac{\partial N_5}{\partial \xi} y_5^e + \frac{\partial N_6}{\partial \xi} y_6^e \quad (\text{ก.31})$$

$$J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4^e + \frac{\partial N_5}{\partial \eta} x_5^e + \frac{\partial N_6}{\partial \eta} x_6^e \quad (\text{ก.32})$$

$$J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4^e + \frac{\partial N_5}{\partial \eta} y_5^e + \frac{\partial N_6}{\partial \eta} y_6^e \quad (\text{ก.33})$$

โดยที่ $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ มีค่าดังนี้

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 1

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 4\xi + 4\eta - 3 \quad (\text{ก.34})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = 4\xi + 4\eta - 3 \quad (\text{ก.35})$$

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 2

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 4\xi - 1 \quad (\text{ก.36})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{ก.37})$$

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 3

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{ก.38})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 4\eta - 1 \quad (\text{ก.39})$$

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 4

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -8\xi - 4\eta + 4 \quad (\text{ก.40})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 4\xi \quad (\text{ก.41})$$

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 5

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 4\eta \quad (\text{ก.42})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = 4\xi \quad (\text{ก.43})$$

ฟังก์ชันรูปร่างหมายเลข 6

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -4\eta \quad (\text{ก.44})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -4\xi - 8\eta + 4 \quad (\text{ก.45})$$

จากสมการที่ (ก.29) เราสามารถจัดรูปสมการที่ (ก.9) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{ก.46})$$

เมื่อ $|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$

โดยการแทนค่าสมการที่ (ก.34)-(ก.45) ลงในสมการที่ (ก.46) จะได้ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างในระนาบ $x - y$ ของแต่ละหมายเลขฟังก์ชันดังนี้

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (J_{22}(4\xi + 4\eta - 3) - J_{12}(4\xi + 4\eta - 3)) \quad (\text{ก.47})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (-J_{21}(4\xi + 4\eta - 3) + J_{11}(4\xi + 4\eta - 3)) \quad (\text{ก.48})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (J_{22}(4\xi - 1) + 0) \quad (\text{ก.49})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (-J_{21} (4\xi - 1) + 0) \quad (ก.50)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (0 - J_{12} (4\eta - 1)) \quad (ก.51)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (0 + J_{11} (4\eta - 1)) \quad (ก.52)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (J_{22} (-8\xi - 4\eta + 4) - J_{12} (-4\xi)) \quad (ก.53)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (-J_{21} (-8\xi - 4\eta + 4) + J_{11} (-4\xi)) \quad (ก.54)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (J_{22} (4\eta) - J_{12} (4\xi)) \quad (ก.55)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (-J_{21} (4\eta) + J_{11} (4\xi)) \quad (ก.56)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} = \frac{1}{|J|} (J_{22} (-4\eta) - J_{12} (-4\xi - 8\eta + 4)) \quad (ก.57)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial y} = \frac{1}{|J|} (-J_{21} (-4\eta) + J_{11} (-4\xi - 8\eta + 4)) \quad (ก.58)$$

จะเห็นได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างในสมการที่ (ก.47)-(ก.58) จะมีพจน์ของ ξ และ η ติดอยู่ ซึ่งทำให้เมื่อแทนค่าลงในสมการที่(ก.1) มีความซับซ้อนยุ่งยากมากกว่าในฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นเป็นอย่างมาก ดังนั้นในการแก้สมการที่ (ก.1) จะใช้วิธีการประมาณค่าแบบถ่วงน้ำหนักกำลังสองของเกาส์มาช่วยในการแก้สมการ โดยสมการการประมาณค่าอินทิเกรตสองชั้นของเกาส์แสดงดังนี้

$$\iint_s f(x, y) dx dy \approx A \sum_{i=1}^N w(\alpha_i, \beta_i) f(\alpha_i, \beta_i) \quad (ก.59)$$

โดยที่ N คือจำนวนของฟังก์ชันรูปร่าง และค่า α_i, β_i และ w มีค่าตามตารางที่ ก.1

ตารางที่ ก.1 ค่าพารามิเตอร์ในวิธีการประมาณค่าแบบถ่วงน้ำหนักกำลังสองของเกาส์

i	α	β	w
1	0.10810301	0.44594849	0.22338158
2	0.44594849	0.10810301	0.22338158
3	0.44594849	0.44594849	0.22338158
4	0.81684757	0.09157621	0.10995174
5	0.09157621	0.81684757	0.10995174
6	0.09157621	0.09157621	0.10995174

ก.3 ฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปเรส

วิธีการหาฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปเรสได้ถูกกล่าวถึงใน[15] โดยฟังก์ชันรูปร่างแต่ละหมายเลขสามารถหาได้จากสมการที่ (ก.60)

$$N_i^e(x, y) = \frac{w_i^e(x, y)}{\sum_{j=1}^N w_j^e(x, y)} = \frac{f_1}{f_2} \quad (\text{ก.60})$$

$$\text{เมื่อ } w_i^e = \frac{A(i-1, i, i+1)}{A(p, i-1, i)A(p, i, i+1)}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบวาซสเปเรส $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ และ $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x}}{(f_2)^2} \quad (\text{ก.61})$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y}}{(f_2)^2} \quad (\text{ก.62})$$

$$\text{เมื่อ } \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial w_i^e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A(i-1, i, i+1)}{A(p, i-1, i)A(p, i, i+1)} \right) \quad (\text{ก.63})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial w_i^e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A(i-1, i, i+1)}{A(p, i-1, i)A(p, i, i+1)} \right) \quad (\text{ก.64})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{j=1}^N w_j^e}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial w_j^e}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right) \quad (\text{ก.65})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{j=1}^N w_j^e}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial w_j^e}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right) \quad (\text{ก.66})$$

โดยที่ $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right)$ และ $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right)$ สามารถ

หาได้จากการหาอนุพันธ์ของพื้นที่ของสามเหลี่ยม มีขั้นตอนดังนี้

กำหนดให้ $A_{element} = A(j-1, j, j+1)$, $A_{sub1} = A(p, j-1, j)$ และ $A_{sub2} = A(p, j, j+1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_{element}}{A_{sub1}A_{sub2}} \right) \\ &= -\frac{A_{element}}{(A_{sub1}A_{sub2})^2} \left(A_{sub1} \frac{\partial A_{sub2}}{\partial x} + A_{sub2} \frac{\partial A_{sub1}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{ก.67})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A(j-1, j, j+1)}{A(p, j-1, j)A(p, j, j+1)} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_{element}}{A_{sub1}A_{sub2}} \right) \\ &= -\frac{A_{element}}{(A_{sub1}A_{sub2})^2} \left(A_{sub1} \frac{\partial A_{sub2}}{\partial y} + A_{sub2} \frac{\partial A_{sub1}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{ก.68})$$

$$\text{โดยที่ } A(p, a, b) = \frac{(x_a y_b - x_b y_a) + (y_a - y_b)x - (x_b - x_a)y}{2}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{(y_a - y_b)}{2} \quad (\text{ก.69})$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{(x_b - x_a)}{2} \quad (\text{ก.70})$$

ภาคผนวก ข

เวลาที่ใช้ในการคำนวณของแต่ละขั้นตอน

โปรแกรมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้คือ โปรแกรม MATLAB ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ DELL ที่มีคุณสมบัติของเครื่องดังตารางที่ ข.1

ตารางที่ ข.1 ตารางคุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

ระบบปฏิบัติการ(Operatine System)	Window 7 Professional
Manufacturer	Dell
Model	Precision T3500
Processor	Intel(R) CPU W3505 @ 2.53GHz
Memory(RAM)	2.00GB
System type	64-bit Operating System

การจับเวลาจะใช้ชุดคำสั่ง clock เป็นตัวเริ่มจับเวลา และใช้ชุดคำสั่ง etime เป็นชุดคำสั่งในการหาเวลาที่ใช้ในการคำนวณของแต่ละขั้นตอน

ข.1 ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ครอบคลุม

ในขั้นตอนนี้จะทำการสร้างเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ที่ละเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชันรูปร่างที่เลือกใช้และนำมาประกอบเข้ากันเป็นเมทริกซ์ครอบคลุม ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ครอบคลุมจะขึ้นอยู่กับ 2 ปัจจัยคือ จำนวนของเอลิเมนต์ และจำนวนของจุดยอดของฟังก์ชันรูปร่างที่เลือกใช้ ใน ตารางที่ ข.2 จะแสดงเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์ครอบคลุม ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้น

ตารางที่ ข.2 ตารางเวลาเฉลี่ยในขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ครอบคลุม

จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนจุดต่อ	เวลาเฉลี่ยในการคำนวณ (s.)
1270	704	1.031
1930	1022	1.121
264880	132479	6.339
305984	153049	7.473
510620	255706	12.163

ข.2 ขั้นตอนวิเคราะห์หาโครงสร้างแถบความถี่

เวลาที่ใช้ในการคำนวณจะแปรผันตามขนาดของเมทริกซ์ครอบคลุม ซึ่งขนาดของเมทริกซ์ครอบคลุมจะขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อและฟังก์ชันรูปร่างที่เลือกใช้

ในขั้นตอนการวิเคราะห์หาโครงสร้างแถบความถี่จะทำการเปลี่ยนค่า wave number k ตามขอบของ brillouin zone แล้วทำการเรียกชุดคำสั่ง eig ของโปรแกรม MATLAB โดยแต่ละค่า wave number จะใช้เวลาในการคำนวณเฉลี่ย ตามตารางที่ ข.3

ตารางที่ ข.3 ตารางเวลาที่ใช้ในการคำนวณในขั้นตอนการหาโครงสร้างแถบความถี่

จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ขนาดของเมทริกซ์ครอบคลุม	เวลาเฉลี่ยในการคำนวณ (s.)
140	238	119×119	0.0564
517	952	476×476	1.1733
749	1416	708×708	2.5731
1241	2320	1160×1160	8.1349
1985	3808	1904×1904	26.5501

ข.3 การจำลองผลการแพร่กระจายของคลื่น

ในการจำลองผลจะทำการจับเวลาในทุกการคำนวณ 1 ขั้นระยะเวลา (time step) จากสมการที่ 2.39 จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับขนาดของเมทริกซ์ $[A]$ และ $[B]$ ซึ่งจะมีขนาดเท่ากับ ขนาดของเมทริกซ์ครอบคลุม เวลาที่ใช้ในการคำนวณจะแสดงดังตารางที่ ข.4

ตารางที่ ข.4 ตารางเวลาที่ใช้ในการคำนวณของ 1 ขั้นระยะเวลา

โครงสร้างจากภาพที่	ขนาดของเมทริกซ์ $[A]$ และ $[B]$	เวลาเฉลี่ยในการคำนวณ (s.)
ภาพที่ 4.18	132479	2.1242
ภาพที่ 4.21	153049	2.5943
ภาพที่ 4.25	255706	4.9612

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย ปิยณัฐ ลิมปิ๊จรรยวงษ์ เกิดเมื่อวันที่ 18 มีนาคม พ.ศ. 2529 กรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของ นายสุรศักดิ์ ลิมปิ๊จรรยวงษ์ และ นางธนาภรณ์ ลิมปิ๊จรรยวงษ์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิต ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เมื่อปีการศึกษา 2550 และได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ระหว่างทำการศึกษาได้ดำรงตำแหน่ง คณะกรรมการกลุ่มความร่วมมือนิสิตบัณฑิตศึกษาวิศวกรรมไฟฟ้า แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (Electrical Engineering Postgraduate Student Assembly of Chulalongkorn University : EEP-SA-CU) และมีบทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์ในระดับนานาชาติระหว่างการศึกษาดังนี้

[1] Limjunyawong, P., and Angkaew, T. "A Time-Domain Beam Propagation Method Based on Finite Element Method for Analysis and Design of Anisotropic Photonic Crystal Coupling-Type Polarization Splitter," Proceedings of the Asia-Pacific Microwave Conference 2011, pp.1981-1984, Dec 2011, Melbourne, Australia