บทที่ 3

การหาสมการมาตรฐาน และ กราฟของเส้นทาง

การหาสมการมาตรฐาน

จากสมการที่ผ่านมาทำให้ได้ว่า สมการของเส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุด จากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้าย มีค่าเป็น

$$x = \frac{3u^2}{8g\,[1-\cos\phi_o]}\,[\phi - \sin\phi] - a \qquad (3.1)$$

$$y = \frac{3u^2}{8g\,[1-\cos\phi_o]}\,[1 - \cos\phi] - d \qquad (3.2)$$

จะหาสมการมาตรฐานเพียงสมการเดียวที่ใช้อธิบายเส้นทางของวัตถุที่กลิ้งไปสมการข้างบนเขียนให้สั้นได้เป็น

$$x = b\,[\phi - \sin\phi] - a \qquad (3.3)$$

$$y = b\,[1 - \cos\phi] - d \qquad (3.4)$$

เมื่อ $a = -\dfrac{[\phi_o - \sin\phi_o]}{(1-\cos\phi_o)}\,\dfrac{3u^2}{4g}$

$d = (3u^2)/4g$

จากสมการที่ 3.4 $b \quad [1 - \cos\phi] = y + d$

ดังนั้น $\cos\phi = -[((y+d)/b)-1]$

$$\phi = \cos^{-1}[-[(y+d-b)/b]] \qquad (3.5)$$

แทนสมการที่ 3.5 ลงในสมการที่ 3.3 จะได้ว่า

$$x = b\left[\cos^{-1}\left[-\left(\frac{(y+d-b)}{b}\right)\right] - \sin\left[\cos^{-1}\left[-\left(\frac{(y+d-b)}{b}\right)\right]\right]\right] - a \qquad (3.6)$$

สมการที่ 3.6 คือสมการมาตรฐานของเส้นทางของการกลิ้งที่ใช้เวลาน้อยที่สุด ซึ่งถ้าวัตถุไม่ใช่ทรงกระบอกแต่เป็นวัตถุรูปอื่น เช่น ทรงกลมหรือวงแหวน ค่าของ I และ b ก็จะเปลี่ยนไปไม่เหมือนกันแล้วแต่ค่า I ของวัตถุเป็นกรณี เมื่อได้สมการมาตรฐานออกมาแล้ว ต่อไปจะนำสมการที่ได้นี้ มาเขียนกราฟต่อไป

<u>การเขียนกราฟของเส้นทาง</u>

เมื่อได้สมการที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดออกมาเป็นสมการมาตรฐานแล้ว ต่อไปจะนำสิ่งที่ได้นี้มาเขียนกราฟ และเพื่อให้สะดวกขึ้น จะกำหนดให้วัตถุเริ่มกลิ้งจากจุดกำเนิด คือ ϕ, x, y มีค่าเป็น 0 ดังนั้นค่าคงที่ a จากสมการที่ 5 จะมีค่าเป็น 0 ทำให้สมการการเคลื่อนที่มีค่าเป็น

$$x = (3u^2/8g)[\phi - \sin\phi] \tag{3.7}$$

$$y = (3u^2/8g)[1 - \cos\phi] -(3u^2/4g) \tag{3.8}$$

ให้ทรงกระบอกมวล m รัศมี r กลิ้งด้วยความเร็วต้น 9.81 เมตร/วินาที ใช้ค่า g = 9.81 เมตร/วินาที^{2} และ $u^2 = 9.81$

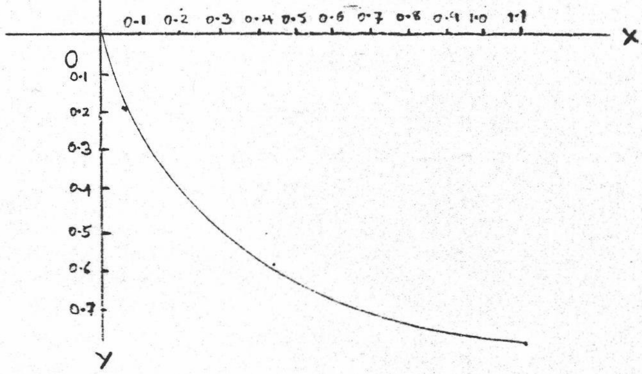
แทนค่า u^2 ลงในสมการที่ 3.7 และ 3.8 จะได้ว่า

$$x = (3/8)[\phi - \sin\phi] \tag{3.9}$$

$$y = (3/8)[1 - \cos\phi] -(3/4) \tag{3.10}$$

สมการที่ 3.9 และ 3.10 คือสมการของเส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดให้มุมที่กลิ้งเปลี่ยนไปครั้งละ 30 องศาแล้วหาค่า x, y มาเขียนตารางได้เป็น

ϕ	x	y
0	0	0
30	0.067	.19
60	0.458	.57
90	1.178	.75
120	1.895	.57



รูปที่ 2 กราฟของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ด้วยมุม ϕ ใดๆ

กราฟที่ได้ออกมานี้เป็นกราฟของไซคลอยที่มีรัศมีของวงกลมที่ใช้กลิ้งไปมีค่าเป็น $3u^2/8g$ นั่นคือสามารถสรุปได้ว่าเส้นทางที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดจากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้ายจะเป็นรูปไซคลอยและต้องเป็นการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถลซึ่งสมการของไซคลอยมีรูปแบบเป็น

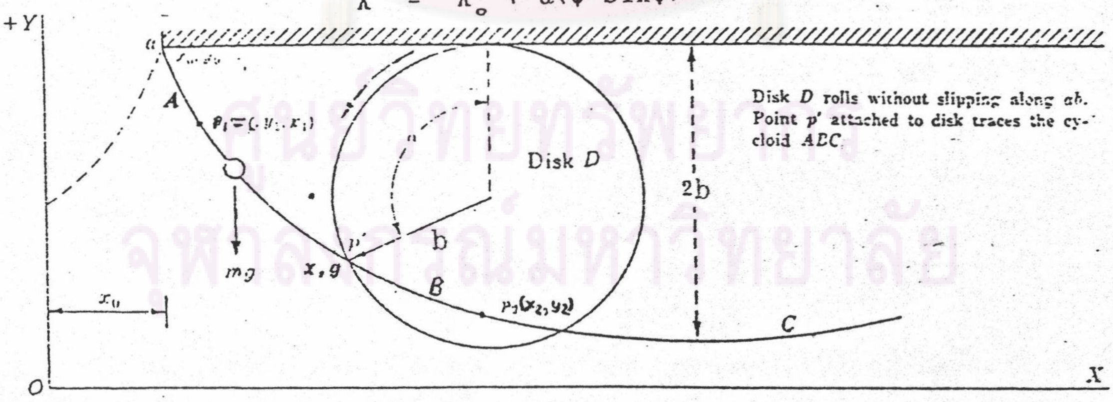
$$x = a(\phi - \sin\phi) \qquad (3.11)$$

$$y = a(1 - \cos\phi) \qquad (3.12)$$

จุดๆ หนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี a ที่กลิ้งไปบนพื้นระนาบคือทางเดินของส่วนโค้งที่เรียกว่าไซคลอยเมื่อ ϕ คือมุม ที่กลิ้งไป x และ y ก็คือตำแหน่งของทางเดินของไซคลอยหรือเขียนได้เป็น

$$Y = Y_o - a(1 - \cos\phi) \qquad (3.14)$$

$$X = X_o + a(\phi - \sin\phi) \qquad (3.13)$$



รูปที่ 3 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีจุดเริ่มต้นใดๆ

<u>การหาสมการของเส้นทางจากจุดสองจุด</u>

ถ้าได้ทราบแน่นอนแล้วว่าไซคลอยเริ่มต้นจากจุด X เป็นศูนย์ Y เป็นศูนย์ และมุมเริ่มต้นเป็นศูนย์แล้ว และได้ทราบค่า X,Y สองจุดเป็นที่แน่นอนบนเส้นทางของไซคลอย จะสามารถหารัศมีของวงกลมที่กลิ้งไปทำให้เกิดไซคลอยได้และสามารถหาสมการของเส้นทางใดๆของ X และ Y บนไซคลอยได้

$$X_1 = b\,(\phi_1 - \sin\phi_1) \tag{3.15}$$

$$Y_1 = b\,(1 - \cos\phi_1) \tag{3.16}$$

$$X_2 = b\,(\phi_2 - \sin\phi_2) \tag{3.17}$$

$$Y_2 = b\,(1 - \cos\phi_2) \tag{3.18}$$

(3.15)/(3.16)
$$X_1 = \frac{(\phi_1 - \sin\phi_1)\,Y_1}{(1 - \cos\phi_1)} \tag{3.19}$$

$$X_1 = \left|\frac{\phi_1}{(1 - \cos\phi_1)} - \frac{\sin\phi_1}{(1 - \cos\phi_1)}\right| Y_1 \tag{3.20}$$

เมื่อ $\tan(\phi/2) = \dfrac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \dfrac{1 - \cos\phi}{\sin\phi}$

จาก (3.16)
$$\frac{Y_1}{b} = (1 - \cos\phi_1) \tag{3.21}$$

แทน (3.21) ใน (3.20)

$$X_1 = \left| \frac{b\phi_1}{Y} - \frac{1}{\tan(\phi_1/2)} \right| Y_1$$

$$\frac{b\phi_1}{Y_1} = \frac{X_1}{Y_1} + \frac{1}{\tan(\phi_1/2)}$$

$$b\phi_1 = X_1 + \frac{Y_1}{\tan(\phi_1/2)}$$

$$b = \frac{X_1 + \dfrac{Y_1}{\tan(\phi_1/2)}}{\phi_1} \qquad (3.22)$$

แทนสมการ (3.22) ลงใน สมการ (3.17) และ (3.18) เพราะรัศมีเป็นค่าคงที่เท่ากันทุกสมการดังนั้น จะได้ X_2และ Y_2 มีค่าเป็น

$$X_2 = \left[\frac{\left[X_1 + \dfrac{Y_1}{\tan(\phi_1/2)} \right]}{\phi_1} \right] \left[\phi_2 - \sin \phi_2 \right] \qquad (3.23)$$

$$Y_2 = \left[\frac{\left[X_1 + \dfrac{Y_1}{\tan(\phi_1/2)}\right]}{\phi_1}\right]\left[1 - \cos\phi_2\right] \qquad (3.24)$$

สมการ (3.23) และ (3.24) **นี้ คือสมการของไซคลอย ที่ผ่านจุดสองจุดที่**กำหนดมาให้