บทที่ 1

บทนำและความเป็นมา

บทนำ

การหาเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด สำหรับการกลิ้งของทรงกระบอก เริ่มจากปัญหาที่ว่า ถ้าให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังอีกจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ต่ำกว่าโดยให้วัตถุกลิ้งไป วัตถุจะเคลื่อนที่โดยใช้เส้นทางแบบใด วัตถุจึงจะถึงจุดสุดท้าย โดยใช้เวลาน้อยที่สุด

การหาค่าสูงสุดต่ำสุดโดยทั่วไปใช้วิธีการ แคลคูลัสของการแปรผันสำหรับการวิจัยครั้งนี้ เป็นการหาค่าต่ำสุด คือการหาสมการของเส้นทางที่ใช้เวลาการกลิ้งน้อยที่สุด จากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้าย โดยใช้ทรงกระบอกจะหาสมการที่ต้องการทราบนี้ โดยวิธีการแคลคูลัสของการแปรผัน โดยการแทนค่า ฟังก์ชั่นที่เกี่ยวข้องลงในสมการ ออยเลอร์ เมื่อแทนค่าฟังก์ชั่นที่ต้องการจะศึกษาลงในสมการ ออยเลอร์ แล้วจะหารากของสมการอนุพันธ์ที่หาออกมาได้แล้วนี้ให้ออกมาอยู่ในรูปของ x,y ใดๆ ซึ่งไม่ติดอยู่ในรูปของสมการ อนุพันธ์ และเมื่อได้รากสมการ x,y มาแล้ว เขียนกราฟเส้นทางของการกลิ้งที่ใช้เวลาน้อยที่สุด และเพื่อแสดงเส้นทางจริงของมันบนกราฟ เปรียบเทียบกับสมการที่หาได้จากการคำนวณ

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิจัยครั้งนี้ถือว่าให้ g คงที่ และ ไม่คิดถึงแรงต้านของอากาศซึ่งให้ถือว่ามีค่าน้อยมาก และการเคลื่อนที่ในครั้งนี้ เป็นการเคลื่อนที่แบบไม่มีการสูญเสียพลังงานไประหว่างพื้นผิวสัมผัสกับเส้นทางของการกลิ้ง

คำจำกัดความของคำที่ใช้

วัตถุทรงกระบอก	คือวัตถุที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมที่ฐาน และมีความสูงเท่ากันหมด
การกลิ้ง	คือการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง พร้อมกับการหมุนรอบตัวเองโดยที่ผิวสัมผัสไม่ไถลจากพื้น
เวลาน้อยที่สุด	คือช่วงเวลาน้อยที่สุด ที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ จากจุดเริ่มต้นไปจุดสุดท้ายน้อยที่สุด

ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยครั้งนี้ คือ ความเร็วต้นมีค่าตั้งแต่ศูนย์ถึง u ใดๆ และการกลิ้งเป็นการกลิ้งอย่างเดียว ไม่มีการไถล จุดสุดท้ายอยู่ต่ำกว่าจุดเริ่มต้น และสมการที่เราใช้คือกฎการอนุรักษ์พลังงานคือ ที่จุดเริ่มต้นจะต้องเท่ากับที่จุดสุดท้ายเสมอ และสมการนี้จะต้องใช้ได้ทุกจุดบนเส้นทางที่วัตถุกลิ้งไป

การที่วัตถุจะกลิ้งไปได้ นั้นอาจจะมีอะไรเป็นตัวบังคับ เช่นให้เคลื่อนที่ไปบนรางที่ร่องบังคับ หรืออาจมีแรงทางแม่เหล็กเข้ามามีส่วนช่วยให้มันกลิ้งไปได้อย่างสมบูรณ์ คือไม่ให้มันออกนอกเส้นทางและรางหรือร่องบังคับ หรือแรงทางแม่เหล็กต้องไม่มีผลต่อการกลิ้งของวัตถุ และการที่เลือกคำนวนการกลิ้งของทรงกระบอก แทนที่จะเป็นทรงกลม

เพื่อให้ปัญหา เป็นการกลิ้งในระนาบหนึ่ง (2 มิติ) แต่เมื่อสามารถหาสมการของเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดได้แล้ว ก็สามารถนำผลไปใช้กับการกลิ้งโดยใช้วัตถุอื่นๆ ที่กลิ้งในระนาบเดียว โดยการเปลี่ยนค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย I เท่านั้น

ทฤษฎี และความสัมพันธ์ของปัญหาที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการหาค่า extremum คือค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยวิธีใช้วิธีการที่เรียกว่า แคลคูลัสของการแปรผัน ซึ่งจะต้องหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุให้ได้เสียก่อนว่ามีสมการตั้งต้นเป็นอย่างไร สมการเริ่มต้นคือ สมการของการอนุรักษ์พลังงาน ต้องหาฟังก์ชั่นออกมาว่าฟังก์ชั่นที่จะศึกษาคืออะไร แล้วนำฟังก์ชั่นที่ได้ไปแทนค่าในสมการ ออยเลอร์ แล้วแก้สมการ อนุพันธ์ ออกมา เมื่อได้ค่า x,y ออกมาแล้ว นำมา
เขียนกราฟว่ามันมีรูปร่างเป็นอย่างไร

เมื่อได้สมการของส่วนโค้งที่ใช้เวลาน้อยที่สุดออกมาแล้วต่อไปจะต้องแสดงให้เห็นว่าค่าที่ได้ออกมานี้เป็นค่าต่ำสุด ไม่ใช่ค่าสูงสุด โดยใช้เงื่อนไขของ เลอจอง หรืออาจใช้สมการแฮมิลตัน แสดงได้ว่าฟังก์ชั่นที่หาออกมาได้โดยวิธีการ แคลคูลัสของการแปรผัน นี้ เป็นค่าต่ำสุดซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

เมื่อมีการกลิ้งก็ต้องมีการหมุน ดังนั้นสิ่งที่เกี่ยวข้องก็คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยเมื่อวัตถุกลิ้งไป และเมื่อวัตถุจะกลิ้งได้ จะต้องมีแรงเสียดทานถ้าให้วัตถุสองชนิดมีมวลเท่ากันเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร็วต้นเท่ากันจากความสูงที่เท่ากัน โดยวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่โดยการกลิ้งและอีกวัตถุหนึ่งไถลจะพบว่าวัตถุ ทั้งสองจะเคลื่อนที่มาถึงพื้นล่างในเวลาไม่เท่ากัน โดยที่วัตถุที่ไถลจะถึงพื้นล่างก่อน ถ้าพื้นมีสัมประสิทธิของความเสียดทานเท่ากันเหตุที่เป็นดังนี้เพราะ วัตถุที่กลิ้งลงมานั้น ใช้พลังงานส่วนหนึ่ง ในการหมุนรอบตัวเอง คือการกลิ้ง ดังนั้นถ้าวัตถุ มีการเคลื่อนที่แบบไม่ใช่การไถลอย่างเดียว แต่มีการกลิ้งด้วย จะต้องคิดผลแห่งการที่วัตถุกลิ้งนั้นและต้องคำนึงถึงโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุนั้นๆด้วย และโมเมนต์ของของความเฉื่อยของทรงกระบอกมีค่าเป็น $1/2\ mR^2$ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่โดยการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถลแล้วเราจะได้ว่า $u \geq 1/3 \tan\theta$ ถ้า u น้อยกว่านี้วัตถุจะมีการไถล (Symon,1971) โดยปกติแล้ว u ระหว่างผิวสัมผัส จะมีค่าไม่เกิน 1 ลองเอาไปแทนค่าในสมการข้างบนดูจะได้ว่า

มุม θ มีค่าอยู่ระหว่าง 71 ถึง 72 องศา นั้นแสดงว่า ถ้ามุมเอียงมีค่าเกิน 72 องศาไป แล้ววัตถุจะกลิ้งอย่างเดียวโดยไม่มีการไถลไม่ได้เมื่อมีการกลิ้งบนพื้นเป็นการยากที่จะบอกได้ว่า วัตถุนั้นกลิ้งแบบมีการไถลด้วยหรือไม่หรือกลิ้งอย่างเดียว ถ้าวัตถุกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล แล้วจะได้ $\mathcal{T} = I\alpha$ และจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของรูป เพราะถ้า วัตถุมีการกลิ้งแบบมีการไถล หรือจุดศูนย์กลางมวลไม่ใช่จุดศูนย์กลางของรูปแล้ว สมการ $\mathcal{T}=I\alpha$ จะใช้ไม่ได้ เพราะความเร่งของจุดสัมผัส มีทิศไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้เป็นการกลิ้งอย่างเดียวไม่มีการไถล ดังนั้นจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของรูป $\mathcal{T} = I\alpha$ ดังนั้น <u>ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างผิวของวัตถุกับผิวของเส้นทางจะต้องเป็นศูนย์</u> <u>นั่นคือจะไม่มีการสูญเสียพลังงานไประหว่างผิวสัมผัสอันอาจจะมีขึ้นจากการลื่นไถล</u> และจะต้องได้ว่าพลังงานรวมที่ทุกๆจุดตามเส้นทางที่วัตถุกลิ้งไปนั้นจะมีค่าคงที่เสมอ

<u>แคลคูลัสของการแปรผัน</u>

ระบบทางกลศาสตร์ที่เป็นอนุรักษ์ จะเคลื่อนที่ไปในลักษณะที่ทำให้

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt \qquad (1.1)$$

มีค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (extremum) ซึ่งในที่นี้ L คือ Largrangian, ซึ่งเป็นฟังก์ชันของโคออร์ดิเนตq อัตราเร็ว $\dot{q}$ และเวลา t และ t_1, t_2 คือ เวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้ายตามลำดับซึ่งเขียนสมการได้เป็น (Spiegel,1982)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0 \qquad (1.2)$$

เมื่อ δ เป็นสัญลักษณ์แทน Variation path เชิงเส้นสำหรับการเคลื่อนที่

ตามธรรมชาติ เงื่อนไขที่จะทำให้เป็นไปตามหลักดังสมการ(1.2)คือสมการลากรอง (Lagrange's equation)(Goldstein,1960) คือ

$$(d/dt)(\partial L/\partial q') - \partial L/\partial q = 0 \qquad (1.3)$$

ถ้าต้องการจะหาส่วนโค้ง y' ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุด x=A กับ x=B แล้วทำให้ $\int L(y,y',x)dx$ มีค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุด เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการนี้คือ

$$[(d/dx)(\partial F/\partial y') - \partial F/\partial y] = 0 \qquad (1.4)$$

รู้จักกันทั่วไปในนามของ ออยเลอร์ และสมการของ ออยเลอร์ นี้ สามารถเขียนได้เป็นอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$(\partial F/\partial x) - (d/dx)[F - y'(\partial F/\partial y')] = C \qquad (1.5)$$

ดังนั้นจะสรุปได้ว่า ถ้าต้องการหาส่วนโค้ง ซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุด โดยที่ให้ฟังก์ชั่น

$$J = \int F(y,y',x)dx \qquad (1.6)$$

มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดแล้วเราจะได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการนี้คือสมการที่(1.5)และ (1.6) (Goldstein,1980) (Arfken,1970)

<u>การหาค่าสูงสุดต่ำสุด</u>

ยังมีปัญหาอีกประการหนึ่งคือคำว่า extremum นั้น ให้ความหมายได้ 2 แบบ คือ เป็นค่าสูงสุดก็ได้ หรือต่ำสุดก็ได้ จะทราบได้อย่างไรว่า แบบไหนเป็นค่าต่ำสุด แบบไหนเป็นค่าสูงสุด สำหรับในกรณีที่กำลังศึกษาอยู่นี้ คือต้องการหาเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด ค่าที่เราหา

ออกมาได้ต้องเป็นค่าต่ำสุด เพราะเวลาที่มีค่าสูงสุดนั้น มีค่าได้มากมายโดยไม่จำกัด และคำว่า extremum นั้น มีค่าได้เป็นสองค่าเท่านั้น คือ มากที่สุด หรือน้อยที่สุด จะเป็นค่ากลางๆไม่ได้ ดังนั้นจากการใช้สามัญสำนึก โดยปกติแล้วจะได้ว่าสิ่งที่กำลังหาอยู่นี้ เป็นค่าต่ำสุด ไม่ใช่ค่าสูงสุด การหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดนั้น ถ้าเป็นฟังก์ชั่นตัวแปรเพียงตัวเดียว เช่น $y = f(x)$ ภาวะที่จะทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดนั้น คือหาอนุพันธ์1 ครั้ง แล้วจับเท่ากับ 0 จะได้ค่าที่ต้องการออกมาแต่บางครั้งการหาอนุพันธ์ 1 ครั้งยังไม่สามารถแยกออกได้ว่า ค่าที่หาออกมานั้นเป็นค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดกันแน่จะต้องทำถึงอนุพันธ์อันดับที่สองจึงจะแยกได้ว่าเป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุด

ทฤษฎีของ Legendre กล่าวไว้ว่าสำหรับเงื่อนไขที่ทำให้

$$J = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad (1.7)$$

มีค่าน้อยที่สุดแล้วจะได้

$$F_{y'y'} \geq 0 \qquad (1.8)$$

ถ้าอยากทราบว่าค่าที่ได้นั้น เป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด ก็ให้หาอนุพันธ์ของ F เทียบกับ y' ลงไปถึงอันดับที่สอง ถ้ามีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แสดงว่า ฟังก์ชั่นที่เรากำลังศึกษาอยู่นี้ เป็นค่าต่ำสุดไม่ใช่ค่าสูงสุด