บทที่ 2

การหาสมการของส่วนโค้งโดยวิธีแคลคูลัส ของการแปรผัน

การหาสมการของเส้นทาง

จะหาเส้นทางของวัตถุทรงกระบอกมวล m มีรัศมี R เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นไปยังจุดที่อยู่ต่ำกว่าเริ่มต้นจากจุด Aจุด(0,0)ไปยังจุดBโดยให้เป็นไปตามกฎการคงที่ของพลังงานคือ

$$(1/2)mu^2 + (1/2)Iw^2_1 = -mgy + (1/2)mv^2 + (1/2)Iw^2_2 \qquad (2.1)$$

เมื่อuคือความเร็วที่จุดA,vคือความเร็วที่จุดใดๆและw_1,w_2คืออัตราเร็วเชิงมุมที่จุดศูนย์กลางมวล แทนค่า I ของทรงกระบอก , $I = (1/2)mR^2$ และ $v = wR$

จะได้

$$mgy + (3/4)mu^2 = (3/4)mv^2 \qquad (2.2)$$

$$v^2 = (4/3)gy + u^2 \qquad (2.3)$$

$$v = [u^2+(4/3)gy]^{1/2} \qquad (2.4)$$

ds คือ ระยะทางสั้นๆ ตามส่วนโค้งระหว่าง A และ B

$$ds = [1 + y^2]^{1/2}\, dx \qquad (2.5)$$

ความเร็วตรงที่dsเท่ากับv จะผ่านdsใช้เวลา ds/v

จะได้ $$T = \int_{\text{ค}}^{B}(ds/v) \qquad (2.6)$$

แทนค่า, ds และ v จะได้ $T = \int_{A}^{B} (1+y^2)^{1/2} / [u^2+(4/3)gy]^{1/2} \, dx$ (2.7)

ฟังก์ชั่น $F = [(1+y^2)/[u^2+(4/3)gy]]^{1/2}$ (2.8)

เมื่อ $F_y = \partial F/\partial y$ (2.9)

และ $F_{y'} = \partial F/\partial y'$ (2.10)

จากสมการ ออยเลอร์

$$(d/dx)[F_{y'}] - F_y = 0 \quad (2.11)$$

จะต้องหาค่า F_y และ $F_{y'}$ จาก F และนำมาแทนค่าในสมการที่ (2.11) เพื่อหาค่า x,y ออกมา ต่อไปจะหา F_y, จาก $F_y = \partial F/\partial y$ แทนค่า F จะได้

$$F_y = -(2/3)g \cdot \frac{(1+y^2)^{1/2}}{[u^2+(4/3)gy]^{3/2}} \quad (2.12)$$

จาก $F_{y'} = \partial F/\partial y'$ แทนค่า F จะได้

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{u^2+(4/3)gy}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} \quad (2.13)$$

นำ สมการ (2.12) และ (2.13) แทนใน (2.11) ดังนั้นจะได้

$$[u^2+(4/3)gy]y''+(2/3)g(1+y'^2) = 0 \qquad (2.14)$$

สมการที่ (2.14) คือสมการของทรงกระบอกที่กลิ้งจากจุด A ไปยังจุด B โดยใช้เวลาน้อยที่สุดตามที่ต้องการ จากความเร็วต้น u ไปยังจุด B ที่อยู่ต่ำกว่า ซึ่งจะต้องแก้สมการนี้ออกมาเพื่อหาค่า x,y ว่าเป็นอย่างไร แล้วจะนำค่า x,y นี้มาเขียนกราฟต่อไป จะเห็นว่าสมการที่ (2.14) นี้ มีความเร็วต้น เป็น u มีทิศไปตามแนวใดๆ ถ้าความเร็วต้นของการกลิ้งเป็นศูนย์รูปแบบสมการจะเป็นอย่างไร ถ้าแทนค่า u = 0 ลงในสมการที่ (2.14) จะได้

$$(4/3)gy]y''+(2/3)g(1+y'^2) = 0 \qquad (2.15)$$

<u>การหาสมการของส่วนโค้งที่วัตถุมีความเร็วต้น u หาอนุพันธ์เทียบกับ x</u>

สมการที่ได้ออกมาทั้งหมดนั้น ซึ่งยังแก้ไม่ได้ในตอนนี้หาอนุพันธ์เทียบกับ Y ต่อไปนี้จะหาอนุพันธ์เทียบกับ X ดูบ้างว่าสมการจะออกมาเป็นรูปแบบใด และจะเอาฟังก์ชั่นที่ได้ไปแทนค่าลงในสมการอีกรูปแบบหนึ่งของออยเลอร์ ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$(\partial F/\partial x) - (d/dx)[F - y'(\partial F/\partial y')] = C \qquad (2.16)$$

ต่อไปจะหาสมการเส้นทางของวัตถุที่กลิ้งด้วยความเร็วต้น uจากจุด A ไปยังจุด B ที่อยู่ต่ำกว่า ซึ่งทำเหมือนกับที่เคยทำมาแล้วจะได้ฟังก์ชั่นที่ต้องการศึกษาเป็น

$$F = \frac{1+y'^2}{\sqrt{u^2+(4/3)gy}} \qquad (2.17)$$

$$\partial F/\partial x = 0 \qquad (2.18)$$

$$(d/dx)[F - y'(\partial F/\partial y')] = 0 \qquad (2.19)$$

$$F - y'(\partial F/\partial y') = C \qquad (2.20)$$

$$(\partial F/\partial y') = \frac{y'}{[u^2+(4/3)gy]^{1/2}[1+y'^2]^{1/2}} \qquad (2.21)$$

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{[u^2+(4/3)gy]^{1/2}[1+y'^2]^{1/2}} = c \qquad (2.22)$$

$$[u^2+(4/3)gy][1+y'^2] = C \qquad (2.23)$$

สมการที่(2.23)คือสมการของการกลิ้งด้วยความเร็วต้น u

ดังนั้นจะสรุปเป็นหลักใหญ่ๆได้ดังนี้การหาส่วนโค้งที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดโดยใช้วิธีแคลคูลัสของการแปรผัน นั้นใช้สมการ Euler's or Lagrange's equations ซึ่งมี 2 รูปแบบ คือ

แบบที่ 1 หาอนุพันธ์เทียบกับ y

$$[(d/dx)(\partial F/\partial y') - \partial F/\partial y] = 0 \qquad (2.24)$$

แบบที่ 2 หาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$(\partial F/\partial x) - (d/dx)[F - y'(\partial F/\partial y')] = C \qquad (2.25)$$

ถ้าทำตามแบบที่ 1 ตาม y จะได้สมการการกลิ้งที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเป็น

$$[u^2+(4/3)gy]\ y'' + (2/3)g[1+y'^2] = 0 \tag{A}$$

สำหรับการกลิ้งจากความเร็วต้น u และถ้าความเร็วต้นเป็นศูนย์จะได้สมการเป็น

$$[(4/3)gy]\ y'' + (2/3)g[1+y'^2] = 0 \tag{B}$$

ถ้าทำตามแบบที่ 2 คือ ตาม x จะได้สมการการกลิ้งที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเป็น

$$[u^2+(4/3)gy][1+y'^2] = C \tag{C}$$

สำหรับการกลิ้งจากความเร็วต้น u และถ้าความเร็วต้นเป็นศูนย์จะได้สมการเป็น

$$[(4/3)gy][1+y'^2] = C \tag{D}$$

จะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จากการทำทั้งสองแบบนั้นแตกต่างกันเพราะหาอนุพันธ์ กันคนละทาง

<u>การแก้สมการหาค่า x y</u>

ปัญหาอันหนึ่งที่น่าสนใจ ในการแก้สมการคือ สมการที่ใช้เวลาเคลื่อนที่น้อยที่สุดจากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้าย ที่หาได้ทั้งสองแบบคือ ตามแบบที่ 1 และตามแบบที่ 2 นั้นเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร ซึ่งสมการทั้งสองนั้นคือสมการทั้งสองนั้นแตกต่างกันโดยทำกันคนละวิธี แต่แน่นอนที่สุดว่า สุดท้ายแล้วผลที่ออกมา จะต้องเหมือนกัน เพราะใช้อธิบายปรากฏการณ์ และเงื่อนไขที่เหมือนกัน

แต่สำหรับในกรณีนี้ใช้แทนกันได้เพราะให้วัตถุ (ทรงกระบอก) กลิ้งอย่างเดียว ไม่มีการไถล ดังนั้นจึงคิดมวลของวัตถุอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลแห่งเดียว ไม่ได้เลื่อนไถลไปยังจุดใกล้เคียง หรือจุดอื่นในทรงกระบอกนั้น ดังนั้นจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ห่างจากจุดที่ผิวสัมผัส เป็นระยะทางเท่ากันพอดีตลอดเวลาของการเคลื่อนที่ นั่นคือ ใช้จุดศูนย์กลางมวล แทนเส้นทางของจุดของผิวสัมผัสได้ และจุดศูนย์กลางมวลอันนี้ จะมีลักษณะเส้นทางของ (particle) จึงใช้สมการ (D) และ สมการ (B) ได้เหมือนกัน

ในกรณีที่วัตถุเริ่มกลิ้งด้วยความเร็วต้น u จะได้สมการของส่วนโค้งที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุดเป็นสองรูปแบบเหมือนกันคือ

$$[u^2+(4/3)gy]\,y'' + (2/3)g[1+y'^2] = 0 \qquad \text{(A)}$$

และ $$[u^2+(4/3)gy][1+y'^2] = C \qquad \text{(C)}$$

ต่อไปคือการแก้สมการ จะใช้สมการ C ในการแก้ปัญหาไม่ใช้สมการ A เพราะยุ่งยาก

จาก $$[u^2+4/3)gy][1+y'^2] = C \qquad (2.26)$$

$$(dy/dx) = \sqrt{\frac{C}{[u^2+(4/3)gy]} - 1} \qquad (2.27)$$

ให้ $$u^2+(4/3)gy = C\sin^2\theta \qquad (2.28)$$

จะได้ $$y = (3C/4g)\sin^2\theta - (3u^2/4g) \qquad (2.29)$$

จาก(2.29)จะได้ $y = (3C/8g)[1-\cos\theta] - (3u^2/4g)$ (2.30)

เมื่อ $2\theta = \phi$

จาก(2.27)และ (2.30)จะได้

$$x = (3C/8g)[\phi-\sin\phi] + a \tag{2.31}$$

เมื่อ a เท่ากับค่าคงที่

ค่าคงที่ตัวที่หนึ่ง

จาก $C = [1+y'^2][u^2+(4/3)gy]$

จาก b = 3C/8g แทนลงในสมการ(2.30)และ(2.31)จะได้

$$x = b(\phi-\sin\phi)+ a \tag{2.32}$$

$$y = b(1-\cos\phi)-(3u^2/4g) \tag{2.33}$$

การหาค่าคงที่ตัวที่ 2

จาก(2.32)ที่จุด x=0 แทนค่าจะได้ $a = -b(\phi_o -\sin\phi_o)$ (2.34)

จาก(2.33)ที่จุด y = 0 แทนค่าจะได้ $(3u^2/8g)= b(1-\cos\phi_o)$ (2.35)

นำมาหารกันจะได้

$$a = -\frac{[\phi_o - \sin\phi_o]}{[1-\cos\phi_o]}\frac{3u^2}{4g} \tag{2.36}$$

$$b = \frac{3u^2}{8g[1 - \cos\phi_o]}$$

แทนค่า b,a ลงในสมการ(2.32)และ(2.33)จะได้

$$x = \frac{(3u^2)}{8g(1-\cos\phi_o)}\left[\{\phi-\sin\phi\}\right] - a \tag{2.37}$$

$$y = \frac{(3u^2)}{8g(1-\cos\phi_o)}\left[\{1-\cos\phi\}\right] - d \tag{2.38}$$

สมการที่ (2.37)และ(2.38)ที่หาออกมาได้นี้คือสมการของเส้นทางของการกลิ้งที่ใช้เวลากลิ้งน้อยที่สุด หรือเขียนได้เป็น

$$x = b(\phi-\sin\phi) + a \tag{2.39}$$

$$y = b(1-\cos\phi) - d \tag{2.40}$$

เมื่อ

$$a = -\frac{[\phi_o - \sin\phi_o]}{[1-\cos\phi_o]}\cdot\frac{3u^2}{4g}$$

$$b = \frac{3u^2}{8g\,[1-\cos\phi_o]}$$

$$d = 3u^2/4g$$

กรณีที่ง่ายที่สุด $x_o=0,\ y_o=0$ (ผ่านจุด0,0) และ $u = 0$ จะได้ $d=0$ เพราะ, $d= (3u^2/4g)$ แทนค่าลงในสมการ (2.40) จะได้

$$0 = b(1-\cos\phi_o) - d \tag{2.41}$$

เป็นศูนย์ได้เมื่อ $\phi_o=0$ [และ $d=0$], $[1-\cos\phi_o] = 0$, หรือ $2\pi,\ 4\pi \ldots$

และจากสมการ (2.39) $x = x_o = 0$, a ต้องเท่ากับ 0

ดังนั้นเมื่อทำให้ผ่านจุด (0,0) สมการจะอยู่ในรูป

$$x = b\,(\phi - \sin\phi)$$

$$y = b\,(1- \cos\phi)$$

(x,y) จะต้องผ่านจุดปลายคือ (x_1,y_1) ที่กำหนดให้ จะทำให้ได้ว่า

$$x_1 = b\,(\phi_1 - \sin\phi_1)$$

และ

$$y_1 = b\,(1 - \cos\phi_1)$$

ซึ่งที่จริงแล้วจะหาค่า b และ ϕ_1 ซึ่งไม่ทราบค่าว่าเป็นเท่าไร จากสมการข้างบนจะได้

$$b = \frac{x_1}{(\phi_1-\sin\phi_1)} \quad \text{หรือ} \quad b = \frac{y_1}{(1-\cos\phi_1)}$$

สมการของไซคลอยที่ผ่านจุด (0,0) และ (x_1,y_1) คือ

$$x = \left[\frac{x_1}{(\phi_1-\sin\phi_1)}\right] \cdot (\phi - \sin\phi) \tag{2.42}$$

$$y = \left[\frac{y_1}{1-\cos\phi_1)}\right] \cdot (1 - \cos\phi) \tag{2.43}$$

กรณีที่ $u \neq 0$, $d \neq 0$, ($d = 3u^2/4g$) จากสมการ (2.40) จะได้

$$y = 0 = b\,(1-\cos\phi_o) - d = 0 \tag{2.44}$$

$$d = b\,(1-\cos\phi_o) \tag{2.45}$$

$$x = 0 = b\,(\phi_o-\sin\phi_o) + a$$

$$a = -b(\phi_o - \sin\phi_o) \tag{2.46}$$

เมื่อต้องผ่านจุด (x_1,y_1) จะได้

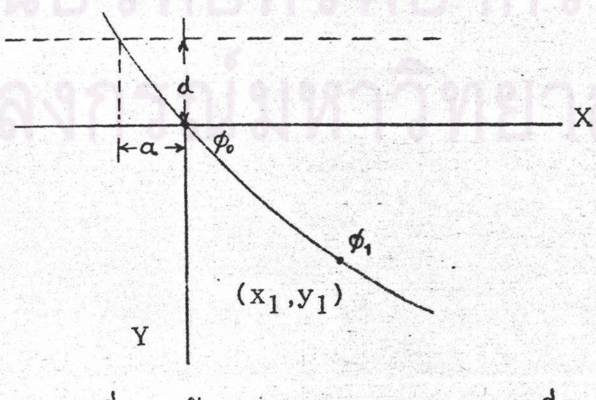
$$x_1 = b\,(\phi_1-\sin\phi_1) - b\,(\phi_o-\sin\phi_o) \tag{2.47}$$

$$y_1 = b\,(1-\cos\phi_1) - b\,(1-\cos\phi_o) \tag{2.48}$$

จึงเขียนสมการที่ผ่านจุด (0,0) ด้วยความเร็วต้น u แล้วไปผ่านจุด (x_1,y_1) ได้ว่า

$$x = \left| \frac{x_1}{[(\phi_1-\phi_o)-(\sin\phi_1-\sin\phi_o)]} \right| (\phi-\sin\phi) - \frac{x_1\,(\phi_o-\sin\phi_o)}{[(\phi_1-\phi_o)-(\sin\phi_1-\sin\phi_o)]} \tag{2.49}$$

$$y = \left| \frac{y_1}{(\cos\phi_o - \cos\phi_1)} \right| (1-\cos\phi) - \frac{3u^2}{4g} \tag{2.50}$$



รูปที่ 1 เส้นทางจากสมการของไซคลอยที่หาได้