ค่าปรับปรุงของขอบเขตล่างของพื้นที่แผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วย

นายสิทธิโชค โสมอ่ำ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2553

AN IMPROVED LOWER BOUND OF AREAS OF CONVEX COVERS FOR CLOSED UNIT ARCS

Mr. Sittichoke Som-am

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University

Academic Year 2010

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ค่าปรับปรุงของขอบเขตล่างของพื้นที่แผ่นปิดทับนูน สำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วย
โดย	นายสิทธิโชค โสมอ่ำ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิติสิน)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาตราจารย์ ดร. ชัยวัฒน์ มณีสว่าง)

สิทธิโชค โสมอ่ำ : ค่าปรับปรุงของขอบเขตล่างของพื้นที่แผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วย. (AN IMPROVED LOWER BOUND OF AREAS OF CONVEX COVERS FOR CLOSED UNIT ARCS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา, 129 หน้า.

ในวิทยานิพนธ์นี้เราได้หาขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิดที่มีความยาว 1 หน่วย โดยเราหาขอบเขตล่างนี้จากการหาพื้นที่ของคอนเวกฮัลล์เล็กๆ สำหรับเส้นโค้งปิด 3 เส้น คือ ส่วนของเส้นตรงยาว 1/2 หน่วย วงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาวด้านละ 1/3 หน่วย ทั้งนี้เราใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการคำนวณเชิงตัวเลข และใช้โปรแกรม Matlab ช่วยในวิธี grid-search algorithm เพื่อหาคำตอบ ซึ่งพบว่าได้ขอบเขตล่างที่ดีกว่าเดิม กล่าวคือ เพิ่มจาก 0.0966675 มาเป็น 0.0970236

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต สิทธิโชค โสมอ่ำ
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา : 2553

5172494723 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : COVERING BY CONVEX SETS/ CLOSED UNIT ARCS/ GRID-SEARCH ALGORITHM

SITTICHOKE SOM-AM : AN IMPROVED LOWER BOUND OF AREAS OF CONVEX COVERS FOR CLOSED UNIT ARCS. ADVISOR : ASST. PROF. WACHARIN WICHIRAMALA, Ph.D., 129 pp.

In this thesis, we find a new lower bound of areas of convex covers for closed unit arcs. To find this lower bound, we consider the areas of small convex covers of 3 closed curves which are a line segment of length 1/2, a circle of perimeter 1, and an equilateral triangle of side 1/3. To find the soluion, we use Mathematica in numerical computation and Matlab for grid-search algorithm. The result we obtain improves the lower bound from the previous record 0.0966675 to 0.0970236.

Department : Mathematics Student's Signature สิทธิโชค โสมอ่ำ

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature [signature]

Academic Year : 2010

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา สำหรับความช่วยเหลือและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ระหว่างการศึกษาและวิจัย ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร. อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์ ผู้ศาสตราจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิติสิน และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยวัฒน์ มณีสว่าง สำหรับข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ และขอขอบคุณโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่ให้ทุนสนับสนุนการศึกษา นอกจากนี้ต้องขอขอบคุณ นายวิชัยรัตน์ จันที นายเรวัต ถนัดกิจหิรัญ ที่ช่วยให้ข้อเสนอแนะในการทำงานวิจัย พร้อมทั้ง นายสิระ ศรีสวัสดิ์ และนายธีรสรรค์ ขันธวิทย์ สำหรับการให้ข้อคิดและแนวทางในการหาคำตอบของปัญหางานวิจัย

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ในปี 1966 ลีโอ โมเซอร์ (Leo Moser) [15] ได้ตีพิมพ์เผยแพร่ปัญหาทางเรขาคณิตหลายข้อ หนึ่งในปัญหานั้นถามถึงขนาดและรูปร่างของรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถนำไปปิดทับเส้นโค้งใดๆ ในระนาบที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ต่อมา Laidacker และ Poole [14] ได้ใช้ Blaschke Selection Theorem แสดงว่า ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์มีคำตอบ กล่าวคือ จะมีแผ่นปิดทับนูนที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ยิ่งไปกว่านั้น คำตอบที่ได้ไม่จำเป็นต้องมีคำตอบเดียว ปัจจุบันเรายังไม่สามารถหาแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดได้ บอกได้แค่เพียงขอบเขตของพื้นที่ของแผ่นปิดทับน้อยที่สุด ซึ่งอยู่ระหว่าง 0.2194 ถึง 0.2738

ปัญหานี้ค่อนข้างยาก จึงมีผู้พยายามศึกษาปัญหาที่ใกล้เคียงแทน ปัญหาเหล่านี้ถูกจัดประเภทตามเงื่อนไขที่ระบุ ได้ 3 ประเภทดังนี้

1. ปัญหาที่จำกัดลักษณะของแผ่นปิดทับ
2. ปัญหาที่จำกัดลักษณะของเส้นโค้ง
3. ปัญหาที่จำกัดวิธีในการปิดทับ

ในวิทยานิพนธ์นี้ เราสนใจศึกษาปัญหา 2 ประเภทแรก กล่าวคือ เป็นปัญหาที่จำกัดลักษณะเส้นโค้งเป็นเส้นโค้งปิดและลักษณะแผ่นปิดทับนูน อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่ายังไม่สามารถหาแผ่นปิดทับของเส้นโค้งปิดที่เล็กที่สุดได้ แต่เราสามารถให้ขอบเขตของพื้นที่ของแผ่นปิดทับว่ามีค่าที่เล็กที่สุดระหว่าง 0.0966675 ถึง 0.117493 เราจะกล่าวว่า 0.117493 คือขอบเขตบนของพื้นที่ของแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุด และ 0.0966675 คือขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุด โดยในงานวิทยานิพนธ์นี้สนใจที่จะปรับปรุงค่าขอบเขตล่างดังกล่าวให้ดีขึ้น

ในปี 1957 H. G. Eggleton [5] ได้พิสูจน์ว่า “สามเหลี่ยมจะปิดทับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยได้ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมนั้นต้องปิดทับวงกลมที่มีเส้นรอบรูป 1 หน่วยได้” ด้วยเหตุนี้ทำให้เราได้ความรู้ว่าสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านละ $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ หน่วย เป็นสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ซึ่งสามเหลี่ยมนี้มีพื้นที่ประมาณ 0.13162 ตารางหน่วย ถัดมาในปี 1972 Shaer และ Wetzel [19] ได้หาสี่เหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยได้ ซึ่ง

สี่เหลี่ยมนี้มีพื้นที่ประมาณ 0.122738 ตารางหน่วย ต่อมาในปี 2006 Furedi และ Wetzel [7] ได้หาค่าที่ดีขึ้นของพื้นที่ สี่เหลี่ยมผืนผ้านั้นให้มีขนาดเล็กลง โดยมีพื้นที่ประมาณ 0.117493 ตารางหน่วย

สำหรับการหาขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับนั้น ในปี 1973 Chakerian และ Klamkin [4] สามารถหาค่าขอบเขตล่างของพื้นที่ค่าแรกได้ โดยพิจารณาหาคอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมเส้นรอบวง 1 หน่วยและส่วนของเส้นตรงยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย ซึ่งมีพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดประมาณ 0.0963275 ตารางหน่วย ต่อมาในปี 2006 Furedi และ Wetzel [7] ได้หาขอบเขตล่างค่าใหม่ โดยหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดของวงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และสี่เหลี่ยมผืนผ้าเส้นรอบรูป 1 หน่วย ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0966675 ตารางหน่วย

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะทำการปรับปรุงค่าขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งปิดที่มีความยาวหนึ่งหน่วยให้ดีขึ้นกว่าเดิม ในการหาขอบเขตล่างนี้ เราใช้วงกลมเส้นรอบวง 1 หน่วย ส่วนของเส้นตรงยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย โดยเราจะทำการหาคอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็ก ๆ สำหรับเส้นโค้งปิด 3 เส้นนี้

โดยในวิทยานิพนธ์เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหลัก จากนั้นเราจะใช้ผลของทฤษฎีบทที่ 1 มาพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2 เราจึงจะได้ค่าขอบเขตล่างที่เราต้องการ

ทฤษฎีบท 1 คอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย ส่วนของเส้นตรงยาว $\frac{1}{2}$ หน่วยและสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย มีพื้นที่อย่างน้อย 0.0970236 ตารางหน่วย

ทฤษฎีบท 2 แผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยมีพื้นที่อย่างน้อย 0.0970236 ตารางหน่วย

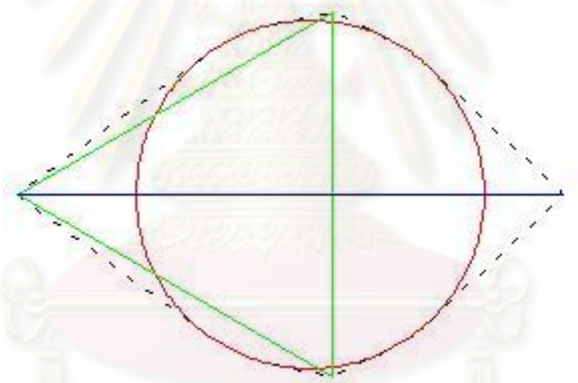
เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในบทที่ 5 โดยเราจะใช้ grid-search algorithm มาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นวิธีเดียวกันกับที่ P. Brass และ M. Sharifi [3] ใช้หาขอบเขตล่างของ Lebesques universal cover problem ในปี 2005 อีกทั้งสิระ ศรีสวัสดิ์ และธีรสรรค์ ขันธวิทย์ [20] ยังใช้วิธีการนี้ในการหาขอบเขตล่างของปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์ในปี 2008 นอกจากนี้เรายังใช้ผลการคำนวณจาก โปรแกรม Mathematica ในบทที่ 4 มาช่วยในการสนับสนุนคำตอบ

ในบทที่ 2 จะเป็นเนื้อหาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหานี้

ในบทที่ 3 จะเป็นวิธีการดำเนินการ โดยเริ่มจากการแปลงปัญหาให้ง่ายขึ้น และมีการพิสูจน์บทตั้งต่างๆ เพื่อกำหนดเงื่อนไขของการวางตำแหน่งของเส้นโค้งทั้ง 3 เส้น ซึ่งเราจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักต่อไป

ส่วนบทสุดท้าย คือ บทที่ 6 จะเป็นการสรุปผล อภิปรายผล ปัญหาในการดำเนินการและข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิทยานิพนธ์นี้

ในงานวิทยานิพนธ์นี้เราสามารถปรับปรุงค่าขอบเขตล่างของพื้นที่ที่น้อยสุดของแผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยให้ดีขึ้นกว่าเดิม ซึ่งค่าขอบเขตล่างได้ปรับเป็นค่าประมาณ 0.0970236 นอกจากนี้เราได้ใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งพบว่าคอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดสำหรับเส้นโค้งทั้ง 3 เส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.0970439 ตารางหน่วย โดยเราจะใช้รูปที่ 1 เป็นตัวอย่างหนึ่งในการจะบอกว่า ถ้าคอนเวกซ์ฮัลล์อื่นมีพื้นที่มากกว่า 0.0970439 ตารางหน่วย คอนเวกซ์ฮัลล์รูปนั้นจะไม่ใช่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุด



รูปที่ 1 คอนเวกซ์ฮัลล์ของเส้นโค้งปิด 3 เส้นซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0970439 ตารางหน่วย

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะให้บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์ นอกจากนี้ เราจะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหาจนนำมาสู่ปัญหาที่เราสนใจศึกษา

2.1 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

บทนิยาม 2.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใน R^n เราจะกล่าวว่า A ปิดทับ (cover) B หรือ B บรรจุใน (fit) A ได้ ถ้ามี isometry f บน R^n ซึ่ง $f(A) \supseteq B$

ข้อสังเกต เราจะได้ว่า $f(A) \supseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \supseteq f^{-1}(B)$

บทนิยาม 2.1.2 เราจะเรียกเซต A ว่าเซตนูน (convex set) ถ้าสำหรับสองจุด x และ y ใดๆ ใน A ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจาก x ถึง y เป็นสับเซตของ A

บทตั้ง 2.1.3 ให้ A_α เป็นเซตนูน ทุก $\alpha \in \Lambda$ จะได้ $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตนูน

บทนิยาม 2.1.4 คอนเวกซ์ฮัลล์ (convex hull) ของเซต A คือเซตนูนที่เล็กที่สุดที่คลุม A ซึ่งเราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $H(A)$

นิยามของคอนเวกซ์ฮัลล์แจ่มชัดเนื่องจากผลตัดของเซตนูนเป็นเซตนูน

ทฤษฎีบทต่อไปจะให้ข้อมูลเกี่ยวกับคอนเวกซ์ฮัลล์บนระนาบ

ทฤษฎีบท 2.1.5 $x \in H(A) \Leftrightarrow \exists \alpha \in [0,1] \ni x = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2, \exists y_1, y_2 \in A$

บทนิยาม 2.1.6 ส่วนที่เป็นแก่นสาร (essential part) ของ A คือสับเซตที่เล็กที่สุดของ A ที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็น $H(A)$ ซึ่งเราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(A)$

ทฤษฎีบท 2.1.7 สำหรับเซตนูน A ในระนาบ จะมีสับเซตที่เล็กที่สุดของ A ที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็น A

บทตั้ง 2.1.8 ส่วนที่เป็นแก่นสาร (essential part) ของ A คืออินเตอร์เซกชันของสับเซตทั้งหมดของ A ซึ่งมีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็น $H(A)$

บทนิยาม 2.1.9 ความหนา (thickness, minimum width) ของเซต A ในระนาบคือระยะห่างน้อยสุดของเส้นคู่ขนานที่ขัง A ไว้

บทตั้ง 2.1.10 ความหนาของ A จะเท่ากับความหนาของ $H(A)$ และเท่ากับความหนาของ $E(A)$

2.2 การปิดทับด้วยเซตนูน

เนื่องจากการปิดทับด้วยเซตนูนมีสมบัติพิเศษมากมาย จึงเป็นเหตุให้นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษาเฉพาะเซตนูน และเรียกสาขานี้ทางเรขาคณิตว่า เรขาคณิตแบบคอนเวกซ์ (convex geometry)

บทตั้ง 2.2.1 ถ้า B เป็นเซตนูน และ $B \subseteq A$ แล้ว $B \subseteq H(A)$

บทตั้ง 2.2.2 เซตนูน A จะปิดทับเซต B ได้ก็ต่อเมื่อ A ปิดทับ $E(B)$

การแสดงถึงการมีอยู่ของคำตอบของปัญหาการปิดทับเส้นโค้งเป็นสิ่งที่ยากและท้าทายสำหรับ เครื่องมือที่สำคัญที่สุดที่เราใช้ในการศึกษาปัญหานี้ คือ Blaschke Selection Theorem ก่อนที่จะเข้าถึงทฤษฎีบทนี้ เราต้องเข้าใจการลู่เข้าของเซตในการวัดระยะห่างระหว่างเซตแบบ Hausdrof

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $peri(A)$ หมายถึง ความยาวของเส้นรอบรูปของเซต A ซึ่ง $peri(A)$ อาจไม่มีค่า

บทตั้ง 2.2.4 ให้ A เป็นเซตนูน และ B เป็นเซตใดๆ ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $peri(A) \leq peri(B)$

บทนิยาม 2.2.5 ย่านเอฟซิลอน (ε-neighborhood) ของ A คือ $\bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)$ เราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ A_ε

เรานิยามระยะห่างระหว่างเซต A กับ B เป็น $d(A,B) := \inf\{\varepsilon \mid A \subseteq B_\varepsilon \wedge B \subseteq A_\varepsilon\}$

ทฤษฎีบท 2.2.6(Blaschke Selection Theorem) สำหรับ A ซึ่งเป็นหมู่ของเซตนูนซึ่งมีขอบเขตแบบเอกรูป จะมีลำดับ A_n ใน A ที่ลู่เข้าในปริภูมิ โดยที่ area(A_n) $\rightarrow$ area(A), $\partial A_n \rightarrow \partial A$ และ length(∂A_n) $\rightarrow$ length(∂A) เมื่อ $n \rightarrow \infty$

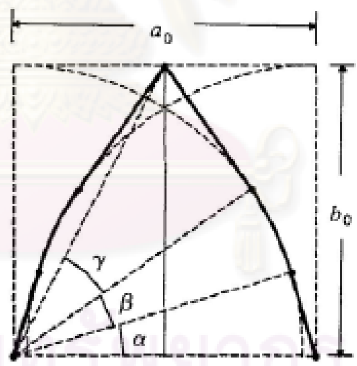
ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีที่ใช้ความพิเศษของเซตนูน

ทฤษฎีบท 2.2.7 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ที่อยู่บนระนาบ ซึ่ง B เป็นเซตนูน ถ้าทุก ๆ 3 จุดใน A สามารถเลื่อนไปอยู่ใน B ได้แล้ว A จะเลื่อนไปอยู่ใน B ได้

2.3 ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์

ก่อนกล่าวถึงปัญหานี้ ขอกล่าวถึงปัญหาของ Bellman [1] ในปี 1956 ที่ถามหาวิธีการเดินทางที่สั้นที่สุดที่รับประกันว่าจะพาเราออกจากบริเวณที่เรารู้รูปร่างได้ ได้มีการจำลองสถานการณ์ที่น่าสนใจได้หลายอย่าง เช่น การหาทางออกจากป่าที่เราหลงทาง หรือการว่ายน้ำเข้าฝั่งหากเกิดเรือล่ม คำถามสำคัญอันหนึ่งที่ Bellman ถามคือ เราควรจะเดินอย่างไรจึงจะออกจากป่าที่เป็นแถบสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวอนันต์ได้

ต่อมาในปี 1961 Zalgaller [28] ได้ตอบคำถามนี้ แล้วในปี 1968 Schaer [18] ก็ได้คำตอบเดียวกัน โดยไม่รู้มาก่อนว่า Zalgaller [28] ได้ทำงานนี้แล้ว และได้ตั้งชื่อเส้นโค้งนี้ว่า broadworm



รูปที่ 2.1 broadworm

Broadworm 1 หน่วยนี้ ประกอบด้วยเส้นตรง 4 เส้น เส้นโค้ง 2 เส้นดังรูปที่ 2.1 โดยที่ $\alpha \approx 0.290046,\ \gamma \approx 0.480931,\ \beta \approx 0.318888,\ a_0 \approx 0.458058,\ b_0 \approx 0.438925$

ในปี 1963 Graham [10] ได้ตั้งคำถามว่าเส้นโค้งใดสั้นที่สุดและไม่สามารถใส่ในสามเหลี่ยมด้านเท่าเปิด(ไม่รวมขอบ) แล้วในปี 1965 Besicovitch [2] ก็ได้เสนอเส้นโค้งหนึ่งและ

คาดการณ์ว่าเป็นเส้นโค้งที่สั้นที่สุดตามที่ต้องการ เส้นโค้งนี้เป็นสามท่อนมีชื่อเรียกว่า เส้นโค้ง Besicovitch ดังรูปที่ 2.2

รูปที่ 2.2 เส้นโค้ง Besicovitch

เส้นโค้ง Besicovitch ประกอบด้วย ส่วนของเส้นตรง 3 เส้น โดยที่ $AB = BC = CD = \sqrt{\frac{3}{28}}$, $AB//CD$ และ $\angle CAB \approx 10.9^{\circ}$

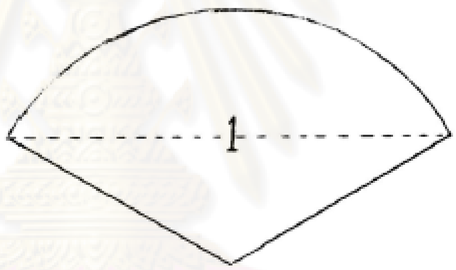
ในปี 1966 Leo Moser [15] ได้ตั้งปัญหาที่เราสนใจเป็นพิเศษ เป็นปัญหาที่เข้าใจง่าย แต่ยังไม่พบวิธีที่ดีในการหาคำตอบ ปัญหานี้ถามถึงเซตบนระนาบที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งที่ยาวหนึ่งหน่วยได้ทั้งหมด ปัญหานี้มีชื่อว่า “ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์” แผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยที่เห็นได้ชัดที่สุด คือ แผ่นกลมรัศมี 1 หน่วย วิธีปิดทับเส้นใดๆ ก็คือ นำจุดศูนย์กลางของแผ่นไปทับที่จุดปลายจุดหนึ่งของเส้นโค้ง ก็จะได้ว่า เส้นโค้งอยู่ในแผ่นซึ่งมีพื้นที่ 3.14159 ตารางหน่วย หลักการนี้ทำให้เราทำแผ่นปิดทับที่เล็กลงได้ โดยใช้แผ่นกลมรัศมีครึ่งหน่วย ซึ่งมีพื้นที่ 0.78539 ตารางหน่วย วิธีปิดทับก็คือ การนำจุดศูนย์กลางแผ่นไปทับจุดกึ่งกลางของเส้นโค้ง ก็จะได้ว่าเส้นโค้งอยู่ในแผ่นปิดทับนี้

2.3.1 **ทำไมต้องเส้นหนึ่งหน่วย**

ในหัวข้อนี้เราจะอธิบายว่าทำไมการศึกษาการปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยจึงเพียงพอที่จะเข้าใจสมบัติโดยรวมของการปิดทับ เราอาจจะเริ่มจากการนึกถึงแผ่นปิดทับที่ปิดทับเส้นโค้งได้ทุกเส้น กรณีนี้จะเห็นว่าแผ่นปิดทับต้องเป็นทั้งระนาบ เนื่องจากเรารู้จัก space-filling curve มาจากความรู้เบื้องต้นใน topology หากเราจะลดลงมาเหลือเพียงแค่ปิดทับเส้นโค้งที่ยาวจำกัด ผลก็คงไม่แตกต่างกันมาก เนื่องจากเส้นโค้งที่มีความยาวไม่จำกัดก็จะบีบให้แผ่นปิดทับต้องแผ่อาณาเขตไม่จำกัดไปด้วย การศึกษาเราจึงต้องจำกัดความยาวของเส้นโค้ง เราอาจกล่าวได้ว่า หากเราต้องการปิดทับเส้นโค้งความยาวไม่เกิน L เราก็ทำการศึกษาเพียงแผ่นปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยก็พอ แล้วจึงย่อขยายด้วย L ก็จะได้แผ่นปิดทับเส้นโค้งยาว L ซึ่งปิดทับเส้นโค้งที่สั้นกว่า L ได้ด้วย

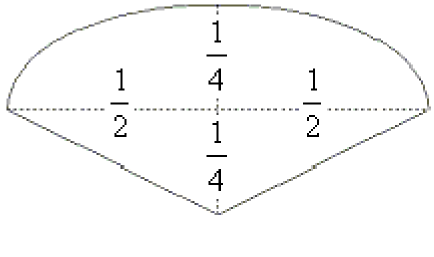
2.3.2 การปรับปรุงคำตอบ

ในปี 1975 Aram Meir [23] ได้พิสูจน์ว่าแผ่นครึ่งวงกลมรัศมีครึ่งหน่วยซึ่งมีพื้นที่ 0.39270 ตารางหน่วย ปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยใดๆ ได้ ต่อมา Schaer และ Wetzel [19] ได้หาสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ ซึ่งคือสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเส้นทแยงมุมยาว 1 หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว 1 หน่วย แต่พื้นที่ของรูปทั้งสองยังมีค่ามากกว่าพื้นที่ของแผ่นครึ่งวงกลมรัศมีครึ่งหน่วย จากนั้น Wetzel [22] ได้พิจารณาบรรดาเซกเตอร์ $S(r,2\theta)$ โดยที่ r และ 2θ คือรัศมีและมุมของเซกเตอร์ตามลำดับ ซึ่ง Wetzel [22] ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $r > \frac{1}{2}\csc\theta$ แล้วเซกเตอร์ $S(r,2\theta)$ จะปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ มากไปกว่านั้น เมื่อ $r = \frac{1}{2}\csc\theta$ และพื้นที่ของเซกเตอร์จะมีค่าน้อยที่สุดในเทอมของ θ จึงทำให้แผ่นปิดทับรูปเซกเตอร์ที่เล็กที่สุดมีพื้นที่เท่ากับ 0.34510 ตารางหน่วย ซึ่งดีกว่าแผ่นครึ่งวงกลมรัศมีครึ่งหน่วย



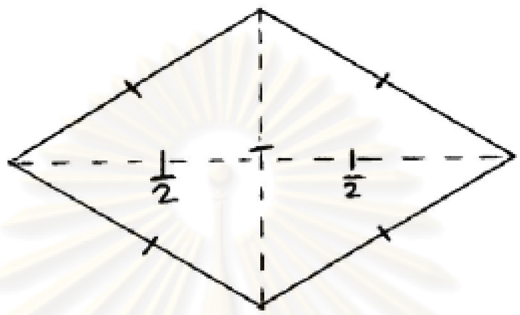
รูปที่ 2.3 เซกเตอร์ที่เล็กที่สุดมีพื้นที่เท่ากับ 0.34501 ตารางหน่วยของ Wetzel

ในปี 1972 Gerriets [8] ได้สร้างแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่ 0.32140 ตารางหน่วย ซึ่งเล็กว่าเซกเตอร์ของ Wetzel [22] โดยแผ่นปิดทับนี้ประกอบด้วย 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือส่วนบน และส่วนล่าง สำหรับส่วนล่างจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีฐานยาว 1 หน่วย และสูง $\frac{1}{4}$ หน่วย อีกส่วนนั้นเป็นรูปครึ่งวงรี มีแกนเอกยาว 1 หน่วย และแกนโทยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย ดังรูป



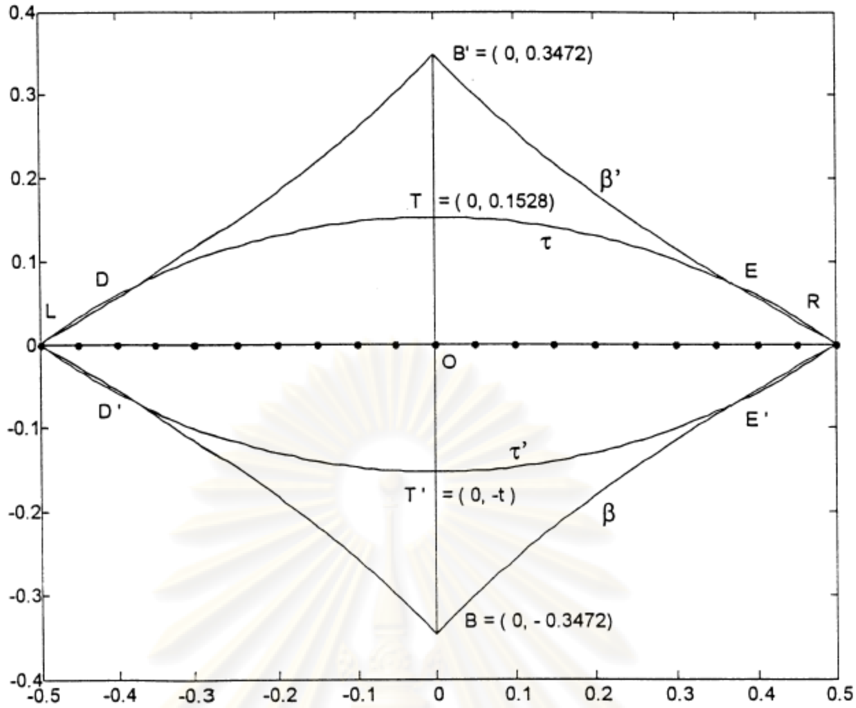
รูปที่ 2.4 แผ่นปิดทับของ Gerriets

ในปี 1975 Gerriets และ Poole [9] ก็ได้สร้างแผ่นปิดทับตัวใหม่ ซึ่งมีพื้นที่ 0.28870 ตารางหน่วย แผ่นปิดทับนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีเส้นทแยงมุมหลักยาว 1 หน่วยและเส้นทแยงมุมรองยาว $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ หน่วย ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อตัดมุมตรงเส้นทแยงมุมรองออกเล็กน้อย ก็จะได้แผ่นปิดทับที่เล็กลงกว่าเดิมซึ่งมีพื้นที่ 0.28610

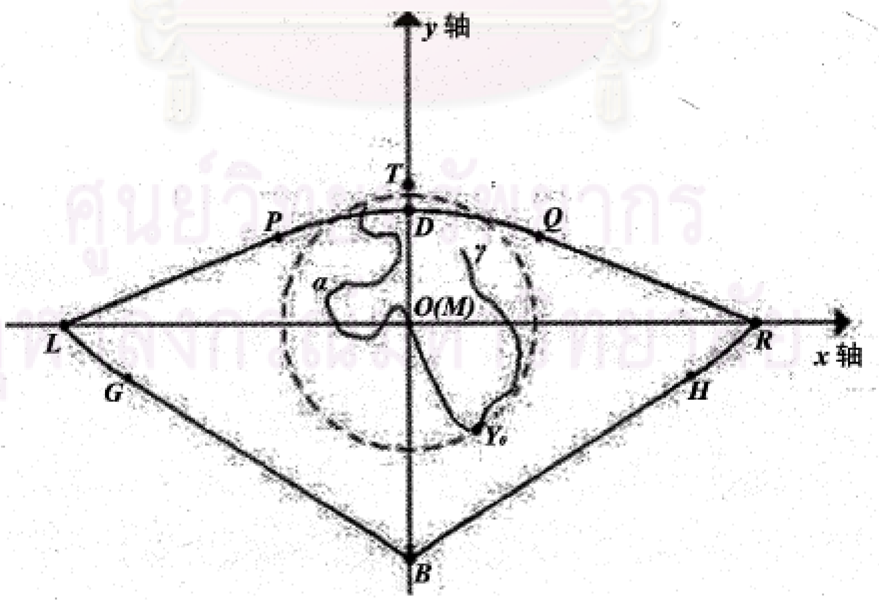


รูปที่ 2.5 แผ่นปิดทับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนของ Gerriets และ Poole

อีก 17 ปีต่อมา Norwood, Poole และ Laidacker [17] ได้ปรับปรุงแผ่นปิดทับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้เล็กลงกว่าเดิม โดยการเล็มมุมบนของรูปด้วยสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีพื้นที่เหลือเพียง 0.27524 ตารางหน่วย ในปี 2002 Norwood และ Poole [16] ได้สร้างแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดในปัจจุบัน แผ่นปิดทับนี้ไม่ใช่เซตนูน ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.260437 ตารางหน่วย ซึ่งถูกสร้างโดยการวางส่วนของเส้นตรงหนึ่งหน่วยไว้บนแกน X โดยให้จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงนี้อยู่ตรงกับจุดกำเนิด จากนั้นวางจุด T ไว้บนแกน Y เหนือจุดกำเนิดตามรูป แล้วสร้างวงกลม โดยให้วงกลมผ่านจุด T และจุดปลายทั้งสองข้างของส่วนของเส้นตรงหนึ่งหน่วยก็จะได้ส่วนบนของแผ่นปิดทับตามรูปที่ 2.6 ส่วนล่างของแผ่นปิดทับนี้เป็นส่วนของพาราโบลา โดยที่ผลรวมของระยะห่างจากแกน Y และระยะห่างจากส่วนบนของแผ่นปิดทับนี้ไปยังจุดทุกจุดบนพาราโบลามีค่าเท่ากับ 0.5 หน่วย จากนั้นสะท้อนเฉพาะส่วนบนของแผ่นปิดทับตามแนวแกน X จะได้ว่าส่วนของวงกลมที่ถูกสะท้อนลงมาจะตัดกับพาราโบลา ส่วนล่างของแผ่นปิดทับนี้นับเอาส่วนของวงกลมหรือพาราโบลาก็ตามที่อยู่ต่ำกว่า นอกจากนี้ Norwood และ Poole [16] ก็ได้สร้างแผ่นปิดทับนูนที่มีพื้นที่น้อยที่สุดขึ้นมาด้วยโดยการปรับเลื่อนจุด T ขึ้นมานิดหน่อยแล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมปลายทั้งสองด้านของเส้นโค้งกับจุด B (ซึ่งอยู่ต่ำกว่าจุด T ลงมา 0.5 หน่วย) ซึ่งแผ่นปิดทับนี้มีพื้นที่ประมาณ 0.2738086 ตารางหน่วย จนถึงปัจจุบันเราก็ยังไม่รู้อะไรเกี่ยวกับแผ่นปิดทับนูนที่เล็กที่สุด ทำได้เพียงหาแผ่นปิดทับที่เล็กลงกว่าเดิมเรื่อย ๆ ในปี 2006 Wei Wang [21] ได้นำเสนอแผ่นปิดทับนูนที่เล็กลงกว่าเดิม ดังรูปที่ 2.7 ซึ่งมีพื้นที่ 0.2709119 ตารางหน่วย



รูปที่ 2.6 แผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดในปัจจุบันของ Norwood และ Poole



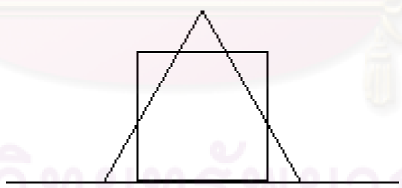
รูปที่ 2.7 แผ่นปิดทับของ Wei Wang

2.3.3 **ขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับ**

ในอีกทางหนึ่งเราได้ศึกษาขอบเขตล่างของพื้นที่ของแผ่นปิดทับ กล่าวคือ ทำการหาคอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้ง 1 หน่วยเพียงไม่กี่เส้น ในปี 1968 Schaer [18] ได้หาขอบเขตล่างค่าแรกของปัญหานี้ โดยใช้ความหนาของ broadworm ซึ่งมีค่า 0.438925 และเส้นตรง 1 หน่วย ทำให้มีพื้นที่อย่างน้อย $\frac{0.438925}{2} \approx 0.21946$ เราอาจกล่าวได้ว่าแผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยจะต้องมีพื้นที่อย่างน้อย 0.21946 ตารางหน่วย ในปี 2000 Eric Ferguson [29] ได้เสนอขอบเขตล่างตัวใหม่ โดยใช้เส้นตรง 1 หน่วย เส้นตัววีมุม 60 องศาที่แขนยาว 0.5 หน่วยเท่ากัน และตัวยูสามท่อนมุมฉากที่ยาวท่อนละ $\frac{1}{3}$ หน่วยเท่ากัน

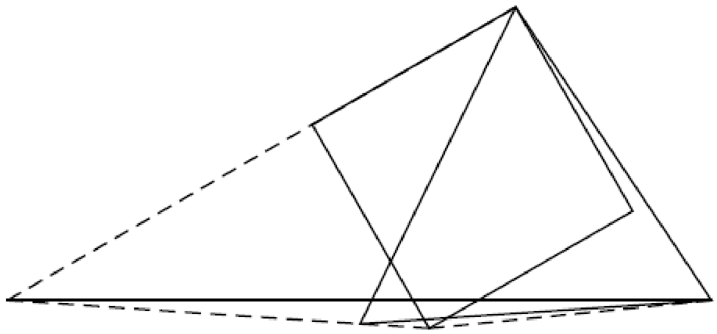
รูปที่ 2.8 เส้นตรง 1 หน่วย เส้นตัววีมุม 60 องศา และตัวยูสามท่อนมุมฉาก

โดยเขาได้เสนอวิธีจัดสามเส้นนี้ให้มีคอนเวกซ์ฮัลล์รวมที่มีพื้นที่น้อยที่สุดดังรูปที่ 2.8 ซึ่งมีพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์รวมเท่ากับ 0.2388 ตารางหน่วย



รูปที่ 2.9 ข้อคาดการณ์ของ Ferguson ที่อาจให้คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุด

ในปี 2005 เรวัต ถนัดกิจหิรัญ ได้เสนอการจัดเส้นโค้งทั้งสามที่ Ferguson [29] ใช้ให้มีพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์รวมเพียงแค่ 0.22758966 ตารางหน่วย ดังรูป



รูปที่ 2.10 คอนเวกซ์ฮัลล์ที่ให้พื้นที่เท่ากับ 0.2275896 ตารางหน่วย

เรวัตเสนอว่ารูปที่ได้ดังกล่าวน่าจะเป็นการจัดรวมให้มีพื้นที่น้อยสุด ส่วนขั้นตอนการพิสูจน์นั้น สิระ ศรีสวัสดิ์ และธีรสรรค์ ขันธวิทย์ [20] ได้ช่วยกันพิสูจน์ให้รัดกุมมากขึ้น ซึ่งขณะนี้อยู่ระหว่างการรอพิจารณาเพื่อตีพิมพ์

จากข้อคาดการณ์ของ Ferguson ทำให้เราตระหนักถึงความเชื่อของนักคณิตศาสตร์ในสมัยก่อนเรื่องความสมมาตร ดังนั้นสมบัติการจัดรวมของเซตของเส้นโค้งให้มีพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยที่สุดจึงเป็นเรื่องที่ซับซ้อนมาก

2.3.4 การแตกเป็นปัญหาย่อย

เนื่องจากปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์ เป็นปัญหาที่ค่อนข้างยาก นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จึงศึกษาปัญหาใกล้เคียงควบคู่ไปด้วย โดยมีการคำนึงถึงสิ่งสำคัญสามประการต่อไปนี้

1. เส้นโค้งที่ถูกปิดทับ เราอาจจะพิจารณาการปิดทับของเส้นโค้งบางชนิด เช่น เส้นโค้งคอนเวกซ์ เส้นโค้งปิด เป็นต้น
2. รูปร่างของแผ่นปิดทับ นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จำกัดตัวเองในการศึกษาแผ่นปิดทับนูน บางกลุ่มก็ศึกษาแผ่นปิดทับสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม เป็นต้น
3. วิธีการปิดทับ ปัญหาของเราอนุญาตให้เลื่อน หมุน และ พลิกได้ เราอาจศึกษากรณีที่ไม่อนุญาตให้มีการพลิก หรือไม่อนุญาตให้หมุน หรืออนุญาตเพียงการเลื่อน

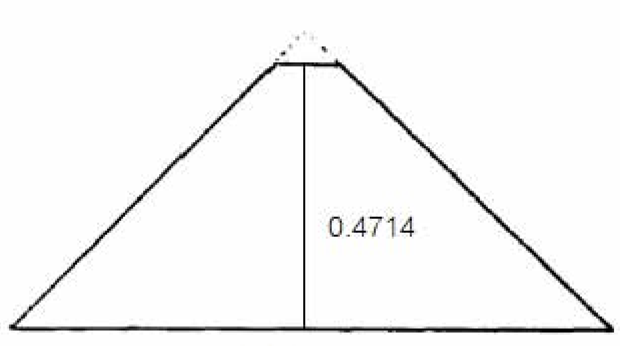
2.3.5 การมีอยู่ของแผ่นปิดทับเล็กสุด

คำถามที่น่าสนใจข้อหนึ่งคือ มีแผ่นปิดทับตามที่โมเซอร์ถามหาหรือไม่ ความพยายามในการตอบคำถามนี้ได้ทำให้เราไปพบสิ่งที่น่าประหลาดใจหลายอย่าง สิ่งแรกคือ การค้นพบ

แผ่นปิดทับสำหรับเส้นที่เป็นท่อน ๆ (polysegment) อาจเป็นสิ่งที่เกินความสามารถในจินตนาการว่า จะมีแผ่นปิดทับพื้นที่ศูนย์หรือไร้พื้นที่ ซึ่งสามารถปิดทับเส้นท่อน ๆ หนึ่งหน่วยได้ทั้งหมด ยิ่งไปกว่านั้น ด้วยการประกอบง่าย ๆ เราสามารถสร้างแผ่นปิดทับสำหรับเส้นท่อน ๆ ความยาวใด ๆ ซึ่งตอนนี้ทำให้เราไม่แน่ใจแล้วว่าแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดสำหรับเส้นโค้งใด ๆ นั้นจะมีอยู่หรือไม่ ความรู้เรื่อง measure theory ขั้นสูงได้สร้างเซตประหลาดเหล่านี้ และแสดงได้เพียงว่า แผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งใด ๆ ต้องมีพื้นที่มากกว่าศูนย์ Wetzel ได้เตือนนักคณิตศาสตร์ว่า แผ่นปิดทับที่ไม่ใช่เซตนูนนี้ไม่น่าสนใจ เนื่องจากความพยายามของนักเรขาคณิตอาจไม่เกิดประโยชน์ หากมิได้ใช้ measure theory พิสูจน์ถึงความมีอยู่ของเซตที่มีพื้นที่เล็กไม่จำกัดที่ปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ กล่าวคือ ไม่ว่าจะกำหนดพื้นที่มาเล็กเพียงใด ก็จะมีแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่น้อยกว่านั้นเสมอ ต่อไป เราจะมาพิจารณาการมีอยู่ของแผ่นปิดทับนูน ซึ่งเครื่องมือที่ใช้ในการแสดงคือ Blaschke Selection Theorem จึงทำให้เรารู้ว่ามีแผ่นปิดทับนูนที่มีพื้นที่น้อยสุด ด้วยความรู้ของ geometric measure theory อาจนำไปสู่การพิสูจน์ที่ซับซ้อน เพื่อยืนยันการมีอยู่ของแผ่นปิดทับที่ซับซ้อนขึ้น เช่น แผ่นปิดทับไม่มีรู

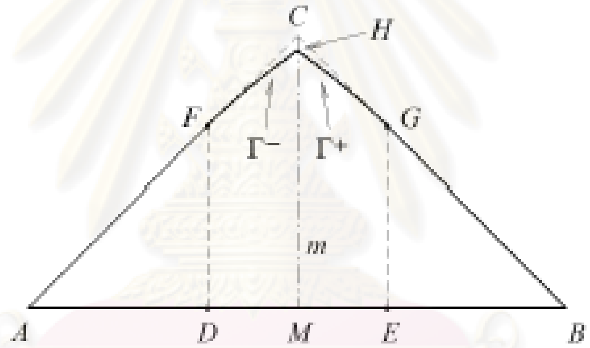
2.3.6 ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์

เส้นโค้งคอนเวกซ์คือเส้นโค้งที่ไม่ตัดตัวเองและมีเส้นโค้งเป็นขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ของตัวเอง สำหรับการหาแผ่นปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นนั้น เริ่มต้นในปี 1965 Besicovitch [2] ได้ตั้งข้อสังเกตว่าสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละหนึ่งหน่วยสามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้น ซึ่งมีพื้นที่ $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433013$ ตารางหน่วย ถัดมาในปี 1970 Wetzel [23] ได้พิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมจั่วฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.25 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้น นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์อีกว่าถ้าเล็มบริเวณมุมฉากของรูปดังกล่าวออกด้วยความสูง $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.0286$ หน่วย จะได้รูปใหม่ซึ่งมีความสูง $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47140$ และยังคงปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ โดยรูปใหม่ที่ได้มีพื้นที่ประมาณ 0.24918 ตารางหน่วย



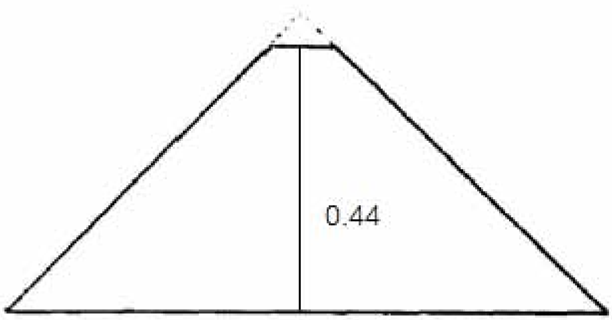
รูปที่ 2.11 แผ่นปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่เล็มมุมออกที่ระดับความสูง 0.4714 หน่วย

จากนั้น Joseph A. Johnson, George D. Poole และ Wetzel ได้พิสูจน์ว่ารูปที่มีพื้นที่น้อยกว่า 0.2465481 ตารางหน่วย (ลักษณะดังรูปที่ 2.12) สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้น โดยผลงานนี้ได้รับการตีพิมพ์ในปี 2004



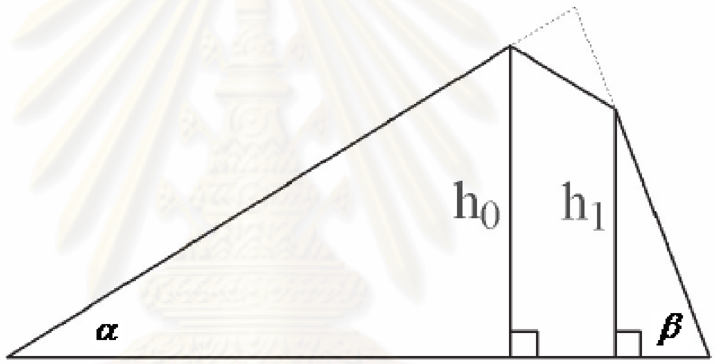
รูปที่ 2.12 แผ่นปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่เท่ากับ 0.2465481 ตารางหน่วยของ Wetzel

หลังจากนั้น วัชรินทร์ วิชิรมาลา [24] ได้พิสูจน์หาแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่น้อยลงกว่าเดิมซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.2464 ตารางหน่วย แผ่นปิดทับใหม่ที่ได้นี้ได้จากการตัดเล็มรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยที่ระดับความสูง 0.44 หน่วย (ลักษณะดังรูปที่ 2.13) โดยผลงานนี้ถูกตีพิมพ์ในปี 2005



รูปที่ 2.13 แผ่นปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่เล็มมุมออกที่ระดับความสูง 0.44 หน่วย

ต่อมาในปี 2010 วัชรินทร์ วิชิรมาลา [25] ได้พิสูจน์หาแผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่เล็กที่สุดในปัจจุบันได้ ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.241698 ตารางหน่วย

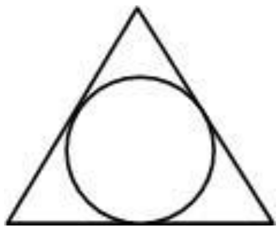


รูปที่ 2.14 แผ่นปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่เล็กที่สุดในปัจจุบันของ วัชรินทร์ วิชิรมาลา

โดยแผ่นปิดทับนี้ $\alpha \approx 31.77^o$ $\beta \approx 68.63^o$ $h_0 = 0.44378$ และ $h_1 = 0.352324$

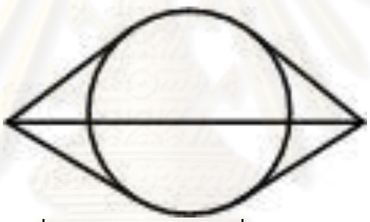
2.3.7 ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งปิด

ปัญหาการหาแผ่นปิดทับเส้นโค้งปิดที่เล็กที่สุดนั้นค่อนข้างยาก เราตอบได้แค่เพียงมีแผ่นปิดทับขนาดเล็กซึ่งเทียบเท่าว่าเรามีขอบเขตบนของพื้นที่ของแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่น้อยที่สุดสำหรับเส้นโค้งปิด โดยเริ่มแรกนั้นในปี 1957 H. G. Eggleston [5] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า "สามเหลี่ยมจะปิดทับเส้นโค้งปิดได้ทุกเส้นก็ต่อเมื่อปิดทับวงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว 1 หน่วยได้" จากแนวคิดนี้ก็ทำให้สามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ปิดทับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้ ซึ่งคือสามเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุวงกลมที่มีเส้นรอบวงที่ยาว 1 หน่วยได้ โดยสามเหลี่ยมนี้ยาวด้านละ $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ หน่วย และมีพื้นที่ 0.13162 ตารางหน่วย ดังรูป



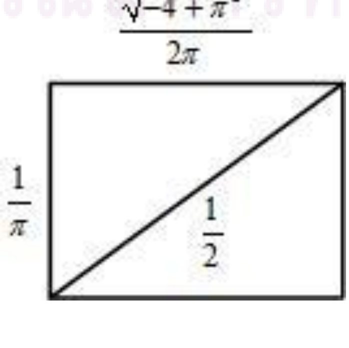
รูปที่ 2.14 สามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ หน่วยของ Eggleston

ต่อมาในปี 1973 G. D. Chakerian และ M. S. Klamkin [4] ได้ทำการหาขอบเขตล่างของแผ่นปิดทับเส้นโค้งปิด โดยใช้แนวคิดที่ว่า แผ่นปิดทับนั้นต้องปิดทับวงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และส่วนของเส้นตรงที่ยาวครึ่งหน่วยได้ ดังนั้นแผ่นปิดทับต้องปิดทับคอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมและส่วนของเส้นตรงนี้ได้ จากทฤษฎีบทที่ว่าสำหรับรูปเรขาคณิตใด ๆ ที่มีสมมาตรเทียบกับจุดนั้น คอนเวกซ์ฮัลล์ของเซตทั้งสอง คือ คอนเวกซ์ฮัลล์ของรูปเรขาคณิตที่เกิดจากการนำจุดสมมาตรของเซตทั้งสองมาวางทับกัน ซึ่งมีพื้นที่ 0.0963275 ตารางหน่วย ดังรูป



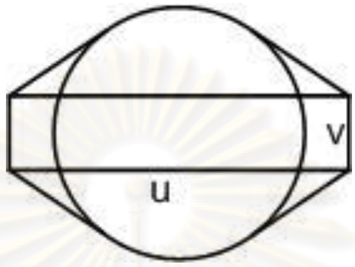
รูปที่ 2.15 คอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดของเส้นตรงครึ่งหน่วยและวงกลมเส้นรอบรูป 1 หน่วย

ส่วนขอบเขตบนนั้น ในปี 1970 J. P. Jones และ J. Schaer [23] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่ปิดทับเส้นโค้งปิดใด ๆ มีความยาวอย่างน้อย $\frac{1}{2}$ หน่วย จึงทำให้ในปี 1972 J. Schaer และ J. Wetzel [19] สามารถหาสี่เหลี่ยมที่เล็กที่สุดได้ ซึ่งมีขนาด $\frac{\sqrt{-4+\pi^2}}{2\pi} \times \frac{1}{\pi}$ และมีพื้นที่เท่ากับ 0.122738 ตารางหน่วย ดังรูป



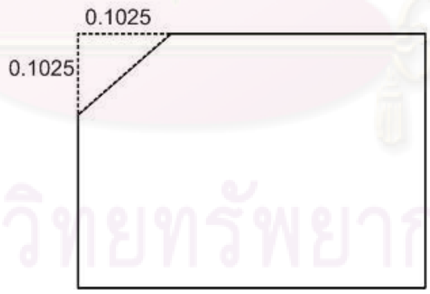
รูปที่ 2.16 สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เล็กสุดที่ปิดทับเส้นโค้งปิด 1 หน่วยได้

จากนั้นในปี 2006 Z. Furedi และ J. Wetzel [7] ได้หาขอบเขตล่างค่าใหม่โดยใช้สี่เหลี่ยมขนาด $u \times v$ โดยที่ $u+v=\frac{1}{2}$ แทนส่วนของเส้นตรง $\frac{1}{2}$ หน่วย และใช้วงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว 1 หน่วยเหมือนเดิม ซึ่งคอนเวกซ์ฮัลล์มีพื้นที่ 0.0966675 ตารางหน่วย โดยที่ v = 0.0130843 หน่วย ดังรูป



รูปที่ 2.17 คอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดของสี่เหลี่ยมขนาด $u \times v$ และวงกลมเส้นรอบรูป 1 หน่วย

นอกจากนี้ Z. Furedi และ J. Wetzel [7] ได้หาขอบเขตบนที่ดีกว่าเดิม ซึ่งทั้งสองคนได้พิสูจน์ว่า เส้นโค้งปิดใด ๆ ไม่สามารถผ่านมุมสี่เหลี่ยมขนาด $\frac{\sqrt{-4+\pi^2}}{2\pi} \times \frac{1}{\pi}$ ได้พร้อมกัน 4 มุม จึงสามารถตัดมุมออกไปได้ 1 มุม ซึ่งคือสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาวด้านละ 0.1025 หน่วย ทำให้ได้แผ่นปิดทับคอนเวกซ์ใหม่ดังรูป ซึ่งมีพื้นที่ 0.117493 ตารางหน่วย



รูปที่ 2.15 แผ่นปิดทับเส้นโค้งปิดที่เล็กที่สุดในปัจจุบัน

ดังนั้นเราจะได้ว่าพื้นที่ของแผ่นปิดทับเส้นโค้งปิดที่เล็กที่สุดอยู่ระหว่าง 0.0966675 ถึง 0.117493 ตารางหน่วย

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะทำการปรับปรุงค่าขอบเขตล่างนี้ให้ดีขึ้นต่อไป ในบทที่ 3 จะเป็นบทที่กล่าวถึงการแปลงปัญหาให้ง่ายลง และพิสูจน์บทตั้งต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในบทที่ 4 และบทที่ 5 ต่อไป

2.3.8 ปัญหาการปิดทับของสามเหลี่ยมที่มีเส้นผ่านกลางยาว 1 หน่วย

ปัญหานี้ศึกษาเกี่ยวกับแผ่นปิดทับของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นสามเหลี่ยมที่มีเส้นผ่านกลางยาว 1 หน่วย โดยในปี 2005 Yuan และ Ding [26] ได้พิสูจน์สมบัติของสามเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ปิดทับสามเหลี่ยมที่มีเส้นผ่านกลางยาว 1 หน่วยได้ทุกรูป ต่อมาในปี 2006 Yuan Zhang และ Ding [27] ได้พิสูจน์สมบัติของสี่เหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่ปิดทับสามเหลี่ยมที่มีเส้นผ่านกลางยาว 1 หน่วย ได้ทุกรูป จนถึงปัจจุบัน Yuan และ Movshovich ได้ทำการหาสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เล็กที่สุดที่ปิดทับสามเหลี่ยมที่มีเส้นผ่านกลางยาว 1 หน่วยซึ่งขณะนี้อยู่ระหว่างการรอพิจารณาเพื่อตีพิมพ์เผยแพร่

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ เราจะทำการแปลงปัญหาให้ง่ายขึ้น และพิสูจน์บทตั้งต่างๆ เพื่อจะกำหนดเงื่อนไขของการเลื่อนและการหมุนของเส้นโค้งปิด 3 เส้น จากนั้นก็จะมีบทตั้งที่แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบ กล่าวคือเราสามารถหาพื้นที่ของคอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดของเส้นโค้งปิด 3 เส้นได้ ซึ่งเงื่อนไขที่ได้จากบทนี้จะนำไปสู่การหาคำตอบโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ในบทที่ 4 และบทที่ 5 ต่อไป

3.1 การแปลงปัญหา

เราจะพิจารณาหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดของ ส่วนของเส้นตรงยาวครึ่งหน่วย วงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย เนื่องจากใน R^2 ส่วนของเส้นตรงยาวครึ่งหน่วย วงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย อยู่ได้อย่างอิสระ จึงทำให้เราหาคอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดได้ค่อนข้างยาก เราจะทำการแปลงปัญหาให้ง่ายขึ้นดังนี้

ให้ L แทนส่วนของเส้นตรงครึ่งหน่วย C แทนวงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และ T แทนสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย

ให้ L, C, T อยู่ใน R^2 เราสามารถเลื่อนและหมุนคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L, C, T โดยให้จุดปลายของ L มาอยู่ที่จุด $A(-\frac{1}{4},0)$ และ $B(\frac{1}{4},0)$ ดังนั้น L จึงอยู่บนแกน X

บทนิยาม 3.1.1 โครงแบบ (configuration) คือ ยูเนียนของ L, C, T

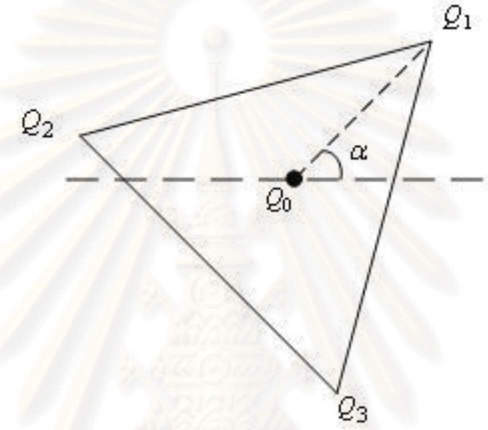
ให้ U แทนเซตของโครงแบบทั้งหมด $P(x_1, y_1)$ คือจุดศูนย์กลางของ C

จะเห็นว่าถ้าจุด P ไม่อยู่ในจตุภาคที่ 1 เราสามารถพลิกทั้งหมดโดยให้จุด P มาที่จตุภาคที่ 1 ได้เสมอ ทำให้ $x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0$ ด้วยการพลิกพื้นที่ยังคงเท่าเดิม

เราสามารถแทน T ด้วย 3 พารามิเตอร์ (x_2, y_2, α) โดยที่ $Q_0(x_2, y_2)$ คือจุดศูนย์กลางของ T และ α คือมุมของการหมุนของ T ดังรูปที่ 3.1 เราจะได้จุดยอดของ T คือ

$$Q_1 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos\alpha,\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\alpha),\ Q_2 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}),\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}))$$

และ $Q_3 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}),\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}))$ โดยการสมมาตรการหมุนของ T เราสามารถสมมติได้ว่า $0 \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}$



รูปที่ 3.1 การหมุนของ α

จะเห็นว่าคอนเวกซ์ฮัลล์ของ $L,\ C,\ T$ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ เท่านั้นโดยที่ $x_1 \ge 0, y_1 \ge 0$ และ $0 \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}$ จะเห็นว่าปัญหาของเราดูง่ายขึ้นกว่าเดิม แต่ก็ยังยากในการหาคำตอบอยู่ดี ต่อไปจะนำไปสู่บทตั้งต่าง ๆ และแสดงการมีอยู่ของคำตอบด้วย โดยเราจะกำหนดขอบเขตในการพิจารณา $(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ ให้มีข้อจำกัดดีขึ้นกว่าเดิม

3.2 บทตั้งเพื่อกำหนดเงื่อนไข

เรานิยาม $\phi: R^5 \to U$ โดยส่ง $(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ ไปยังโครงแบบที่ประกอบด้วยวงกลมและสามเหลี่ยมซึ่งมีพารามิเตอร์ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2, α) ตามลำดับ

ให้ X คือโครงแบบของ $L,\ C,\ T$ $H(X)$ คือ คอนเวกซ์ฮัลล์ของ X และ $A(X)$ คือ พื้นที่ของ $H(X)$ เราจะเห็นได้ชัดเจนว่า $A \circ \phi: R^5 \to R$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง

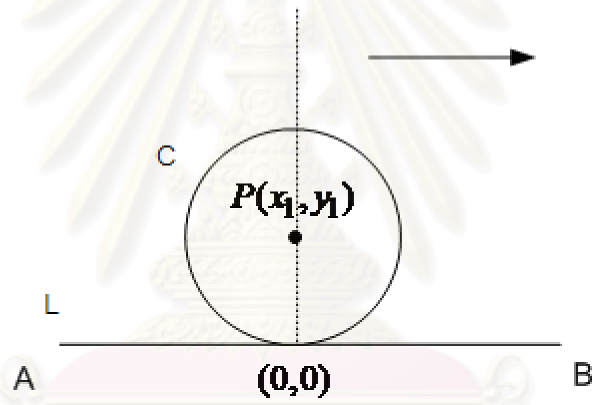
บทตั้ง 3.2.1 ถ้าจุด P ไม่อยู่ภายในวงรี $\left(\frac{x}{0.05}\right)^2+\left(\frac{y}{0.043}\right)^2=1$ แล้ว $A(X)>0.0971$

บทพิสูจน์ ให้ X คือโครงแบบของ L, C, T เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 : L และ C ไม่มีส่วนใดทับกัน

ให้ X^* คือ โครงแบบของ L และ C เลื่อน C ในแนวขนานแกน Y มาสัมผัส L

ให้ X' คือ โครงแบบอันใหม่ของ L และ C หลังจากการเลื่อน เราจะได้ว่า $H(X')\subseteq H(X^*)$ ดังนั้น เราจะพิจารณาเฉพาะ X'

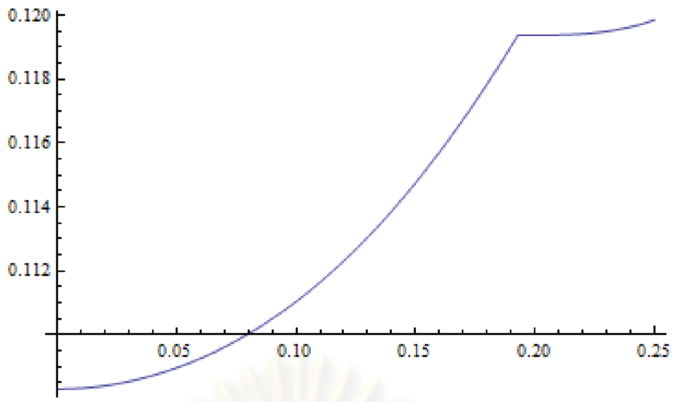


รูปที่ 3.2 แสดงโครงแบบ X'

จะเห็นว่า $y_1=r=\frac{1}{2\pi}$

ให้ $f(x_1)=A(X')$

วาดกราฟของ $f(x_1)$ ได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 กราฟแสดงค่าของ $f(x_1)$

จากกราฟจะเห็นว่า ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดที่ $x_1 = 0$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(0) = 0.108298$

ให้ A^* แทนพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดของ X' จะได้ $A^* = 0.108298$

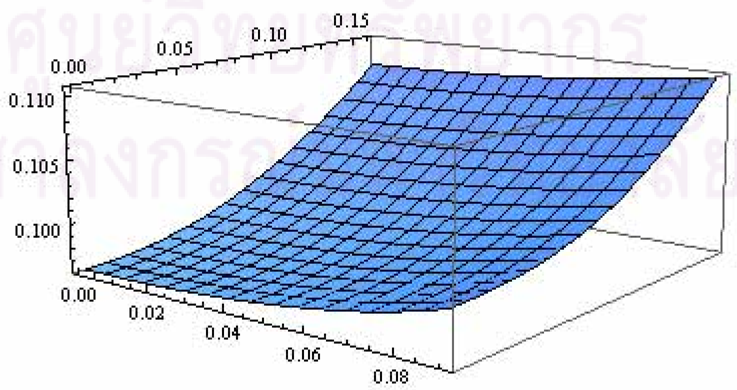
ดังนั้น $A(X) \geq A(X^*) \geq A(X') \geq A^* = 0.108298 > 0.0971$

กรณีที่ 2 : L และ C มีบางส่วนทับกัน

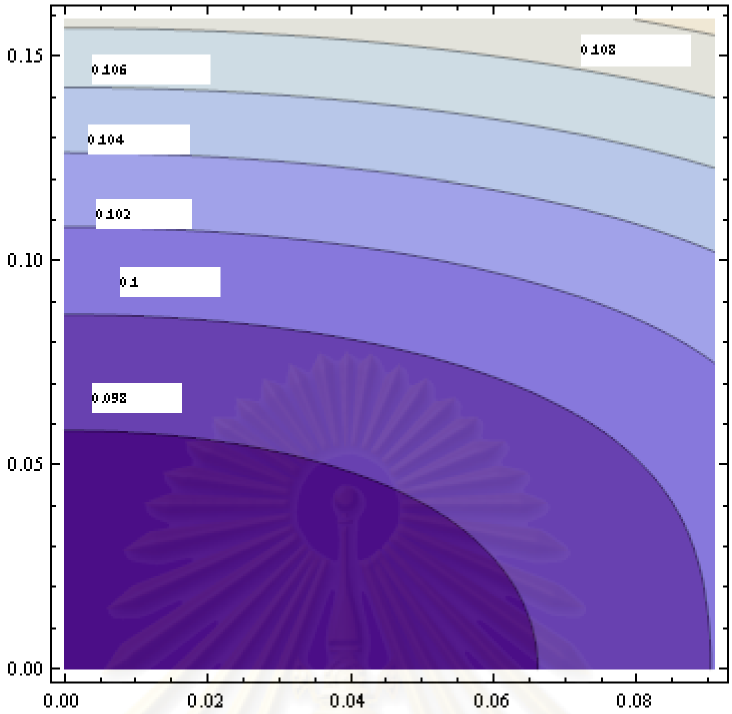
สมมติว่าจุด P ไม่อยู่ในวงรี

ให้ X^* คือ โครงแบบของ L และ C $f(x_1, y_1)$ คือ $A(X^*)$

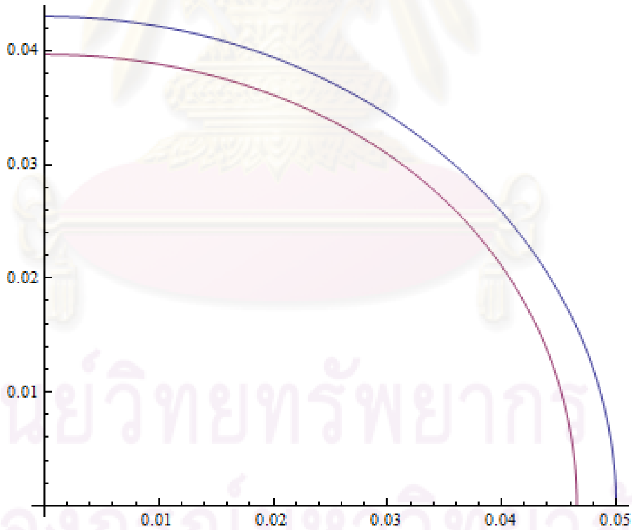
จะวาดกราฟ 3 มิติ และกราฟของเส้นชั้นความสูง ได้ดังนี้



รูปที่ 3.4 กราฟ 3 มิติแสดงค่าของ $f(x_1, y_1)$



รูปที่ 3.5 กราฟของเส้นชั้นความสูงของ $f(x_1, y_1)$



รูปที่ 3.6 เส้นกราฟแสดงอาณาบริเวณสมการวงรี

จะได้ว่า $A(X^*) > 0.0971$

ดังนั้น $A(X) \geq A(X^*) > 0.0971$

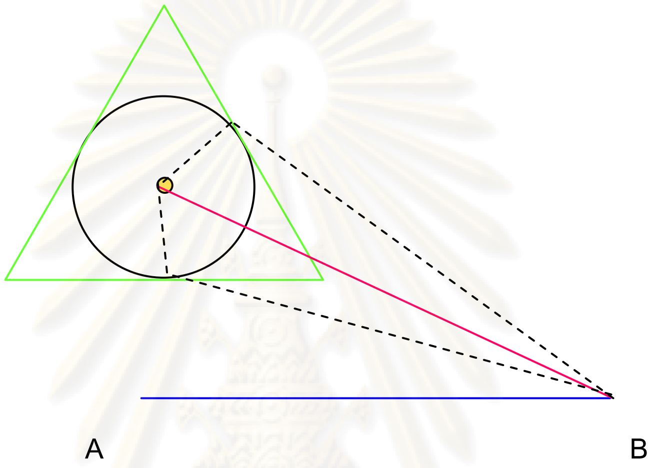
❑

บทตั้ง 3.2.2 ฟังก์ชัน $A\circ\phi : R^5 \to R$ ให้ค่าน้อยสุด

บทพิสูจน์ ให้ R_1 คือ อาณาบริเวณของสมการวงรีในบทตั้งที่ 3.2.1 ที่อยู่ในจตุภาคที่ 1

ให้ C^* คือ วงกลมที่แนบใน T ซึ่งมีรัศมี $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

ดังนั้นจุดศูนย์กลาง Q_0 เป็นไปได้ทุกค่า



รูปที่ 3.7 คอนเวกซ์ฮัลล์ที่ให้พื้นที่ $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{\left(x_2-\dfrac{1}{4}\right)^2+y_2^2-\dfrac{3}{18^2}}$

เราจะพิจารณาการหาคอนเวกซ์ฮัลล์ของสามเหลี่ยมกับส่วนของเส้นตรงครึ่งหน่วย โดยพิจารณาคอนเวกซ์ฮัลล์ของ C^* และ A หรือ B ในที่นี้สมมติให้เป็น B เราจะได้

$$A(C^*,L)\geq\frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2+y_2^2-\frac{3}{18^2}}>0.0971 \text{ ถ้า} \left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2+y_2^2\geq 1.1^2$$

ให้ B_r แทนอาณาบริเวณของวงกลมจุดศูนย์กลาง B และรัศมี r เพราะว่าสับเซตของ $R_1\times B_{1.1}\times[0,\frac{2\pi}{3}]$ เป็นเซตกระชับ และ $A\circ\phi$ มีความต่อเนื่อง ดังนั้น $A\circ\phi$ มีค่าน้อยสุดบน $R_1\times B_{1.1}\times[0,\frac{2\pi}{3}]$

❑

บทตั้ง 3.2.3 ถ้า C และ T ไม่มีส่วนใดทับกัน แล้ว $A(X) > 0.0971$

บทพิสูจน์ ให้ X คือโครงแบบของ L, C, T

สมมติให้ C และ T ไม่มีส่วนใดทับกัน

ให้ X^* คือ โครงแบบของ C และ T $A(C)$ และ $A(T)$ คือ พื้นที่ของ C และ T ตามลำดับ

จากการคำนวณ $A(C) = 0.0795775$ ตารางหน่วย และ $A(T) = 0.0481125$ ตารางหน่วย

ดังนั้น

$$A(X) \geq A(X^*) \geq A(C) + A(T) = 0.0795775 + 0.0481125 = 0.12769 > 0.0971$$

❑

เรานิยามสับเซต K ของ U ให้มีสมบัติต่อไปนี้คือ K เป็นเซตของโครงแบบซึ่งสอดคล้อง

(1) ระยะห่างระหว่างจุดใน T และจุดใน L มีค่าไม่เกิน $\frac{1}{2}$

(2) T อยู่ในอาณาบริเวณ $-0.3884 \leq y \leq 0.3884$

บทตั้ง 3.2.4 ถ้า X ไม่อยู่ใน K แล้ว $A(X)$ จะไม่ใช่ค่าน้อยสุด

บทพิสูจน์ สมมติ X ไม่ได้อยู่ใน K ดังนั้น X จะไม่สอดคล้องตามเงื่อนไข (1) และ (2) สมมติว่า X ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไข (1) โดยความไม่เสียนัยทั่วไป จะมีจุด $P_0(x_0, y_0) \in T$ ซึ่งมีระยะห่างระหว่างจุด P_0 กับ A มีค่ามากกว่า $\frac{1}{2}$ เราจะสร้าง X' ที่ไม่ใช่ AB เหมือนเดิมซึ่งประกอบด้วย T และเส้นตรง AB' โดยที่ $B' = \dfrac{1}{\sqrt{(x_2 + \frac{1}{4})^2 + y_2^2}}(x_0, y_0)$ เราจะเห็นว่า

$H(X') \subset H(X)$ ดังนั้น $A(X) > A(X')$ เราจะได้ว่า $A(X)$ จะไม่ใช่ค่าน้อยสุด

สมมติว่า X ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไข (2) ดังนั้นจะมีจุด $P_0(x_0, y_0) \in T$ ซึ่ง $|y_0| > 0.3884$

ให้ A^* คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุด A, B และ P_0 เป็นจุดยอด

เราจะได้ $A(X) > A^* = \frac{1}{4}|y_0| = 0.0971$ เพราะว่าเรามีโครงแบบที่มีพื้นที่น้อยกว่า 0.0971 (รูปที่ 1.1) เราจะได้ว่า $A(X)$ มีค่าไม่ใช่น้อยสุด

❑

ในบทนี้เราจะได้เงื่อนไขของ $(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ ที่ทำให้ $A \circ \phi$ มีค่าต่ำสุดดังนี้

(1) $P(x_1, y_1)$ ต้องอยู่ในจตุภาคที่ 1 และอยู่ภายในวงรีในบทตั้งที่ 3.2.1 ซึ่งจะทำให้

ได้ว่า $0 \le x_1 \le 0.05,\ 0 \le y_1 \le 0.043$

(2) $Q_0(x_2, y_2)$ ต้องสอดคล้องตาม K นั่นคือจะได้ว่า

$-0.25 \le x_2 \le 0.25,\ -0.3884 \le y_2 \le 0.3884$

ในบทที่ 4 และบทที่ 5 เราจะใช้การคำนวณเชิงตัวเลขในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 โดยใช้เงื่อนไขดังกล่าว โดยบทที่ 4 จะคำนวณโดยใช้โปรแกรม Mathematica ส่วนบทที่ 5 จะใช้ grid-search algorithm

บทที่ 4

ผลการดำเนินการเบื้องต้น

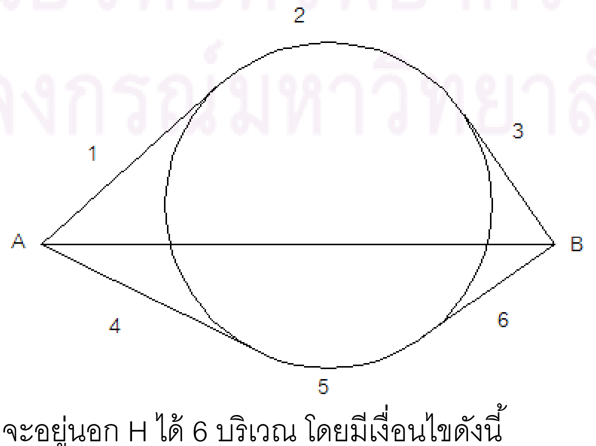
ในบทนี้จะแสดงการประมาณค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดสำหรับ L C และ T โดยใช้โปรแกรม Mathematica version 6 ในบทนี้จะแสดงผลลัพธ์ที่ได้ในกรณีต่างๆเท่านั้น ส่วนรายละเอียดของโปรแกรมในการคำนวณในกรณีต่างๆ สามารถดูได้ที่ภาคผนวก นอกจากนี้เรายังได้แสดงการนำวิธีการนี้มาใช้กับงานวิจัยของสิระ ศรีสวัสดิ์ และธีรสรรค์ ขันธวิทย์ [20] เพื่อสนับสนุนให้เห็นว่าวิธีการนี้มีความน่าเชื่อถือ

4.1 การหาคอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดโดยโปรแกรม Mathematica

เราจะใช้โปรแกรม Mathematica ประมาณค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดของวงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย ส่วนของเส้นตรงยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย โดยมีวิธีการดำเนินการดังนี้

ให้ L แทนส่วนของเส้นตรงครึ่งหน่วย C แทนวงกลมเส้นรอบวงยาว 1 หน่วย และ T แทนสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย จากบทตั้ง 3.2.1 3.2.3 และ 3.2.4 จะได้ว่าเราไม่จำเป็นต้องสนใจการวาง L C และ T บางกรณี

ต่อไปเราจะพิจารณารูปแบบการวาง L C และ T ที่สอดคล้องกับบทตั้งทั้งสามดังกล่าว โดยเราจะแบ่งเป็น 3 กรณีใหญ่ๆ โดยใช้คอนเวกซ์ฮัลล์ของ L และ C เป็นเกณฑ์
ให้ H เป็นคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L และ C



จากรูปจุดยอดของ T จะอยู่นอก H ได้ 6 บริเวณ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

บริเวณที่ 1 คืออาณาบริเวณที่อยู่เหนือ H และอยู่เหนือเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปสัมผัสวงกลม

บริเวณที่ 3 คืออาณาบริเวณที่อยู่เหนือ H และอยู่เหนือเส้นตรงที่ลากจากจุด B ไปสัมผัสวงกลม
บริเวณที่ 2 คืออาณาบริเวณที่อยู่เหนือ H ที่ไม่ใช่บริเวณที่ 1 และ 3
บริเวณที่ 4 คืออาณาบริเวณที่อยู่ใต้ H และอยู่ใต้เส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปสัมผัสวงกลม
บริเวณที่ 6 คืออาณาบริเวณที่อยู่ใต้ H และอยู่ใต้เส้นตรงที่ลากจากจุด B ไปสัมผัสวงกลม
บริเวณที่ 5 คืออาณาบริเวณที่อยู่ใต้ H ที่ไม่ใช่บริเวณที่ 4 และ 6
แบ่ง 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มี 1 จุดยอดของ T อยู่นอก H สมมติว่าคือ จุด Q_1

กรณีที่ 2 มี 2 จุดยอดของ T อยู่นอก H สมมติว่าคือ จุด Q_1 และ Q_2

กรณีที่ 3 ทั้ง 3 จุดยอดของ T อยู่นอก H

โดยแต่ละกรณีจะกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้นตามบทที่ 3 กล่าวคือ

$$0 \le x_1 \le 0.05,\ 0 \le y_1 \le 0.043, -0.25 \le x_2 \le 0.25,\ -0.3884 \le y_2 \le 0.3884$$

แต่เพื่อให้ใช้ความสมมาตรได้ เราจะให้ y_1 และ x_1 มีค่าเท่าใดก็ได้

สำหรับบางกรณีที่เป็นไปไม่ได้นั้นเราจะแสดงว่าเป็นไปไม่ได้โดยการนำสามเหลี่ยมหน้าจั่วเตี้ยไปใส่ใน H ที่สอดคล้องกับกรณีนั้นแล้วขยายความสูงให้มากที่สุด ถ้าความสูงน้อยกว่าความสูงของสามเหลี่ยมด้านเท่าคือ 0.288675 แสดงว่าใส่ไม่ได้

เราจะใช้ความสมมาตรในการลดจำนวนกรณีในการคำนวณให้น้อยลง ดังนี้

1. ถ้าจุดยอดของ T อยู่ใต้เส้น AB จะสะท้อนจุดยอดของ T เทียบเส้น AB ทำให้จุดยอดของ T หลุดเหนือเส้น AB

2. ให้ l เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของ C ที่ตั้งฉากกับ AB ถ้าจุดยอดของ T อยู่ด้านขวาของ l จะสะท้อนจุดยอดของ T เทียบ l ทำให้จุดยอดของ T หลุดด้านซ้ายของ l

กรณีที่ 1 คือมี 1 จุดยอดของ T อยู่นอก H ซึ่งมี 6 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 1.1 Q_1 อยู่บริเวณที่ 1

กรณี 1.2 Q_1 อยู่บริเวณที่ 2

กรณี 1.3 Q_1 อยู่บริเวณที่ 3

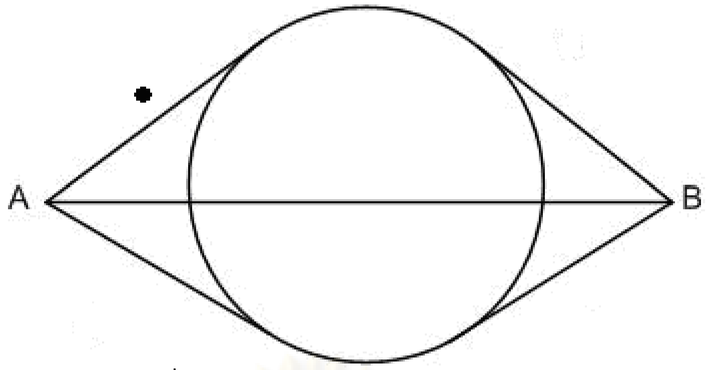
กรณี 1.4 Q_1 อยู่บริเวณที่ 4

กรณี 1.5 Q_1 อยู่บริเวณที่ 5

กรณี 1.6 Q_1 อยู่บริเวณที่ 6

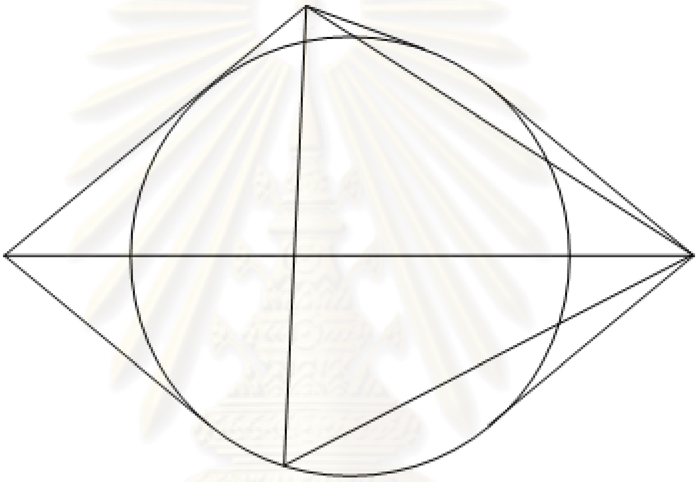
เราพิจารณาพบว่ากรณีที่ 1.1 1.3 1.4 และ 1.6 เมื่อใช้หลักความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 1.1 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1 ดังรูป



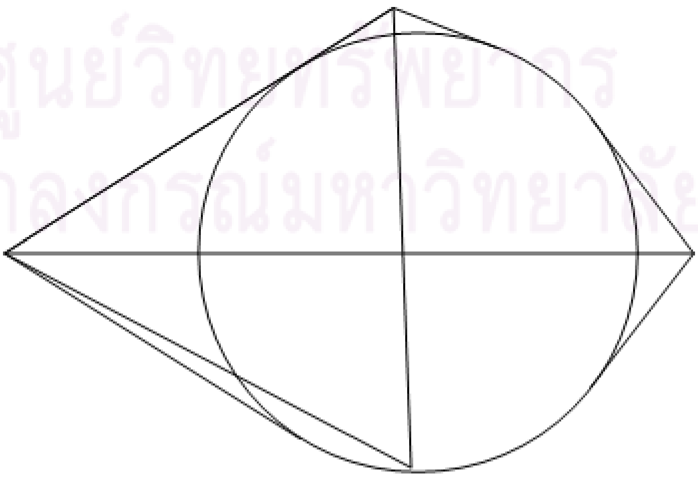
รูปที่ 4.1 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.1

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดซึ่งมี 2 แบบ ดังรูปที่ 4.2 และ 4.3



รูปที่ 4.2 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 1.1 แบบที่ 1 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.097669 ตร.หน่วย

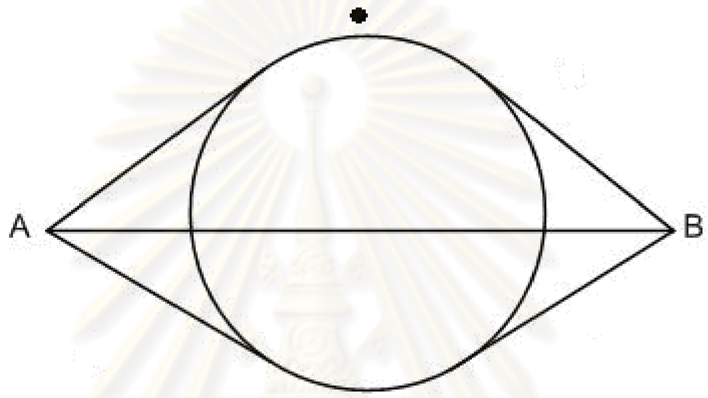
สำหรับรูปที่ 4.2 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 1.1(A) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)



รูปที่ 4.3 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณีที่ 1.1 แบบที่ 2 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.098129 ตร.หน่วย

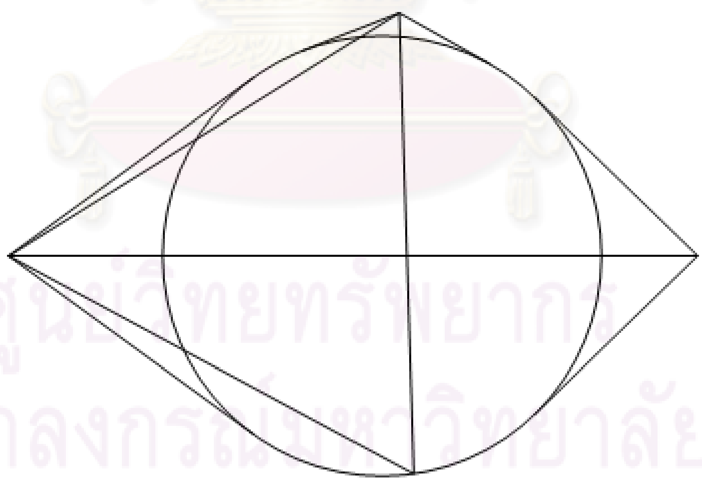
สำหรับรูปที่ 4.3 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 1.1(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)
ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.097669 ตารางหน่วย

ส่วนในกรณี 1.2 และ 1.5 เมื่อใช้หลักความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 1.2 เพียงกรณีเดียว
โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราจะหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดในกรณีนี้เพียงแบบเดียว
พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2 ดังรูป



รูปที่ 4.4 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.2

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 1.2 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0972714 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.5 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 1.2 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)
ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0972702 ตารางหน่วย

กรณีที่ 2 คือมี 2 จุดยอดของ T อยู่นอก H ซึ่งมี 15 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 2.1 Q_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 2

กรณี 2.2 Q_1 อยู่บริเวณที่ 2 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 3

กรณี 2.3 Q_1 อยู่บริเวณที่ 4 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 5

กรณี 2.4 Q_1 อยู่บริเวณที่ 5 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 6

กรณี 2.5 Q_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 3

กรณี 2.6 Q_1 อยู่บริเวณที่ 4 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 6

กรณี 2.7 Q_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 4

กรณี 2.8 Q_1 อยู่บริเวณที่ 3 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 6

กรณี 2.9 Q_2 อยู่บริเวณที่ 1 และ Q_1 อยู่บริเวณที่ 5

กรณี 2.10 Q_2 อยู่บริเวณที่ 3 และ Q_1 อยู่บริเวณที่ 5

กรณี 2.11 Q_2 อยู่บริเวณที่ 2 และ Q_1 อยู่บริเวณที่ 4

กรณี 2.12 Q_2 อยู่บริเวณที่ 2 และ Q_1 อยู่บริเวณที่ 6

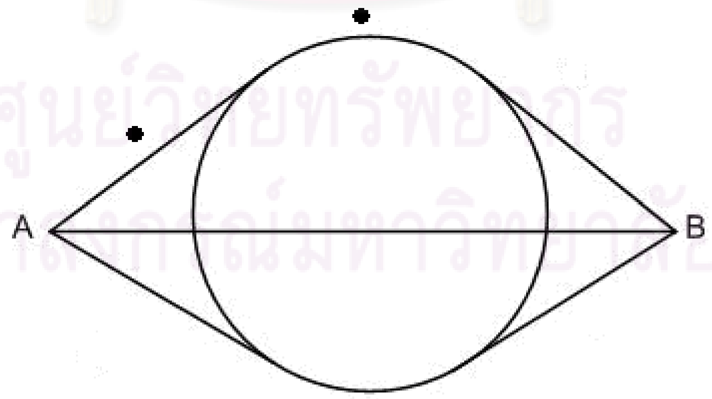
กรณี 2.13 Q_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 6

กรณี 2.14 Q_1 อยู่บริเวณที่ 3 และ Q_2 อยู่บริเวณที่ 4

กรณี 2.15 Q_2 อยู่บริเวณที่ 2 และ Q_1 อยู่บริเวณที่ 5

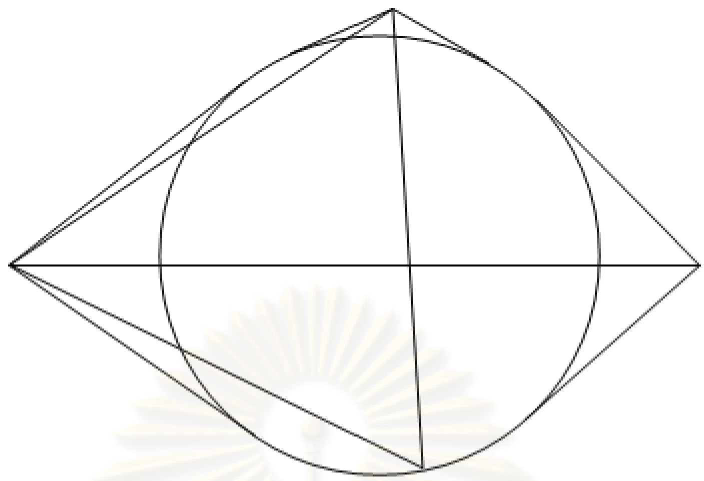
เราจะพิจารณาพบว่ากรณี 2.1 - 2.4 เมื่อใช้หลักการความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 2.1 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 2 ดังรูป



รูปที่ 4.6 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.1

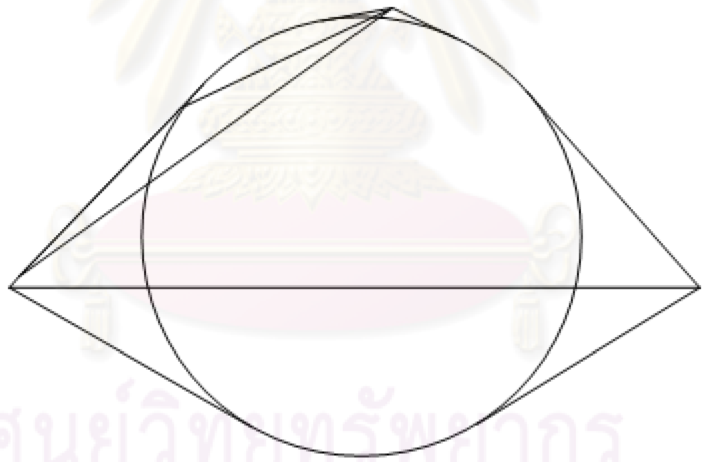
จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด 2 แบบ ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.1 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0974347 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.7 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.1(A) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

จากการคำนวณจะได้สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ใหญ่ที่สุดที่ใส่แบบที่ 2 ได้มีความสูงประมาณ 0.0304435 หน่วย

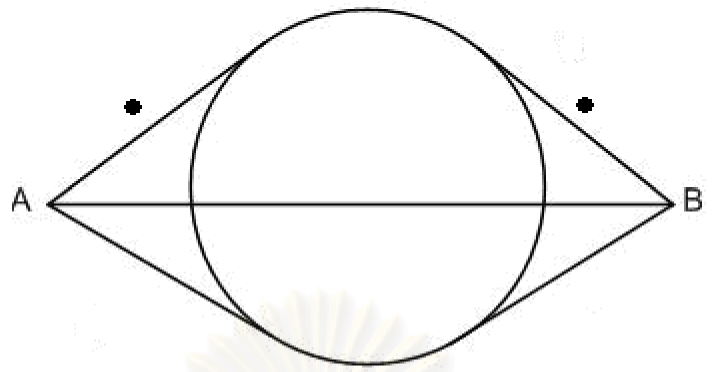
สำหรับรูปที่ 4.8 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.1(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

จะเห็นว่าความสูงน้อยกว่า 0.288675 หน่วย แสดงว่ากรณีที่ 2.1 ใส่แบบนี้ไม่ได้

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0974374 ตารางหน่วย

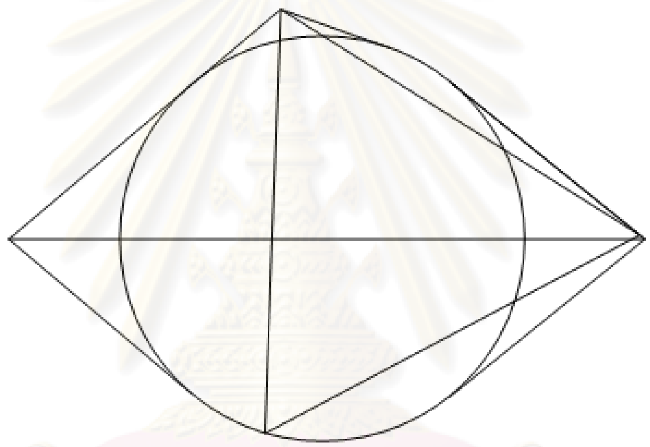
ต่อมาเราพิจารณาพบว่ากรณี 2.5 - 2.6 เมื่อใช้หลักการความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 2.5 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 3 ดังรูป



รูปที่ 4.9 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.5

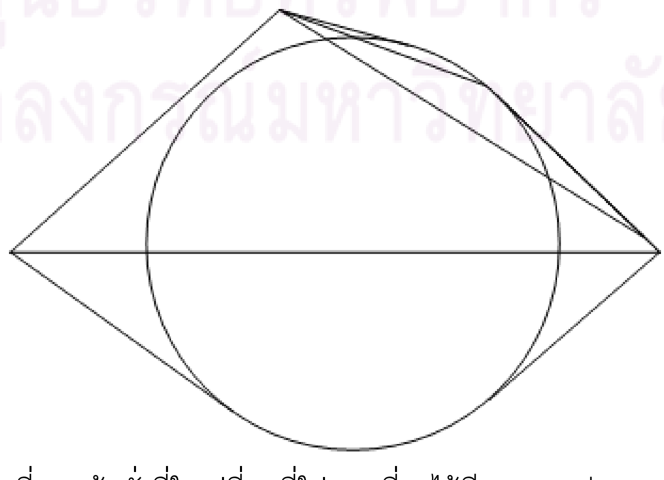
จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.5 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0976741 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.10 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.5(A) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

จากการคำนวณจะได้สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ใหญ่ที่สุดที่ใส่แบบที่ 2 ได้มีความสูงประมาณ 0.034902 หน่วย

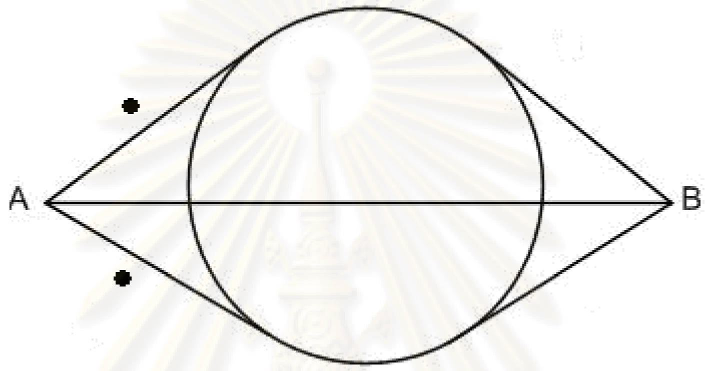
สำหรับรูปที่ 4.11 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.5(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

จะเห็นว่าความสูงน้อยกว่า 0.288675 หน่วย แสดงว่ากรณีที่ 2.5 ใส่แบบนี้ไม่ได้

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0976741 ตารางหน่วย

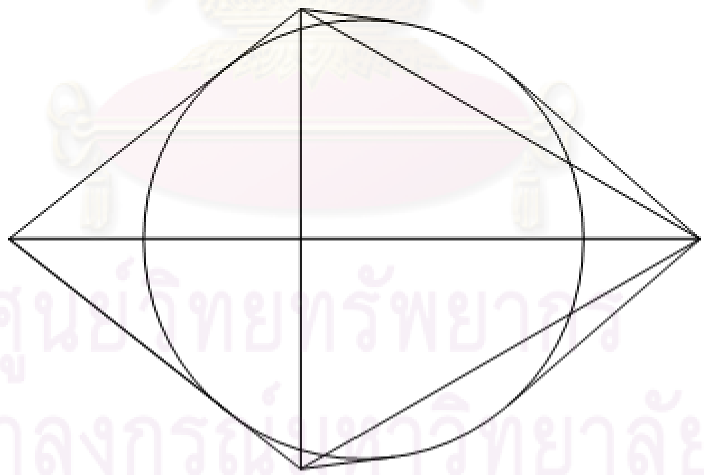
ต่อมาเราพิจารณาพบว่ากรณี 2.7 - 2.8 เมื่อใช้หลักการความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 2.7 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 4 ดังรูป



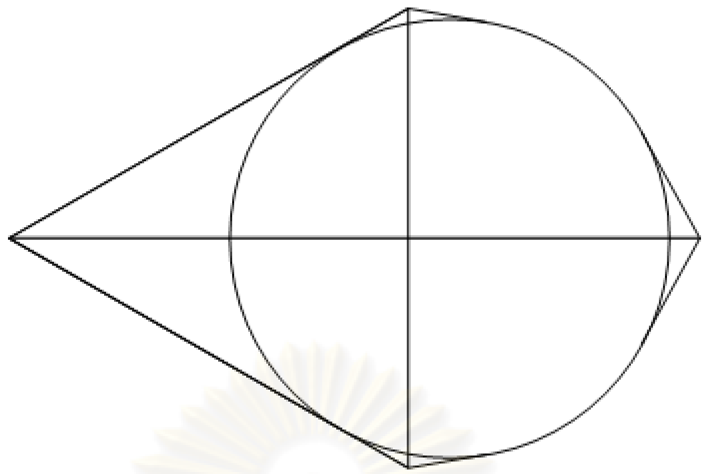
รูปที่ 4.12 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.7

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด 2 แบบดังรูปที่ 4.13 และ 4.14



รูปที่ 4.13 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.7 แบบที่ 1 มีพื้นที่ประมาณ 0.097503 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.13 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.7(A) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)



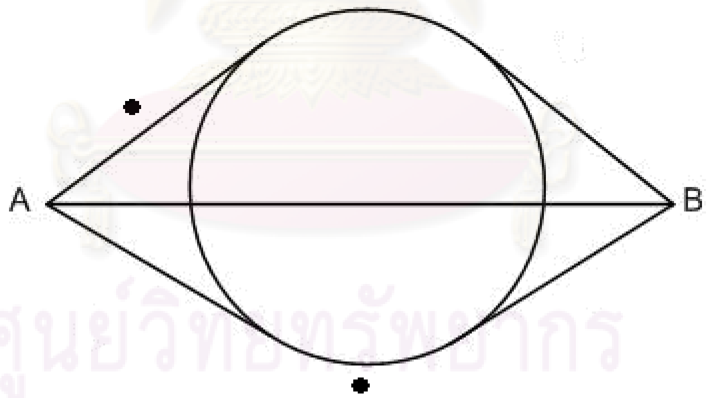
รูปที่ 4.14 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.7 แบบที่ 2 มีพื้นที่ประมาณ 0.098869 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.14 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.7(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.097503 ตารางหน่วย

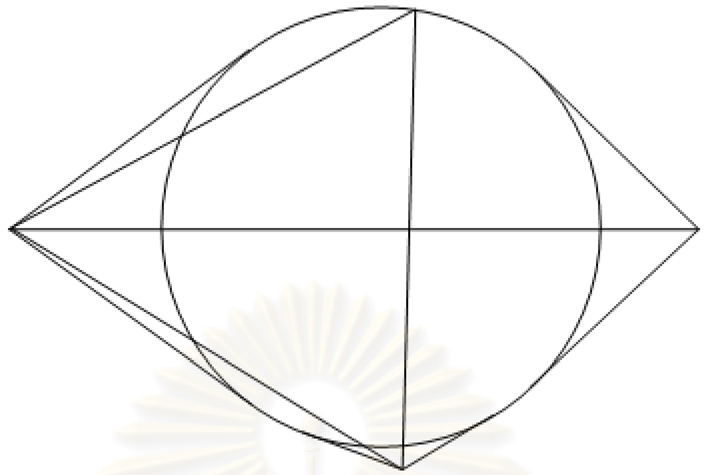
ต่อมาเราพิจารณาพบว่ากรณี 2.9 - 2.12 เมื่อใช้หลักการความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 2.9 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 5 ดังรูป



รูปที่ 4.15 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.9

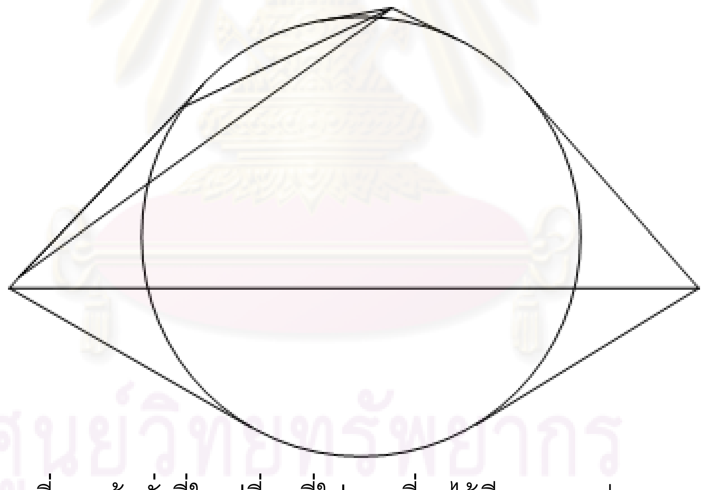
จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.9 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0972953 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.16 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.9(A) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

จากการคำนวณจะได้สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ใหญ่ที่สุดที่ใส่แบบที่ 2 ได้มีความสูงประมาณ 0.083849 หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.17 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.9(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

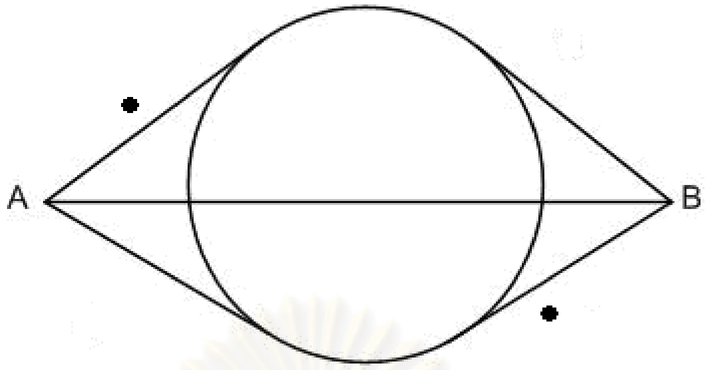
จะเห็นว่าความสูงน้อยกว่า 0.288675 หน่วย แสดงว่ากรณีที่ 2.9 ใส่แบบนี้ไม่ได้

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0972953 ตารางหน่วย

ต่อมาเราพิจารณาพบว่ากรณี 2.13 – 2.14 เมื่อใช้หลักการความสมมาตร เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 2.13 เพียงกรณีเดียว

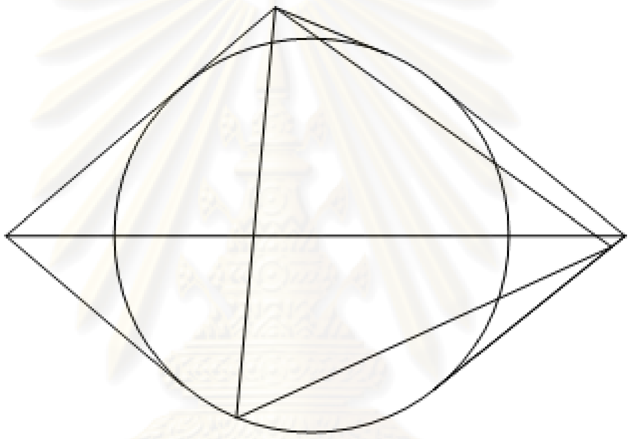
โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราจะแสดงเพียงแบบเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 6 ดังรูป



รูปที่ 4.18 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.13

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.19



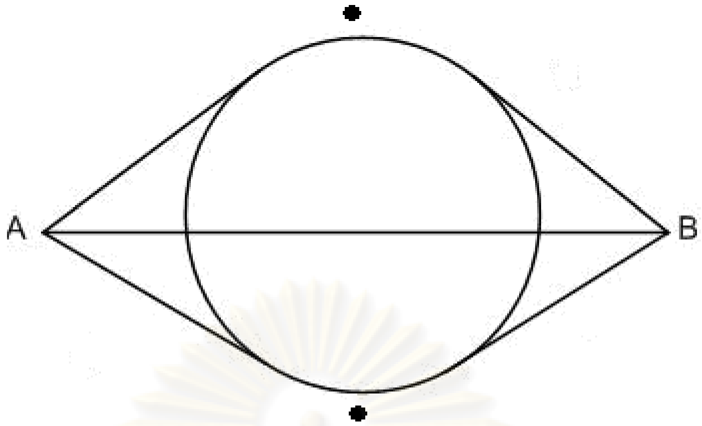
รูปที่ 4.19 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.13 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0979194 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.19 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.13 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0972953 ตารางหน่วย

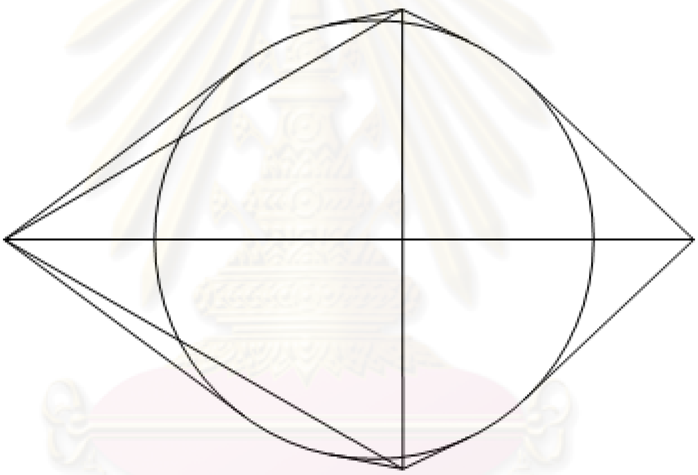
ส่วนกรณีสุดท้ายคือ กรณี 2.15 เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราจะแสดงเพียงแบบเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2, 5 ดังรูป



รูปที่ 4.20 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.15

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.21 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.15 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0970439 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.21 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 2.15 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0970439 ตารางหน่วย

กรณีที่ 3 คือทั้ง 3 จุดยอดของ T อยู่นอก H ซึ่งมี 18 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่ 3.1 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 2 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 4

กรณีที่ 3.2 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 2 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.3 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 2 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.4 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 4

กรณีที่ 3.5 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.6 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.7 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.8 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.9 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 1 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 5 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.10 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 4

กรณีที่ 3.11 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.12 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 3 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.13 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.14 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.15 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 2 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 5 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.16 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 3 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 5

กรณีที่ 3.17 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 3 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 4 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

กรณีที่ 3.18 จุด Q_1 อยู่บริเวณ 3 จุด Q_2 อยู่บริเวณ 5 และ จุด Q_3 อยู่บริเวณ 6

เมื่อใช้หลักการความสมมาตรเราจะจัดกลุ่มใหม่ได้ดังนี้

กรณีที่ 3(A) ได้แก่ กรณีที่ 3.1, 3.7, 3.12, 3.18

กรณีที่ 3(B) ได้แก่ กรณีที่ 3.4, 3.6, 3.8, 3.17

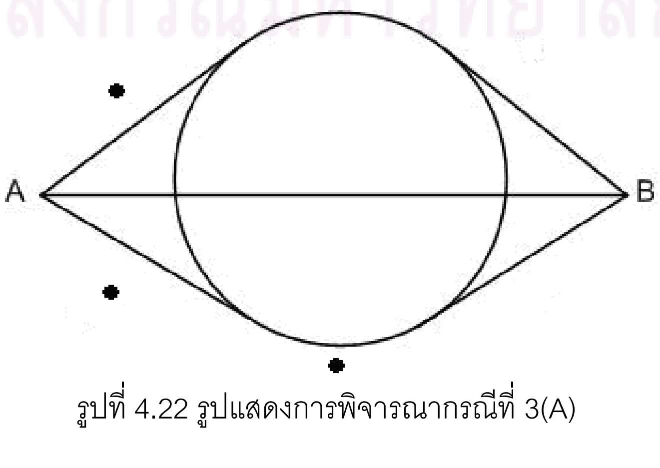
กรณีที่ 3(C) ได้แก่ กรณีที่ 3.2, 3.11, 3.13, 3.15

กรณีที่ 3(D) ได้แก่ กรณีที่ 3.5, 3.14

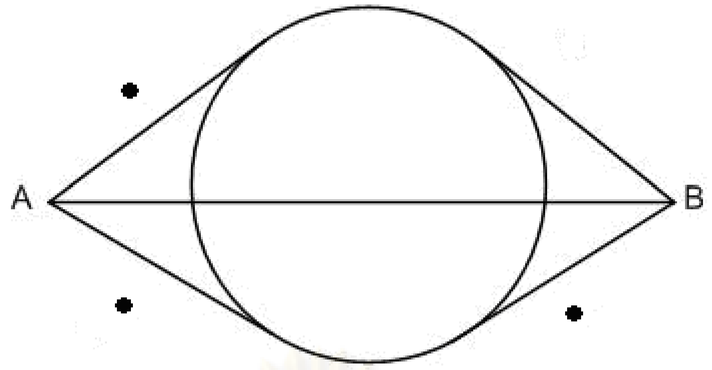
กรณีที่ 3(E) ได้แก่ กรณีที่ 3.3, 3.9, 3.10, 3.16

พิจารณากรณีที่ 3(A) เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณีที่ 3.7 เพียงกรณีเดียว ในทำนองเดียวกันกรณีที่ 3(B) เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณีที่ 3.8 เพียงกรณีเดียว โดยที่เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในกรณีที่ 3.7 และ 3.8 รวมกัน

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 4, 5 และ 1, 4, 6 ดังรูป

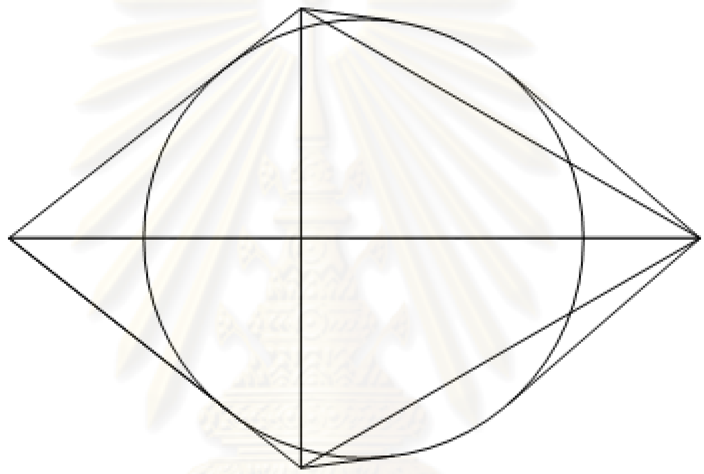


รูปที่ 4.22 รูปแสดงการพิจารณากรณีที่ 3(A)



รูปที่ 4.23 รูปแสดงการพิจารณากรณีที่ 3(B)

จากการคำนวณกรณีที่ 3(A) และ 3(B) จะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.24



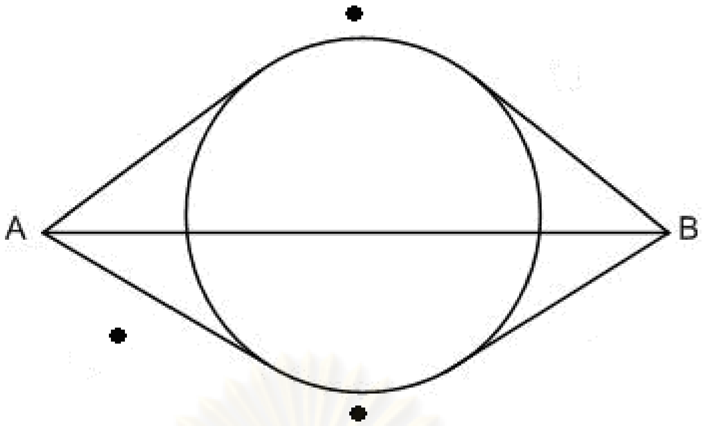
รูปที่ 4.24 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณีที่ 3(A) และ 3(B) มีพื้นที่ประมาณ 0.0975032 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.24 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 3(A) และ 3(B) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

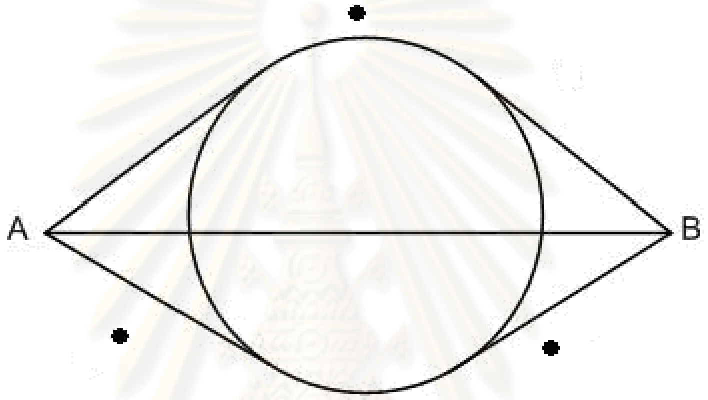
ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0975032 ตารางหน่วย

พิจารณาพบว่ากรณีที่ 3(C) เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณี 3.13 เพียงกรณีเดียว ในทำนองเดียวกันกรณีที่ 3(D) เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณีที่ 3.14 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2, 4, 5 และ 2, 4, 6 ดังรูป

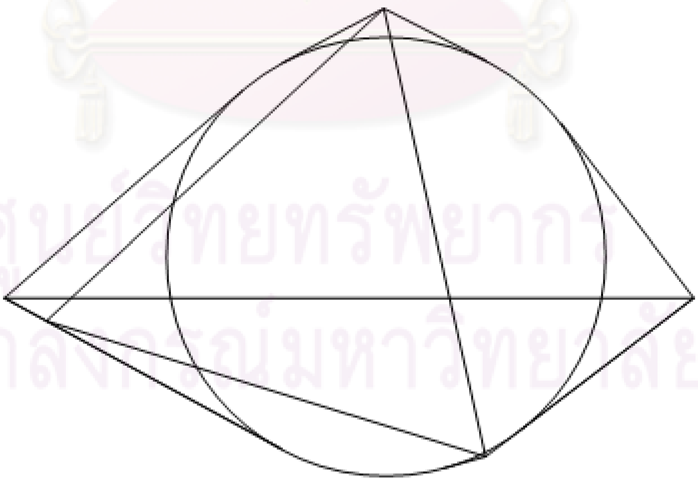


รูปที่ 4.25 รูปแสดงการพิจารณากรณีที่ 3(C)



รูปที่ 4.26 รูปแสดงการพิจารณากรณีที่ 3(D)

จากการคำนวณกรณีที่ 3(C) และ 3(D) จะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.27



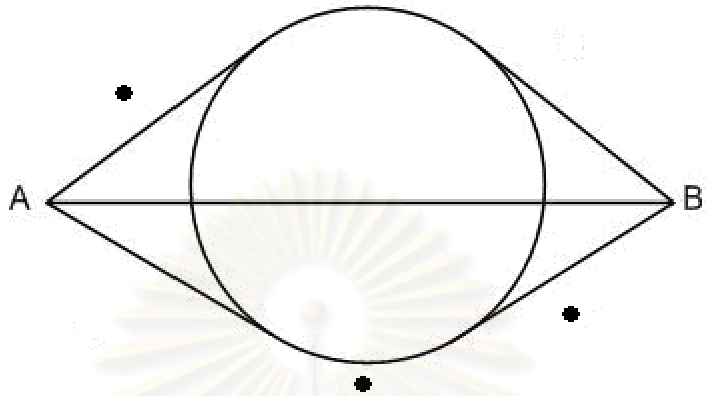
รูปที่ 4.27 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณีที่ 3(C) และ 3(D) มีพื้นที่ประมาณ 0.0981317 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.27 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 3(C) และ 3(D) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.09781317 ตารางหน่วย

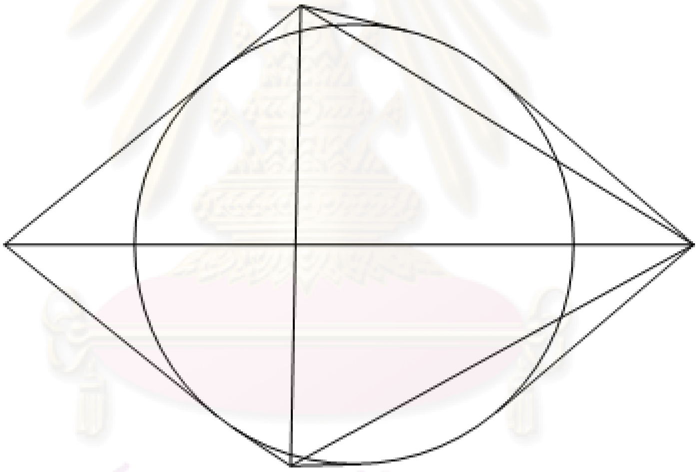
สุดท้ายพิจารณากรณีที่ 3(E) เราจะแสดงการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดของกรณีที่ 3.9 เพียงกรณีเดียว

พิจารณาการหลุดบริเวณที่ 1, 5, 6 ดังรูป



รูปที่ 4.28 รูปแสดงการพิจารณากรณีที่ 3(E)

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.29



รูปที่ 4.29 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณีที่ 3(E) มีพื้นที่ประมาณ 0.0974724 ตร.หน่วย

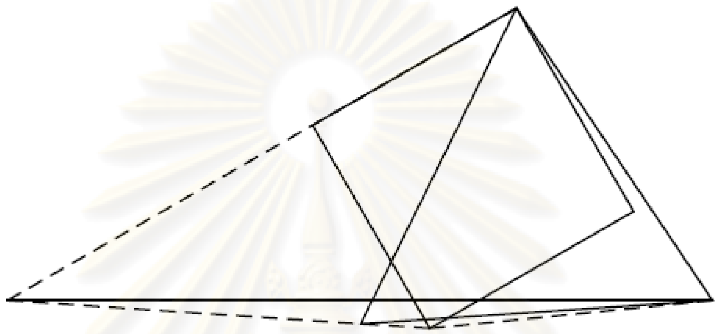
สำหรับรูปที่ 4.29 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 1 กรณีที่ 3(E) ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.0974724 ตารางหน่วย

จากทุกกรณีพบว่าคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L_1 T_1 และ C_1 มีพื้นที่น้อยสุดประมาณ 0.0970439 ตารางหน่วยในกรณี 2.15

4.2 การประยุกต์ใช้กับงานวิจัยของสิระและธีรสรรค์

สิระ ศรีสวัสดิ์และธีรสรรค์ ขันธวิทย์ [20] ได้ปรับปรุงขอบเขตล่างพื้นที่ของแผ่นปิดทับของเส้นโค้งหนึ่งหน่วย โดยพิจารณาหาคอนเวกฮัลล์เล็ก ๆ สำหรับเส้นตรงหนึ่งหน่วย เส้นโค้งรูปตัววียาวด้านละ $\frac{1}{2}$ หน่วย และเส้นโค้งรูปตัวยูยาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย โดยปรับปรุงพื้นที่จาก 0.2194 มาเป็น 0.227498

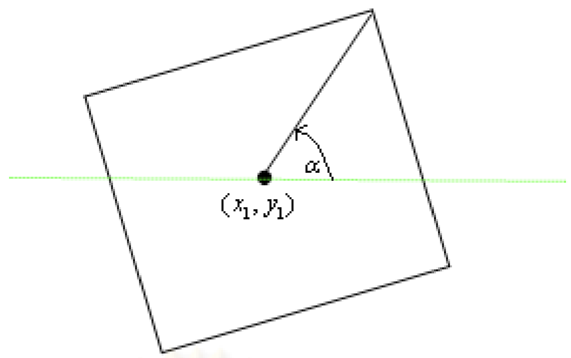


รูปที่ 4.30 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดที่มีพื้นที่ 0.227589669377 ตารางหน่วย ของสิระและธีรสรรค์

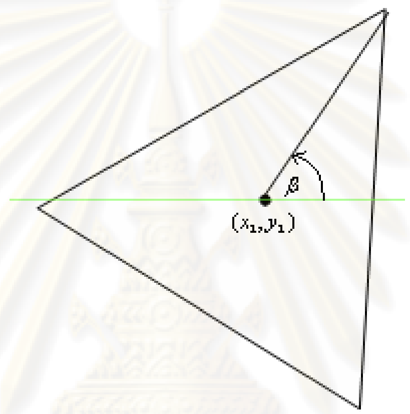
ต่อไปเราจะใช้วิธีการในหัวข้อ 4.1 มาประมาณค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดสำหรับงานวิจัยนี้ โดยสิระและธีรสรรค์ ได้ใช้ grid-search algorithm ทำการหาพื้นที่ที่น้อยที่สุดซึ่งที่ค่าเท่ากับ 0.22762844 ตารางหน่วย จากนั้นนำค่าที่ได้มาเปรียบเทียบกัน เพื่อเป็นการสนับสนุนว่าวิธีการในหัวข้อ 4.1 นั้นน่าเชื่อถือ

เราจะประมาณค่าพื้นที่คอนเวกซ์เล็กสุดของงานวิจัยนี้ ซึ่งมีวิธีดำเนินการดังต่อไปนี้

ให้ L แทนส่วนของเส้นตรงหนึ่งหน่วย T แทนสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{2}$ หน่วย และ S แทนสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้จุดปลายของ L อยู่ที่พิกัด $A(0,0)$ และ $B(1,0)$ ให้จุดศูนย์กลางของ S คือ $S_0(x_1,y_1)$ และ T คือ $T_0(x_2,y_2)$ ให้มุมในการหมุนของ S และ T คือ α และ β ตามลำดับ



รูปที่ 4.31 การหมุนของ α



รูปที่ 4.32 การหมุนของ β

ให้จุดยอดของ S คือ S_1, S_2, S_3, S_4 จะได้พิกัดดังนี้

$$S_1 = S_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\cos\alpha, \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\alpha \right)$$

$$S_2 = S_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$S_3 = S_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\cos(\alpha + \pi), \frac{\sqrt{2}}{6}\sin(\alpha + \pi) \right)$$

$$S_4 = S_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

ให้จุดยอดของ T คือ T_1, T_2, T_3 จะได้พิกัดดังนี้

$$T_1 = T_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\beta, \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\beta \right)$$

$$T_2 = T_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$T_3 = T_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\left(\beta + \frac{4\pi}{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\left(\beta + \frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

จากบทตั้งใน [20] จะได้ว่า

1. $S_1, S_2, S_3, S_4 \in [0,1] \times [-0.46, 0.46]$ จาก Proposition 6

2. $T_1, T_2, T_3 \in [0,1] \times [-0.46, 0.46]$ จาก Proposition 6

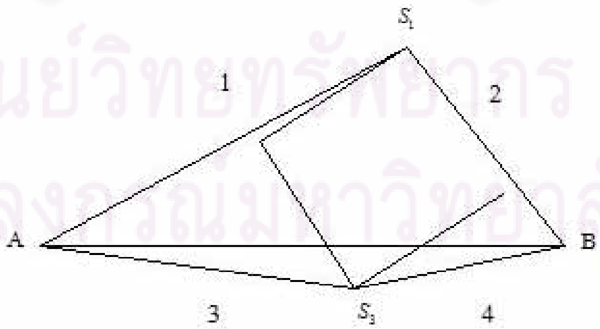
3. $\alpha \in [45^\circ, 78^\circ]$ จาก Lemma 4

4. $\beta \in [83^\circ, 97^\circ]$ จาก Lemma 4

ให้ $(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, \beta) \in X \subset R^6$

ต่อไปเราจะพิจารณารูปแบบการวาง L , S และ T ที่สอดคล้องตามข้อ 1 – 4 โดยเราจะแบ่งเป็น 3 กรณีใหญ่ๆ โดยใช้คอนเวกซ์ฮัลล์ของ L และ S เป็นเกณฑ์

ให้ H เป็นคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L และ S



จากรูปจุดยอดของ T จะอยู่นอก H ได้ 4 บริเวณ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

บริเวณที่ 1 คืออาณาบริเวณที่อยู่เหนือ H และอยู่เหนือเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปถึง S_1

บริเวณที่ 2 คืออาณาบริเวณที่อยู่เหนือ H และอยู่เหนือเส้นตรงที่ลากจากจุด B ไปถึง S_1

บริเวณที่ 3 คืออาณาบริเวณที่อยู่ใต้ H และอยู่ใต้เส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปถึง S_3

บริเวณที่ 4 คืออาณาบริเวณที่อยู่ใต้ H และอยู่ใต้เส้นตรงที่ลากจากจุด B ไปถึง S_3

แบ่งกรณีได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มี 1 จุดของ T อยู่นอก H สมมติว่าคือ จุด T_1

กรณีที่ 2 มี 2 จุดของ T อยู่นอก H สมมติว่าคือ จุด T_1 และ T_2

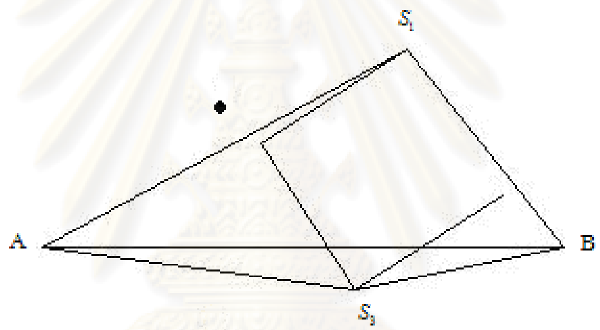
กรณีที่ 3 ทั้ง 3 จุดของ T อยู่นอก H

โดยแต่ละกรณีจะกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้นตามข้อ 1 – 4 แต่มุม β ไม่กำหนดเงื่อนไข ในการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์นี้เราจะแสดงเพียงกรณีที่ 1 และ 2 เท่านั้น ส่วนกรณีที่ 3 จะไปรวมอยู่กรณีที่ 2 แล้ว กล่าวคือ ในกรณีที่ 2 เรากำหนดให้มีจุดหลุด 2 จุด โดยที่ไม่ต้องสนใจว่าจุดที่ 3 จะหลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ H

กรณีที่ 1 คือมี 1 จุดของ T อยู่นอก H ซึ่งมี 4 กรณีย่อย ดังนี้

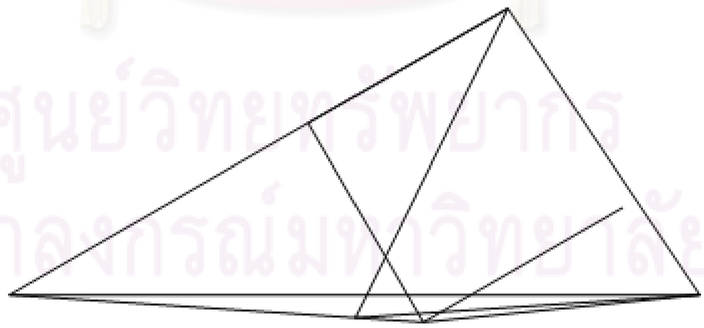
กรณี 1.1 T_1 อยู่บริเวณที่ 1

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1 ดังรูป



รูปที่ 4.33 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.1

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.34



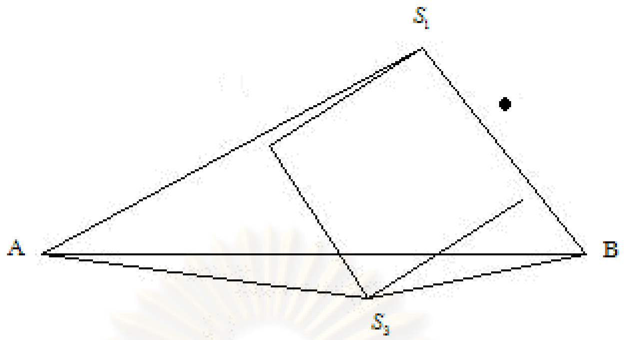
รูปที่ 4.34 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 1.1 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.22759 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.34 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 1.1 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.22759 ตารางหน่วย

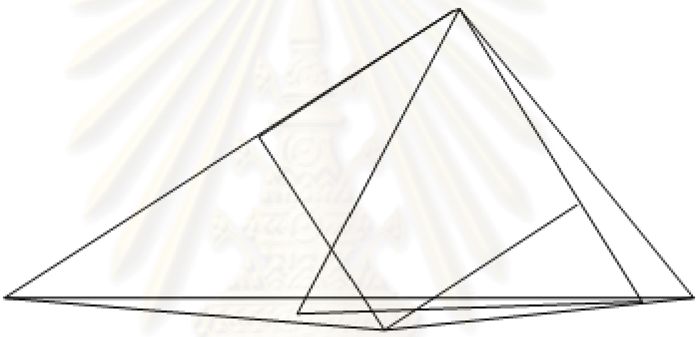
กรณี 1.2 T_1 อยู่บริเวณที่ 2

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2 ดังรูป



รูปที่ 4.35 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.2

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.36



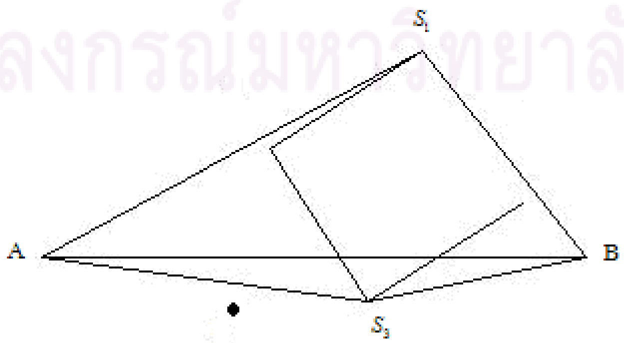
รูปที่ 4.36 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดที่หลุดบริเวณ 2 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.233506 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.36 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 1.2 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.233506 ตารางหน่วย

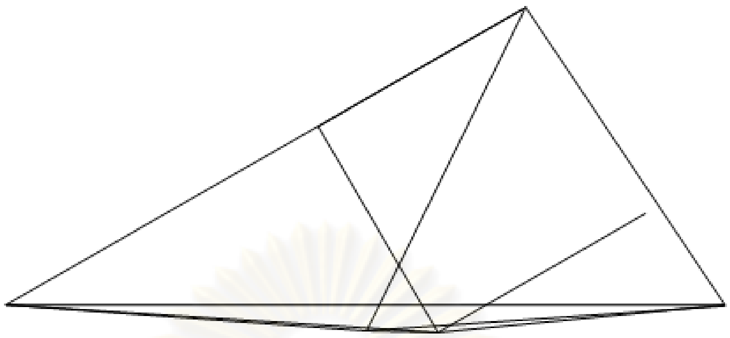
กรณี 1.3 T_1 อยู่บริเวณที่ 3

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 3 ดังรูป



รูปที่ 4.37 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.3

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.38



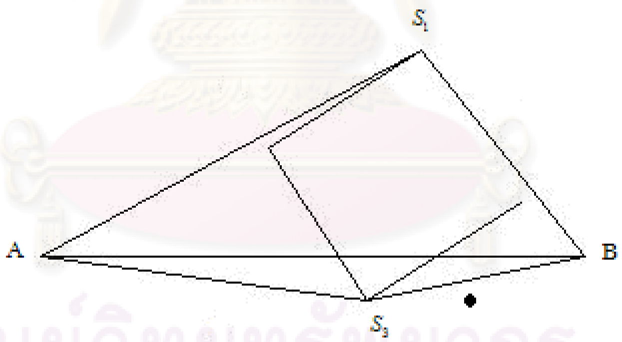
รูปที่ 4.38 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 1.3 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.228916 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.38 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 1.3 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.228916 ตารางหน่วย

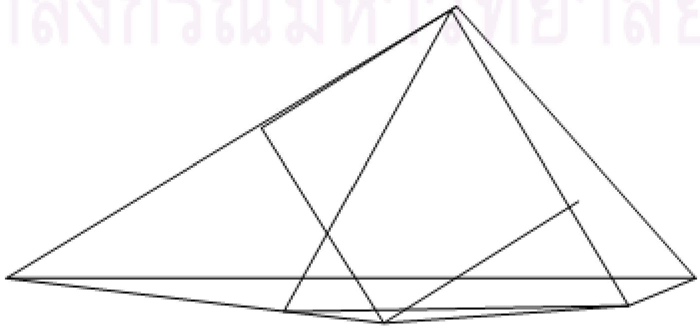
กรณี 1.4 T_1 อยู่บริเวณที่ 4

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 4 ดังรูป



รูปที่ 4.39 รูปแสดงการพิจารณากรณี 1.4

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.40



รูปที่ 4.40 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 1.4 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.235536 ตร.หน่วย

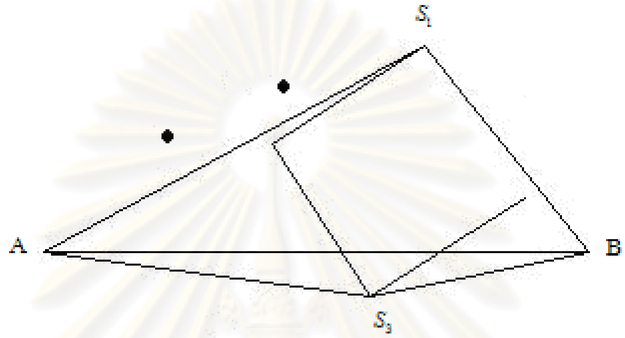
สำหรับรูปที่ 4.40 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 1.4 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.235536 ตารางหน่วย

กรณีที่ 2 คือมี 2 จุดของ T อยู่นอก H ได้ ซึ่งมี 8 กรณีย่อย ดังนี้

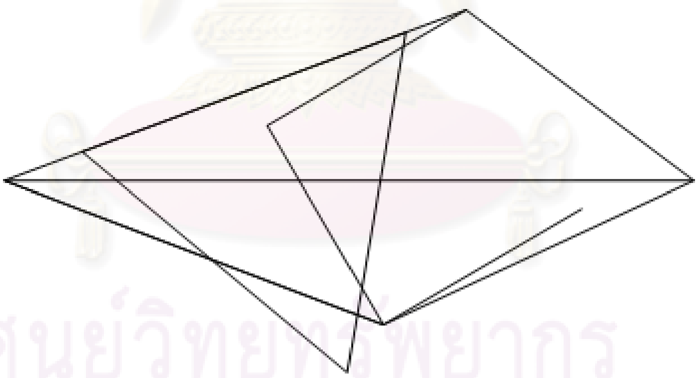
กรณี 2.1 T_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 1

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 1 ดังรูป



รูปที่ 4.41 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.1

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.42



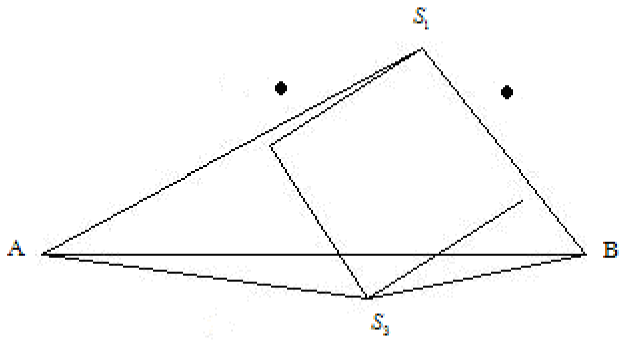
รูปที่ 4.42 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.1 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.227897 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.42 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.1 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.227897 ตารางหน่วย

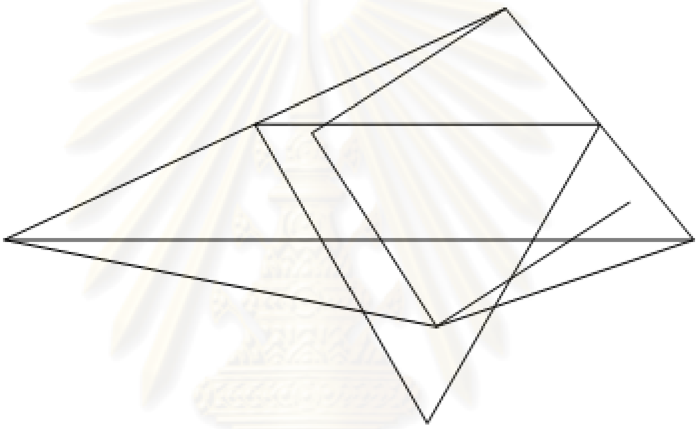
กรณี 2.2 T_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 2

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 2 ดังรูป



รูปที่ 4.43 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.2

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.44



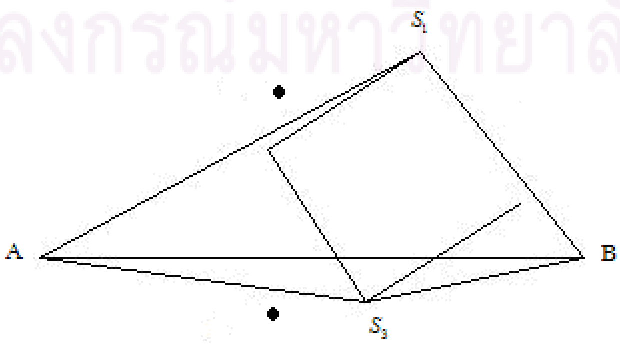
รูปที่ 4.44 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.2 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.230295 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.44 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.2 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.230295 ตารางหน่วย

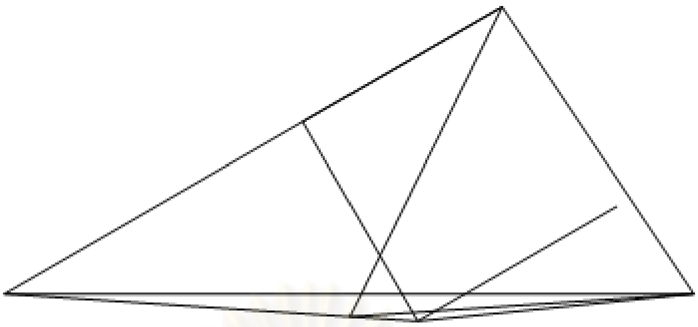
กรณี 2.3 T_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 3

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 3 ดังรูป



รูปที่ 4.45 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.3

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.46



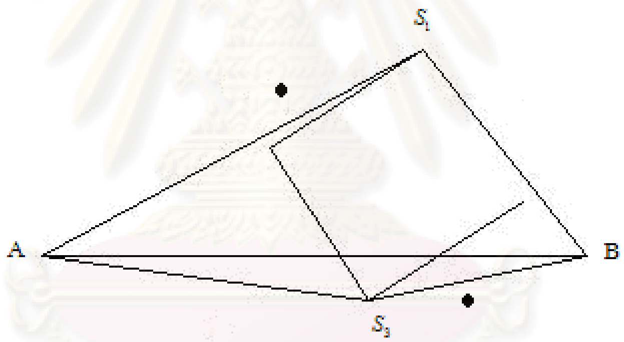
รูปที่ 4.46 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.3 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.22759 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.46 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.3 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.22759 ตารางหน่วย

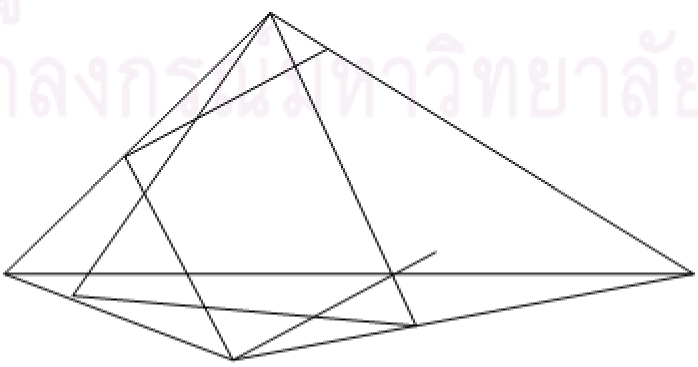
กรณี 2.4 T_1 อยู่บริเวณที่ 1 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 4

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 1, 4 ดังรูป



รูปที่ 4.47 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.4

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.48



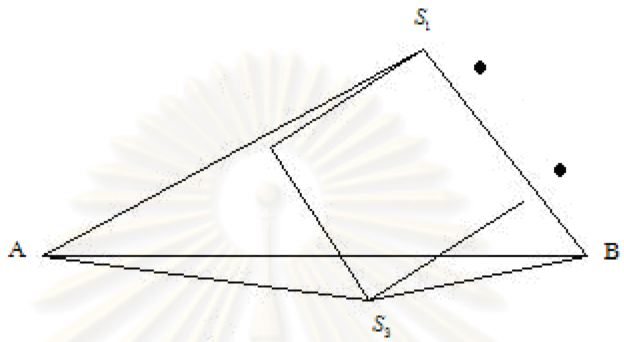
รูปที่ 4.48 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.4 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.23512 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.48 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.4 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.23512 ตารางหน่วย

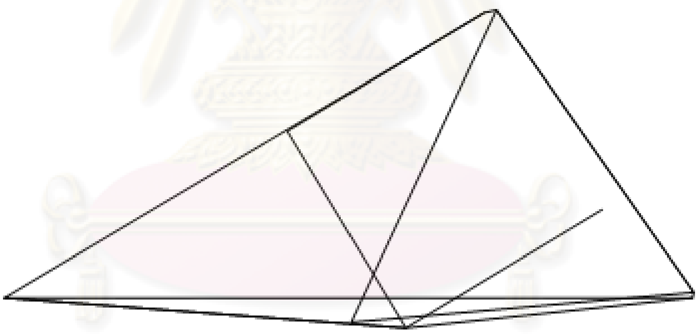
กรณี 2.5 T_1 อยู่บริเวณที่ 2 และ T_3 อยู่บริเวณที่ 2

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2, 2 ดังรูป



รูปที่ 4.49 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.5

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.50



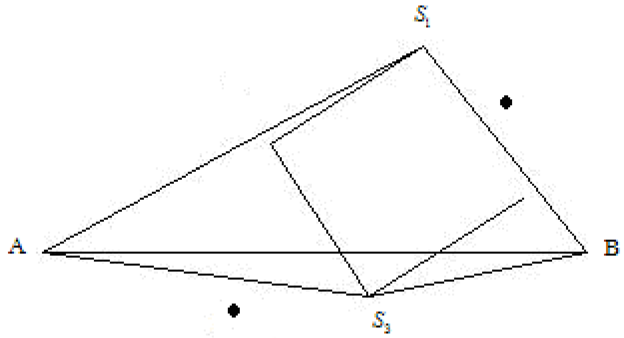
รูปที่ 4.50 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.5 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.234455 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.50 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.5 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0. 234455 ตารางหน่วย

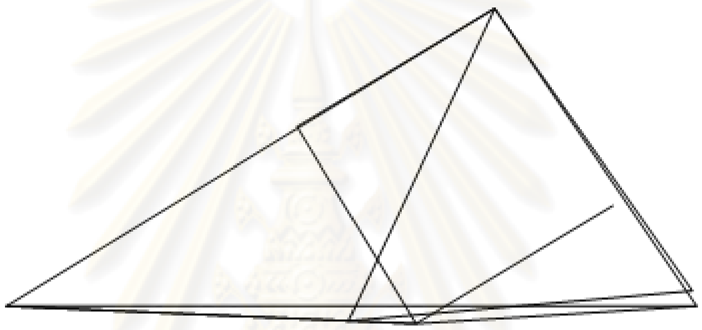
กรณี 2.6 T_1 อยู่บริเวณที่ 2 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 3

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2, 3 ดังรูป



รูปที่ 4.51 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.6

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.52



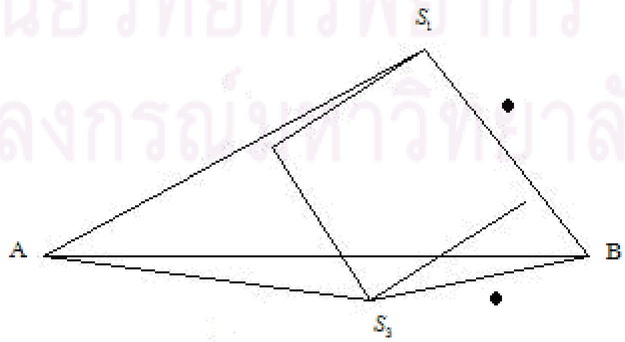
รูปที่ 4.52 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.6 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.228698 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.52 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.6 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.228698 ตารางหน่วย

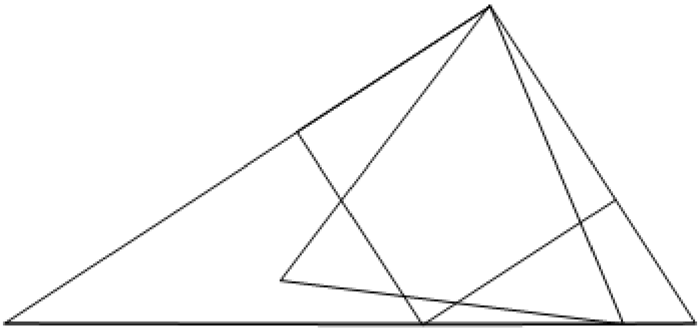
กรณี 2.7 T_1 อยู่บริเวณที่ 2 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 4

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 2, 4 ดังรูป



รูปที่ 4.53 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.7

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.54



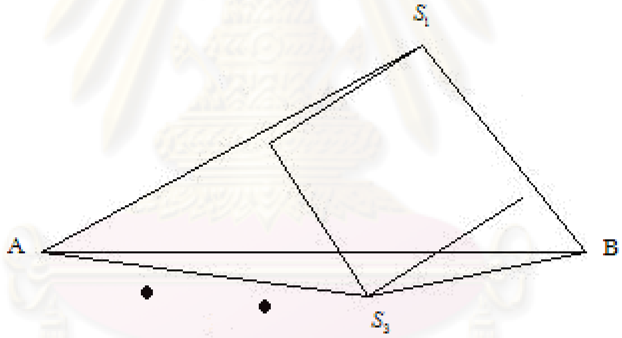
รูปที่ 4.54 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.7 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.23069 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.54 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.7 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.23069 ตารางหน่วย

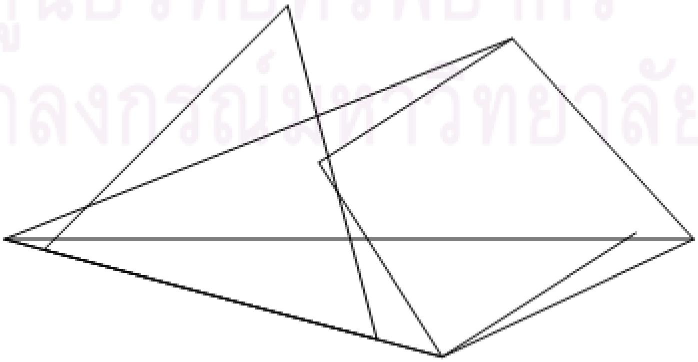
กรณี 2.8 T_1 อยู่บริเวณที่ 3 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 3

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 3, 3 ดังรูป



รูปที่ 4.55 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.8

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.56



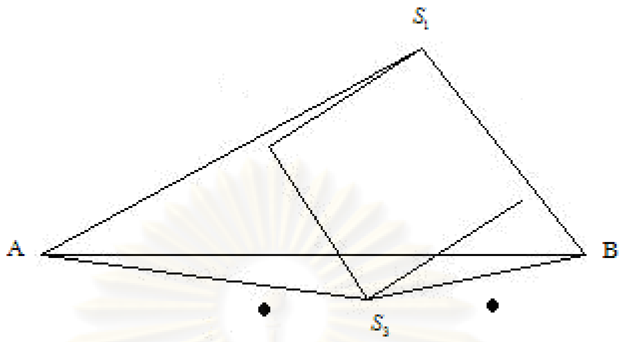
รูปที่ 4.56 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.8 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.23013 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.56 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.8 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.23013 ตารางหน่วย

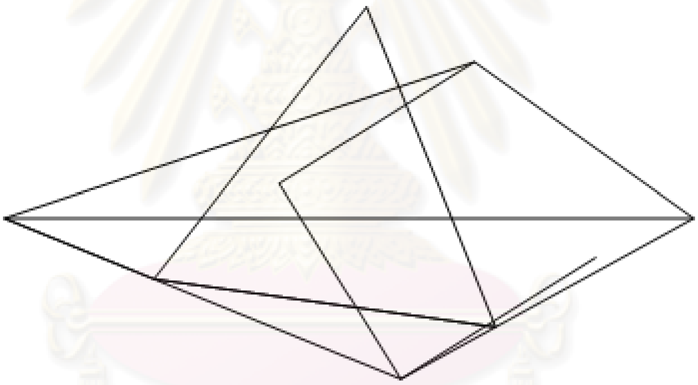
กรณี 2.9 T_1 อยู่บริเวณที่ 3 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 4

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 3, 4 ดังรูป



รูปที่ 4.57 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.9

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.58



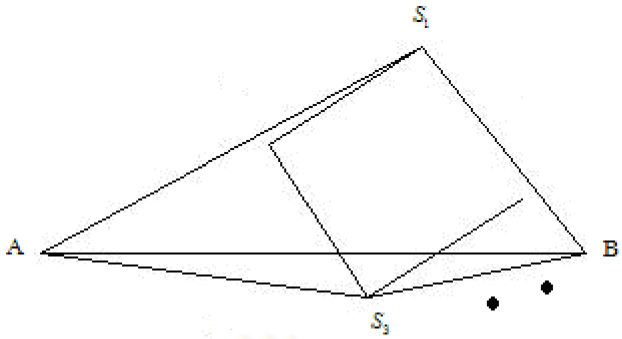
รูปที่ 4.58 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.9 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.229553 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.58 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.9 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0.229553 ตารางหน่วย

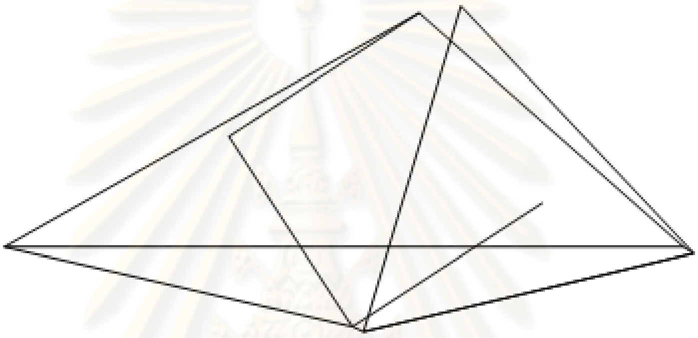
กรณี 2.10 T_1 อยู่บริเวณที่ 4 และ T_2 อยู่บริเวณที่ 4

พิจารณาการอยู่บริเวณที่ 4, 4 ดังรูป



รูปที่ 4.59 รูปแสดงการพิจารณากรณี 2.10

จากการคำนวณจะได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด ดังรูปที่ 4.60



รูปที่ 4.60 คอนเวกซ์ฮัลล์เล็กสุดกรณี 2.10 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.236482 ตร.หน่วย

สำหรับรูปที่ 4.60 ใช้โปรแกรม Mathematica version 6.0 (ดูในหัวข้อที่ 2 กรณีที่ 2.10 ซึ่งอยู่ในภาคผนวก)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดสำหรับกรณีนี้ประมาณ 0. 236482 ตารางหน่วย

จากทุกกรณีพบว่าคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L S และ T มีพื้นที่น้อยที่สุดประมาณ 0.22759 ตารางหน่วย ซึ่งอยู่ในกรณี 1.1 และ 2.3

ผลจากงานวิจัยของสิระและธีรสรรค์ ได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดเท่ากับ 0.227628 ตารางหน่วย โดยที่ $x_1 = 0.6625$ $y_1 = 0.1895$ $x_2 = 0.7415$ $y_2 = 0.1305$ $\alpha = 1.30829$ และ $\beta = 1.63299$ ซึ่งคำตอบนี้ได้มาจาก grid-search algorithm ส่วนผลที่เราหามาได้จากโปรแกรม mathematica นั้นได้พื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดเท่ากับ 0.22579 ตารางหน่วย ซึ่งอยู่ในกรณีที่ 1.1 หรือ 2.3 โดยที่ $x_1 = 0.660459$ $y_1 = 0.187845$ $x_2 = 0.740957$ $y_2 = 0.127395$ $\alpha = 1.30767$ และ $\beta = 1.63733$ ดังนั้นพื้นที่ของทั้งสองวิธีต่างกันประมาณ 0.000038 ตารางหน่วย และพารามิเตอร์ต่างกันประมาณ 0.0100444 หน่วย จะเห็นว่าทั้งสองวิธีให้คำตอบที่ใกล้เคียงกันรูปที่ได้มีลักษณะคล้ายกันมาก นั่นแสดงให้เห็นว่าวิธีในหัวข้อ 4.1 นั้นมีความน่าเชื่อถือ

ในบทนี้จะเห็นว่าวิธีหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่น้อยที่สุดโดยใช้หลักพิจารณาการหลุดของสามเหลี่ยมจากนั้นใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการประมาณ เราพบว่าวิธีนี้ใช้ได้ดีพอสมควร น่าจะใช้ตรวจสอบคำตอบของปัญหาอื่นได้ ส่วนในบทถัดไปจะเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดยใช้ grid-search algorithm ซึ่งเป็นวิธีที่ P. Brass และ M. Sharifi [3] ที่ใช้หาขอบเขตล่างของ Lebesques universal cover problem อีกทั้ง สิระ ศรีสวัสดิ์ และ ธีรสรรค์ ขันธวิทย์ ยังใช้วิธีการนี้ในการหาขอบเขตล่างของปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์

บทที่ 5

บทพิสูจน์โดย grid-search algorithm

ในบทนี้จะนำวิธี grid-search algorithm และบทตั้งเกี่ยวกับ Lipschitz bound มาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก โดยใช้โปรแกรม Matlab ก่อนที่เราจะดำเนินการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 เราจะพิสูจน์บทตั้งเกี่ยวกับ Lipschitz bound จากนั้นจะอธิบายวิธี grid-search algorithm และยกตัวอย่างประกอบ ทั้งในฟังก์ชัน 1 ตัวแปร และหลายตัวแปร เพื่อให้เห็นภาพมากขึ้น

5.1 Lipschitz bound

เนื่องจาก grid-search algorithm ไม่รับประกันการได้ค่าน้อยสุด ดังนั้นถ้าเราหาค่าน้อยสุดจาก grid-search algorithm ได้แล้ว และเรารู้ว่าค่านี้ต่างจากค่าน้อยสุดของฟังก์ชันไม่เกินเท่าใด แล้วเราจะสามารถบอกขอบเขตล่างของพื้นที่น้อยสุดของฟังก์ชันได้

Lipschitz bound จะเป็นขอบเขตที่ทำให้เราบอกได้ว่าค่าน้อยสุดที่ได้จาก grid-search algorithm ห่างจากค่าน้อยสุดของฟังก์ชันไม่เกินเท่าใด นั่นคือเมื่อเปลี่ยนพิกัดจุดไปเล็กน้อยค่าของพื้นที่ของคอนเวกซ์ฮัลล์จะเปลี่ยนไปไม่เกินเท่าใด ซึ่งเราจะใช้ Lipschitz bound นี้ และหาค่าน้อยสุดโดย grid-search algorithm ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดย Lipschitz bound นั้นถูกใช้ในงานวิจัยของ P. Brass และ M. Sharifi [PM] และงานวิจัยของสิระและธีรสรรค์ [20] ในการหาขอบเขตล่างของพื้นที่น้อยสุดของคอนเวกซ์ฮัลล์

จากบทที่ 3 X คือโครงแบบของ L, C, T $H(X)$ คือ คอนเวกซ์ฮัลล์ของ X $A(X)$ คือ พื้นที่ของ $H(X)$ และ $peri(H(X))$ คือ ความยาวรอบรูปของ $H(X)$

บทตั้ง 5.1 (Lipschitz bound) ให้ $X=\phi(x_1,y_1,x_2,y_2,\alpha)$ คือ โครงแบบใน U

ให้ $X'=\phi(x_1+\delta_{11},y_1+\delta_{12},x_2+\delta_{21},y_2+\delta_{22},\alpha+\theta_1)$ คือ โครงแบบใน U

ให้ $\max\limits_{x'\in H(X')}\min\limits_{x\in H(X)}\|x-x'\|=\delta$ โดยที่ $\|\ \ \|$ คือ Euclidean norm

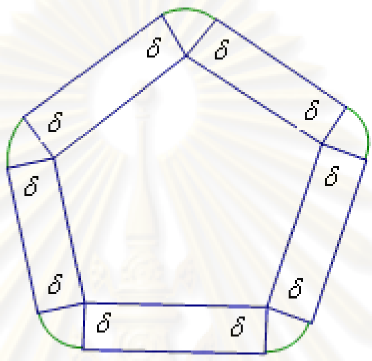
$$|A(X)-A(X')|\le\delta\, peri(H(X))+\pi\delta^2$$

บทพิสูจน์ ให้ $X=\phi(x_1,y_1,x_2,y_2,\alpha)$ คือ โครงแบบใน U

ให้ $X'=\phi(x_1+\delta_{11},y_1+\delta_{12},x_2+\delta_{21},y_2+\delta_{22},\alpha+\theta_1)$ คือโครงแบบใน U

ให้ $\max\limits_{x'\in H(X')}\min\limits_{x\in H(X)}\|x-x'\|=\delta$ โดยที่ $\|\quad\|$ คือ Euclidean norm

จะได้ $H(X')$ อยู่ในบริเวณรูปที่เกิดจากการเพิ่มขอบของ $H(X)$ ออกไป δ หน่วย

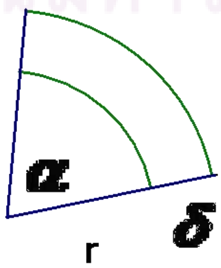


รูปที่ 5.1 รูปที่เกิดจากการเพิ่มขอบของ $H(X)$ ออกไป δ หน่วย เมื่อ $H(X)$ คือรูปห้าเหลี่ยม

พิจารณากรณี $H(X)$ เป็นรูปเหลี่ยม จะเห็นว่าพื้นที่จะเพิ่มขึ้นไม่เกินผลรวมของผลบวกพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมกว้าง δ หน่วยและผลบวกของส่วนโค้งวงกลมรัศมี δ หน่วย ซึ่งผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมกว้าง δ หน่วยซึ่งเท่ากับ $\delta peri(H(X))$ ตารางหน่วย และผลบวกของส่วนโค้งวงกลมรัศมี δ หน่วยเท่ากับ $\pi\delta^2$ ตารางหน่วย

ดังนั้น กรณีนี้ $|A(X)-A(X')|\le\delta peri(H(X))+\pi\delta^2$

ส่วนกรณีที่ $H(X)$ ไม่เป็นรูปเหลี่ยมกล่าวคือขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์บางขอบเป็นส่วนโค้ง



รูปที่ 5.2 รูปที่เกิดจากการเพิ่มขอบของ $H(X)$ ออกไป δ หน่วย เมื่อขอบ $H(X)$ เป็นส่วนโค้ง

ให้ C เป็นผลรวมของพื้นที่ที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการเพิ่มขอบของ $H(X)$ ออกไป δ หน่วย โดยพิจารณาเฉพาะส่วนที่ก่อกำเนิดโดยส่วนที่เป็นส่วนของเส้นตรงของขอบของ $H(X)$

ให้มีขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ของ $H(X)$ เป็นส่วนโค้งมุม α โดยที่ $0<\alpha\leq 2\pi$

พื้นที่จะเพิ่มไม่เกิน $\dfrac{\alpha}{2\pi}(\pi)\Big((r+\delta)^2-r^2\Big)+C=\dfrac{\alpha}{2}(2\delta r+\delta^2)+C$

$$=\delta\alpha r+\frac{\alpha}{2}\delta^2+C$$

$$=\delta\, peri(H(X))+\pi\delta^2$$

ดังนั้น ในกรณีนี้ $|A(X)-A(X')|\leq \delta\, peri(H(X))+\pi\delta^2$

❑

จากบทตั้งที่ 5.1 ทำให้เราได้เห็นว่า 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ในในโครงแบบห่างกันไม่เกิน δ มีพื้นที่ต่างกันไม่เกิน $\delta\, peri(H(X))+\pi\delta^2$

ในบทตั้งที่ 5.2 เราจะแสดงว่าจุด 2 จุดที่ซึ่งจุดหนึ่งเป็นจุดที่อยู่ในโครงแบบ ส่วนอีกหนึ่งจุดอยู่บนกริดที่ใกล้จุดแรกมากที่สุด มีพื้นที่ต่างกันไม่เกินฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของขนาดกริดของแต่ละตัวแปร จากนั้นในบทตั้งที่ 5.3 เราจะแสดงว่าจุด 2 จุดที่ซึ่งจุดหนึ่งเป็นจุดที่อยู่ในโครงแบบที่ให้ค่าน้อยสุด ส่วนอีกหนึ่งจุดอยู่บนกริดที่ให้ค่าน้อยที่สุด มีพื้นที่ต่างกันไม่เกินฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของขนาดกริดของแต่ละตัวแปร นั่นคือเมื่อเรากำหนดขนาดกริดของแต่ละตัวแปรมาให้ เราก็จะทราบผลต่างของพื้นที่มีค่าไม่เกินเท่าใด ดังนั้นเราจะหาขอบเขตล่างของพื้นที่ได้

บทตั้ง 5.2 ให้ $d_{11},\ d_{12},\ d_{21},\ d_{22},\ \theta$ คือขนาดกริดของ $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \alpha$ ตามลำดับใน grid-search algorithm

ให้ $X=\phi(x_1,y_1,x_2,y_2,\alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $X'=\phi(x_1+\delta_{11},y_1+\delta_{12},x_2+\delta_{21},y_2+\delta_{22},\alpha+\theta_1)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่งพารามิเตอร์ของ X' อยู่บนจุดกริดที่ใกล้พารามิเตอร์ของ X มากที่สุด

แล้ว $|A(X)-A(X')|\leq Max\left\{\delta_1 peri(H(X))+\pi\delta_1^2,\delta_2 peri(H(X))+\pi\delta_2^2\right\}$

โดยที่ $\delta_1 = \sqrt{\frac{d_{11}^2}{4} + \frac{d_{12}^2}{4}}$ และ $\delta_2 = \sqrt{\frac{d_{21}^2}{4} + \frac{d_{22}^2}{4}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $X' = \phi(x_1 + \delta_{11}, y_1 + \delta_{12}, x_2 + \delta_{21}, y_2 + \delta_{22}, \alpha + \theta_1)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่งพารามิเตอร์ของ X' อยู่บนจุดกริดที่ใกล้พารามิเตอร์ของ X มากที่สุด โดยที่ $|\delta_{11}| \le \frac{d_{11}}{2}$, $|\delta_{12}| \le \frac{d_{12}}{2}$, $|\delta_{21}| \le \frac{d_{21}}{2}$, $|\delta_{22}| \le \frac{d_{22}}{2}$ และ $|\theta_1| \le \frac{\theta}{2}$

เราจะเห็นว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมของ X' ถูกเลื่อนจากจุดศูนย์กลางที่พิกัด (x_1, y_1) ในทิศทาง $(\delta_{11}, \delta_{12})$ ดังนั้น แต่ละจุดของวงกลมจะเคลื่อนที่ไกลจากเดิมไม่เกิน $\delta_1 = \sqrt{\frac{d_{11}^2}{4} + \frac{d_{12}^2}{4}}$ หน่วย ทำนองเดียวกันจุดศูนย์กลางสามเหลี่ยมของ X' ถูกเลื่อนจากจุดศูนย์กลางที่พิกัด (x_2, y_2) ในทิศทาง $(\delta_{21}, \delta_{22})$ ทำให้แต่ละจุดจะเคลื่อนที่ไกลจากเดิมไม่เกิน $\sqrt{\frac{d_{21}^2}{4} + \frac{d_{22}^2}{4}}$ และเมื่อหมุนสามเหลี่ยมรอบจุดศูนย์กลางไปเป็นมุม θ_1 จุดยอดใหม่ทั้งสามจะเคลื่อนที่เปลี่ยนไปจากเดิม $\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$ ดังนั้นแต่ละจุดของสามเหลี่ยมจะเคลื่อนที่ไกลจากเดิมไม่เกิน $\delta_2 = \sqrt{\frac{d_{21}^2}{4} + \frac{d_{22}^2}{4}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$ หน่วย

โดยบทตั้ง 5.1

$$|A(X) - A(X')| \le Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\}$$

❑

บทตั้ง 5.3 ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $\bar{X}$ คือ โครงแบบซึ่ง $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm

$$|A(X) - A(\bar{X})| \le Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\}$$

โดยที่ $\delta_1 = \sqrt{\frac{d_{11}^2}{4} + \frac{d_{12}^2}{4}}$ และ $\delta_2 = \sqrt{\frac{d_{21}^2}{4} + \frac{d_{22}^2}{4}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $\bar{X}$ คือ โครงแบบซึ่ง $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm

ให้ $g(d) = Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\}$

จากบทตั้ง 5.2

$$| A(X') - A(X) | \leq Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\} = g(d)$$

นั่นคือ $A(X') - g(d) \leq A(X)$

เพราะว่า $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm จะได้ $A(\bar{X}) \leq A(X')$

ดังนั้น $A(\bar{X}) - g(d) \leq A(X') - g(d) \leq A(X)$

นั่นคือ $| A(X) - A(\bar{X}) | \leq Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\}$

❑

ในบทตั้งที่ 5.3 ทำให้เราเห็นว่าจุด 2 จุดที่ซึ่งจุดหนึ่งเป็นจุดที่อยู่ในโครงแบบที่ให้ค่าน้อยสุด ส่วนอีกหนึ่งจุดอยู่บนกริดที่ให้ค่าน้อยที่สุด มีพื้นที่ต่างกันไม่เกิน $Max\left\{\delta_1 peri(H(X)) + \pi\delta_1^2, \delta_2 peri(H(X)) + \pi\delta_2^2\right\}$ ซึ่งอยู่ในรูปของ $\delta_1, \delta_2, peri(H(X))$ ในบทตั้งที่ 5.4 เราจะแสดงว่า $peri(H(X)) \leq 2.03863$ จากนั้นในบทตั้งที่ 5.5 เราจะแสดงว่าจุด 2 จุดที่ซึ่งจุดหนึ่งเป็นจุดที่อยู่ในโครงแบบที่ให้ค่าน้อยสุด ส่วนอีกหนึ่งจุดอยู่บนกริดที่ให้ค่าน้อยที่สุด มีพื้นที่ต่างกันไม่เกินฟังก์ชันที่อยู่ในรูป δ_1, δ_2 โดยเราจะนำบทตั้งที่ 5.5 ไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ต่อไป

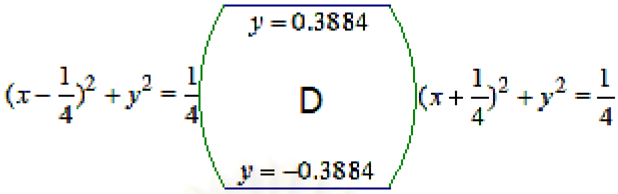
บทตั้ง 5.4 ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

$$peri(H(X)) \leq 2.03863$$

บทพิสูจน์ ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ดังนั้น $X \subset K$ ซึ่งสอดคล้องตามบทตั้ง 3.2.4

จะได้ $H(X) \subset D$ โดยที่ D คืออาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ $y = \pm 0.3884$ และส่วนโค้ง $(x-\frac{1}{4})^2 + y^2 = 1$ และ $(x+\frac{1}{4})^2 + y^2 = 1$



รูปที่ 5.3 อาณาบริเวณ D

เพราะว่า $H(X) \subset D$ โดยบทตั้ง 2.2.4 จะได้ $peri(H(X)) \le peri(D)$

จากการคำนวณ $peri(D) = 2.03863$ ดังนั้น $peri(H(X)) \le 2.03863$

❑

บทตั้ง 5.5 ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $\bar{X}$ คือ โครงแบบซึ่ง $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm

$$|A(X) - A(\bar{X})| \le Max\left\{2.03863\delta_1 + \pi\delta_1^2, 2.03863\delta_2 + \pi\delta_2^2\right\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $X = \phi(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $\bar{X}$ คือ โครงแบบซึ่ง $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm

จากบทตั้ง 5.3 และ 5.4 จะได้

$$|A(X) - A(\bar{X})| \le Max\left\{2.03863\delta_1 + \pi\delta_1^2, 2.03863\delta_2 + \pi\delta_2^2\right\}$$

❑

จากบทตั้งที่ 5.5 เราจะเห็นว่าจุด 2 จุดที่ซึ่งจุดหนึ่งเป็นจุดที่อยู่ในโครงแบบที่ให้ค่าน้อยสุด ส่วนอีกหนึ่งจุดอยู่บนกริดที่ให้ค่าน้อยที่สุด มีพื้นที่ต่างกันไม่เกิน $Max\left\{2.03863\delta_1 + \pi\delta_1^2, 2.03863\delta_2 + \pi\delta_2^2\right\}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป δ_1, δ_2 ดังนั้นถ้าเรากำหนดค่า δ_1, δ_2 มาให้ เราจะสามารถหาค่าขอบเขตล่างของพื้นที่ได้

ต่อไปเราจะอธิบายถึงวิธีการหาค่าน้อยสุดของ grid-search algorithm โดยจะเริ่มจาก grid-search 1 ตัวแปร และหลายตัวแปร พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้เห็นภาพมากขึ้น จากนั้นเราจะนำกระบวนการนี้และบทตั้ง 5.5 ไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1

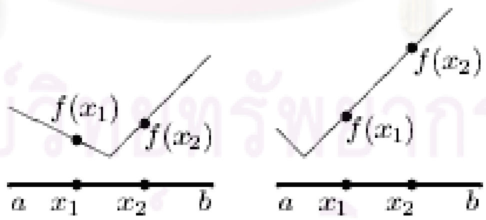
5.2 **ความรู้เบื้องต้นของ** grid-search algorithm

กริด คือ ตารางซึ่งมีความยาวเท่ากันทุกช่องและความกว้างเท่ากันทุกช่อง

จุดกริด คือ จุดมุมของกริด

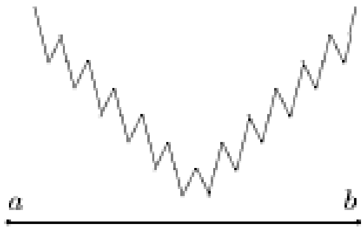
ขนาดของกริด คือ ความกว้างของกริด × ความยาวของกริด

พิจารณาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันฐานเดียว (unimodal function) บน $[a,b]$ คือ ฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีสมบัติว่า มีจำนวนจริง m ที่ซึ่งทำให้ f(x) เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $x \leq m$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x \geq m$ เราเลือกจุดทดสอบมา 2 จุดคือ x_1, x_2 ในแต่ละวิธีการทำซ้ำ ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ (แสดงในรูปที่ 5.1) แล้วจุดที่ให้ค่าต่ำสุดต้องอยู่ในช่วง $[a, x_2]$ แต่ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ แล้วจุดที่ให้ค่าต่ำสุดต้องอยู่ในช่วง $[x_1, b]$ ดังนั้นในการหาช่วงใหม่ในการทำซ้ำครั้งต่อไปขึ้นอยู่กับค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ จากนั้นก็ทำซ้ำไปเรื่อย ๆ ในแต่ละช่วงใหม่ที่ได้ จนกว่าผลต่างของค่าน้อยสุดในวิธีทำซ้ำครั้งสุดท้ายกับค่าน้อยสุดที่ได้จากการทำซ้ำก่อนหน้ามีค่าน้อยกว่า $\varepsilon > 0$ ที่เราต้องการ



รูปที่ 5.4 แสดงการทดสอบกรณี $f(x_1) < f(x_2)$

แต่ถ้าฟังก์ชันของเราเป็นแบบ almost unimodal function (ลักษณะดังรูปที่ 5.2) การใช้อนุพันธ์ในการหาค่าน้อยสุดจะใช้ไม่ได้ เช่น วิธี Steepest Destent วิธี Gauss-Newton หรือ วิธี Marquardt เป็นต้น แต่วิธี grid-search algotithm สามารถหาได้



รูปที่ 5.5 almost unimodal function

หลักการในการตัดโดเมน

ให้ $X=\phi(x_1,y_1,x_2,y_2,\alpha)$ คือ โครงแบบใน U ที่ซึ่ง $A(X)$ มีค่าน้อยสุด

ให้ $\bar{X}$ คือ โครงแบบซึ่ง $A(\bar{X})$ มีค่าน้อยสุดใน grid-search algorithm

ถ้า $|A(X)-A(\bar{X})|\le\varepsilon$ แล้วโดเมน Y จะตัดทิ้งก็ต่อเมื่อ $A(Y)-A(\bar{X})>2\varepsilon$

เพราะว่า $A(Y)-A(\bar{X})>2\varepsilon$ ทำให้ $A(Y)>A(\bar{X})+\varepsilon+\varepsilon>A(X)+\varepsilon$

กล่าวคือจากบทตั้งที่ 5.5 เราจะคำนวณค่า ε ได้เมื่อรู้ค่า δ_1,δ_2 และในการคำนวณหาค่าน้อยสุดโดย grid-search algorithm ในแต่ละครั้ง เราจะได้ค่า $A(\bar{X})$ ถ้าโดเมนที่ให้ค่ามากกว่า $A(\bar{X})+2\varepsilon$ เราสามารถตัดโดเมนนี้ทิ้งได้ เพราะค่าน้อยสุดไม่ได้อยู่ในโดเมนนี้

5.2.1 grid search ใน 1 มิติ

ในกรณี 1 ตัวแปร พิจารณาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f:R\to R$ บนช่วง$[a,b]$ จากนั้นจะทำการแบ่งโดเมนให้เล็กลงเรื่อย ๆ ตามค่าของขนาดกริดในแต่ละวิธีทำซ้ำ โดยขนาดของกริดก็จะมีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ จนถึงขนาดของกริดที่เราต้องการ ในที่นี้เราจะสมมติว่า $|A(X)-A(\bar{X})|\le d_i$ เมื่อ d_i คือขนาดกริดในวิธีทำซ้ำครั้งที่ i เพื่อใช้พิจารณาในการตัดโดเมน เราจะทำการแบ่งจุดกริดดังนี้ $x_j=a+jd_i$ และ $b=a+nd_i$ โดยที่ $j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \mathrm{n}$ ซึ่ง $n=[\frac{(b-a)}{d_i}]$ ทำให้เราได้ค่าของ f ในแต่ละจุดกริด ถ้าให้ x_k คือจุดกริดที่ทำให้ $f(x_k)$ มีค่าต่ำที่สุดในวิธีทำซ้ำครั้งที่ i โดยหลักการตัดโดเมนในที่นี้เราสมมติว่าค่า ต่ำสุดของ f อยู่ในช่วง $[x_m,x_l]$ ดังนั้นในวิธีทำซ้ำครั้งที่ i+1 โดเมนของเราคือ $[x_m,x_l]$ และกำหนดขนาดกริดใหม่คือ d_{i+1} โดยที่ $d_{i+1}<d_i$ และทำการหาค่าของ f ใหม่ในแต่ละจุดกริด และพิจารณาค่าต่ำสุด

เหมือนเดิม และแบ่งโดเมนให้เล็กลง และกำหนดขนาดกริดใหม่เหมือนเดิม ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะถึงขนาดกริดที่เราต้องการ ขั้นตอนวิธีก็จะหยุด และได้ค่าต่ำสุดตามที่เราต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x)=x^2+2x$ บนช่วง $[-3,5]$ เมื่อ $d_1=1,\ d_2=0.5$ กำหนดให้ $\varepsilon=d_i$

วิธีทำ แบ่งจุดกริดแต่ละจุดจะได้ -3, -2, -1,..., 5

และทำการหาค่าของ f แต่ละจุด ดังตารางที่ 5.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8	15	24	35

ตารางที่ 5.1

จากตารางจะเห็นว่า $f(-1)$ มีค่าต่ำสุด คือ -1 พิจารณาการตัดโดเมน $2\varepsilon=2d_1=2$ ดังนั้นค่าที่มากกว่า -1 เกิน 2 จะตัดทิ้ง นั่นคือโดเมนใดให้ค่ามากกว่า 1 จะตัดทิ้ง จากตารางจะได้โดเมนในการหาค่าน้อยสุดครั้งต่อไปคือ $[-2,0]$และให้ $d_2=0.5$ ทำการแบ่งจุดกริด และหาค่าของ f ดังตารางที่ 5.2

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0
$f(x)$	0	-0.75	-1	-0.75	0

ตารางที่ 5.2

จากตารางจะเห็นว่า $f(-1)$ มีค่าต่ำสุด คือ -1 ดังนั้นค่าต่ำสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[-3,5]$ เมื่อ $d=1,\ 0.5$ คือ $f(-1)=-1$

5.2.2 grid search ใน m มิติ

ในกรณี m มิติ พิจารณาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f:R^m\to R$ บนช่วง $[a_1,\ b_1]\times[a_2,\ b_2]\times[a_3,\ b_3]\times\ldots\times[a_m,\ b_m]$ ซึ่งแต่ละตัวแปรให้เราแบ่งจุดกริดเหมือนในการแบ่งจุดกริดใน grid search ใน 1 มิติเราจะทำการแบ่งจุดกริดดังนี้

$$x_{1j} = a_1 + jd_i,\ \mathrm{j} = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n_1;\ n_1 = \left(\frac{b_1 - a_1}{d_i} \right)$$

$$x_{2j} = a_2 + jd_i,\ \mathrm{j} = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n_2;\ n_2 = \left(\frac{b_2 - a_2}{d_i} \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{mj} = a_m + jd_i,\ \mathrm{j} = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n_m;\ n_m = \left(\frac{b_m - a_m}{d_i} \right)$$

ซึ่งเราจะได้ค่าของฟังก์ชันทั้งหมด $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_m+1)$ ค่าที่ต้องนำมาเปรียบเทียบเพื่อพิจารณาหาค่าต่ำสุด ถ้าให้ $x_k = (x_{k1},\ x_{k2},\ x_{k3}, \ldots,\ x_{km})$ คือ จุดกริดที่ทำให้ $f(x_k)$ มีค่าต่ำที่สุดในวิธีทำซ้ำครั้งที่ i จากหลักการตัดโดเมนเราสมมติว่าค่าต่ำสุดของ f อยู่ในช่วง $[x_{m_1}, x_{l_1}]\times[x_{m_2}, x_{l_2}]\times[x_{m_3}, x_{l_3}]\times\ldots\times[x_{m_m}, x_{l_m}]$

ดังนั้นในวิธีทำซ้ำครั้งที่ i+1 โดเมนของเราคือ $[x_{m_1}, x_{l_1}]\times[x_{m_2}, x_{l_2}]\times[x_{m_3}, x_{l_3}]\times\ldots\times[x_{m_m}, x_{l_m}]$

และกำหนดขนาดกริดใหม่คือ d_{i+1} โดยที่ $d_{i+1} < d_i$ และทำการหาค่าของ f ใหม่ในแต่ละจุดกริด และพิจารณาค่าต่ำสุดเหมือนเดิม และแบ่งโดเมนให้เล็กลง และกำหนดขนาดกริดใหม่เหมือนเดิม ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงขนาดกริดที่เราต้องการหรือได้ค่าความผิดพลาดที่เล็กพอ ขั้นตอนวิธีก็จะหยุด และได้ค่าต่ำสุดตามที่เราต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x,y) = x^2 - xy$ บนช่วง $[-1,1]\times[-2,0]$ เมื่อ $d = 1,\ 0.5$ กำหนดให้ $\varepsilon = \frac{d_i}{2}$

วิธีทำ แบ่งจุดกริดแต่ละจุดจะได้ $x_{10} = -1,\ x_{11} = 0,\ x_{12} = 1$

$$y_{10} = -2,\ y_{11} = -1,\ y_{12} = 0$$

ทำให้ได้ค่า f แต่ละจุด ดังตารางที่ 5.3

(x,y)	(-1, -2)	(-1, -1)	(-1,0)	(0, -2)	(0, -1)	(0, 0)	(1, -2)	(1, -1)	(1, 0)
$f(x,y)$	-1	0	1	0	0	0	3	2	1

ตารางที่ 5.3

จากตารางจะเห็นว่า $f(-1,-2)$ มีค่าต่ำสุด คือ -1 พิจารณาการตัดโดเมน $2\varepsilon = 2d_1 = \frac{2}{2} = 1$ ดังนั้นค่าที่มากกว่า -1 เกิน 1 จะตัดทิ้ง นั่นคือโดเมนใดให้ค่ามากกว่า 0 จะตัดทิ้ง จากตารางจะได้ โดเมนในการหาค่าน้อยสุดครั้งต่อไปคือ $x \in [-1,\ 0], y \in [-2,0]$ และให้ $d_2 = 0.5$ ทำการแบ่งจุดกริด และหาค่าของ f ดังตารางที่ 5.4

(x,y)	(-1, -2)	(-1, $-\frac{3}{2}$)	(-1,-1)	($-\frac{1}{2}$, -2)	($-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$)	($-\frac{1}{2}$, -1)	(0, -2)	(0, $-\frac{3}{2}$)
$f(x,y)$	-1	-0.5	0	-0.75	-0.5	-0.25	0	0
(x,y)	(-1, $-\frac{1}{2}$)	(-1, 0)	($-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$)	($-\frac{1}{2}$, 0)	(0, $-\frac{1}{2}$)	(0, 0)	(0, -1)	
$f(x,y)$	0.5	1	0	0.25	0	0	0	

ตารางที่ 5.4

จากตารางจะเห็นว่า $f(-1,-2)$ มีค่าต่ำสุด คือ -1 ดังนั้นค่าต่ำสุดของ $f(x,y)$ บนช่วง $[-1,2]\times[-2,0]$ เมื่อ $d = 1,\ 0.5$ คือ $f(-1,-2) = -1$

5.3 บทพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1

ในหัวข้อนี้เราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดยวิธี grid-search algorithm ประกอบกับบทตั้ง 5.5 โดยเราจะทำการ search หาค่าน้อยสุดในฟังก์ชัน 5 ตัวแปร คือ $(x_1, y_1,\ x_2,\ y_2,\ \alpha)$ และใช้เงื่อนไขของโดเมนในบทที่ 3 คือ $0 \le x_1 \le 0.05,\ 0 \le y_1 \le 0.043$, $-0.25 \le x_2 \le 0.25,\quad -0.3884 \le y_2 \le 0.3884$ และ $0 \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}$ ในการพิสูจน์นี้เราจะใช้รูป 200 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า(ที่จุดยอดอยู่บนวงกลม)แทนวงกลม ซึ่งแม้ว่าพื้นที่จะน้อยกว่าแต่ก็น่าจะใกล้เคียงกันมาก โดยเราจะยกตัวอย่างให้เห็นตอนสรุปผล และเราจะแบ่งขนาดกริดเป็น 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005 และ 0.00001 จากนั้นให้โปรแกรมหาค่าน้อยสุดในแต่ละขนาดกริดโดยโปรแกรม Matlab ซึ่งมีตัวโปรแกรมอยู่ในภาคผนวก หัวข้อที่ 3

ก่อนที่เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 เราจะอธิบายการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ของโปรแกรม Matlab คำสั่งที่ใช้หาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ของ Matlab คือ convhull ซึ่งคำสั่งนี้ต้องใส่ค่าจุดโปรแกรมจึงสามารถหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ของจุดเหล่านั้นให้เราได้ เมื่อพิจารณาการหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ของ L, C, T เราสามารถใส่จุดปลายของ L และจุดยอดของ T ลงไปในคำสั่งได้เท่านั้น

ส่วน C ไม่สามารถใส่ไปในคำสั่งได้ ดังนั้นเราจึงใช้รูป 200 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งเป็นจุดที่อยู่บน C แทน C ซึ่งแทนด้วย C' จะเห็นว่า $H(L,T,C') \subset H(L,T,C)$ ดังนั้น $A(L,T,C') \le A(L,T,C)$ ทำให้ การหาค่าน้อยสุดของ $A(L,T,C')$ โดย grid-search algorithm เป็นขอบเขตล่างค่าหนึ่งของพื้นที่ของคอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดของ L,C,T ซึ่งจากการคำนวณค่าน้อยสุดของ $A(L,T,C')$ โดยโปรแกรม Matlab มีค่าเท่ากับ 0.097038424 ตารางหน่วย และมีค่าพารามิเตอร์คือ $x_1 = 0.01717$, $y_1 = 0$, $x_2 = -0.05755$, $y_2 = 0$ และ $\alpha = 1.047198$ เมื่อเราใส่ค่าพารามิเตอร์เดิม และคำนวณค่า $A(L,T,C)$ โดยโปรแกรม Mathematica จะได้ $A(L,T,C)$ มีค่าเท่ากับ 0.0970446 ตารางหน่วย จะเห็นว่าพื้นที่ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันมากดังที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ ซึ่งแตกต่างกันมากสุดประมาณ 0.0000061769 ตารางหน่วย จึงจะเห็นได้ว่าที่จุดอื่น พื้นที่ที่ได้จะมีพื้นที่ใกล้เคียงกันด้วย ดังนั้นเราจึงสามารถใช้ grid-search algorithm หาค่าน้อยสุดของ $A(L,T,C')$ แทน $A(L,T,C)$ ได้ ทำให้เราได้ค่าขอบเขตล่างตามที่เราต้องการ ในการคำนวณโดย grid-search algorithm ในแต่ละครั้งนั้น เราจะใช้หลักการตัดโดเมน เพื่อทำให้โดเมนมีขนาดเล็กลง โดยพิจารณาจาก ค่า ε ที่ได้จากบทตั้ง 5.5 กล่าวคือ เรานำค่าขนาดของกริด $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ และ θ ในแต่ละครั้งไปแทนค่าใน δ_1, δ_2 จากบทตั้ง 5.5 ทำให้เราได้ว่า $|A(X) - A(\overline{X})| < \varepsilon$ เราก็จะตัดโดเมน Y ที่ทำให้ $A(Y) - A(\overline{X}) > 2\varepsilon$ เราจะได้โดเมนใหม่ในการพิจารณาในครั้งต่อไปมีขนาดเล็กลง ในทฤษฎีบทที่ 1 นั้นเราจะตัดโดเมนให้เล็กลงทั้งหมด 10 ครั้ง และทำการหาค่าน้อยสุดต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 1 คอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมเส้นรอบรูปยาว 1 หน่วย ส่วนของเส้นตรงยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย และสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ $\frac{1}{3}$ หน่วย มีพื้นที่อย่างน้อย 0.0970236 ตารางหน่วย

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha = \frac{i\pi}{180}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 120$

ให้ d_1 คือขนาดของกริด x_1 และ y_1 โดยที่ $d_1 = d_{11} = d_{12}$

ให้ d_2 คือขนาดของกริด x_2 และ y_2 โดยที่ $d_2 = d_{21} = d_{22}$

ให้ θ คือขนาดของกริด α

เราแบ่งกลุ่มการหาค่าน้อยสุดเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

1. (x_1, y_1) วาดรูป 3 มิติ ระหว่าง (x_1, y_1) กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ (x_1, y_1) แล้วพิจารณาตัดโดเมน

2. (x_2, y_2) วาดรูป 3 มิติ ระหว่าง (x_2, y_2) กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ (x_2, y_2) แล้วพิจารณาตัดโดเมน

3. α วาดรูป 2 มิติ (x_1, y_1) ระหว่าง α กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ α แล้วพิจารณาตัดโดเมน

ครั้งที่ 1 ตัดโดเมน (x_2, y_2)

ให้ $d_1 = 0.01,\ d_2 = 0.01,\ \theta = \dfrac{\pi}{180}$

โดยบทตั้ง 3.2.1, $(x_1,\ y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0, 0.043]$

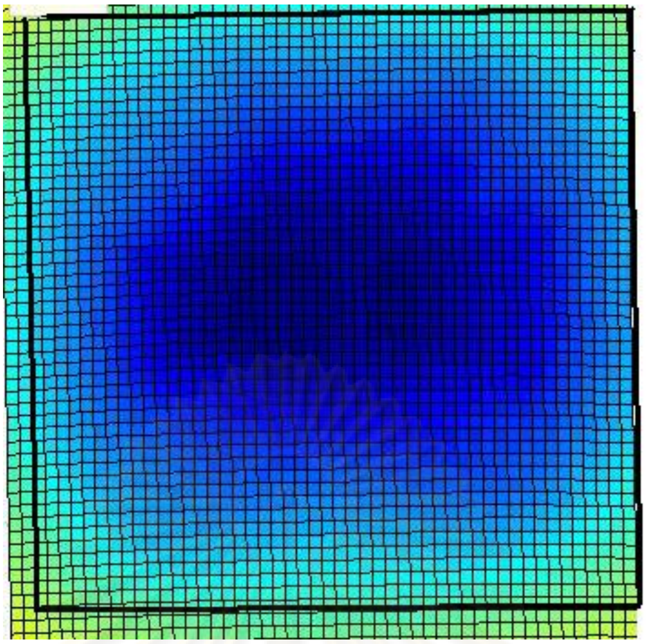
และบทตั้ง 3.2.4, $(x_2,\ y_2) \in [-0.25,\ 0.25] \times [-0.4,\ 0.4]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.0216045$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09715

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09715 + 2(0.0216045) = 0.140359

ดังนั้นจากการวาดรูป 3 มิติจะได้ $(x_2, y_2) \in [-0.24, 0.25] \times [-0.19, 0.25]$



รูปที่ 5.6 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.140359 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.6 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 1 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 2 ตัดโดเมน (x_2, y_2)

ให้ $d_1 = 0.01,\ d_2 = 0.005,\ \theta = \dfrac{\pi}{180}$

โดยบทตั้ง 3.2.1 $(x_1,\ y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0,\ 0.043]$

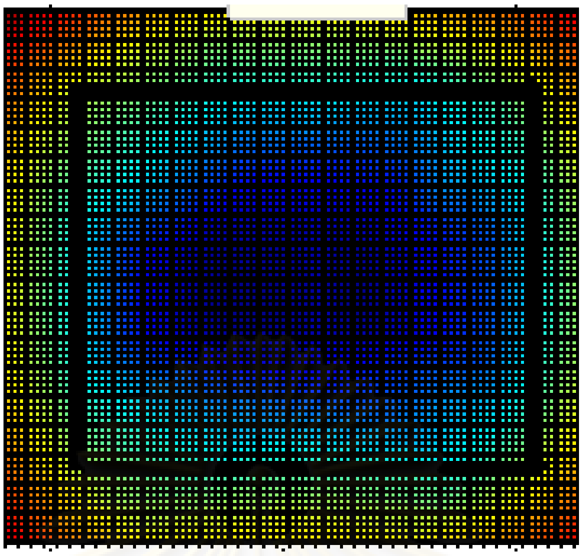
และจากครั้งที่ 1 $(x_2, y_2) \in [-0.24, 0.25] \times [-0.19, 0.25]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.0145724$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09707

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09707 + 2(0.0145724) = 0.126215

ดังนั้นจากการวาดรูป 3 มิติจะได้ $(x_2, y_2) \in [-0.195, 0.225] \times [-0.14, 0.2]$



รูปที่ 5.7 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.126215 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.7 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 2 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 3 ตัดโดเมน α

ให้ $d_1 = 0.005,\ d_2 = 0.005,\ \theta = \dfrac{\pi}{180}$

โดยบทตั้ง 3.2.1 $(x_1,\ y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0, 0.043]$

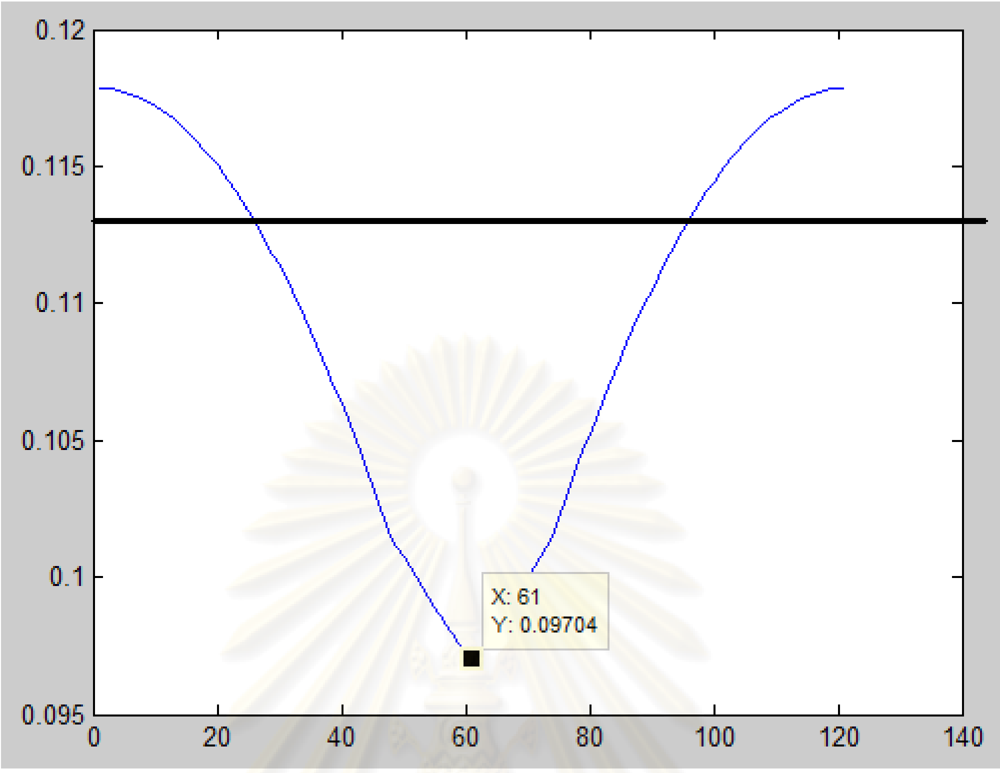
และจากครั้งที่ 2 $(x_2, y_2) \in [-0.195, 0.225] \times [-0.14, 0.2]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.008341$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09704

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09704 + 2(0.008341) = 0.113722

ดังนั้นจากการวาดรูป 2 มิติจะได้ $\alpha \in [\dfrac{23\pi}{180}, \dfrac{98\pi}{180}]$



รูปที่ 5.8 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ใต้เส้นตรง)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.113722 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.8 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 3 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 4 ตัดโดเมน α

ให้ $d_1 = 0.001,\ d_2 = 0.001,\ \theta = 0.001$

โดยบทตั้ง 3.2.1 $(x_1, y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0,\ 0.043]$

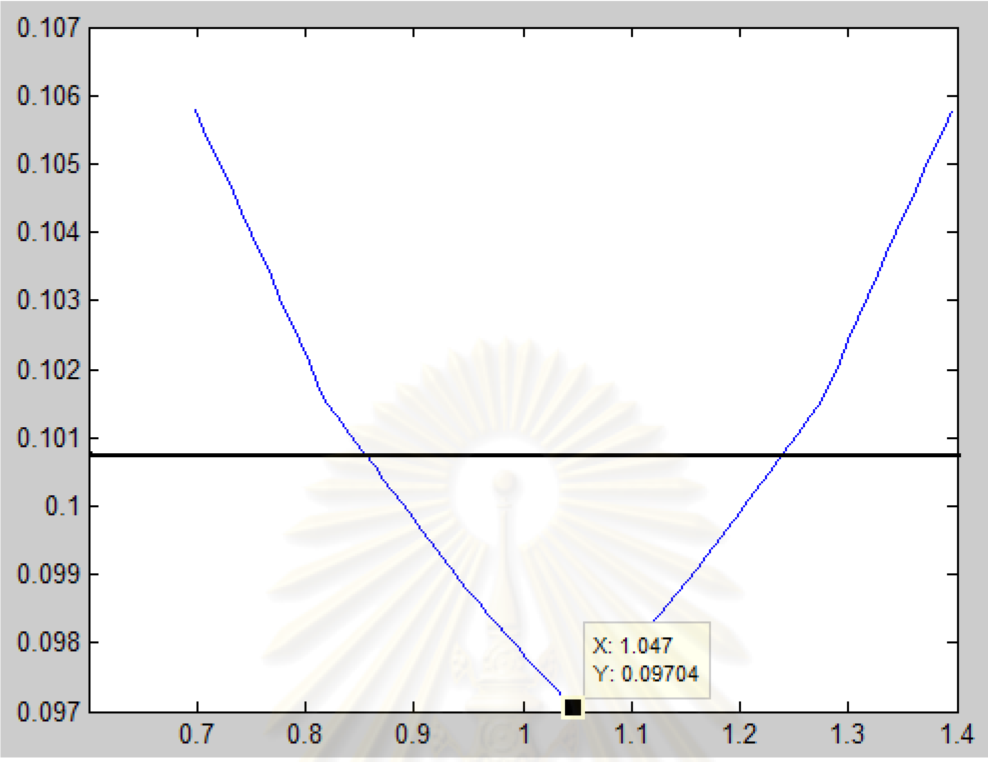
และจากครั้งที่ 2 $(x_2, y_2) \in [-0.195, 0.225] \times [-0.14, 0.2]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.00183641$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09704

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09704 + 2(0.00183641) = 0.100713

ดังนั้นจากการวาดรูป 2 มิติ จะได้ $\alpha \in [0.86, 1.24]$



รูปที่ 5.9 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ใต้เส้นตรง)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.100713 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.9 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 4 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 5 ตัดโดเมน (x_2, y_2)

ให้ $d_1 = 0.001,\ d_2 = 0.001,\ \theta = 0.0001$

โดยบทตั้ง 3.2.1 $(x_1, y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0,\ 0.043]$

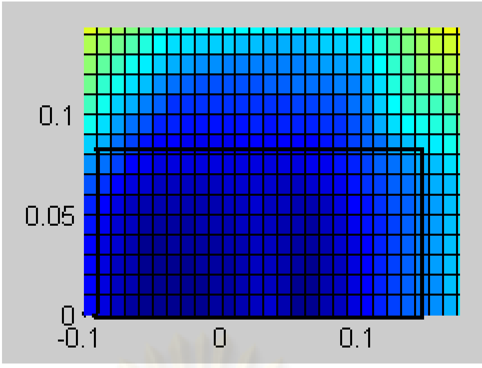
และจากครั้งที่ 2 $(x_2, y_2) \in [-0.195, 0.225] \times [-0.14, 0.2]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.00148242$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09704

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09704 + 2(0.00148242) = 0.100005

ดังนั้นจากการวาดรูป 3 มิติ จะได้ $(x_2, y_2) \in [-0.09, 0.09] \times [0, 0.07]$



รูปที่ 5.10 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.10005 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.10 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 5 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 6 ตัดโดเมน (x_1, y_1)

ให้ $d_1 = 0.0005,\ d_2 = 0.0005,\ \theta = 0.0001$

โดยบทตั้ง 3.2.1 $(x_1,\ y_1) \in [0,\ 0.05] \times [0,\ 0.043]$

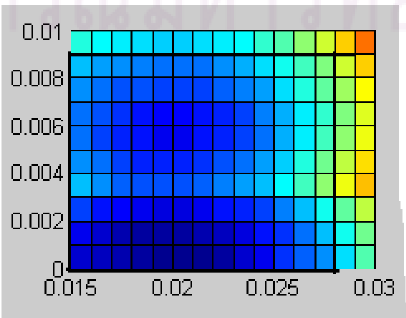
และจากครั้งที่ 5 $(x_2, y_2) \in [-0.09, 0.09] \times [0, 0.07]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.000760435$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09704

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09704 + 2(0.000760435) = 0.0985609

ดังนั้นจากการวาดรูป 3 มิติจะได้ $(x_1, y_1) \in [0, 0.028] \times [0, 0.009]$



รูปที่ 5.11 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.0985609 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.11 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 6 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 7 ตัดโดเมน (x_2, y_2)

ให้ $d_1 = 0.0001,\ d_2 = 0.0001,\ \theta = 0.0001$

จากครั้งที่ 6 $(x_1, y_1) \in [0, 0.028] \times [0, 0.009]$

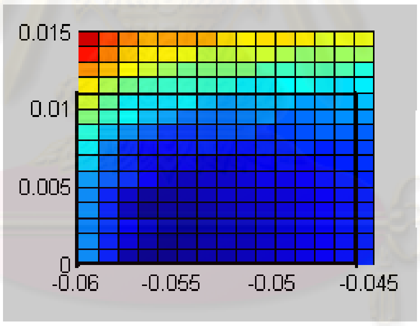
และจากครั้งที่ 5 $(x_2, y_2) \in [-0.09, 0.09] \times [0, 0.07]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.000183412$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09704

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09704 + 2(0.000183412) = 0.0974068

ดังนั้นจากการวาดกราฟ 3 มิติ จะได้ $(x_2, y_2) \in [-0.06, -0.044] \times [0, 0.011]$



รูปที่ 5.12 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.0974068 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.12 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 กรณีที่ 7 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 8 ตัดโดเมน (x_1, y_1)

ให้ $d_1 = 0.00001,\ d_2 = 0.0001,\ \theta = 0.0001$

จากครั้งที่ 6 $(x_1, y_1) \in [0, 0.028] \times [0, 0.009]$

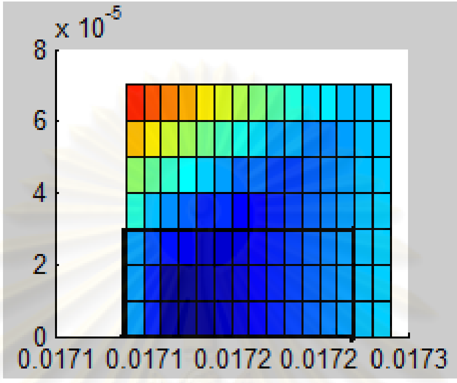
และจากครั้งที่ 7 $(x_2, y_2) \in [-0.06, -0.044] \times [0, 0.011]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.000183412$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09703952

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09703952 + 2(0.000183412) = 0.0974063

ดังนั้นจากการวาดกราฟ 3 มิติ จะได้ $(x_1, y_1) \in [0.01715, 0.01721] \times [0, 0.00003]$



รูปที่ 5.13 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.0974063 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.13 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 8 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 9 ตัดโดเมน (x_2, y_2)

ให้ $d_1 = 0.00001,\ d_2 = 0.00001,\ \theta = 0.0001$

จากครั้งที่ 8 $(x_1, y_1) \in [0.01715, 0.01721] \times [0, 0.00003]$

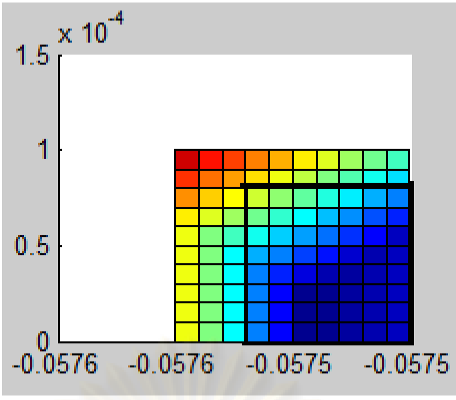
และจากครั้งที่ 7 $(x_2, y_2) \in [-0.06, -0.044] \times [0, 0.011]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.000053651$

และโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09703867

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09703867 + 2(0.000053651) = 0.0971463

ดังนั้นจากการวาดกราฟ 3 มิติ จะได้ $(x_2, y_2) \in [-0.5756, -0.575] \times [0, 0.00008]$



รูปที่ 5.14 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ในกรอบสี่เหลี่ยม)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.0971463 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.14 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 9 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 10 ตัดโดเมน α

ให้ $d_1 = 0.00001,\ d_2 = 0.00001,\ \theta = 0.0001$

จากครั้งที่ 8 $(x_1, y_1) \in [0.01715, 0.01721] \times [0, 0.00003]$

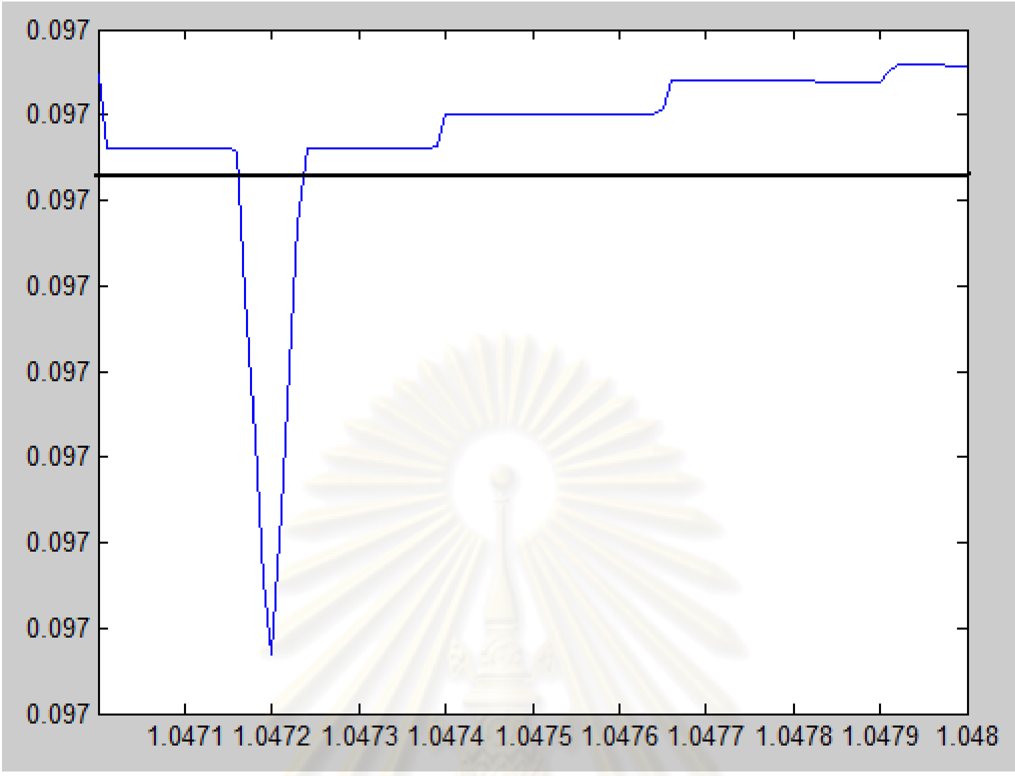
และจากครั้งที่ 9 $(x_2, y_2) \in [-0.5756, -0.575] \times [0, 0.00008]$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.000053651$

และจากโปรแกรมหาค่าน้อยสุดเท่ากับ 0.09703842

จากหลักการตัดโดเมน โดเมนที่ให้ค่ามากกว่า 0.09703842 + 2(0.0000183389) = 0.0970751

ดังนั้นจากการวาดรูป 2 มิติจะได้ $\alpha \in [1.047100, 1.047300]$



รูปที่ 5.14 ภาพแสดงอาณาบริเวณ(ใต้เส้นตรง)ที่ให้ค่าต่ำกว่า 0.0970751 ตารางหน่วย

สำหรับรูปที่ 5.14 ใช้โปรแกรม Matlab (ดูหัวข้อที่ 3 ครั้งที่ 10 ในภาคผนวก)

ครั้งที่ 11 หาค่าน้อยสุด เมื่อ $(x_1, y_1) \in [0.01715, 0.01721] \times [0, 0.00003]$

$(x_2, y_2) \in [-0.5756, -0.575] \times [0, 0.00008]$ และ $\alpha \in [1.047100, 1.047300]$

ให้ $d_1 = 0.00001,\ d_2 = 0.00001,\ \theta = 0.000001$

จากบทแทรก 5.5 จะได้ $\varepsilon = 0.0000183389$

พิจารณาหาค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดและพารามิเตอร์แต่ละตัวตามตารางต่อไปนี้

x_1 \ y_1	0	0.00001	0.00002	0.00003
0.01715	0.097038444	0.097038445	0.097038451	0.097038466
0.01716	0.097038426	0.097038427	0.097038443	0.097038459
0.01717	0.097038424*	0.097038425	0.097038438	0.097038452
0.01718	0.097038428	0.097038429	0.097038431	0.097038445
0.01719	0.097038432	0.097038432	0.097038433	0.097038446
0.01720	0.097038436	0.097038436	0.097038437	0.097038439
0.01721	0.097038441	0.097038441	0.097038441	0.097038441

ตารางที่ 5.5 ตารางแสดงค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดสำหรับ x_1, y_1

x_2 \ y_2	0	0.00001	0.00002
-0.05756	0.097039586679	0.097039801345	0.0970406919
-0.05755	0.09703842409*	0.097039291829	0.097040182384
-0.05754	0.097038540423	0.097038782314	0.097039672869
-0.05753	0.097038685701	0.097038694005	0.097039163353
-0.05752	0.097038830976	0.097038830979	0.097038850734
-0.05751	0.097038976256	0.097038976256	0.097038985014
-0.0575	0.097039121534	0.097039121534	0.097039121534

x_2 \ y_2	0.00003	0.00004	0.00005
-0.05756	0.097041582455	0.097042473010	0.097043363565
-0.05755	0.097041072939	0.097041963495	0.09704285405
-0.05754	0.097040563424	0.097041453979	0.097042344534
-0.05753	0.097040053908	0.097040944464	0.097041835019
-0.05752	0.097039544393	0.097040434948	0.097041325503
-0.05751	0.097039034877	0.097039925433	0.097040815988
-0.0575	0.097039141743	0.097039415917	0.097040306472

x_2 \ y_2	0.00006	0.00007	0.00008
-0.05756	0.09704425412	0.097045144675	0.097046035231
-0.05755	0.097043744605	0.09704463516	0.097045525715
-0.05754	0.097043235089	0.097044125644	0.0970450162
-0.05753	0.097042725574	0.097043616129	0.097044506684
-0.05752	0.097042216058	0.097043106613	0.097043997169
-0.05751	0.097041706543	0.097042597098	0.097043487653
-0.0575	0.097041197027	0.097042087582	0.097042978138

ตารางที่ 5.6 ตารางแสดงค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดสำหรับ x_2, y_2

α	1.047001	1.047002	1.047003	1.047004
A	0.097038830891	0.0970388308927	0.0970388308945	0.0970388308963
α	1.047005	1.047006	1.047007	1.047008
A	0.097038830898	0.0970388308997	0.0970388309014	0.0970388309031
α	1.047009	1.047010	1.047011	1.047012
A	0.097038830905	0.0970388309064	0.097038830908	0.0970388309096
α	1.047013	1.047014	1.047015	1.047016
A	0.097038830911	0.097038816348	0.0970387996439	0.0970387829397
α	1.047017	1.047018	1.047019	1.047020
A	0.097038766236	0.0970387495314	0.0970387328271	0.0970387161229
α	1.047021	1.047022	1.047023	1.047024
A	0.097038699419	0.0970386856468	0.0970386856482	0.0970386856496
α	1.047025	1.047026	1.047027	1.047028
A	0.097038685651	0.0970386856523	0.0970386856536	0.0970386856549
α	1.047029	1.047030	1.047031	1.047032
A	0.097038685656	0.0970386856575	0.0970386856588	0.09703868566
α	1.047033	1.047034	1.047035	1.047036
A	0.097038685661	0.0970386856624	0.0970386856636	0.0970386856647
α	1.047037	1.047038	1.047039	1.047040
A	0.097038685666	0.097038685667	0.0970386856681	0.0970386856692
α	1.047041	1.047042	1.047043	1.047044
A	0.097038685670	0.0970386856713	0.0970386856724	0.0970386856737
α	1.047045	1.047046	1.047047	1.047048
A	0.097038685674	0.0970386856753	0.0970386856763	0.0970386856772
α	1.047049	1.047050	1.047051	1.047052
A	0.097038685678	0.0970386856791	0.0970386856799	0.0970386800878
α	1.047053	1.047054	1.047055	1.047056
A	0.097038663383	0.0970386466772	0.0970386299718	0.0970386132665

α	1.047057	1.047058	1.047059	1.047060
A	0.097038596561	0.0970385798556	0.0970385631502	0.0970385464447
α	1.047061	1.047062	1.047063	1.047064
A	0.09703854041	0.0970385404107	0.0970385404113	0.097038540412
α	1.047065	1.047066	1.047067	1.047068
A	0.097038540413	0.0970385404132	0.0970385404138	0.0970385404144
α	1.047069	1.047070	1.047071	1.047072
A	0.097038540415	0.0970385404155	0.097038540416	0.0970385404165
α	1.047073	1.047074	1.047075	1.047076
A	0.097038540417	0.0970385404174	0.0970385404179	0.0970385404183
α	1.047077	1.047078	1.047079	1.047080
A	0.097038540419	0.0970385404191	0.0970385404195	0.0970385404198
α	1.047081	1.047082	1.047083	1.047084
A	0.097038540420	0.0970385404205	0.0970385404207	0.097038540421
α	1.047085	1.047086	1.047087	1.047088
A	0.097038540421	0.0970385404215	0.0970385404217	0.097038540422
α	1.047089	1.047090	1.047091	1.047092
A	0.097038540422	0.0970385404223	0.0970385404225	0.0970385260412
α	1.047093	1.047094	1.047095	1.047096
A	0.097038509335	0.0970384926281	0.0970384759215	0.0970384592149
α	1.047097	1.047098	1.047099	1.047100
A	0.097038442508	0.0970384258016	0.097038424091*	0.0970384407976
α	1.047101	1.047102	1.047103	1.047104
A	0.097038457504	0.0970384742109	0.0970384909175	0.097038507624
α	1.047105	1.047106	1.047107	1.047108
A	0.097038524331	0.0970385404225	0.0970385404223	0.0970385404222
α	1.047109	1.047110	1.047111	1.047112
A	0.097038540422	0.0970385404218	0.0970385404215	0.0970385404213
α	1.047113	1.047114	1.047115	1.047116

A	0.097038540421	0.0970385404208	0.0970385404205	0.0970385404202
α	1.047117	1.047118	1.047119	1.047120
A	0.097038540420	0.0970385404193	0.0970385404191	0.0970385404187
α	1.047121	1.047122	1.047123	1.047124
A	0.097038540418	0.0970385404179	0.0970385404175	0.097038540417
α	1.047125	1.047126	1.047127	1.047128
A	0.097038540417	0.097038540416	0.0970385404155	0.097038540415
α	1.047129	1.047130	1.047131	1.047132
A	0.097038540414	0.0970385404139	0.0970385404133	0.0970385404127
α	1.047133	1.047134	1.047135	1.047136
A	0.097038540412	0.0970385404114	0.0970385404107	0.0970385404101
α	1.047137	1.047138	1.047139	1.047140
A	0.097038544734	0.0970385609871	0.0970385610191	0.0970385610511
α	1.047141	1.047142	1.047143	1.047144
A	0.097038561083	0.097038561115	0.0970385581445	0.0970385414691
α	1.047145	1.047146	1.047147	1.047148
A	0.097038524794	0.0970385081189	0.097038491443	0.0970384747675
α	1.047149	1.047150	1.047151	1.047152
A	0.097038458092	0.0970384414163	0.0970384410226	0.0970384577604
α	1.047153	1.047154	1.047155	1.047156
A	0.097038474498	0.0970384912359	0.0970385079737	0.0970385247112
α	1.047157	1.047158	1.047159	1.047160
A	0.097038541449	0.0970385581866	0.0970385616555	0.0970385616871
α	1.047161	1.047162	1.047163	1.047164
A	0.097038561719	0.0970385617503	0.0970385617819	0.0970385618135
α	1.047165	1.047166	1.047167	1.047168
A	0.097038561845	0.0970385618765	0.097038561908	0.0970385619395
α	1.047169	1.047170	1.047171	1.047172
A	0.097038561971	0.0970385620024	0.0970385620339	0.0970385620653

α	1.047173	1.047174	1.047175	1.047176
A	0.097038562097	0.0970385621281	0.0970385621594	0.0970385621908
α	1.047177	1.047178	1.047179	1.047180
A	0.097038562222	0.0970385622534	0.0970385622847	0.0970385623159
α	1.047181	1.047182	1.047183	1.047184
A	0.097038562347	0.0970385623784	0.0970385624097	0.0970385624409
α	1.047185	1.047186	1.047187	1.047188
A	0.097038562472	0.0970385625032	0.0970385625343	0.0970385625655
α	1.047189	1.047190	1.047191	1.047192
A	0.097038567523	0.0970385842593	0.0970385851085	0.0970385851396
α	1.047193	1.047194	1.047195	1.047196
A	0.097038585171	0.0970385852016	0.0970385815419	0.097038564865
α	1.047197	1.047198	1.047199	1.047200
A	0.097038548188	0.0970385315111	0.0970385148341	0.0970384981571

ตารางที่ 5.7 ตารางแสดงค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดสำหรับ α

จากตาราง 5.1 – 5.3 จะได้ว่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดมีค่าประมาณ 0.097038424 ตารางหน่วย และมีพารามิเตอร์ (0.01717, 0, -0.05755, 0, 1.0471098)

ดังนั้นพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์น้อยสุดมีพื้นที่อย่างน้อย 0.097038424 – 0.0000183389 = 0.0970236

❑

ทฤษฎีบทที่ 2 แผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิด 1 หน่วยมีพื้นที่อย่างน้อย 0.0970236 ตารางหน่วย

บทพิสูจน์ ให้ W เป็นแผ่นปิดทับนูนสำหรับเส้นโค้งปิด 1 หน่วย

ให้ $H(X)$ เป็นคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L,T,C ที่วางอยู่ใน W

โดยทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ $A(W) \geq A(X) \geq 0.0970236$

❑

บทที่ 6

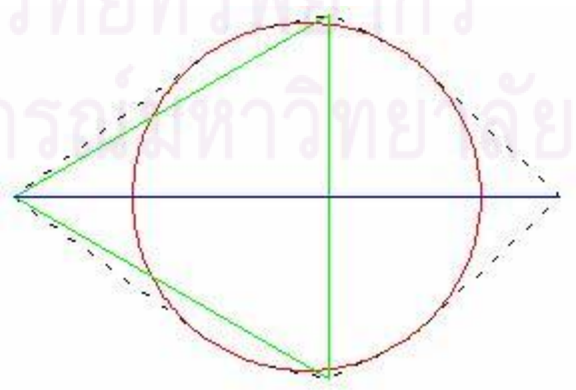
สรุปผล อภิปรายผล ปัญหาการดำเนินการ และข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการดำเนินการ

จากบทที่ 4 ผลจากโปรแกรม Mathematica ที่ได้ค่าน้อยที่สุดอยู่ในกรณีที่ 2.15 ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.0970439 ตารางหน่วย โดยที่ $x_1 = 0.0181884$, $y_1 = 0.000334284$, $x_2 = -0.0575492$, $y_2 = 0.000239885$ และ $\alpha = 1.04844$ และจาก grid-search algorithm ในบทที่ 5 ได้พื้นที่น้อยสุดประมาณ 0.097038424 ตารางหน่วย โดยที่ $x_1 = 0.01717$, $y_1 = 0$, $x_2 = -0.05755$, $y_2 = 0$ และ $\alpha = 1.047198$ จะเห็นว่าพื้นที่ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน แตกต่างกันมากสุดประมาณ 0.000005476 ตารางหน่วย ส่วนค่าพารามิเตอร์ต่างกันมากสุดประมาณ 0.00165801 หน่วย

นอกจากนี้วิธีพิจารณาการหลุดของสามเหลี่ยมในบทที่ 4 ยังตรวจสอบงานของสิระและธีรสรรค์ [20] ได้ โดยได้พื้นที่น้อยสุดประมาณ 0.22759 ตารางหน่วย ซึ่งงานวิจัยของสิระและธีรสรรค์ได้พื้นที่น้อยสุดประมาณ 0.227628 ตารางหน่วย จะเห็นว่าพื้นที่ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน แตกต่างกันมากสุดประมาณ 0.000038 ตารางหน่วย จึงเป็นการสนับสนุนว่าวิธีการในบทที่ 4 น่าเชื่อถือ

เมื่อวิธีการในบทที่ 4 น่าเชื่อถือ ประกอบกับผลที่ได้ใน grid-search algorithm ในบทที่ 5 มีค่าใกล้เคียงกัน ดังที่กล่าวมาแล้ว ทำให้คอนเวกซ์ที่เล็กที่สุดสำหรับ L C และ T ที่ได้จากการ grid-search algorithm มีลักษณะดังรูป



รูปที่ 6.1 คอนเวกซ์ฮัลล์ที่เล็กที่สุดสำหรับ L C และ T ที่ได้จาก grid-search algorithm

ในวิทยานิพนธ์นี้ไม่สามารถพิสูจน์หาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดได้ ทำได้แค่เพียงประมาณค่าขอบเขตล่างของพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ของ L,S,T จากวิธี grid-search algorithm และจากบทแทรก 5.5 จะได้ว่าความผิดพลาดมีค่าประมาณ 0.0000183389 ตารางหน่วย และค่าน้อยสุดจากวิธี grid-search algorithm มีค่าประมาณ 0.097038424 ตารางหน่วย ดังนั้นขอบเขตล่างของพื้นที่มีค่าไม่เกิน 0.0970236 ตารางหน่วย

6.2 ปัญหาการดำเนินการ

เนื่องจากการวิจัยของสิระและธีรสรรค์ [20] ได้พิจารณาจุดหลุดของ T จากคอนเวกซ์ฮัลล์ของ L และ S เพียง 2 จุดเท่านั้น โดยไม่สนใจจุดที่ 3 ว่าจะหลุดหรือไม่ ก็เพียงพอที่จะประมาณได้ว่าพื้นที่ของคอนเวกซ์ฮัลล์มีค่าอย่างน้อย

$$\max\left\{\frac{1}{6}(\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta+15^\circ)+\cos(\alpha-45^\circ)),\frac{\sqrt{2}}{6}\sin\alpha,\frac{1}{4}\sin(\beta-30^\circ),\frac{1}{4}\sin(\beta+30^\circ)\right\}$$

ประกอบกับเงื่อนไข $\alpha\in[45^\circ,78^\circ]$ และ $\beta\in[83^\circ,97^\circ]$ ทำให้สามารถประมาณหาขอบเขตล่างได้ง่าย ส่วนงานวิทยานิพนธ์ของเรานั้นไม่เพียงพอที่จะสนใจจุดหลุดเพียง 2 จุด เพราะได้พื้นที่น้อยเกินกว่าขอบเขตล่างที่หาได้ ทำให้เราต้องสนใจจุดที่ 3 ด้วย จึงทำให้เราใช้วิธีประมาณค่าแบบสิระและธีรสรรค์ไม่ได้

6.3 ข้อเสนอแนะ

เพื่อให้การหาขอบเขตล่างของพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์สำหรับเส้นโค้งปิดหนึ่งหน่วยมีค่าที่ดีขึ้นและน่าเชื่อถือมากขึ้น ดังนั้นเราจึงมีข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางและเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจทำงานวิจัยทางด้านนี้ต่อไป

6.3.1 ทำไมไม่ใช้สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ $\frac{1}{4}$ หน่วยแทนสามเหลี่ยมด้านเท่า

เนื่องจากสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ $\frac{1}{4}$ หน่วยมีแนวโน้มที่จะอยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมกับเส้นตรงได้ ทำให้เราไม่สนใจที่จะใช้สี่เหลี่ยมจัตุรัสในการหาขอบเขตล่าง แต่เราต้องการเพิ่มพื้นที่ขอบเขตล่างให้มากขึ้นเพื่อที่จะปรับปรุงพื้นที่ให้ดีจากของเดิม ดังนั้นเราจึงไม่ใช้สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ $\frac{1}{4}$ หน่วยแทนสามเหลี่ยมด้านเท่า

6.3.2 **จุดยอดของ T ที่ไม่หลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ควรอยู่ที่ขอบ**

ในบทที่ 4 กรณีที่จุดยอดของ T หลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมและเส้นตรง 1 จุด หรือ 2 จุด เราจะเห็นว่ารูปที่ให้ค่าพื้นที่น้อยที่สุดในแต่ละกรณีมีแนวโน้มที่จุดที่เหลือที่ไม่หลุดมักจะติดอยู่ที่ขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ ดังนั้นถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าจุดยอดที่เหลือของ T ที่ไม่หลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ของวงกลมและเส้นตรงต้องอยู่บนขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ จะทำให้เราหาคำตอบโดยโปรแกรม Mathematica ได้ง่ายและถูกต้องมากขึ้น

6.3.3 **ข้อเสนอแนะในการหาขอบเขตล่างใหม่ในอนาคต**

จากงานวิจัยของ Furedi และ Wetzel [7] ที่ใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเส้นตรงแล้วสามารถปรับปรุงขอบเขตล่างได้ดีขึ้น ดังนั้นผู้ที่สนใจจะปรุงปรับขอบเขตล่างให้ดีขึ้นจากงานวิทยานิพนธ์นี้ควรจะลองใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าใน [7] แทนเส้นตรง $\frac{1}{2}$ หน่วย ซึ่งน่าจะได้ขอบเขตล่างใหม่ที่ดีกว่าเดิม

รายการอ้างอิง

[1] Bellman, R. Minimization problem. Bull. Amer Math. Soc. 62 (1956) : 270.

[2] Besicovitch, A. S. On arcs that cannot be covered by an open equilateral triangle of side 1. Math. Gaz. 49 (1965) : 286-288.

[3] Brass, P., and Shari, A. Lower bound for Lebesgues universal cover problem. International Journal of Computational Geometry & Applications. 15 (2005) : 537-544.

[4] Chakerian, G. D., and Klamkin, M. S. Minimal covers for closed curves. Math. Mag. 46 (1973) : 55 – 61.

[5] Eggleston, H.G. Problem in Euclidian space applications of convexity. New York : Pergamon Press, 1957.

[6] Furedi, Z., and Wetzel, J .E. The smallest convex cover for triangles of perimeter two. Geom. Dedicata. 81 (2000) : 285 – 293.

[7] Furedi Z., and Wetzel J. E. Covers for closed arcs of length two. preprint.

[8] Gerriets, J. An improved solution to Moser's worm problem. unpublished. 1972.

[9] Gerriets, J., and Poole, G. Convex regions which cover arcs of constant length. MAA Monthly. 81 (1974) : 36-41.

[10] Graham, R. Problem 41. Proceedings 1963 Number Theory Conference. University of Colorado : Boulder, 1963.

[11] Johnson, J., Poole G., and Wetzel, J.E. A small cover for convex unit arcs. Discrete Comput. Geom. 32 (2004) : 141-147.

[12] Jones, J. P., and Schaer, J. The worm problem. Dept. of Math., Stat., and Comp. Sci. 100 (1970).

[13] Kelly, P., and Weiss, M. Geometry and convexity. New York : John Wiley and Sons, 1979.

[14] Laidacker, M., and Poole, G. On the existence of minimal covers for families of closed bounded convex sets. unpublished. 1986.

[15] Moser, L. Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry. Mimeographed list. 1966.

[16] Norwood, R., and Poole, G. An improved upper bound for Leo Moser's worm problem. Discrete Comput. Geom. 29 (2003) : 409 - 417.

[17] Norwood, R., Poole, G., and Laidacker, M. The worm problem of Leo Moser. Discrete Comput. Geom. 7 (1992) : 153-162.

[18] Schaer, J. The broadest curve of length 1. Dept. of Math., Stat., and Comp. Sci. 52 (1968).

[19] Schare, J., and Wetzel, J. E. Boxes for curves of constant length. Israel J. Math. 12 (1972) : 257 – 265.

[20] Sriswasdi, S., and Khandhawit, T. An improved lower bound for Moser's worm proplem. preprint.

[21] Wang, W. Worm problem. Acta Mathematica Sinica. 49 (2006) : 835 – 846.

[22] Wetzel, J. Sectorial covers for curves of constant length. Canad. Math. Bull. 16 (1973) : 367-376.

[23] Wetzel, J. E. Fit and covers. Math. Mag. 76 (2003) : 349 – 362.

[24] Wichiramala, W. A smaller cover for convex unit arcs. East-West J. Math. 7 (2000) : 187-197.

[25] Wichiramala, W. Smaller cover for convex unit arcs. Chiang Mai J. Sci. 37 (2010) : 185-194.

[26] Yuan, L., and Ding, R. The smallest triangular cover for triangles of diameter one. J. Appl. Math. & Computing. 17 (2005): 39 – 48.

[27] Yuan, L., Zhang, Y., and Ding, R. Box for triangles of diameter 1. The Mathematical Gazette. 90 (2006) : 492-496.

[28] Zalgaller, V. A. How to get out of the woods? On a problem of Bellman (Russian). Matematicheskoe Prosveshchenie. 6 (1961) : 191 – 195.

[29] วัชรินทร์ วิชิรมาลา. ปัญหาการปิดทับ. 2547.

ภาคผนวก

ภาคผนวกประกอบด้วย 3 ส่วนดังต่อไปนี้

1. การประมาณค่าหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ในบทที่ 4 หัวข้อที่ 4.1
2. การประมาณค่าหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ในบทที่ 4 หัวข้อ 4.2
3. grid-search algorithm ในบทที่ 5

1. การประมาณค่าหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ในบทที่ 4 หัวข้อที่ 4.1

เราจะใช้บทที่ 3 ในหัวข้อ 3.1 มากำหนดจุดต่างๆ ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมดังนี้

A = $(-\frac{1}{4},0)$, B = $(\frac{1}{4},0)$ คือ จุดปลายของเส้นตรงครึ่งหน่วย

P = (x_1, y_1) คือ จุดศูนย์กลางวงกลม

$Q_0 = (x_2, y_2)$ คือ จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม

$$Q_1 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos\alpha,\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\alpha),\ Q_2 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3}),\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}))$$

และ $Q_3 = Q_0 + (\frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3}),\ \frac{\sqrt{3}}{9}\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3}))$ คือ จุดยอดของสามเหลี่ยม

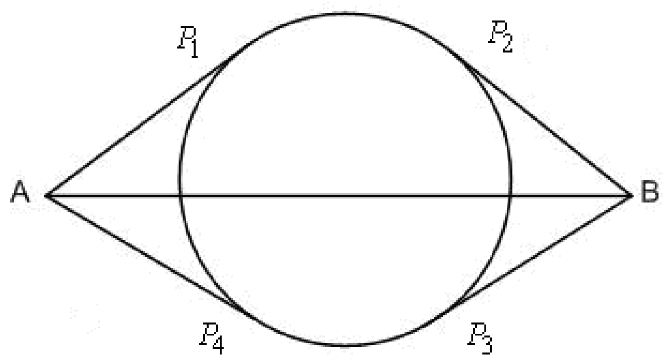
ต่อไปเราจะสร้างฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบจุด (x, y) ว่าอยู่ในวงกลมรัศมี $r = \frac{1}{2\pi}$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_1, y_1) หรือไม่ ซึ่งฟังก์ชันนี้จะช่วยในการแก้สมการหาจุดสัมผัสวงกลมดังต่อไปนี้

P_1 คือ จุดสัมผัสวงกลมที่เกิดจากการลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังสัมผัสวงกลม ณ ตำแหน่งที่อยู่เหนือเส้นตรง AB

P_2 คือ จุดสัมผัสวงกลมที่เกิดจากการลากเส้นตรงจากจุด B ไปยังสัมผัสวงกลม ณ ตำแหน่งที่อยู่เหนือเส้นตรง AB

P_3 คือ จุดสัมผัสวงกลมที่เกิดจากการลากเส้นตรงจากจุด B ไปยังสัมผัสวงกลม ณ ตำแหน่งที่อยู่ใต้เส้นตรง AB

P_4 คือ จุดสัมผัสวงกลมที่เกิดจากการลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังสัมผัสวงกลม ณ ตำแหน่งที่อยู่ใต้เส้นตรง AB



$$r = \frac{1}{2\pi};$$

$$\text{oncircle}[x\_, y\_] := (x - x1)^2 + (y - y1)^2 == r^2;$$

P = {x1, y1}; Q0 = {x2, y2}; Q1 = {xQ1, yQ1}; Q2 = {xQ2, yQ2}; Q3 = {xQ3, yQ3}; P1 = {xp1, yp1};

$$P2 = \{xp2, yp2\};\ P3 = \{xp3, yp3\};\ P4 = \{xp4, yp4\};\ A = \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\};\ B = \left\{\frac{1}{4}, 0\right\};\ T = \{xt, yt\};$$

$$xQ1 = x2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Cos}\left[\alpha + \frac{\pi}{2}\right];\ yQ1 = y2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Sin}\left[\alpha + \frac{\pi}{2}\right];\ xQ2 = x2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Cos}\left[\alpha - \frac{\pi}{6}\right];$$

$$yQ2 = y2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Sin}\left[\alpha - \frac{\pi}{6}\right];\ xQ3 = x2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Cos}\left[\alpha - \frac{5\pi}{6}\right];$$

$$yQ3 = y2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{Sin}\left[\alpha - \frac{5\pi}{6}\right];$$

เพิ่มเติมถ้ากรณีใดใช้ T_1, T_2 T_3, T_4, Th, T’ เพิ่มเติมจะเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

T1 = {xt1, yt1}; T2 = {xt2, yt2}; T3 = {xt3, yt3}; T4 = {xt4, yt4};

Th = {xth, yth}; T’ = {xt’, yt’}

ซึ่งเราจะใช้การนิยามจุดดังกล่าวเขียนโปรแกรมในทุกกรณี

เมื่อกำหนดจุดแล้ว เราจะทำการแก้สมการหาจุด P_1, P_2, P_3, P_4 ในทุกกรณี

```
Solve[oncircle[xp1, yp1] && (A - P1).(P1 - P) == 0, {xp1, yp1}];
Solve[oncircle[xp2, yp2] && (A - P2).(P2 - P) == 0, {xp2, yp2}];
```

$$xp1 = \frac{-\pi^2\left(2 + 8\,x1 - 2\pi^2\,x1 - 16\pi^2\,x1^2 - 32\pi^2\,x1^3 - 32\pi^2\,x1\,y1^2\right) - 4\sqrt{-4\pi^4\,y1^2 + \pi^6\,y1^2 + 8\pi^6\,x1\,y1^2 + 16\pi^6\,x1^2\,y1^2 + 16\pi^6\,y1^4}}{2\pi^4\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$yp1 = \frac{2\left(-4 + (\pi + 4\pi\,x1)^2\right)y1 + 32\pi^2\,y1^3 + (1 + 4\,x1)\sqrt{\left(-4 + \pi^2\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)\right)}}{2\pi^2\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$xp4 = \frac{-\pi^2\left(2 + 8\,x1 - 2\pi^2\,x1 - 16\pi^2\,x1^2 - 32\pi^2\,x1^3 - 32\pi^2\,x1\,y1^2\right) + 4\sqrt{-4\pi^4\,y1^2 + \pi^6\,y1^2 + 8\pi^6\,x1\,y1^2 + 16\pi^6\,x1^2\,y1^2 + 16\pi^6\,y1^4}}{2\pi^4\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$yp4 = \frac{2\left(-4 + (\pi + 4\pi\,x1)^2\right)y1 + 32\pi^2\,y1^3 - (1 + 4\,x1)\sqrt{\left(-4 + \pi^2\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)\right)}}{2\pi^2\left(1 + 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$xp3 = \frac{-\pi^2\left(-2 + 8\,x1 - 2\pi^2\,x1 + 16\pi^2\,x1^2 - 32\pi^2\,x1^3 - 32\pi^2\,x1\,y1^2\right) - 4\sqrt{-4\pi^4\,y1^2 + \pi^6\,y1^2 - 8\pi^6\,x1\,y1^2 + 16\pi^6\,x1^2\,y1^2 + 16\pi^6\,y1^4}}{2\pi^4\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$yp3 = \frac{2\left(-4 + \pi^2(1 - 4\,x1)^2\right)y1^2 + 32\pi^2\,y1^4 + (-1 + 4\,x1)\sqrt{y1^2\left(-4 + \pi^2\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)\right)}}{2\pi^2\,y1\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$xp2 = \frac{-\pi^2\left(-2 + 8\,x1 - 2\pi^2\,x1 + 16\pi^2\,x1^2 - 32\pi^2\,x1^3 - 32\pi^2\,x1\,y1^2\right) + 4\sqrt{-4\pi^4\,y1^2 + \pi^6\,y1^2 - 8\pi^6\,x1\,y1^2 + 16\pi^6\,x1^2\,y1^2 + 16\pi^6\,y1^4}}{2\pi^4\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

$$yp2 = \frac{2\left(-4 + \pi^2(1 - 4\,x1)^2\right)y1^2 + 32\pi^2\,y1^4 + (1 - 4\,x1)\sqrt{y1^2\left(-4 + \pi^2\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)\right)}}{2\pi^2\,y1\left(1 - 8\,x1 + 16\,x1^2 + 16\,y1^2\right)};$$

ต่อมาในแต่ละกรณีจะหาแก้สมการหาจุด T_1, T_2, T_3, T_4, Th, T’ ไม่เหมือนกัน เช่น

หลุด 1 จุด บริเวณ 1, 3, 4 และ 6 แก้สมการหา T ซึ่งเป็นจุดสัมผัสวงกลมจากจุดยอด Q_1 ที่หลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ของ C และ L โดยการกำหนดเงื่อนไขว่าจุด T อยู่บนวงกลม และผลคูณเชิงสเกลาร์ของ (Q1 – T) กับ (T – P) เท่ากับ 0

```
Solve[oncircle[xt, yt] && (Q1 - T).(T - P) == 0, {xt, yt}];
```

หลุด 1 จุด บริเวณ 2, 5 แก้สมการหา T_1 และ T_2 ซึ่งเป็นจุดสัมผัสวงกลมจากจุดยอด Q_1 ที่หลุดจากคอนเวกซ์ฮัลล์ของ C และ L โดยการกำหนดเงื่อนไขเหมือนกัน

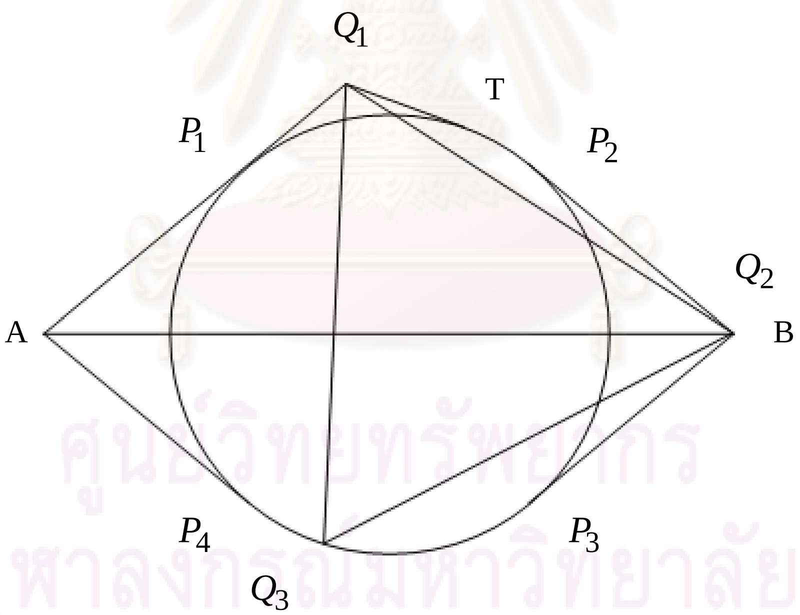
```
Solve[oncircle[xt1, yt1] && (Q1 - T1).(T1 - P) == 0, {xt1, yt1}];
```

ส่วนกรณีที่เหลือ กำหนดเงื่อนไขเหมือนกัน เพื่อหาจุด T_1, T_2 T_3, T_4, Th, T’

จากนั้นจะสร้างฟังก์ชันเพื่อหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์จากจุดที่กำหนด

สุดท้ายเราจะใช้คำสั่ง FindMinimum หาค่าน้อยสุดของฟังก์ชันดังกล่าว โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและเงื่อนไขในแต่ละกรณีไม่เหมือนกันดังนี้

กรณีที่ 1.1(A)



- สร้างฟังก์ชันพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ ประกอบด้วย รูปเหลี่ยมAP4PTQ1 + รูปเหลี่ยมBP2PP3 + เซกเตอร์ PP2T + เซกเตอร์ P3PP4

$$a = \mathrm{ArcCos}\left[\frac{(T-P).(P2-P)}{r^2}\right];\ b = \mathrm{ArcCos}\left[\frac{(P4-P).(P3-P)}{r^2}\right];\ x[1] = A[[1]];\ x[2] = xp4;$$

```
x[3] = x1; x[4] = xt; x[5] = xQ1; x[6] = A[[1]]; y[1] = A[[2]];
y[2] = yp4; y[3] = y1; y[4] = yt; y[5] = yQ1; y[6] = A[[2]];
x[7] = B[[1]]; x[8] = xp2; x[9] = x1; x[10] = xp3; x[11] = B[[1]];
y[7] = B[[2]]; y[8] = yp2; y[9] = y1; y[10] = yp3;
y[11] = B[[2]];
```

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}(x[i]\,y[i+1] - x[i+1]\,y[i])}{2} + \frac{\sum_{i=7}^{10}(x[i]\,y[i+1] - x[i+1]\,y[i])}{2} + a\frac{r^2}{2} + b\frac{r^2}{2};$$

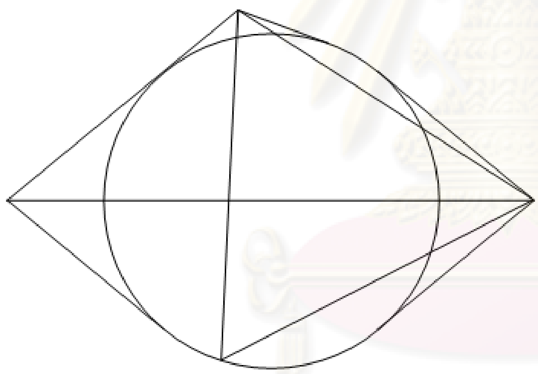
- กำหนดความชันของเส้นต่างๆ และใช้คำสั่ง FindMinimum หาค่าน้อยสุดของฟังก์ชันซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$mAQ1 = \frac{0 - yQ1}{-0.25 - xQ1};\ mAP1 = \frac{0 - yp1}{-0.25 - xp1};\ mBP2 = \frac{0 - yp2}{0.25 - xp2};\ mBP3 = \frac{0 - yp3}{0.25 - xp3};\ mBQ1 = \frac{0 - yQ1}{0.25 - xQ1};$$

$$h = \mathrm{FindMinimum}\Big[\Big\{f[x1, y1, x2, y2, \alpha],\ yQ1 > mAP1\,(xQ1 + 0.25),\ \mathrm{Norm}[Q3 - P] < r,\ -0.25 \le xQ1 \le 0.25,$$
$$-0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,\ -0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$$
$$\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r,\ \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r,\ mAQ1 > mAP1,\ mBP3\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right) \le yQ2 \le mBP2\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right)\Big\},$$
$$\{\{x1, 0.000001\}, \{y1, 0.000001\}, \{x2, 0\}, \{y2, 0\}, \{\alpha, 0.42\}\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, Q1, T}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}],
    Line[{P2, B}], Line[{B, P3}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$$\{0.0976689, \{x1 \to -0.0000302399,\ y1 \to 4.90415 \times 10^{-9},\ x2 \to 0.0571542,\ y2 \to 0.0097708,\ \alpha \to 0.475463\}\}$$



1. จุด Q1 อยู่เหนือเส้นตรง AP1 (จุด Q1 หลุด) ($yQ1 > mAP1\,(xQ1 + 0.25)$)

2. จุด Q3 อยู่ในวงกลม (จุด Q3 ไม่หลุด) ($\mathrm{Norm}[Q3 - P] < r$)

3. เงื่อนไนตามบทตั้งในบทที่ 3

($-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,\ -0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$)

4. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุด)

($\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r$)

5. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุด)

($\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r$)

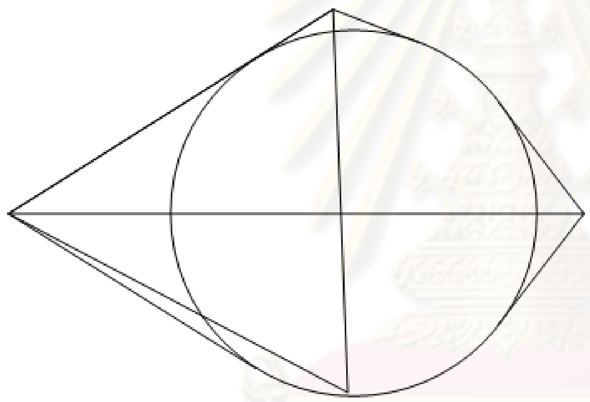
6. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 หลุด) ($mAQ1 > mAP1$)

7. y2 อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง BP2 แต่อยู่สูงกว่า BP3 (จุด Q2 ไม่หลุด)

($mBP3\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right) \le yQ2 \le mBP2\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right)$)

กรณีที่ 1.1(B)

```
h2 = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], Norm[Q2 - P] < r, -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25,
   -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,
   Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] ≥ r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r, mAQ1 > mAP1,
   mAP4 (xQ3 + 1/4) ≤ yQ3 ≤ mAP1 (xQ3 + 1/4), yQ1 > mAP1 (xQ1 + 0.25)}, {{x1, .048}, {y1, 0.004},
   {x2, -0.057}, {y2, 0.00972327002628301`}, {α, -0.4746126530769822`}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, Q1, T}], Line[{A, B}],
   Line[{A, P4}], Line[{P2, B}], Line[{B, P3}]}] /. h2[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.0981293, {x1 → 0.049283, y1 → 0.000447311, x2 → -0.0576927, y2 → 0.00742786, α → -0.484992}}
```



1. จุด Q2 อยู่ในวงกลม (จุด Q2 ไม่หลุด) (Norm[Q2 - P] < r)

2. เงื่อนไขตามบทตั้งในบทที่ 3

($-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$
$-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$)

3. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุด)

($\dfrac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r$)

4. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุด)

($\dfrac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r$)

5. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 หลุด) ($mAQ1 > mAP1$)

6. y3 อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง AP1 แต่อยู่สูงกว่า AP4 (จุด Q3 ไม่หลุด)

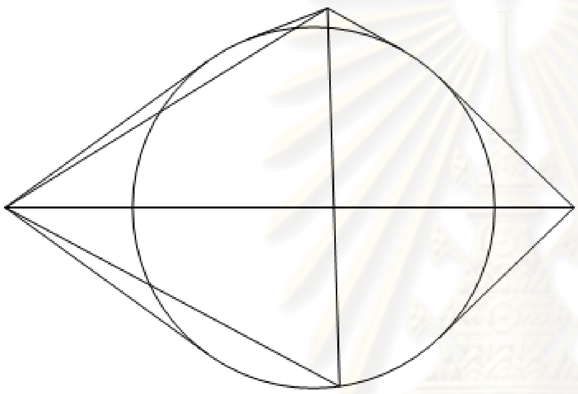
($mAP4\left(xQ3 + \frac{1}{4}\right) \le yQ3 \le mAP1\left(xQ3 + \frac{1}{4}\right)$)

7. y1 อยู่สูงกว่า AP1 (จุด Q1 หลุด) (`yQ1 > mAP1 (xQ1 + 0.25)`)

กรณีที่ 1.2

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], Norm[Q1 - P] > r, Norm[Q2 - P] < r, -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25,
   -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884,
   -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884, mAQ1 < mAP1, mBQ1 > mBP2, mAP4 (xQ3 + 1/4) ≤ yQ3 ≤ mAP1 (xQ3 + 1/4),
   Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] < r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r}, {{x1, 0.0007}, {y1, 0.022},
   {x2, -0.057}, {y2, 0.027}, {α, -0.39}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{T2, Q1, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{P1, A, P4}], Line[{P2, B, P3}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$\{0.0972714,\ \{x1 \to 0.0211817,\ y1 \to 2.34055\times10^{-10},\ x2 \to -0.0575408,\ y2 \to 0.00602551,\ \alpha \to -0.49214\}\}$



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุด) (`Norm[Q1 - P] > r`)

2. จุด Q2 อยู่ในวงกลม (จุด Q2 ไม่หลุด) (`Norm[Q2 - P] < r`)

3. เงื่อนในตามบทตั้งในบทที่ 3

```
-0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25,
(-0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,)
```

4. ความชัน AQ1< ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (`mAQ1 < mAP1`)

5. ความชัน BQ1> ความชัน BP2 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (`mBQ1 > mBP2`)

6. y3 อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง AP1 แต่อยู่สูงกว่า AP4 (จุด Q3 ไม่หลุด)

(`mAP4 (xQ3 + 1/4) ≤ yQ3 ≤ mAP1 (xQ3 + 1/4)`)

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

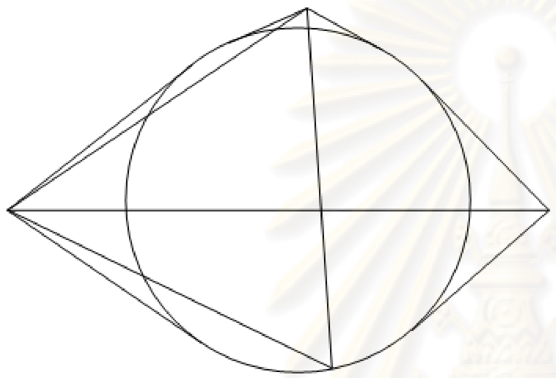
(`Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] < r`)

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

(`Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r`)

กรณีที่ 2.1(A)

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], Norm[Q1 - P] > r, Norm[Q2 - P] < r, Norm[Q3 - P] > r,
   -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884,
   -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884, mAQ1 < mAP1, mBQ1 > mBP2, Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] < r,
   Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r, Abs[mAQ3 x1 - y1 + mAQ3/4]/Sqrt[mAQ3^2 + 1] ≥ r, Abs[mBQ3 x1 - y1 - mBQ3/4]/Sqrt[mBQ3^2 + 1] < r, mAQ3 > mAP1},
  {{x1, 0.016255271978279213`}, {y1, 0.02515255869778942`}, {x2, -0.05078932742950871`},
   {y2, 0.028152353482904388`}, {α, -0.42}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q3, T}], Line[{T1, Q1, T2}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.0974184, {x1 → 0.0187664, y1 → 0.00902272, x2 → -0.0578667, y2 → 0.0137115, α → -0.454036}}
```



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุด) (Norm[Q1 - P] > r)

2. จุด Q2 อยู่ในวงกลม (จุด Q2 ไม่หลุด) (Norm[Q2 - P] < r)

3. จุด Q3 อยู่นอกวงกลม (จุด Q3 หลุด) (Norm[Q3 - P] > r)

4. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

(-0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25,
-0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,)

5. ความชัน AQ1< ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (mAQ1 < mAP1)

6. ความชัน BQ1> ความชัน BP2 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (mBQ1 > mBP2)

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} < r\right)$$

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\right)$$

9. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ3\,x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2 + 1}} \geq r\right)$$

10. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ3\ x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2 + 1}} < r\right)$$

11. ความชัน AQ3 > ความชัน AP1 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 1) ($mAQ3 > mAP1$)

กรณีที่ 2.1(B)

สำหรับกรณีที่ 2.1(B) จะเป็นกรณีที่แสดงว่าไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ซึ่งแสดงโดยใส่สามเหลี่ยมเตี้ยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข จากนั้นใช้คำสั่ง FindMaximum หาความสูง d มากที่สุดของสามเหลี่ยมเตี้ย ถ้า $d < \frac{\sqrt{3}}{6}$ แล้ว T ไม่สามารถใส่ท่านี้ได้ ทำให้สรุปได้ว่ากรณีนี้เป็นไปไม่ได้

ให้ R = $\{r_1, r_2\}$ แทนจุดยอดของ T ที่อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ของ C, L

d แทนความสูงของสามเหลี่ยมเตี้ย

- กำหนดจุด R ให้อยู่บนเส้นตรง AP1

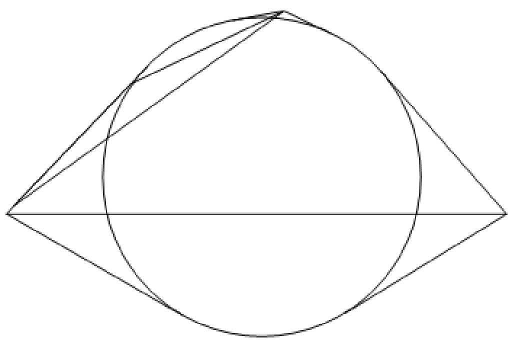
```
R = {r1, r2};

Solve[{Norm[R - Q1] == Norm[R - Q3], r2/(r1 + 0.25) == yp1/(xp1 + 0.25)}, {r1, r2}]
```

- กำหนด d คือความสูงของสามเหลี่ยมเตี้ย

```
d = Norm[R - ((Q1 + Q3)/2)];
```

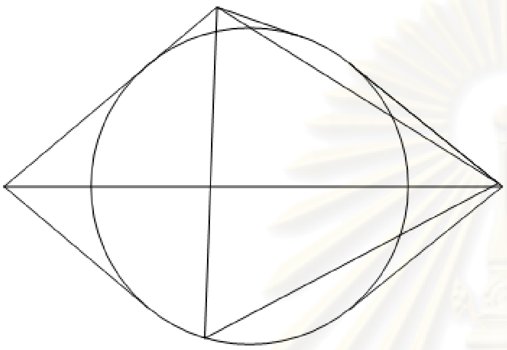
- หาค่ามากสุดของ d โดยใช้คำสั่ง FindMaximum และสอดคล้องกับเงื่อนไขหลุดบริเวณ 1, 2 (เหมือนกรณีที่ 2.1(A))

```
h1 = FindMaximum[{d, -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,
   mAQ1 < mAP1, mBQ1 > mBP2, Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] < r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r,
   Abs[mAQ3 x1 - y1 + mAQ3/4]/Sqrt[mAQ3^2 + 1] ≥ r, Abs[mBQ3 x1 - y1 - mBQ3/4]/Sqrt[mBQ3^2 + 1] < r, mAQ3 > mAP1}, {{x1, 0.016255271978279213`},
   {y1, 0.02515255869778942`}, {x2, -0.05078932742950871`}, {y2, 0.028152353482904388`}, {α, -0.42}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, R, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q3, T}], Line[{T1, Q1, T2}]} /. h1[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.0304435, {x1 → 0.00533578, y1 → 0.0368541, x2 → -0.0517336, y2 → 0.0272501, α → -0.42317}}
```



กรณีที่ 2.5(A)

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], Norm[Q3 - P] < r, -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25,
    -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884, mAQ1 > mAP1,
    mBQ2 > mBP2, Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] ≥ r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r, Abs[mBQ2 x1 - y1 - mBQ2/4]/Sqrt[mBQ2^2 + 1] ≥ r,
    Abs[mAQ2 x1 - y1 + mAQ2/4]/Sqrt[mAQ2^2 + 1] < r, yQ2 > mBP2 (xQ2 - 1/4)}, {{x1, 4.4184968304651395`*^-6}, {y1, 0.012553731861384483`},
    {x2, 0.05000000360687911`}, {y2, 0.023`}, {α, 0.45}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{B, Q2, Th}], Line[{A, Q1, T}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.0976741, {x1 → -0.00338766, y1 → 1.29907×10^-9, x2 → 0.0536512, y2 → 0.0104073, α → 0.486422}}
```



1. จุด Q3 อยู่ในวงกลม (จุด Q3 ไม่หลุด) (`Norm[Q3 - P] < r`)
2. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

`-0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25,`

(`-0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,`)

3. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 1) (`mAQ1 > mAP1`)
4. ความชัน BQ2> ความชัน BP2 (จุด Q2 อยู่บริเวณ 3) (`mBQ2 > mBP2`)
5. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mAQ1\ x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \geq r\right)$$

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mBQ1\ x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ2 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 3)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mBQ2\ x1 - y1 - \frac{mBQ2}{4}\right]}{\sqrt{mBQ2^2 + 1}} \geq r\right)$$

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ2 น้อยกว่า r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 3)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mAQ2\ x1 - y1 + \frac{mAQ2}{4}\right]}{\sqrt{mAQ2^2 + 1}} < r\right)$$

9. yQ2 อยู่เหนือเส้นตรง BP2 (จุด Q2 อยู่บริเวณ 3)

$$\left(yQ2 > mBP2\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right)\right)$$

กรณีที่ 2.5(B)

- กำหนดจุด R ให้อยู่บนเส้นตรง BP2

```
R = {r1, r2};
Solve[{Norm[R - Q1] == Norm[R - Q2], r2/(r1 - 0.25) == yp2/(xp2 - 0.25)}, {r1, r2}]
```

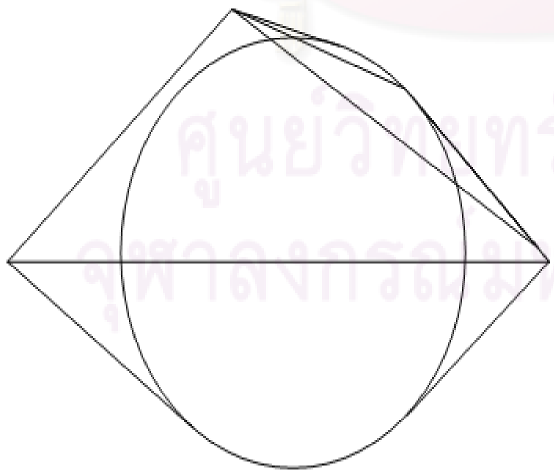
- กำหนด d คือความสูงของสามเหลี่ยมเตี้ย

```
d = Norm[R - ((Q1 + Q2)/2)];
```

- หาค่ามากสุดของ d โดยใช้คำสั่ง FindMaximum และสอดคล้องกับเงื่อนไขหลุดบริเวณ 1, 3 (เหมือนกรณีที่ 2.5(A))

```
h2 = FindMaximum[{d, -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884,
   -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, mAQ1 > mAP1, mBQ2 > mBP2, Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] ≥ r,
   Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r, yQ2 > mBP2 (xQ2 - 1/4)}, {{x1, -0.003387661390975166`},
   {y1, 1.29906796329646`*^-9}, {x2, 0.05365124448379535`}, {y2, 0.01040730898315304`},
   {α, 0.4864224430834425`}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, R, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
   Line[{B, P3}], Line[{B, Q2, Th}], Line[{A, Q1, T}]} /. h2[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

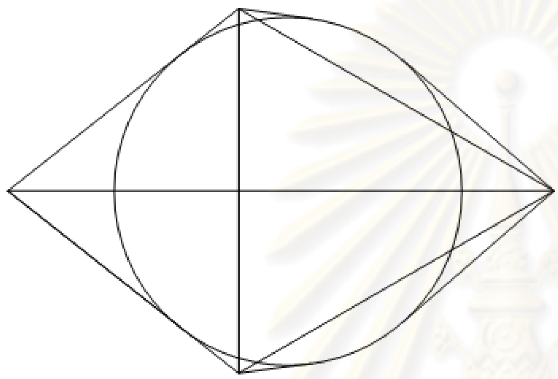
{0.0349019, {x1 → 0.0142807, y1 → 0.00611254, x2 → 0.0476924, y2 → 0.0167922, α → 0.489073}}



กรณีที่ 2.7(A)

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25,
   -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884, mAQ1 > mAP1, mAQ3 > mAP4,
   Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/Sqrt[mAQ1^2 + 1] ≥ r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/Sqrt[mBQ1^2 + 1] < r, Abs[mAQ3 x1 - y1 + mAQ3/4]/Sqrt[mAQ3^2 + 1] ≥ r,
   Abs[mBQ3 x1 - y1 - mBQ3/4]/Sqrt[mBQ3^2 + 1] < r, mBP3 (xQ2 - 1/4) ≤ yQ2 ≤ mBP2 (xQ2 - 1/4)}, {{x1, 0.004001248771113066`},
   {y1, 0.011500184963835775`}, {x2, 0.05}, {y2, 0.0175}, {α, 0.47}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q3, Th}], Line[{A, Q1, T}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$\{0.0975032, \{x1 \to 0.00700912, y1 \to 5.46504\times10^{-7}, x2 \to 0.0575499, y2 \to 8.92204\times10^{-7}, \alpha \to 0.523594\}\}$



1. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

$-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$

$(-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,)$

2. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 1) ($mAQ1 > mAP1$)

3. ความชัน AQ3> ความชัน AP4 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 4) ($mAQ3 > mAP4$)

4. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r\right)$$

5. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\right)$$

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mAQ3\,x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2 + 1}} \ge r\right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mBQ3\,x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2 + 1}} < r\right)$$

8. yQ2 อยู่เหนือเส้นตรง BP3 และอยู่ใต้เส้นตรง BP2 (จุด Q2 ไม่หลุด)

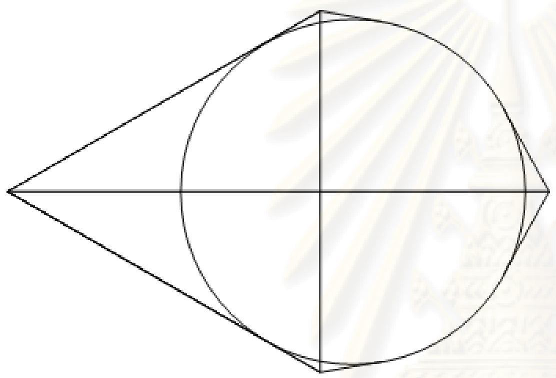
$$\left(mBP3\left(xQ2-\frac{1}{4}\right)\le yQ2\le mBP2\left(xQ2-\frac{1}{4}\right) \right)$$

กรณีที่ 2.7(B)

$$h = \text{FindMinimum}\Big[\Big\{f[x1, y1, x2, y2, \alpha], -0.25 \le xQ1 \le 0.25, -0.25 \le xQ2 \le 0.25, -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$$
$$-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884, yQ1 < mAP4\,(xQ1 + 0.25), yQ3 > mAP1\,(xQ3 + 0.25),$$
$$-0.3884 \le yQ3 \le 0.3884, mAQ3 > mAP1, mAQ1 > mAP4, \frac{\text{Abs}\left[mAQ3\,x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2+1}} \ge r, \frac{\text{Abs}\left[mBQ3\,x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2+1}} < r,$$
$$mAP4\left(xQ2+\frac{1}{4}\right) \le yQ2 \le mAP1\left(xQ2+\frac{1}{4}\right)\Big\}, \{\{x1, 0.08\}, \{y1, 0.05\}, \{x2, -0.05\}, \{y2, 0.03\}, \{\alpha, 0.67 + \text{Pi}\}\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q3, Th}], Line[{A, Q1, T}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$$\{0.0988689, \{x1 \to 0.0683099, y1 \to 1.65087\times10^{-6}, x2 \to -0.0575499, y2 \to 9.9813\times10^{-7}, \alpha \to 3.6652\}\}$$



1. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

$$-0.25 \le xQ1 \le 0.25, -0.25 \le xQ2 \le 0.25, -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$$
$$(-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,)$$

2. yQ1 อยู่ใต้เส้นตรง AP4 (จุด Q1 หลุดบริเวณ 4) $(yQ1 < mAP4\,(xQ1 + 0.25))$

3. yQ3 อยู่เหนือเส้นตรง AP1 (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1) $(yQ3 > mAP1\,(xQ3 + 0.25))$

4. ความชัน AQ3> ความชัน AP1 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 1) $(mAQ3 > mAP1)$

5. ความชัน AQ1> ความชัน AP4 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 4) $(mAQ1 > mAP4)$

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mAQ3\,x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2+1}} \ge r \right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1)

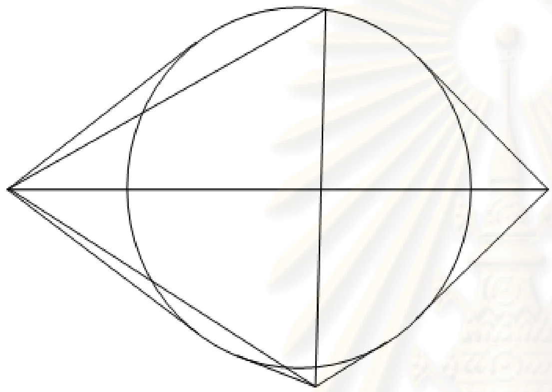
$$\left(\frac{\text{Abs}\left[mBQ3\,x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2+1}} < r \right)$$

8. yQ2 อยู่เหนือเส้นตรง AP4 และอยู่ใต้เส้นตรง AP1 (จุด Q2 ไม่หลุด)

$$\left(mAP4\left(xQ2+\frac{1}{4}\right)\le yQ2\le mAP1\left(xQ2+\frac{1}{4}\right) \right)$$

กรณีที่ 2.9(A)

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α], Norm[Q1 - P] > r, Norm[Q3 - P] > r, Norm[Q2 - P] < r,
   -0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25, -0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884,
   -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884, yQ1 > mAP1 (xQ1 + 0.25), yQ3 > mBP3 (xQ3 - 0.25), yQ3 > mAP4 (xQ3 + 0.25),
   mAQ1 > mAP1, mAQ3 > mAP4, mBQ3 < mBP3, Abs[mAQ3 x1 - y1 + mAQ3/4]/√(mAQ3^2 + 1) < r, Abs[mBQ3 x1 - y1 - mBQ3/4]/√(mBQ3^2 + 1) < r,
   Abs[mAQ1 x1 - y1 + mAQ1/4]/√(mAQ1^2 + 1) ≥ r, Abs[mBQ1 x1 - y1 - mBQ1/4]/√(mBQ1^2 + 1) < r}, {{x1, 0.0187}, {y1, 0.00465},
   {x2, -0.05233}, {y2, -0.002468}, {α, 1.5366}}]
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q3, Q2, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q1, T}], Line[{T1, Q3, T2}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.0972953, {x1 → 0.019133, y1 → 0.00212092, x2 → -0.0565138, y2 → -0.00461373, α → 1.54244}}
```



1. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3
$-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$
($-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$)

2. yQ1 อยู่เหนือเส้นตรง AP1 (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1) ($yQ1 > mAP1\ (xQ1 + 0.25)$)

3. yQ3 อยู่เหนือเส้นตรง BP3 (จุด Q3 หลุดบริเวณ 5) ($yQ3 > mBP3\ (xQ3 - 0.25)$)

4. yQ3 อยู่เหนือเส้นตรง AP4 (จุด Q3 หลุดบริเวณ 5) ($yQ3 > mAP4\ (xQ3 + 0.25)$)

5. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 1) ($mAQ1 > mAP1$)

6. ความชัน AQ3> ความชัน AP4 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 5) ($mAQ3 > mAP4$)

7. ความชัน BQ3< ความชัน BP3 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 5) ($mBQ3 < mBP3$)

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 5)
($\dfrac{\mathrm{Abs}\left[mAQ3\ x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2 + 1}} < r$)

9. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 5)
($\dfrac{\mathrm{Abs}\left[mBQ3\ x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2 + 1}} < r$)

10. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ1}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} + \frac{\mathrm{mAQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ1}^2 + 1}} \geq \mathrm{r}\right)$$

11. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ1}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} - \frac{\mathrm{mBQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ1}^2 + 1}} < \mathrm{r}\right)$$

กรณีที่ 2.9(B)

- กำหนดจุด R ให้อยู่บนเส้นตรง AP4

$$\mathrm{Solve}\left[\left\{\mathrm{Norm}[\mathrm{R} - \mathrm{Q1}] == \mathrm{Norm}[\mathrm{R} - \mathrm{Q3}],\ \frac{\mathrm{r2}}{\mathrm{r1} + 0.25} == \frac{\mathrm{yp4}}{\mathrm{xp4} + 0.25}\right\},\ \{\mathrm{r1},\ \mathrm{r2}\}\right]$$

- กำหนด d คือความสูงของสามเหลี่ยมเตี้ย

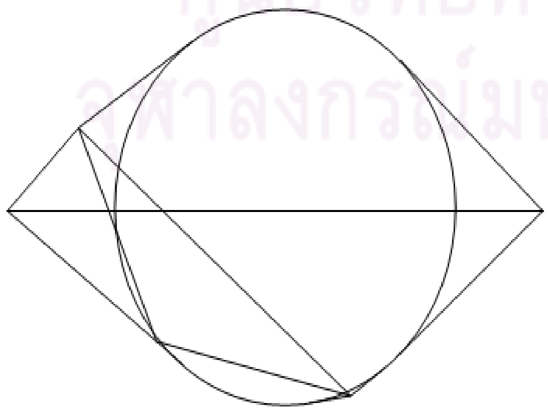
$$\mathrm{d} = \mathrm{Norm}\left[\mathrm{R} - \left(\frac{\mathrm{Q1} + \mathrm{Q3}}{2}\right)\right];$$

- หาค่ามากสุดของ d โดยใช้คำสั่ง FindMaximum และสอดคล้องกับเงื่อนไขหลุดบริเวณ 1, 5 (เหมือนกรณีที่ 2.9(B))

$$\begin{aligned}
\mathrm{h1} = \mathrm{FindMaximum}\Big[\Big\{&\mathrm{d},\ \mathrm{Norm}[\mathrm{Q1} - \mathrm{P}] > \mathrm{r},\ \mathrm{Norm}[\mathrm{Q3} - \mathrm{P}] > \mathrm{r},\ -0.25 \leq \mathrm{xQ1} \leq 0.25,\ -0.25 \leq \mathrm{xQ2} \leq 0.25,\\
&-0.25 \leq \mathrm{xQ3} \leq 0.25,\ -0.3884 \leq \mathrm{yQ1} \leq 0.3884,\ -0.3884 \leq \mathrm{yQ2} \leq 0.3884,\ -0.3884 \leq \mathrm{yQ3} \leq 0.3884,\\
&\mathrm{yQ1} > \mathrm{mAP1}\,(\mathrm{xQ1} + 0.25),\ \mathrm{yQ3} > \mathrm{mBP3}\,(\mathrm{xQ3} - 0.25),\ \mathrm{yQ3} > \mathrm{mAP4}\,(\mathrm{xQ3} + 0.25),\ \mathrm{mAQ1} > \mathrm{mAP1},\\
&\mathrm{mAQ3} > \mathrm{mAP4},\ \mathrm{mBQ3} < \mathrm{mBP3},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ3}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} + \frac{\mathrm{mAQ3}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ3}^2 + 1}} < \mathrm{r},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ3}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} - \frac{\mathrm{mBQ3}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ3}^2 + 1}} < \mathrm{r},\\
&\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ1}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} + \frac{\mathrm{mAQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ1}^2 + 1}} \geq \mathrm{r},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ1}\,\mathrm{x1} - \mathrm{y1} - \frac{\mathrm{mBQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ1}^2 + 1}} < \mathrm{r}\Big\},\ \{\{\mathrm{x1},\ 0.02\},\ \{\mathrm{y1},\ 0.002\},\\
&\{\mathrm{x2},\ -0.01\},\ \{\mathrm{y2},\ 0.02\},\ \{\alpha,\ 1.4\}\}\Big]
\end{aligned}$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q3, R, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q1, T}], Line[{T1, Q3, T2}]} /. h1[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.0838487, {x1 → 0.00992557, y1 → 0.00335827, x2 → 0.00568169, y2 → 0.03239, α → 1.39147}}
```

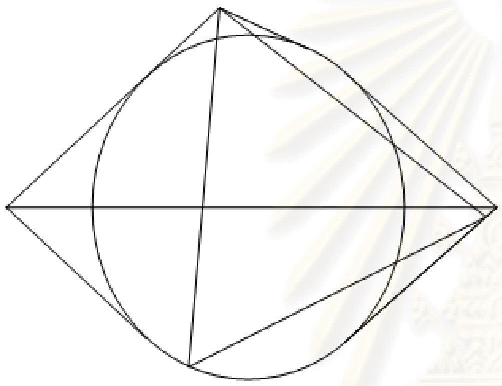


กรณีที่ 2.13

$$h = \mathrm{FindMinimum}\Big[\Big\{f[x1, y1, x2, y2, \alpha], \mathrm{Norm}[Q1 - P] > r, \mathrm{Norm}[Q2 - P] > r, -0.25 \le xQ1 \le 0.25, -0.25 \le xQ2 \le 0.25, -0.25 \le xQ3 \le 0.25, -0.3884 \le yQ1 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884, mAQ1 > mAP1, \frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\, x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r, \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\, x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r, \frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ2\, x1 - y1 + \frac{mAQ2}{4}\right]}{\sqrt{mAQ2^2 + 1}} < r, \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ2\, x1 - y1 - \frac{mBQ2}{4}\right]}{\sqrt{mBQ2^2 + 1}} \ge r, mBQ2 < mBP3, \mathrm{Norm}[Q3 - P] < r, yQ2 < mBP3\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right)\Big\}, \{\{x1, 0.0302477155645803\grave{}\}, \{y1, 0.03931756827351162\grave{}\}, \{x2, 0.03543081989442353\grave{}\}, \{y2, 0.04927319436370918\grave{}\}, \{\alpha, 0.105\}\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{B, Q2, Th}], Line[{A, Q1, T}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$$\{0.0979194, \{x1 \to -0.00395889, y1 \to 2.72904 \times 10^{-8}, x2 \to 0.0473874, y2 \to 0.00932166, \alpha \to 0.429078\}\}$$



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1) ($\mathrm{Norm}[Q1 - P] > r$)

2. จุด Q2 อยู่นอกวงกลม (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6) ($\mathrm{Norm}[Q2 - P] > r$)

3. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

$-0.25 \le xQ1 \le 0.25$, $-0.25 \le xQ2 \le 0.25$, $-0.25 \le xQ3 \le 0.25$,

($-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884$, $-0.3884 \le yQ2 \le 0.3884$, $-0.3884 \le yQ3 \le 0.3884$,)

4. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 1) ($mAQ1 > mAP1$)

5. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\, x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r\right)$$

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\, x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ2 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ2\, x1 - y1 - \frac{mBQ2}{4}\right]}{\sqrt{mBQ2^2 + 1}} \ge r\right)$$

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ2 น้อยกว่า r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6)

$$\left(\frac{\text{Abs}\left[\text{mAQ2 x1} - \text{y1} + \frac{\text{mAQ2}}{4}\right]}{\sqrt{\text{mAQ2}^2 + 1}} < \text{r}\right)$$

9. ความชัน BQ2< ความชัน BP3(จุด Q2 อยู่บริเวณ 6) ($\text{mBQ2} < \text{mBP3}$)

10. จุด Q3 อยู่ในวงกลม (จุด Q3 ไม่หลุด) ($\text{Norm[Q3 - P]} < \text{r}$)

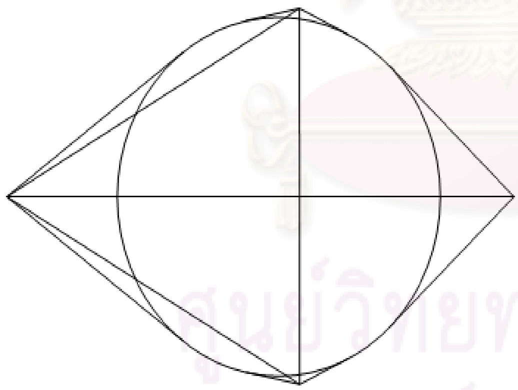
11. yQ2 อยู่ใต้เส้นตรง BP3 (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6) ($\text{yQ2} < \text{mBP3}\left(\text{xQ2} - \frac{1}{4}\right)$)

กรณีที่ 2.15

$$\text{h} = \text{FindMinimum}\Big[\Big\{\text{f[x1, y1, x2, y2, }\alpha\text{], Norm[Q1 - P]} > \text{r, Norm[Q2 - P]} > \text{r}, -0.25 \le \text{xQ1} \le 0.25,$$
$$-0.25 \le \text{xQ2} \le 0.25, -0.25 \le \text{xQ3} \le 0.25, -0.3884 \le \text{yQ1} \le 0.3884, -0.3884 \le \text{yQ2} \le 0.3884, -0.3884 \le \text{yQ3} \le 0.3884,$$
$$\text{mAQ1} < \text{mAP1}, \text{mBQ1} > \text{mBP2}, \frac{\text{Abs}\left[\text{mAQ1 x1} - \text{y1} + \frac{\text{mAQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\text{mAQ1}^2 + 1}} < \text{r}, \frac{\text{Abs}\left[\text{mBQ1 x1} - \text{y1} - \frac{\text{mBQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\text{mBQ1}^2 + 1}} < \text{r}, \text{mAQ2} > \text{mAP4},$$
$$\text{mBQ2} < \text{mBP3}, \frac{\text{Abs}\left[\text{mAQ2 x1} - \text{y1} + \frac{\text{mAQ2}}{4}\right]}{\sqrt{\text{mAQ2}^2 + 1}} < \text{r}, \frac{\text{Abs}\left[\text{mBQ2 x1} - \text{y1} - \frac{\text{mBQ2}}{4}\right]}{\sqrt{\text{mBQ2}^2 + 1}} < \text{r}, \text{mAP4 (xQ3 + 0.25)} < \text{yQ3} < \text{mAP1 (xQ3 + 0.25)}\Big\},$$
$$\Big\{\text{\{x1, 0.01818806068288148`\}, \{y1, 0.00000001\}}, \Big\{\text{x2}, -0.25 + \frac{\sqrt{3}}{9}\Big\}, \text{\{y2, 0.0000000001\}}, \{\alpha, -0.52\}\Big\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{T2, Q1, T1}], Line[{A, B}], Line[{P1, A, P4}],
   Line[{P2, B, P3}], Line[{T3, Q2, T4}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.097044, {x1 → 0.0181879, y1 → 0.000271821, x2 → -0.0575499, y2 → 0.000195058, α → -0.522585}}
```



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2) ($\text{Norm[Q1 - P]} > \text{r}$)

2. จุด Q2 อยู่นอกวงกลม (จุด Q2 หลุดบริเวณ 5) ($\text{Norm[Q2 - P]} > \text{r}$)

3. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

$-0.25 \le \text{xQ1} \le 0.25, -0.25 \le \text{xQ2} \le 0.25, -0.25 \le \text{xQ3} \le 0.25,$

($-0.3884 \le \text{yQ1} \le 0.3884, -0.3884 \le \text{yQ2} \le 0.3884, -0.3884 \le \text{yQ3} \le 0.3884,$)

4. ความชัน AQ1< ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) ($\text{mAQ1} < \text{mAP1}$)

5. ความชัน BQ1> ความชัน BP2 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) ($\text{mBQ1} > \text{mBP2}$)

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ1}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}+\frac{\mathrm{mAQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ1}^2+1}}<\mathrm{r}\right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ1}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}-\frac{\mathrm{mBQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ1}^2+1}}<\mathrm{r}\right)$$

8. ความชัน AQ2> ความชัน BP4 (จุด Q2 อยู่บริเวณ 5) ($\mathrm{mAQ2} > \mathrm{mAP4}$)

9. ความชัน BQ2< ความชัน BP3 (จุด Q2 อยู่บริเวณ 5) ($\mathrm{mBQ2} < \mathrm{mBP3}$)

10. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ2 น้อยกว่า r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 5)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ2}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}-\frac{\mathrm{mBQ2}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ2}^2+1}}<\mathrm{r}\right)$$

11. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ2 น้อยกว่า r (จุด Q2 หลุดบริเวณ 5)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ2}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}+\frac{\mathrm{mAQ2}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ2}^2+1}}<\mathrm{r}\right)$$

12. yQ3 อยู่เหนือเส้นตรง AP4 และอยู่ใต้เส้นตรง AP1 (จุด Q3 ไม่หลุด)

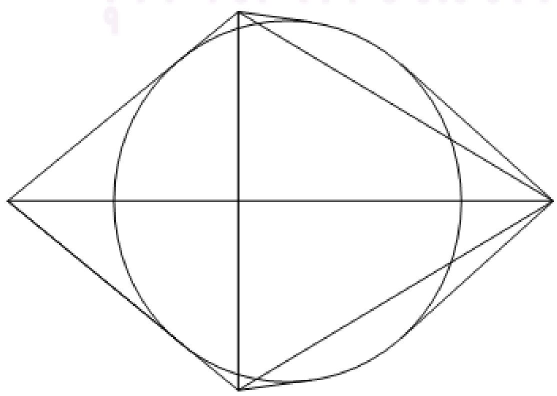
($\mathrm{mAP4}\ (\mathrm{xQ3}+0.25) < \mathrm{yQ3} < \mathrm{mAP1}\ (\mathrm{xQ3}+0.25)$)

กรณี 3(A) และ 3(B)

$$\mathrm{h}=\mathrm{FindMinimum}\Big[\Big\{\mathrm{f}[\mathrm{x1},\mathrm{y1},\mathrm{x2},\mathrm{y2},\alpha],\ \mathrm{Norm}[\mathrm{Q1}-\mathrm{P}]>\mathrm{r},\ \mathrm{Norm}[\mathrm{Q3}-\mathrm{P}]>\mathrm{r},\ -0.25\le\mathrm{xQ1}\le 0.25,$$
$$-0.25\le\mathrm{xQ2}\le 0.25,\ -0.25\le\mathrm{xQ3}\le 0.25,\ -0.3884\le\mathrm{yQ1}\le 0.3884,\ -0.3884\le\mathrm{yQ2}\le 0.3884,$$
$$-0.3884\le\mathrm{yQ3}\le 0.3884,\ \mathrm{mAQ1}>\mathrm{mAP1},\ \mathrm{mAQ3}>\mathrm{mAP4},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ1}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}+\frac{\mathrm{mAQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ1}^2+1}}\ge\mathrm{r},$$
$$\frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ1}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}-\frac{\mathrm{mBQ1}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ1}^2+1}}<\mathrm{r},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mAQ3}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}+\frac{\mathrm{mAQ3}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mAQ3}^2+1}}\ge\mathrm{r},\ \frac{\mathrm{Abs}\left[\mathrm{mBQ3}\,\mathrm{x1}-\mathrm{y1}-\frac{\mathrm{mBQ3}}{4}\right]}{\sqrt{\mathrm{mBQ3}^2+1}}<\mathrm{r}\Big\},$$
$$\{\{\mathrm{x1}, 0.004001248771113066`\}, \{\mathrm{y1}, 0.011500184963835775`\}, \{\mathrm{x2}, 0.05\}, \{\mathrm{y2}, 0.0175\}, \{\alpha, 0.47\}\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{A, B}], Line[{A, P4}], Line[{P2, B}],
    Line[{B, P3}], Line[{A, Q3, T'}], Line[{A, Q1, T}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

$$\{0.0975032,\ \{\mathrm{x1}\to 0.00700912,\ \mathrm{y1}\to 1.88846\times 10^{-11},\ \mathrm{x2}\to 0.0575499,\ \mathrm{y2}\to -2.89556\times 10^{-7},\ \alpha\to 0.523607\}\}$$



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1) ($\mathrm{Norm}[Q1-P] > r$)

2. จุด Q3 อยู่นอกวงกลม (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4) ($\mathrm{Norm}[Q3-P] > r$)

3. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

$-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$

($-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$)

4. ความชัน AQ1> ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 1) ($mAQ1 > mAP1$)

5. ความชัน AQ3> ความชัน AP4 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 4) ($mAQ3 > mAP4$)

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\, x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} \ge r \right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 1)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\, x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r \right)$$

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ3\, x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2 + 1}} \ge r \right)$$

9. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

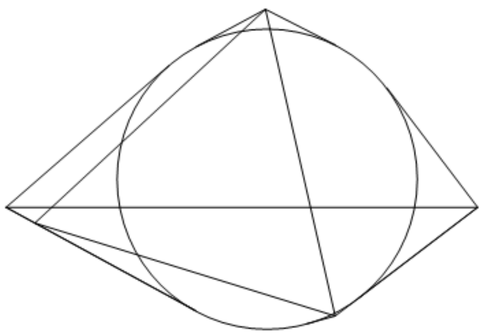
$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ3\, x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2 + 1}} < r \right)$$

กรณี 3(C) และ 3(D)

$$\begin{aligned}
&h = \mathrm{FindMinimum}\Big[\Big\{f[x1, y1, x2, y2, \alpha], \mathrm{Norm}[Q1-P] > r, \mathrm{Norm}[Q3-P] > r, \mathrm{Norm}[Q2-P] > r,\\
&\quad -0.25 \le xQ1 \le 0.25, -0.25 \le xQ2 \le 0.25, -0.25 \le xQ3 \le 0.25, -0.3884 \le yQ1 \le 0.3884, -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\\
&\quad -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884, mAQ1 < mAP1, mBQ1 > mBP2, -0.3 \le \alpha, \frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\, x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2+1}} < r,\\
&\quad \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\, x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2+1}} < r, yQ2 < mBP3\,(xQ2 - 0.25), \frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ3\, x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2+1}} \ge r, \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ3\, x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2+1}} < r, mAQ3 < mAP4\Big\},\\
&\quad \{\{x1, 0.02`\}, \{y1, 0.02282902858976615`\}, \{x2, -0.02\}, \{y2, 0.025`\}, \{\alpha, -0.2\}\}\Big]
\end{aligned}$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q2, Q3, Q1}], Line[{T12, Q1, T11}], Line[{A, B}], Line[{P1, A, P4}],
    Line[{P2, B, P3}], Line[{A, Q3, T3}], Line[{B, Q2, T2}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

```
{0.0981317, {x1 → 0.0271355, y1 → 0.0302389, x2 → -0.0318272, y2 → 0.0260472, α → -0.3}}
```



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2) (Norm[Q1 - P] > r)

2. จุด Q3 อยู่นอกวงกลม (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4) (Norm[Q3 - P] > r)

3. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

-0.25 ≤ xQ1 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ2 ≤ 0.25, -0.25 ≤ xQ3 ≤ 0.25,
(-0.3884 ≤ yQ1 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ2 ≤ 0.3884, -0.3884 ≤ yQ3 ≤ 0.3884,)

4. ความชัน AQ1< ความชัน AP1 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (mAQ1 < mAP1)

5. ความชัน BQ1> ความชัน BP2 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 2) (mBQ1 > mBP2)

6. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} < r\right)$$

7. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 2)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\right)$$

8. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ3 มากกว่าหรือเท่ากับ r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ3\,x1 - y1 + \frac{mAQ3}{4}\right]}{\sqrt{mAQ3^2 + 1}} \geq r\right)$$

9. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ3 น้อยกว่า r (จุด Q3 หลุดบริเวณ 4)

$$\left(\frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ3\,x1 - y1 - \frac{mBQ3}{4}\right]}{\sqrt{mBQ3^2 + 1}} < r\right)$$

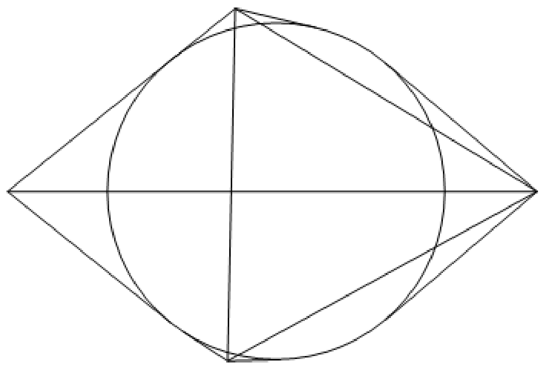
10. ความชัน AQ3< ความชัน AP4 (จุด Q3 อยู่บริเวณ 4) (mAQ3 < mAP4)

กรณี 3.15

$$h = \mathrm{FindMinimum}\Big[\Big\{f[x1, y1, x2, y2, \alpha], \mathrm{Norm}[Q1 - P] > r, \mathrm{Norm}[Q3 - P] > r, \mathrm{Norm}[Q2 - P] > r,$$
$$-0.25 \leq xQ1 \leq 0.25, -0.25 \leq xQ2 \leq 0.25, -0.25 \leq xQ3 \leq 0.25, -0.3884 \leq yQ1 \leq 0.3884, -0.3884 \leq yQ2 \leq 0.3884,$$
$$-0.3884 \leq yQ3 \leq 0.3884, mAQ1 > mAP4, mBQ1 < mBP3, mBP3\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right) > yQ2, yQ3 > mAP1\left(xQ3 + \frac{1}{4}\right),$$
$$\frac{\mathrm{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} < r, \frac{\mathrm{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r\Big\}, \{\{x1, 5.087340062494213`*^-7\},$$
$$\{y1, 0.00011779115890294175`\}, \{x2, 0.05778024557666989`\}, \{y2, 0\}, \{\alpha, -0.55\}\}\Big]$$

```
Show[Graphics[{Circle[P, r], Line[{Q1, Q3, Q2, Q1}], Line[{A, B}], Line[{P4, A, Q3, T3}],
    Line[{P2, B, Q2, T2}], Line[{T11, Q1, T12}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

$\{0.0974724, \{x1 \to 0.0039363, y1 \to 3.90277 \times 10^{-7}, x2 \to 0.0575961, y2 \to 0.00423904, \alpha \to -0.54563\}\}$



1. จุด Q1 อยู่นอกวงกลม (จุด Q1 หลุดบริเวณ 5) (Norm[Q1 - P] > r)

2. จุด Q3 อยู่นอกวงกลม (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1) (Norm[Q3 - P] > r)

3. จุด Q2 อยู่นอกวงกลม (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6) (Norm[Q2 - P] > r)

4. เงื่อนไขในตามบทตั้งในบทที่ 3

($-0.25 \le xQ1 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ2 \le 0.25,\ -0.25 \le xQ3 \le 0.25,$
$-0.3884 \le yQ1 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ2 \le 0.3884,\ -0.3884 \le yQ3 \le 0.3884,$)

5. ความชัน AQ1> ความชัน AP4 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 5) (mAQ1 > mAP4)

6. ความชัน BQ1< ความชัน BP3 (จุด Q1 อยู่บริเวณ 5) (mBQ1 < mBP3)

7. yQ2 อยู่ใต้เส้นตรง BP3 (จุด Q2 หลุดบริเวณ 6) ($mBP3\left(xQ2 - \frac{1}{4}\right) > yQ2$)

8. yQ3 อยู่เหนือเส้นตรง AP1 (จุด Q3 หลุดบริเวณ 1) ($yQ3 > mAP1\left(xQ3 + \frac{1}{4}\right)$)

9. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง AQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 5)

($\dfrac{\text{Abs}\left[mAQ1\,x1 - y1 + \frac{mAQ1}{4}\right]}{\sqrt{mAQ1^2 + 1}} < r$)

10. ระยะทางระหว่างจุด P ไปยังเส้นตรง BQ1 น้อยกว่า r (จุด Q1 หลุดบริเวณ 5)

($\dfrac{\text{Abs}\left[mBQ1\,x1 - y1 - \frac{mBQ1}{4}\right]}{\sqrt{mBQ1^2 + 1}} < r$)

2. การหาคอนเวกซ์ฮัลล์ในบทที่ 4 หัวข้อ 4.2

เราจะใช้บทที่ 4 ในหัวข้อ 4.2 มากำหนดจุดต่างๆ ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมดังนี้

ให้ A = $(0,0)$, B = $(1,0)$ คือ จุดปลายของเส้นตรงหนึ่งหน่วย L

$S_0 = (x_1, y_1)$ คือ จุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยม S

$T_0 = (x_2, y_2)$ คือ จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม T

$$S_1 = S_0 + (\frac{\sqrt{2}}{6}\cos\alpha,\ \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\alpha),\ S_2 = S_0 + (\frac{\sqrt{2}}{6}\cos(\alpha+90),\ \frac{\sqrt{2}}{6}\sin(\alpha+90))$$

$$S_3 = S_0 + (\frac{\sqrt{2}}{6}\cos(\alpha+180),\ \frac{\sqrt{2}}{6}\sin(\alpha+180))$$

$$S_4 = S_0 + (\frac{\sqrt{2}}{6}\cos(\alpha+270),\ \frac{\sqrt{2}}{6}\sin(\alpha+270))$$ คือ จุดยอดของสี่เหลี่ยม S

$$T_1 = T_0 + (\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\beta,\ \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\beta),\ T_2 = T_0 + (\frac{\sqrt{3}}{6}\cos(\beta+120),\ \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(\beta+120))$$

$$T_3 = T_0 + (\frac{\sqrt{3}}{6}\cos(\alpha+240),\ \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(\alpha+240))$$ คือ จุดยอดของสามเหลี่ยม T

ทุกกรณีจะกำหนดจุด A, B, S_1, S_2, S_3, S_4, T_1, T_2, T_3 ดังนี้

$$\text{S1} = \left\{\text{x1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Cos}[\alpha\,\text{Degree}],\ \text{y1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Sin}[\alpha\,\text{Degree}]\right\};$$

$$\text{S2} = \left\{\text{x1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Cos}[(\alpha + 90)\ \text{Degree}],\ \text{y1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Sin}[(\alpha + 90)\ \text{Degree}]\right\};$$

$$\text{S3} = \left\{\text{x1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Cos}[(\alpha + 180)\ \text{Degree}],\ \text{y1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Sin}[(\alpha + 180)\ \text{Degree}]\right\};$$

$$\text{S4} = \left\{\text{x1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Cos}[(\alpha + 270)\ \text{Degree}],\ \text{y1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\ \text{Sin}[(\alpha + 270)\ \text{Degree}]\right\};$$

$$\text{T1} = \left\{\text{x2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Cos}[\beta\,\text{Degree}],\ \text{y2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Sin}[\beta\,\text{Degree}]\right\};$$

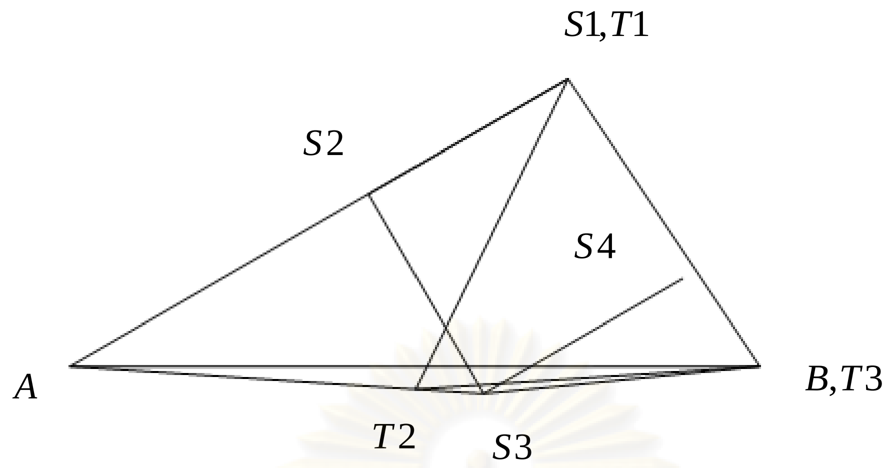
$$\text{T2} = \left\{\text{x2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Cos}[(\beta + 120)\ \text{Degree}],\ \text{y2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Sin}[(\beta + 120)\ \text{Degree}]\right\};$$

$$\text{T3} = \left\{\text{x2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Cos}[(\beta + 240)\ \text{Degree}],\ \text{y2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\ \text{Sin}[(\beta + 240)\ \text{Degree}]\right\};$$

```
A = {0, 0};
B = {1, 0};
```

จากนั้นแต่ละกรณีจะสร้างฟังก์ชันเพื่อหาพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ และใช้ฟังก์ชัน FindMinimum หาค่าน้อยสุดของฟังก์ชัน ให้สอดคล้องกับเงื่อนไข และจุดเริ่มต้น ดังนี้

กรณี 1.1



- สร้างฟังก์ชันพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์จากรูปห้าเหลี่ยม AS3BS1T1

```
x[1] = A[[1]]; x[2] = T1[[1]]; x[3] = S1[[1]]; x[4] = B[[1]];
x[5] = S3[[1]]; x[6] = A[[1]]; y[1] = A[[2]]; y[2] = T1[[2]];
y[3] = S1[[2]]; y[4] = B[[2]]; y[5] = S3[[2]]; y[6] = A[[2]];
```

$$\mathrm{Abs}\left[\sum_{i=1}^{5} \frac{x[i]\, y[i+1] - y[i]\, x[i+1]}{2}\right]$$

- กำหนดความชันของเส้นต่าง ๆ เพื่อประกอบกับการกำหนดเงื่อนไข

$$mBS1 = \frac{0 - S1[[2]]}{1 - S1[[1]]};\ mBT1 = \frac{0 - T1[[2]]}{1 - T1[[1]]};\ mBS2 = \frac{0 - S2[[2]]}{1 - S2[[1]]};$$

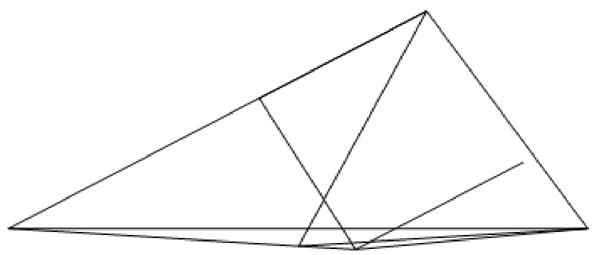
$$mBS3 = \frac{0 - S3[[2]]}{1 - S3[[1]]};\ mBS4 = \frac{0 - S4[[2]]}{1 - S4[[1]]};\ mAS2 = \frac{S2[[2]]}{S2[[1]]};$$

$$mAT1 = \frac{T1[[2]]}{T2[[1]]};\ mAS1 = \frac{S1[[2]]}{S1[[1]]};\ mAS3 = \frac{S3[[2]]}{S3[[1]]};$$

- ใช้คำสั่ง Findminimum หาค่าน้อยสุดของฟังก์ชันซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , 0 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46, mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]],
   mBS3 (T3[[1]] - 1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]] - 1), mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS2, mBS4 < mBS3,
   mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1, T1[[2]] > mAS1 T1[[1]]}, {{x1, 0.615}, {y1, 0.154},
   {x2, 0.6}, {y2, 0.12}, {α, 75}, {β, 93}}]
Show[Graphics[{Line[{T1, T2, T3}], Line[{A, B}], Line[{S1, S2, S3, S4}],
    Line[{A, T1, S1, B, S3, A}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.22759, {x1 → 0.660459, y1 → 0.187845, x2 → 0.740957, y2 → 0.127398, α → 74.9239, β → 93.8119}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T2 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]])

3. จุด T3 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS3 (T3[[1]]-1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]]-1))

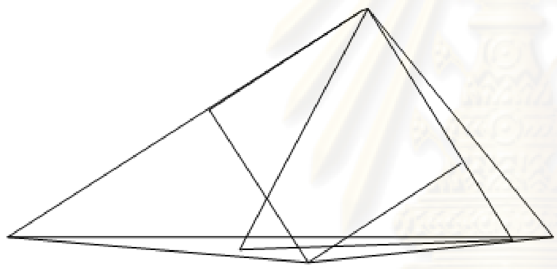
4. จุด T1 หลุดบริเวณ 1 (T1[[2]] > mAS1 T1[[1]] mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS2)

5. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 1.2

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46, mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]], mBT1 > mBS1,
   mAT1 > mAS1, mBS3 (T3[[1]] - 1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]] - 1), mBS4 < mBS3, mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1,
   T1[[2]] > mBS1 T1[[1]]}, {{x1, 0.6}, {y1, 0.18400002276309008`}, {x2, 0.67}, {y2, 0.13},
   {α, 78}, {β, 92}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S3, B, T1, S1, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}], Line[{S1, S2, S3, S4}]}
   /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.233506, {x1 → 0.6, y1 → 0.184, x2 → 0.67, y2 → 0.13, α → 77.999, β → 92.}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T2 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]])

3. จุด T3 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS3 (T3[[1]]-1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]]-1))

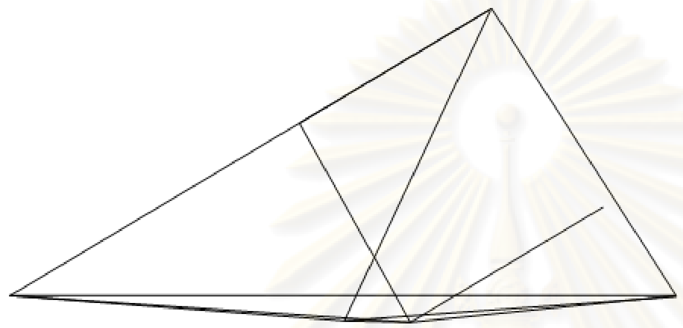
4. จุด T1 หลุดบริเวณ 2 (T1[[2]] > mBS1 T1[[1]] , mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS1)

5. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 1.3

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T2[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, -0.46 ≤ T2[[1]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T1[[1]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[1]] ≤ 0.46,
   T1[[2]] < mAS1 T1[[1]], T1[[2]] < mBS1 T1[[1]], T2[[2]] < mAS3 T2[[1]],
   mBS3 (T3[[1]] - 1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]] - 1), S2[[2]] < (mAS1 S2[[1]]), S4[[2]] < mBS1 (S4[[1]] - 1),
   mBS4 < mBS3, mBT3 < mBS3, mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1, mAT2 > mAS3}, {{x1, 0.662},
   {y1, 0.189}, {x2, 0.741}, {y2, 0.125}, {α, 75}, {β, 94}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S1, B, S3, T2, A}], Line[{T1, T2, T3}], Line[{A, B}], Line[{S1, S2, S3, S4}],
    Line[{A, S3}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

```
{0.228916, {x1 → 0.662, y1 → 0.189, x2 → 0.741, y2 → 0.125, α → 75., β → 94.}}
```

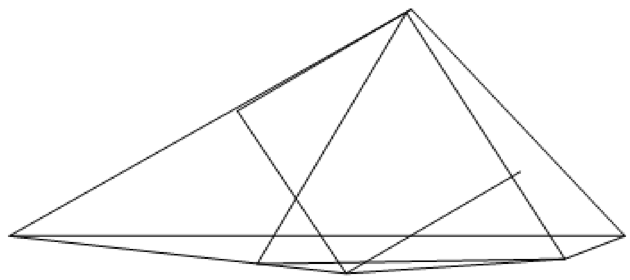


1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]
2. จุด T1 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (T1[[2]] < mAS1 T1[[1]], T1[[2]] < mBS1 T1[[1]])
3. จุด T3 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS3 (T3[[1]]-1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]]-1))
4. จุด T2 หลุดบริเวณ 3 (T2[[2]] < mAS3 T2[[1]] ,mAT2 > mAS3)
5. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 1.4

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46
     0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, T1[[2]] ≤ 0.46, mAS1 T1[[1]] > T1[[2]],
   mBS1 (T1[[1]] - 1) > T1[[2]], mAT3 > mAS3, mBT3 > mBS3, T3[[2]] < mBS3 (T3[[1]] - 1),
   mBS4 < mBS3, mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]], mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1},
  {{x1, 0.6}, {y1, 0.16454054448472746`}, {x2, 0.65}, {y2, 0.1}, {α, 77}, {β, 91}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S3, T3, B, S1, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

```
{0.235536, {x1 → 0.6, y1 → 0.164541, x2 → 0.65, y2 → 0.1, α → 77., β → 91.}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T1 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ T1[[2]] < mAS1 T1[[1]], T1[[2]] < mBS1 (T1[[1]-1)]

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 4 mBS3 (T3[[1]]-1) > T3[[2]] ,mAT3 > mAS3, mBT3 > mBS3

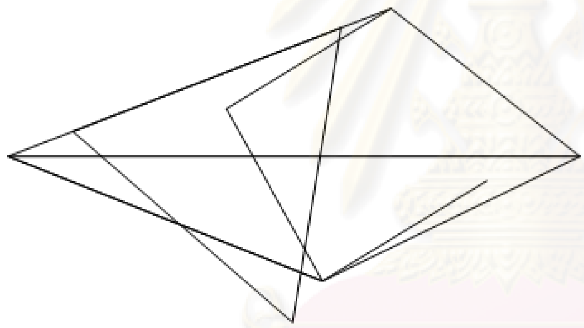
4. จุด T2 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] < mAS1 T2[[1]]

5. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

กรณี 2.1

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1,
   mAS1 (T2[[1]]) < T2[[2]] < S1[[2]], mAS1 (T1[[1]]) < T1[[2]] < S1[[2]]},
  {{x1, 0.6}, {y1, 0.1895}, {x2, 0.36}, {y2, 0.2}, {α, 78}, {β, 45}}]
Show[Graphics[{Line[{A, T2, T1, S1, B, S3, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}], Line[{A, S3}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

```
{0.227897, {x1 → 0.609483, y1 → 0.0193893, x2 → 0.397371, y2 → -0.00712283, α → 75.2134, β → 50.2683}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T1 หลุดบริเวณ 1 (mAS1 T1[[1]] < T1[[2]] < S1[[2]])

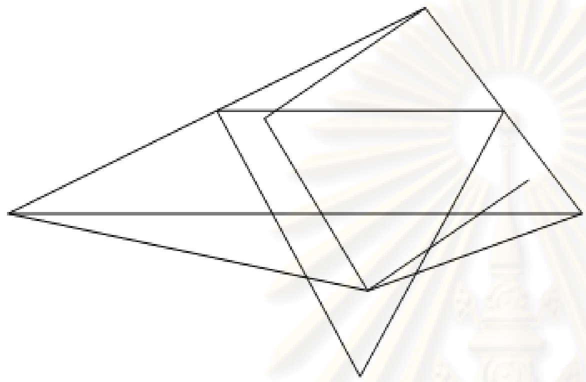
3. จุด T2 หลุดบริเวณ 1 (mAS1 T2[[1]] < T2[[2]] < S1[[2]])

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 2.2

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, mAS1 (T2[[1]]) < T2[[2]] < S1[[2]],
   mBS1 (T1[[1]] - 1) < T1[[2]] < S1[[2]], mBS4 < mBS3, mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1}, {{x1, 0.6},
   {y1, 0.1895}, {x2, 0.6}, {y2, 0.26}, {α, 78}, {β, 30}}]
Show[Graphics[{Line[{A, T2, S1, T1, B, S3, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.230295, {x1 → 0.67653, y1 → 0.104572, x2 → 0.613544, y2 → 0.0229617, α → 77.7033, β → 29.9322}}
```

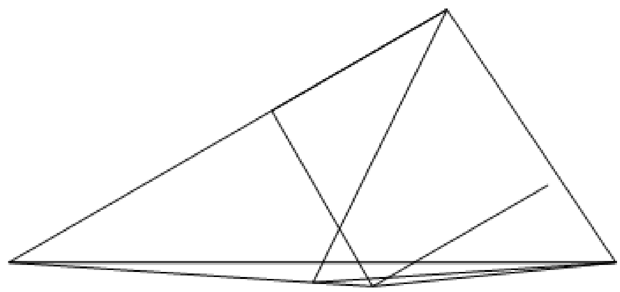


1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]
2. จุด T1 หลุดบริเวณ 2 (mBS1 (T1[[1]]-1) < T1[[2]] < S1[[2]])
3. จุด T2 หลุดบริเวณ 1 (mAS1 T2[[1]] < T2[[2]] < S1[[2]])
4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 2.3

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, mAS3 T2[[1]] > T2[[2]], mBS3 (T3[[1]] - 1) < T3[[2]] < mBS1 (T3[[1]] - 1),
   mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS2, mBS4 < mBS3, mAT2 > mAS3, mBT2 < mBS3, mBS4 > mBS1,
   T1[[2]] > mAS1 T1[[1]]}, {{x1, 0.615}, {y1, 0.154}, {x2, 0.6}, {y2, 0.12}, {α, 75}, {β, 96}}]
Show[Graphics[{Line[{A, T1, S1, B, S3, T2, A}], Line[{T1, T2, T3}],
    Line[{A, B}], Line[{S1, S2, S3, S4}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
```

```
{0.22759, {x1 → 0.660459, y1 → 0.187844, x2 → 0.740957, y2 → 0.127398, α → 74.9239, β → 93.812}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T1 หลุดบริเวณ 1 (mAS1 T1[[1]] < T1[[2]] , mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS2)

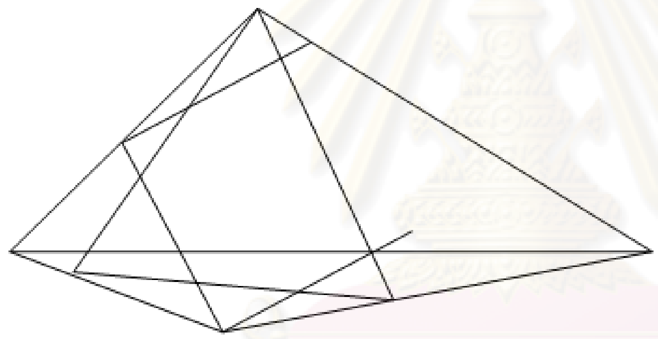
3. จุด T2 หลุดบริเวณ 3 (mAS3 T2[[1]] < T2[[2]] , mAT2 > mAS3, mBT2 < mBS3)

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 2.4

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46
     0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤T1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, mAS1 T1[[1]] < T1[[2]], mBS3 (T3[[1]] - 1) > T3[[2]],
   mAT1 > mAS2, mBT1 > mBS1, mAT3 < mAS3, mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1}, {{x1, 0.4}, {y1, 0.1},
   {x2, 0.36}, {y2, 0.09}, {α, 73}, {β, 85}}]
Show[Graphics[{Line[{A, T1, S1, B, T3, S3, A}], Line[{T1, T3, T2, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

{0.2512, {x1 → 0.400308, y1 → 0.100368, x2 → 0.360657, y2 → 0.0902201, α → 73., β → 85.}}



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

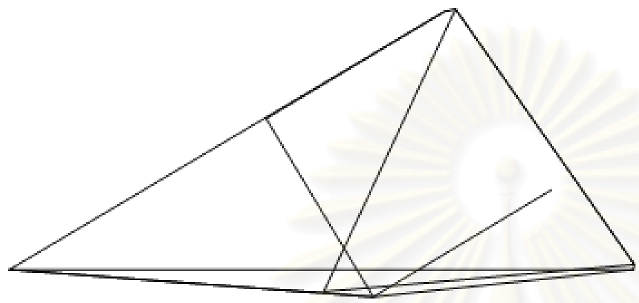
2. จุด T1 หลุดบริเวณ 1 (mAS1 T1[[1]] < T1[[2]] , mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS2)

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 4 (mBS3 (T3[[1]]-1) >T3[[2]] , mAT3 < mAS3, mBS4 < mBS3)

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 2.5

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, T1[[2]] > mBS1 T1[[1]],
   mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS1, T3[[2]] > mBS1 T3[[1]], mBT3 > mBS1, mAT3 > mAS1},
  {{x1, 0.64}, {y1, 0.185}, {x2, 0.74}, {y2, 0.13}, {α, 76}, {β, 95}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S3, B, T3, T1, S1, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}], Line[{A, S3}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]

{0.234455, {x1 → 0.64, y1 → 0.185, x2 → 0.74, y2 → 0.13, α → 76., β → 95.}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T1 หลุดบริเวณ 2 (T1[[2]] > mBS1 T1[[1]], mBT1 > mBS1, mAT1 > mAS1)

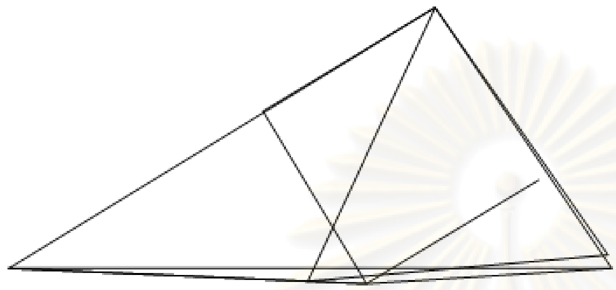
3. จุด T3 หลุดบริเวณ 2 (T3[[2]] > mBS1 T3[[1]], mBT3 > mBS1, mAT3 > mAS1)

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ (mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1)

กรณี 2.6

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46,
   0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1,
   mAS3 ( T2[[1]]) > T2[[2]] > S3[[2]], mBS1 (T1[[1]] - 1) < T1[[2]] < S1[[2]]},
  {{x1, 0.64}, {y1, 0.1895}, {x2, 0.74}, {y2, 0.123}, {α, 76}, {β, 95}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S1, T1, B, S3, T2, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}], Line[{A, S3}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

{0.228698, {x1 → 0.649979, y1 → 0.203109, x2 → 0.732201, y2 → 0.14418, α → 75.9971, β → 94.9991}}



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T1 หลุดบริเวณ 2 mBS1 (T1[[1]]-1) < T1[[2]] < S1[[2]]

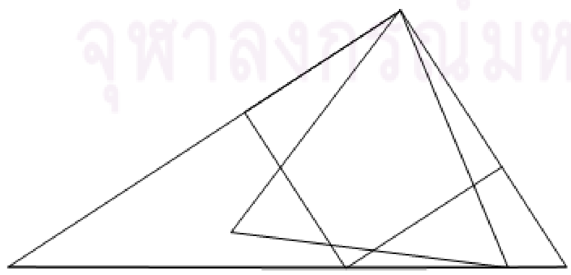
3. จุด T2 หลุดบริเวณ 3 mAS3 (T2[[1]]) > T2[[2]] > S3[[2]]

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

กรณี 2.7

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T2[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46,
   mAT1 > mAS2, mBS4 > mBS1, mBT1 < mBS1, mBT3 < mBS3, mAT3 < mAS3, T1[[2]] > mBS1 (T1[[1]] - 1),
   T3[[2]] < mBS3 (T3[[1]] - 1)}, {{x1, 0.6}, {y1, 0.15}, {x2, 0.72225}, {y2, 0.15}, {α, 77.9}, {β, 85}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S1, T1, B, T3, S3, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}]}] /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]
```

{0.23069, {x1 → 0.653753, y1 → 0.228262, x2 → 0.665576, y2 → 0.173611, α → 77.9996, β → 82.73}}



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

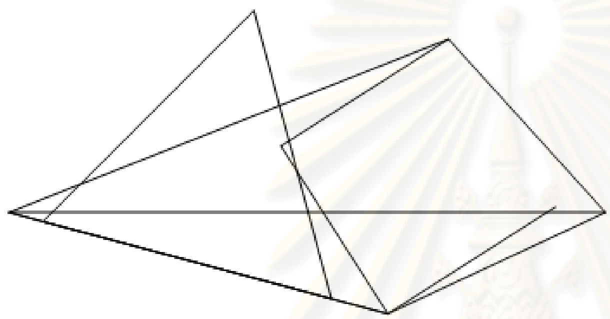
2. จุด T1 หลุดบริเวณ 2 mBS1 (T1[[1]]-1) < T1[[2]] , mAT1 > mAS2, mBT1 < mBS1

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 4 mBS3 (T3[[1]]-1) > T3[[2]] , mBT3 < mBS3, mAT3 < mAS3

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

กรณี 2.8

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, mAS3 (T2[[1]]) > T2[[2]] > S3[[2]],
   mAS3 (T3[[1]]) > T3[[2]] > S3[[2]], T2[[1]] > A[[1]]}, {{x1, 0.66}, {y1, 0.05},
   {x2, 0.35}, {y2, 0.03}, {α, 78}, {β, 75}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S1, B, S3, T3, T2, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}], Line[{A, S3}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.23013, {x1 → 0.68598, y1 → 0.0603264, x2 → 0.336198, y2 → 0.0595113, α → 77.5169, β → 75.0297}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

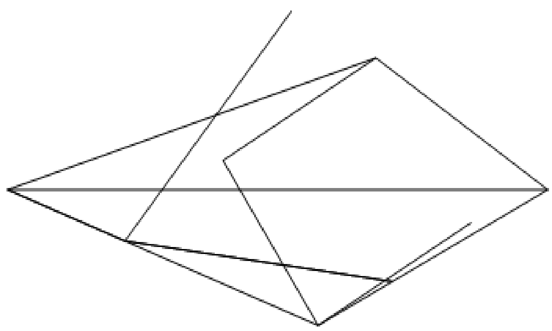
2. จุด T2 หลุดบริเวณ 3 mAS3 T2[[1]] > T2[[2]] > S3[[2]], T2[[1]] > A[[1]]

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 3 mAS3 T3[[1]] > T3[[2]] > S3[[2]]

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

กรณี 2.9

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, mAS3 (T2[[1]]) > T2[[2]] > S3[[2]], mBS3 (T3[[1]] - 1) > T3[[2]] > S3[[2]],
   T2[[1]] > A[[1]], T3[[1]] < B[[1]]}, {{x1, 0.66}, {y1, 0.05}, {x2, 0.5}, {y2, 0.03}, {α, 78}, {β, 82}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S1, B, S3, T3, T2, A}], Line[{T1, T2, T3}], Line[{A, B}], Line[{S1, S2, S3, S4}],
    Line[{A, S3}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]
{0.229553, {x1 → 0.628276, y1 → -0.00328794, x2 → 0.484804, y2 → 0.0201752, α → 76.8837, β → 82.0001}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

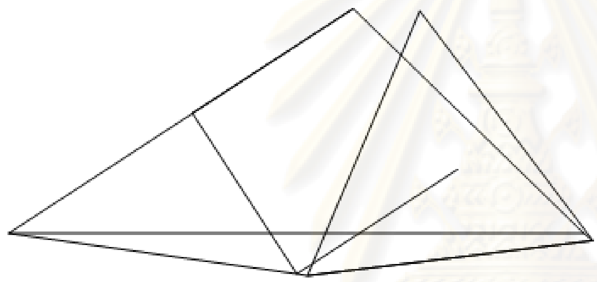
2. จุด T2 หลุดบริเวณ 3 mAS3 T2[[1]] > T2[[2]] > S3[[2]], T2[[1]] > A[[1]]

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 4 mBS3 (T3[[1]]-1) > T3[[2]] > S3[[2]], T3[[1]] < B[[1]]

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

กรณี 2.10

```
h = FindMinimum[{f[x1, y1, x2, y2, α, β], 45 ≤ α ≤ 78 , -0.46 ≤ S1[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ S2[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ S4[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T2[[2]] ≤ 0.46,
   -0.46 ≤ T3[[2]] ≤ 0.46, -0.46 ≤ T1[[2]] ≤ 0.46, 0 ≤ S1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ S3[[1]] ≤ 1,
   0 ≤ S4[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T1[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T2[[1]] ≤ 1, 0 ≤ T3[[1]] ≤ 1, mAT3 > mAS3, mBT3 > mBS3,
   T3[[2]] < mBS3 (T3[[1]] - 1), mBS4 < mBS3, mAT2 > mAS2, mBT2 > mBS2, T2[[2]] < mBS2 (T2[[1]] - 1),
   mAS2 < mAS1, mBS4 > mBS1}, {{x1, 0.55}, {y1, 0.16}, {x2, 0.75}, {y2, 0.1}, {α, 78}, {β, 97}}]
Show[Graphics[{Line[{A, S3, T2, T3, B, S1, A}], Line[{T1, T2, T3, T1}], Line[{A, B}],
    Line[{S1, S2, S3, S4}]} /. h[[2]], AspectRatio → Automatic, Axes → None]]

{0.235649, {x1 → 0.55, y1 → 0.16, x2 → 0.75, y2 → 0.1, α → 77.999, β → 97.}}
```



1. เงื่อนไขของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามบทตั้งใน [20]

2. จุด T2 หลุดบริเวณ 4 (mBS2 (T2[[1]] – 1) > T2[[2]] , mAT2 > mAS2, mBT2 > mBS2)

3. จุด T3 หลุดบริเวณ 4 (mBS3 (T3[[1]] – 1) > T3[[2]] , mAT3 > mAS3, mBT3 > mBS3)

4. จุด S2 และ จุด S4 อยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ mBS4 < mBS3, mBS4 > mBS1, mAS2 < mAS1

3. grid-search algorithm **ในบทที่** 5

เราจะบทตั้งที่ 3.2.1 และ 3.2.4 เพื่อกำหนดโดเมนเริ่มต้น คือ

$$0 \le x_1 \le 0.05,\ 0 \le y_1 \le 0.043,\ -0.25 \le x_2 \le 0.25,\ -0.3884 \le y_2 \le 0.3884$$

และ $0 \le \alpha \le \dfrac{2\pi}{3}$ จากนั้นเราจะแบ่งการหาค่าเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

1. (x_1, y_1) วาดรูป 3 มิติ ระหว่าง (x_1, y_1) กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ (x_1, y_1) แล้วพิจารณาตัดโดเมน

2. (x_2, y_2) วาดรูป 3 มิติ ระหว่าง (x_2, y_2) กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ (x_2, y_2) แล้วพิจารณาตัดโดเมน

3. α วาดรูป 2 มิติ (x_1, y_1) ระหว่าง α กับค่าน้อยสุดแต่ละกริดที่แบ่งของ α แล้วพิจารณาตัดโดเมน

เราใช้โปรแกรม Matlab ในการคำนวณค่า โดยกำหนดให้ m เป็นขอบเขตของ x_2 ,n เป็นขอบเขตของ y_2, j เป็นขอบเขตของ x_1 ,n เป็นขอบเขตของ y_1 และ i เป็นขอบเขตของ α เพื่อใช้กำหนดจุด (x_2, y_2) , (x_1, y_1) และ α ดังนี้

x1=j*d1

y1=n*d1

x2=m*d2

y2=l*d2

α = i*d3

โดยที่ d1 คือขนาดของกริด (x_1, y_1)

d2 คือขนาดของกริด (x_2, y_2)

d3 คือขนาดของกริด α

จากนั้นเราจะนำจุดเหล่านี้ไปสร้างวงกลมรัศมี $\dfrac{1}{2\pi}$ จุดศูนย์กลาง (x_1, y_1)

และจุดยอดของสามเหลี่ยม T (xQ1, yQ1), (xQ2, yQ2), (xQ3, yQ3)

จากนั้นเราจะใช้ฟังก์ชัน convhull เพื่อเก็บค่าพื้นที่ของคอนเวกซ์ฮัลล์ในแต่ละกริด

สุดท้ายเราจะใช้คำสั่ง surfc ในการ plot 3D แสดงอาณาบริเวณพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์ในแต่ละกริด และใช้คำสั่ง min เพื่อหาค่าพื้นที่ที่น้อยสุด แล้วจึงพิจารณาหาค่า error และตัดโดเมนให้เล็กลงต่อไป ซึ่งในการใช้ grid-search algorithm นี้เราจะทำ 10 ครั้ง ดังนี้

ครั้งที่ 1

```
for m=-25:25                                  กำหนดแต่ละจุดของ x2
   for l=-39:39                               กำหนดแต่ละจุดของ y2
      for i=0:120                             กำหนดขอบเขตของมุม α
         alpha=(i*pi)/180;                    กำหนดแต่ละจุดของ α
            for j=0:5                         กำหนดแต่ละจุดของ x1
               for n=0:5                      กำหนดแต่ละจุดของ y1
x1(j+1)=j*0.01;                               กำหนดขนาดกริดของ x1 (0.01)
y1(n+1)=n*0.01;                               กำหนดขนาดกริดของ y1 (0.01)
t = 0:(2*pi)/200:2*pi;                        กำหนดจุดของวงกลม 200 จุด
x2=m*0.01;                                    กำหนดขนาดกริดของ x2 (0.01)
y2=l*0.01;                                    กำหนดขนาดกริดของ y2 (0.01)
x=(cos(t)/(2*pi))+x1(j+1);                    จุด x บนวงกลม
y=(sin(t)/(2*pi))+y1(n+1);                    จุด y บนวงกลม
A=[x;y];                                      สร้างเมตริกซ์เก็บค่าจุด (x, y)
A(:,1);
xQ1=x2+(sqrt(3)/9)*cos(alpha);                จุดยอด Q1
yQ1=y2+(sqrt(3)/9)*sin(alpha);                จุดยอด Q1
xQ2=x2+(sqrt(3)/9)*cos(alpha+(2*pi)/3);       จุดยอด Q2
yQ2=y2+(sqrt(3)/9)*sin(alpha+(2*pi)/3);       จุดยอด Q2
yQ3=y2+(sqrt(3)/9)*sin(alpha+(4*pi)/3);       จุดยอด Q3
B=[-0.25 0.25;0 0];                           สร้างเมตริกซ์ B เก็บจุด A, B
C=[xQ1 xQ2 xQ3;yQ1 yQ2 yQ3];                  สร้างเมตริกซ์ C เก็บจุด Q1, Q2, Q3
D = [A B C];                                  สร้างเมตริกซ์ D เก็บทุกจุด
k = convhull(D(1,:),D(2,:));                  สร้าง k เก็บคอนเวกซ์ฮัลล์ของ D
format long                                   ให้แสดงทศนิยม 10 ตำแหน่ง
[k,a(j+1,n+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));       a เก็บค่าพื้นที่ของ D แต่ละ x1, y1
      end
   end
```

b(i+1)=min(min(a));	สร้าง b เก็บค่าน้อยสุดของ a แต่ละ alpha
end	
p(m+26,l+40)=min(b);	สร้าง p เก็บค่าน้อยสุดของ b
u1(m+26,l+40)=x2;	u1 เก็บ x2
u2(m+26,l+40)=y2;	u2 เก็บ y2
end	
end	
surfc(u1,u2,p)	แสดงพื้นผิว x2, y2 ค่าน้อยสุด
min(min(p))	แสดงพื้นที่น้อยสุดของ p

เราจะวิเคราะห์การตัดโดเมนของรูปพื้นผิวที่ได้จาก surfc(u1, u2, p) โดยนำค่า min(min(p)) – 2ε มาใช้ในการพิจารณา ส่วนการแสดงผลของ x1 y1 และค่าน้อยสุดนั้นเราจะทำนองเดียวกันโดยเปลี่ยน a ให้เก็บค่า x2 y2 และแสดงรูปพื้นผิว x1 y1 ค่าน้อยสุด จากนั้นก็ตัดโดเมน x1 y1 ส่วนการแสดงผล alpha กับค่าน้อยสุดนั้น a ให้เก็บค่า x2 y2 x1 และ x2 และใช้คำสั่ง plot(b)

ในการแสดงโปรแกรมในครั้งต่อไปนั้น โครงสร้างเหมือนกับครั้งที่ 1 แต่มีสิ่งที่ต้องเปลี่ยนค่าดังนี้

บรรทัดที่ 1, 2	การกำหนดขอบเขตแต่ละจุด x2, y2
บรรทัดที่ 3, 4	การกำหนดขอบเขตแต่ละจุดของ α
บรรทัดที่ 5, 6	การกำหนดขอบเขตแต่ละจุด x1, y1
บรรทัดที่ 7, 8	กำหนดขนาดกริดของ x1, y1 (d_{11}, d_{12})
บรรทัดที่ 10, 11	กำหนดขนาดกริดของ x2, y2 (d_{21}, d_{22})
บรรทัดที่ 26	การเก็บค่าพื้นที่คอนเวกซ์ฮัลล์
บรรทัดที่ 28 – 30	กำหนดค่า p, u1, u2 (ถ้าหา α จะไม่กำหนดค่า u1, u2)
บรรทัดที่ 33	การแสดงผลซึ่งแบ่งตามกลุ่ม ดังนี้
(x_1, y_1)	ใช้คำสั่ง surfc(u1, u2, p) โดยที่ (u1, u2) คือ เมทริกซ์ของ x1, y1
(x_2, y_2)	ใช้คำสั่ง surfc(u1, u2, p) โดยที่ (u1, u2) คือ เมทริกซ์ของ x2, y2
α	ใช้คำสั่ง plot(X, b) โดยที่ X คือ เมทริกซ์ของ α

ครั้งที่ 2

บรรทัดที่ 1, 2	m=-48:50, l=-38:50
บรรทัดที่ 3, 4	i=0:120, alpha=(i*pi)/180;
บรรทัดที่ 5, 6	j=0:5, n=0:5
บรรทัดที่ 7, 8	x1(j+1)=j*0.01; y1(n+1)=n*0.01;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.005; y2=l*0.005;
บรรทัดที่ 26	[k,a(j+1,n+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28 – 30	p(m+49, l+39) = min(b); u1(m+49, l+39) = x2; u2(m+49, l+39) = y2;

ครั้งที่ 3

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:10, l=0:9
บรรทัดที่ 3, 4	i=0:120, alpha=(i*pi)/180;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-39:45, n=-28:40
บรรทัดที่ 7, 8	x1=j*0.005; y1=n*0.005;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.005; y2=l*0.005;
บรรทัดที่ 26	[k,a(m+1+l,j+68+n)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28	X=(0:1:120)*pi/180;

ครั้งที่ 4

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:50, l=0:43
บรรทัดที่ 3, 4	i=400:1720, alpha=i*0.001;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-195:225, n=-140:200
บรรทัดที่ 7, 8	x1=j*0.001; y1=n*0.001;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.001; y2=l*0.001;
บรรทัดที่ 26	[k,a(m+1+l,j+68+n)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28	X=(400:1:1720)*0.001;

ครั้งที่ 5

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:50, l=0:43
บรรทัดที่ 3, 4	i=860:1240, alpha=i*0.0001;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-195:225, n=-140:200
บรรทัดที่ 7, 8	x1(j+1)=j*0.001; y1(n+1) = n*0.001;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.001; y2=l*0.001;
บรรทัดที่ 26	[k,a(j+1,n+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28-30	p(m+196,l+141)=min(b); u1(m+196,l+141)=x2; u2(m+196,l+141)=y2;

ครั้งที่ 6

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:100, l=0:86
บรรทัดที่ 3, 4	i=860:1240, alpha=i*0.0001;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-180:180, n=0:140
บรรทัดที่ 7, 8	x1(j+1)=j*0.0005; y1(n+1) = n*0.0005;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.0005; y2=l*0.0005;
บรรทัดที่ 26	[k,a(m+181,l+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28-30	p(j+1,n+1)=min(b); u1(j+1,n+1)=x1; u2(j+1,n+1)=y1;

ครั้งที่ 7

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:280, l=0:90
บรรทัดที่ 3, 4	i=860:1240, alpha=i*0.0001;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-900:900, n=0:700
บรรทัดที่ 7, 8	x1(j+1)=j*0.0001; y1(n+1) = n*0.0001;
บรรทัดที่ 10, 11	x2=m*0.0001; y2=l*0.0001;
บรรทัดที่ 26	[k,a(j+1,n+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));
บรรทัดที่ 28-30	p(m+901,l+1)=min(b); u1(m+901,l+1)=x2; u2(m+901,l+1)=y2;

ครั้งที่ 8

บรรทัดที่ 1, 2	m=0:280, l=0:90
บรรทัดที่ 3, 4	i=860:1240, alpha=i*0.0001;
บรรทัดที่ 5, 6	j=-600:-440, n=0:280

บรรทัดที่ 7, 8 x1(j+1)=j*0.00001; y1(n+1) = n*0.00001;

บรรทัดที่ 10, 11 x2=m*0.0001; y2=l*0.0001;

บรรทัดที่ 26 [k,a(m+601,l+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));

บรรทัดที่ 28-30 p(j+1,n+1)=min(b); u1(j+1,n+1)=x1;   u2(j+1,n+1)=y1;

ครั้งที่ 9

บรรทัดที่ 1, 2 m=1715:1721, l=0:3

บรรทัดที่ 3, 4 i=860:1240, alpha=i*0.0001;

บรรทัดที่ 5, 6 j=-600:-440, n=0:280

บรรทัดที่ 7, 8 x1(j+1)=j*0.00001; y1(n+1) = n*0.00001;

บรรทัดที่ 10, 11 x2=m*0.00001; y2=l*0.00001;

บรรทัดที่ 26 [k,a(j-1714,n+1)]=convhull(D(1,:),D(2,:));

บรรทัดที่ 28-30 p(m+901,l+1)=min(b); u1(m+901,l+1)=x2; u2(m+901,l+1)=y2;

ครั้งที่ 10

บรรทัดที่ 1, 2 m=1715:1721, l=0:3

บรรทัดที่ 3, 4 i=8600:12400, alpha=i*0.0001;

บรรทัดที่ 5, 6 j=-57560:-57500, n=0:8

บรรทัดที่ 7, 8 x1=j*0.00001; y1 = n*0.00001;

บรรทัดที่ 10, 11 x2=m*0.00001; y2=l*0.00001;

บรรทัดที่ 26 [k,a(m-1714+l,j+57561+n)]=convhull(D(1,:),D(2,:));

บรรทัดที่ 28 X=(8600:1:12400)*0.0001;

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสิทธิโชค โสมอ่ำ เกิดเมื่อวันที่ 27 กันยายน พ.ศ. 2528 ที่จังหวัดนครราชสีมา ประเทศไทย สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) สาขาคณิตศาสตร์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ด้วยทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์ เมื่อปี พ.ศ. 2551 และเข้าศึกษาในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ด้วยทุนจากโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551 ถึงปัจจุบัน