Journal of Research Methodology Volume 12, Number 1 (January - June 1999)
วารสารวิธีวิทยาการวิจัย ปีที่ 12 ฉบับที่ 1 (มกราคม - มิถุนายน 2542)

Nonpositive Definite Matrix in Structural Equation Modeling

Teradech Chai-Aroon

ABSTRACT

In structural equation modeling (SEM) we usually find that our matrix is nonpositive definite matrix. This is the serious problem because the estimation procedure is interrupted and the output is incomplete. Matrix is not positive definite when (1) at least one of all eigenvalues are negative and (2) the determinant of that matrix are equal to zero. There are four type of matrix in SEM that can be a not positive definite matrix; input matrix, implied covariance matrix, parameters matrix and weight matrix . There are serveral reasons to explain why matrix is not positive definite such as typographical error, missing data, sampling variation and linear dependency. These reasons can manage before the SEM procedure. However, researcher may use the inappropriate starting value or wrong specified model and matrix will be a not positive definite. In this case, I suggest that researcher should verified the specification, identification and estimation process again.

Journal of Research Methodology Volume 12, Number 1 (January - June 1999)
วารสารวิธีวิทยาการวิจัย ปีที่ 12 ฉบับที่ 1 (มกราคม - มิถุนายน 2542)

ปัญหาความไม่เป็นบวกแน่นอนของเมทริกซ์กับการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง

ธีรเดช ฉายอรุณ

บทคัดย่อ

ในการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง (SEM) เราจะพบว่าบ่อยครั้งที่เมทริกซ์ของผู้วิจัยมีลักษณะไม่เป็นบวกแน่นอน (Nonpositive definite matrix) ปัญหาดังกล่าวเป็นเรื่องร้ายแรง เนื่องจากกระบวนการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้างอาจจะหยุด หรือไม่สมบูรณ์ ผลการวิเคราะห์ก็ไม่อาจนำไปตีความได้ เมทริกซ์ที่จะไม่เป็นบวกแน่นอนจะต้องมีลักษณะดังนี้ คือ (1) มีค่าไอเกน อย่างน้อย 1 ค่าที่เป็นลบ หรือ (2) ค่าดีเทอร์มิแนนท์ ของเมทริกซ์นั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ และเราอาจพบสถานการณ์ที่ก่อให้เกิดปัญหาดังกล่าวได้ 4 สถานการณ์ คือ เกิดกับเมทริกซ์นำเข้า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรที่ประมาณค่าได้ เมทริกซ์ของพารามิเตอร์ที่มีลักษณะเป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมและเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก สำหรับสาเหตุที่ก่อให้เกิดปัญหาดังกล่าวได้แก่ ความผิดพลาดของการพิมพ์ การมีข้อมูลสูญหาย ขนาดของกลุ่มตัวอย่างหรือการที่ตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันมาก ซึ่งสาเหตุเหล่านี้อาจแก้ไขได้ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ นอกจากนี้อาจเกิดจากปัญหาการกำหนดค่าตั้งต้น หรือการระบุโมเดลที่ผิดพลาด ซึ่งหากเป็นกรณีหลังนี้ผู้เขียนแนะนำให้ทำการตรวจสอบการระบุโมเดล การกำหนดความเป็นไปได้ค่าเดียวของโมเดล รวมทั้งการประมาณค่าพารามิเตอร์ใหม่อีกครั้ง

บทนำ

นักวิจัยที่เคยมีประสบการณ์ของการศึกษาโมเดลสมการโครงสร้าง (structural equation modeling : SEM) และได้เคยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปต่าง ๆ เช่น LISREL, AMOS, หรือ EQS ในการวิเคราะห์ข้อมูล คงเคยได้รับข้อความเตือนจากโปรแกรมว่า เมทริกซ์ของผู้วิจัยนั้นไม่เป็นบวกแน่นอน (Nonpositive Definite Matrix) ปัญหาที่ตามมาก็คือ ไม่สามารถที่จะทำการวิเคราะห์ให้สมบูรณ์ได้ ผู้เขียนเสนอบทความนี้โดยมีจุดประสงค์ เพื่อที่จะให้ผู้อ่านเกิดความกระจ่างเกี่ยวกับเมทริกซ์ดังกล่าวว่ามีลักษณะอย่างไร มีความสำคัญสำหรับการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้างอย่างไร พร้อมทั้งสาเหตุของการเกิดเมทริกซ์ดังกล่าวพร้อมทั้งแนวทางแก้ไข เพื่อที่จะได้เป็นแนวทางสำหรับนักวิจัยที่สนใจศึกษาโมเดลสมการโครงสร้างต่อไป

เมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน (Nonpositive Definite Matrix) คืออะไร ?

ในกระบวนการของการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยพบกับข้อความเตือน (warning) หรือข้อความระบุความผิดพลาด (error) จากโปรแกรมสำเร็จรูป อาทิ LISREL ว่า 'Matrix to be analyzed is not positive definite.' หรือ 'Warning : Theta EPS is not positive definite' ผลที่ตามมาก็คือ โปรแกรมอาจหยุดการวิเคราะห์ หรือ โปรแกรมอาจวิเคราะห์ข้อมูลให้แต่ขาดความสมบูรณ์ เช่น ไม่ทำการวิเคราะห์ส่วนที่เหลือ (residual) รวมทั้งไม่ให้ดัชนีการปรับปรุงโมเดล (modification indices) ซึ่งก็แล้วแต่ว่าเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอนนั้นจะไปเกิดในเมทริกซ์ใดของการวิเคราะห์

เราอาจนิยามเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน โดยอาศัยหลักพีชคณิตของเมทริกซ์ได้สองวิธี คือ ใช้หลักของค่าไอเกน (eigenvalue) และ ใช้หลักการดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของเมทริกซ์ ลองดูตัวอย่างของเมทริกซ์ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้เมทริกซ์ A และ B เป็นเมทริกซ์สหสัมพันธ์ (correlation matrix) และเมทริกซ์ ความแปรปรวนร่วม (convariance matrix) ตามลำดับ

$$A = \begin{vmatrix} 1.0 & .9 & -.5 \\ .9 & 1.0 & .9 \\ -.5 & .9 & 1.0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

ค่าไอเกน (eigenvalue) ซึ่งเปรียบเสมือนค่า latent root หรือ characteristic root โดยทั่วไปจำนวนของค่าไอเกนจะเท่ากับจำนวนตัวแปรในเมทริกซ์นั้น ๆ ตามหลักของค่าไอเกนแล้ว การที่เมทริกซ์ใดจะไม่เป็นบวกแน่นอนได้นั้น เมทริกซ์ดังกล่าวจะต้องมีค่าไอเกนอย่างน้อย ๑ ค่าที่ติดลบ (Bollen, ๑๙๘๙ : ๔๖๓ ; Worthke, ๑๙๙๓ : ๒๖๐) จากตัวอย่างข้างต้น เมทริกซ์ A มีค่าไอเกนเท่ากับ [2.05, 1.5, -.55] ตามลำดับ ซึ่งค่าไอเกนค่าที่ ๓ มีค่าเป็นลบ เมทริกซ์ A จึงไม่เป็นบวกแน่นอน (Nonpositive definite matrix)

ค่าดีเทอร์มิเนนท์ (determinant) ของเมทริกซ์ใด มีลักษณะเป็นค่าเดี่ยว (scalar) กล่าวคือในแต่ละเมทริกซ์จะมีดีเทอร์มิเนนท์เพียงค่าเดียว ตามหลักของดีเทอร์มิแนนท์แล้ว เมทริกซ์ใดจะไม่เป็นบวกแน่นอนได้ก็ต่อเมื่อ ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ ๐ จากตัวอย่างข้างต้น เมทริกซ์ B มีค่าดีเทอร์มิแนนท์ เท่ากับ ๐ ดังนั้นเมทริกซ์ B จึงไม่เป็นบวกแน่นอน (Nonpositive definite matrix) สำหรับกรณีที่ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์เป็น ๐ นั้น บางที่เรียกว่า singular matrix (Rigdon, ๑๙๙๗ :๑)

สถานการณ์ใดบ้างที่อาจก่อให้เกิดเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน

๑. เริ่มจากการนำเมทริกซ์เข้าสู่การวิเคราะห์ (input matrix) ในกรณีที่เมทริกซ์ที่จะนำเข้าสู่การวิเคราะห์เป็นเมทริกซ์สหสัมพันธ์ หรือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ซึ่งมีลักษณะที่ผิดปกติบางอย่าง ก็อาจก่อให้เกิดปัญหาเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน ลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้เมทริกซ์ S เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ซึ่งมีสมาชิกดังนี้

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ S เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ดังนั้นสมาชิกตามแนวทแยง (diagonal element) ก็คือค่าความแปรปรวนของตัวแปร และสมาชิกนอกแนวทแยง (off diagonal) ก็คือค่าความแปรปรวนร่วมของทั้งสองตัวแปร เมทริกซ์ดังกล่าวมีลักษณะที่ผิดปกติ คือ โดยปกติแล้วค่าความแปรปรวนร่วมของสองตัวแปรจะมีค่าต่ำกว่า รากที่สองของผลคูณระหว่างความแปร-ปรวนของตัวแปรคู่นั้น (Worthke, ๑๙๙๓ : ๒๕๗)

$$Cov(x,y) < \sqrt{S^2_i * S^2_j}$$

จากตัวอย่างข้างต้น ค่าความแปรปรวนร่วมเท่ากับ 3 ซึ่งสูงกว่า $\sqrt{2*1}$ = 1.41 ดังนั้นเมทริกซ์ S จึงไม่เป็นบวกแน่นอน อีกประการหนึ่ง ค่าสหสัมพันธ์ของตัวแปรคู่ใด ๆ จะมีค่าระหว่าง -1 ถึง 1 และเราสามารถคำนวณค่าสหสัมพันธ์ได้จากค่าความแปรปรวนร่วม ดังนี้

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{S^2_i * S^2_j}}$$

จากตัวอย่างข้างต้นพบว่าค่าสหสัมพันธ์ของทั้งสองตัวแปรมีค่าถึง 4.24 ซึ่งเป็นค่าสหสัมพันธ์ที่เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นเมทริกซ์ S จึงมีลักษณะที่ผิดปกติ

2. เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรที่ประมาณค่าได้ (implied covariance matrix : Σ) เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน ตามกระบวนการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง ในขั้นตอนนี้เริ่มทำการประมาณค่าพารามิเตอร์แล้ว หลักการก็คือพยายามที่จะประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร โดยอาศัยเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง (S) ซึ่งในบางครั้งเมทริกซ์ที่ประมาณค่าขึ้นมานั้น อาจยังขาดความกลมกลืน (inadmissible) จึงทำให้เมทริกซ์ดังกล่าวไม่เป็นบวกแน่นอน

3. เมทริกซ์ของพารามิเตอร์ที่ประมาณค่าได้บางเมทริกซ์ ได้แก่ theta-delta (Θ_δ), theta-epsilon (Θ_ε), phi (ϕ) และ psi (ψ) มีสมาชิกตามแนวทแยงบางตัวมีค่าเป็นลบ เนื่องจากเมทริกซ์ดังกล่าวจัดเป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมชนิดหนึ่ง ค่าของสมาชิกตามแนวทแยงก็คือค่าความแปรปรวนนั่นเอง ซึ่งหากมีค่าติดลบแล้ว จะส่งผลให้เมทริกซ์ดังกล่าวไม่เป็นบวกแน่นอนได้

4. เมื่อผู้วิจัยใช้เมทริกซ์นำเข้า (input matrix) เป็นเมทริกซ์ชนิดอื่นที่ไม่ใช่เมทริกซ์สหสัมพันธ์ หรือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม เช่น ผู้วิจัยใช้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก (weight matrix) ซึ่งการสร้างเมทริกซ์ดังกล่าว ต้องนำค่าคงที่บางค่ามาคูณกับสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์เดิม ซึ่งอาจส่งผลให้เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักนี้ไม่เป็นบวกแน่นอน แต่ส่วนใหญ่ผู้วิจัยมักจะเลือกใช้เมทริกซ์สหสัมพันธ์หรือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมมากกว่า ดังนั้นสถานการณ์นี้จะไม่เกิดขึ้นบ่อยนัก

สาเหตุที่พบได้บ่อยสำหรับเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน

ในตอนที่แล้วได้ระบุถึงสถานการณ์ที่อาจก่อให้เกิดเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน ว่ามีโอกาสเกิดได้ถึง 4 สถานการณ์ ซึ่งในแต่ละสถานการณ์ก็อาจมีสาเหตุต่างกันออกไป ในที่นี้ผู้เขียนขอเสนอสาเหตุที่พบได้บ่อยที่จะทำให้เมทริกซ์ของผู้วิจัยเป็นเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน ดังนี้

1. ปัญหาความผิดพลาดของการพิมพ์ (typegraphical error) แม้ว่าจะดูเป็นเรื่องง่าย ๆ แต่ก็น่าจะเป็นประเด็นแรกที่ผู้วิจัยอาจสันนิษฐานได้ก่อน แม้แต่ Joreskog and Sorbom (1989, 296) เองก็ยังเสนอให้ตรวจสอบเรื่องนี้ก่อน เนื่องจากบ่อยครั้งที่ผู้วิจัยต้องทำการคัดลอกค่าสหสัมพันธ์ หรือค่าความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้จากโปรแกรมอื่น มาเข้าสู่โปรแกรมที่จะวิเคราะห์สมการโครงสร้าง ดังนั้นจึงอาจเกิดความผิดพลาดขึ้นได้

2. การมีข้อมูลสูญหายจำนวนมาก (missing data) ในการวิจัยบางลักษณะ เช่น การสำรวจซ้ำ (panel survey) อาจมีข้อมูลสูญหายจำนวนมาก วิธีจัดการกับข้อมูลที่หายไปที่นิยมใช้ก็คือ จะตัดเอาคนที่ไม่ตอบในตัวแปรนั้น ๆ ออกไป และศึกษาเฉพาะคนที่เหลือ (Arbuckle :1995, 473) วิธีดังกล่าวเรียกว่า pairwise deletion ซึ่งผลของวิธีดังกล่าวอาจทำให้เกิดเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอนได้ เนื่องจากค่าสหสัมพันธ์ของตัวแปรแต่ละคู่ (หรือค่าความแปรปรวนร่วม) ไม่ได้เกิดจากกลุ่มเดียวกันทั้งหมด หากแต่เกิดจากกลุ่มตัวอย่างย่อย (subset sample)

3. ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (sampling variation) ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กมาก อาจเป็นไปได้ที่เมทริกซ์นำเข้า อาจเป็นเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอนได้ เพราะต้องใช้เมทริกซ์ของกลุ่มตัวอย่าง เพื่อประมาณค่าเมทริกซ์ของกลุ่มประชากร แต่เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก อาจประสบปัญหา sampling fluctuation ได้ แต่กรณีนี้ Rigdon (1997, 3) ให้ความเห็นว่าในงานวิจัยบางชิ้นก็โต้แย้งว่าขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เล็ก ก็อาจไม่เกิดปัญหาเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอนได้เหมือนกัน อย่างไรก็ตามเรื่องนี้ก็ให้เป็นข้อสังเกตและเป็นดุลยพินิจของผู้วิจัย

4. การที่ตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันเองสูงมาก (linear dependency/multi-colinearlity) ในกรณีที่เมทริกซ์นำเข้าเป็นเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน อาจเป็นเพราะเกิดสหสัมพันธ์อย่างสมบูรณ์ (perfect correlation) หรือสหสัมพันธ์สูงมาก ระหว่างตัวแปรอิสระด้วยกันเอง ลองพิจารณาจากเมทริกซ์สหสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$R = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & Y \\ \hline X_1 & 1.0 & & \\ X_2 & .9 & 1.0 & \\ Y & .62 & .9 & 1.0 \end{array}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเมทริกซ์ R จัดเป็นเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน เนื่องจากค่า [R] = 0 และจะเห็นได้ว่าตัวแปร X_1 และ X_2 มีความสัมพันธ์กันสูงมาก (.9) ผู้วิจัยสามารถตรวจสอบข้อมูลของตัวเองได้โดยพิจารณาจากเมทริกซ์สหสัมพันธ์ หรือค่าสถิติบางค่าเช่น tolerance

5. การกำหนดค่าตั้งต้น (starting value) ในการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง ทั้งกรณีที่เป็นโมเดลตัวแปรสังเกตได้ หรือโมเดลตัวแแปรแฝง ส่วนใหญ่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยกระบวนการทำซ้ำ (iteration procedure) ไม่ว่าจะเป็นวิธีการ maximum likelihood หรือ generalized least square ก็ล้วนใช้การทำซ้ำทั้งสิ้น ในขั้นตอนของการทำซ้ำ จะทำการกำหนดตัวเลขเป็นค่าตั้งต้นเองโดยอัตโนมัติแล้วทำการวิเคราะห์ซ้ำจนได้ตัวเลขที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด นั่นหมายความว่าจริง ๆ แล้วผู้วิจัยไม่ต้องกำหนดค่าตั้งต้นให้กับพารามิเตอร์ใด ๆ หากแต่ในบางกรณี โดยเฉพาะผู้วิจัยที่ศึกษาโมเดลตัวแปรแฝง อาจต้องมีการกำหนดค่าตั้งต้นให้กับโปรแกรมบ้าง เพราะหากไม่กำหนด ก็จะประสบปัญหาการกำหนดค่าที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว (unidentified) และการกำหนดค่าตั้งต้นนี้เอง ที่อาจก่อให้เกิดเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน

6. การที่ error variance มีค่าเป็น 0 ในกรณีที่ผู้วิจัยทำการศึกษาโมเดลของการวัด (measurement model) อาจเป็นไปได้ที่ผู้วิจัยกำหนดค่า error variance บางค่าในเมทริกซ์ theta-delta (Θ_δ), theta-epsilon (Θ_ε) ให้เป็น 0 จึงส่งผลให้เมทริกซ์ดังกล่าวไม่เป็นบวกแน่นอน การที่ผู้วิจัยกำหนด error variance ให้เป็น 0 นั้นหมายความว่าไม่มีความคลาดเคลื่อนของการวัด (measurement error) ซึ่งอาจเป็นไปได้ในกรณีที่ตัวแปรแฝงที่สร้างขึ้นนั้น มีตัวชี้วัด (indicator) เป็นตัวแปรสังเกตเพียงตัวเดียว ก็อาจถือว่าที่ผู้วิจัยทำอย่างนั้นเป็นสิ่งที่ถูกต้อง เพียงแต่ว่าการกำหนดอย่างนั้นได้ทำให้เกิดปัญหาขึ้น

7. การที่ error variance มีค่าเป็นลบ สาเหตุนี้เกิดในสถานการณ์ที่คล้ายกับข้อ 6 คือ เกิดในพารามิเตอร์ของเมทริกซ์ theta-delta (Θ_δ), theta-epsilon (Θ_ε) โดยมีสมาชิกตามแนวทแยง (ซึ่งก็คือ error variance) เป็นลบขึ้น ซึ่งค่า error variance นี้คำนวณได้จาก $1-R^2$ ค่า R^2 ก็คือค่า communality ในเรื่องของการวิเคราะห์องค์ประกอบ (factor analysis) ซึ่งหมายถึงร้อยละของความแปรปรวนของตัวแปรสังเกต ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรแฝง โดยปกติแล้วค่า communality จะมีค่าเป็นบวกและไม่เกิน 1 ดังนั้นการที่ค่า error variance มีค่าเป็นลบ แสดงว่าค่า communality มีค่ามากกว่า 1 ซึ่งไม่น่าจะเป็นไปได้ ในกรณีนี้สะท้อนให้ทราบถึงการระบุโมเดล (model specification) ของผู้วิจัยยังไม่ดีพอ

ผลที่ตามมาของเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน

1. ไม่สามารถทำการวิเคราะห์สมการโครงสร้างได้ สำหรับโปรแกรม LISREL แล้วถือเป็นความผิดร้ายแรง (fatal error) และไม่ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ให้ ส่วนใหญ่จะเกิดกับความผิดพลาดทางการพิมพ์ การมีข้อมูลสูญหาย และเกิดความสัมพันธ์กันภายในตัวแปรอิสระด้วยกันเอง เหตุที่ทำให้เกิดปัญหาร้ายแรงเนื่องจากโดยทั่วไปผู้วิจัยมักจะประมาณค่าพารามิเตอร์

ด้วยวิธีการ maximum likelihood (และเป็น default ของโปรแกรมสำเร็จรูปเช่น AMOS, LISREL) ซึ่งมีฟังก์ชั่น ดังนี้ (Joreskog and Sorbom, 1989 : 19)

$$F = \log|\Sigma| + tr(s\Sigma^{-1}) - \log|s| - (p+q)$$

เมื่อ p+q คือจำนวนตัวแปรสังเกต, **S** คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง Σ คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรและ tr คือผลรวมค่าตามแนวทแยงของเมทริกซ์ (trace) จากฟังก์ชั่นข้างต้น หากเราเข้าใจนิยามของความไม่เป็นบวกแน่นอนของเมทริกซ์แล้ว จะเห็นได้ชัดเจนว่าปัญหาของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีนี้ จะอยู่ที่การหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของ Σ เนื่องจากการหาเมทริกซ์ผกผันนั้นต้องอาศัยค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์เดิมเป็นตัวหาร (อ่านใน Bolten, 1989 : 460-461 เกี่ยวกับการหาเมทริกซ์ผกผัน) และหากเมทริกซ์เดิมไม่เป็นบวกแน่นอน (มีค่าดีเทอร์มิแนนท์เท่ากับ 0) ไม่ว่าจะด้วยเหตุใดดังที่ได้กล่าวแล้ว ก็ไม่อาจหาเมทริกซ์ผกผันได้ กระบวนการประมาณค่าพารามิเตอร์ก็ไม่อาจกระทำได้

ในบางครั้งผู้วิจัยไม่อาจใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย maximum likelihood (ML) เนื่องจากวิธีการดังกล่าวมีข้อตกลงเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวแปรที่จะต้องเป็น multivariate normal distribution (อ่านใน ธีรเดช ฉายอรุณ, 2540 : 46-63 เพื่อศึกษารายละเอียดของการแจกแจงชนิดนี้) ดังนั้นผู้วิจัยอาจใช้การประมาณค่าด้วยวิธีอื่น ได้แก่ generalized least square (GLS) ซึ่งมีฟังก์ชั่นดังนี้ (Joreskog and Sorbom, 1989 : 19)

$$F = \tfrac{1}{2} tr[(I - S^{-1}\Sigma)^2]$$

จากฟังก์ชั่นข้างต้น จะเห็นว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี GLS ก็มีปัญหาที่จะต้องคำนวณเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง และหากเมทริกซ์ดังกล่าวไม่เป็นบวกแน่นอนแล้ว ก็ไม่อาจหาเมทริกซ์ผกผันได้ ส่งผลให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่อาจกระทำได้เช่นเดียวกัน

2. ทำการวิเคราะห์สมการโครงสร้างได้ แต่ผลการวิเคราะห์ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากเกิดปัญหาโมเดลขาดความกลมกลืน หรือไม่สามารถกำหนดค่าเพียงหนึ่งเดียวให้กับบางเมทริกซ์ได้ (unidentify problem) สาเหตุอาจมาจากการระบุโมเดล รวมทั้งการกำหนดค่าตั้งต้นที่ไม่เหมาะสม ซึ่งในกรณีนี้แม้ว่าจะได้ผลการวิเคราะห์ออกมา เช่น ได้ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย หรือค่าน้ำหนักองค์ประกอบ แต่การวิเคราะห์ยังไม่สมบูรณ์ โดยเฉพาะในส่วนของการวิเคราะห์ส่วนที่เหลือ (residual analysis) และการปรับปรุงโมเดลจะไม่แสดงผลออกมาให้ จึงยังไม่อาจนำผลที่ได้ไปตีความได้

การแก้ปัญหาเมทริกซ์ไม่เป็นบวกแน่นอน

ในตอนนี้จะได้นำเสนอวิธีการแก้ไข เมื่อผู้วิจัยประสบกับปัญหาความไม่เป็นบวกแน่นอนของเมทริกซ์ โดยจะพิจารณาที่สาเหตุของปัญหาที่ได้กล่าวแล้วทีละสาเหตุ ดังนี้

1. ตรวจสอบเรื่องความถูกต้องของการพิมพ์ข้อมูลนำเข้า เนื่องจากเป็นสิ่งที่ผู้วิจัยสามารถทำได้ไม่ยาก และไม่เกี่ยวข้องกับเทคนิคการวิเคราะห์ ผู้เขียนมีความเห็นว่าการใช้ข้อมูลดิบ (data matrix) เป็นข้อมูลนำเข้านั้นเป็นสิ่งที่ถูกต้องที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ เนื่องจากยังไม่ได้จัดกระทำกับข้อมูล (อย่างเช่นที่ป้อนข้อมูลด้วยโปรแกรม SPSS for Windows แล้วถ่ายข้อมูลดิบไปยังโปรแกรม AMOS) อย่างไรก็ตามวิธีการนี้มีโอกาสอย่างมากที่จะเกิดความผิดพลาดทางการพิมพ์ และการตรวจสอบก็ค่อนข้างจะเสียเวลามาก ดังนั้นเพื่อให้เป็นการเหมาะสมจึงควรใช้เมทริกซ์สหสัมพันธ์หรือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมก็จะทำให้การตรวจสอบเป็นไปได้อย่างสะดวกขึ้น

2. การจัดการกับข้อมูลสูญหาย ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายไม่มากนัก ผู้วิจัยอาจตัดข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ออกไปจากการวิเคราะห์ (listwise deletion) แต่หากข้อมูลสูญหายมาก และวิธีการ pairwise deletion ก่อให้เกิดปัญหาดังได้กล่าวแล้ว ผู้วิจัยอาจเปลี่ยนวิธีการจัดการกับข้อมูลที่สูญหายด้วยวิธีการอื่น คือ ใช้ค่าอื่นมาแทนที่คนที่ไม่ตอบในตัวแปรนั้น (imputation) เช่น ใช้ค่าเฉลี่ยของตัวแปรนั้น (mean substitution) หรือประมาณค่าที่หายไปด้วย maximum likelihood ซึ่งโปรแกรม SPSS for Windows มีคำสั่งสำหรับเรื่องนี้ไว้ให้ผู้วิจัยได้ทดสอบข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ในขั้นต่อไป

3. กรณีที่ตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันสูงมาก จนเกิดปัญหา linear dependency หรือ multicolinearlity หากผู้วิจัยพบปัญหาดังกล่าว อาจเลือกตัดตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งออกไป หรือเปลี่ยนมาศึกษาโมเดลในรูปของตัวแปรแฝงแทนได้ (latent variable modeling)

4. ปัญหาที่เกิดจากการกำหนดค่าตั้งต้นหรือการที่ error variance มีค่าเป็น 0 หรือติดลบ ส่งผลให้บางเมทริกซ์ไม่สามารถจะกำหนดความเป็นค่าเดียวได้นั้น เมื่อผู้วิจัยได้รับข้อความเตือนจากโปรแกรม ก็ให้ทดลองปฏิบัติดังนี้

4.1 ตรวจสอบวิธีการกำหนดค่าตั้งต้นด้วยว่ามีความเหมาะสมหรือไม่

4.2 กรณี error variance เป็น 0 ถือว่าไม่ร้ายแรงนัก เพราะส่งผลต่อการตรวจสอบความกลมกลืนของโมเดล (admissibility check) เท่านั้น ผู้วิจัยอาจเพิ่มคำสั่งย่อย AD=OFF ลงไว้ตอนท้ายของคำสั่ง options ในโปรแกรม LISREL 8 ก็อาจจะแก้ไขปัญหาดังกล่าวได้

4.3 กรณี error variance มีค่าเป็นลบนั้น Rigdon (1997,4) เห็นว่าเป็นเรื่องร้ายแรงและต้องพยายามปรับปรุงโมเดลให้มีความสอดคล้องมากขึ้น โดยอาจต้องเริ่มตั้งแต่การระบุโมเดลใหม่ (specified model) การกำหนดค่าตั้งต้นใหม่ หรือแม้แต่ลองเปลี่ยนวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ใหม่จาก maximum likelihood มาเป็น generalized least square

สรุป

จากที่กล่าวมาทั้งหมด อาจเป็นข้อสังเกตได้ว่า ปัญหาการไม่เป็นบวกแน่นอนของเมทริกซ์ (Nonpositive definite matrix) อาจเกิดจากสาเหตุได้หลายประการ ตั้งแต่เรื่องง่าย ๆ ที่ไม่ซับซ้อน เช่น ปัญหาการพิมพ์ ไปจนถึงสาเหตุที่ค่อนข้างซับซ้อน ที่เกี่ยวกับการกำหนดความเป็นไปได้ค่าเดียวของโมเดล หรือการระบุโมเดล นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อใดที่ผู้วิจัยศึกษาโมเดลตัวแปรแฝง ปัญหาดังกล่าวก็จะทวีความซับซ้อนขึ้น เนื่องจากมีเมทริกซ์เข้ามาเกี่ยวข้องเพิ่มขึ้นกว่าโมเดลตัวแปรสังเกต บางครั้งผู้วิจัยอาจต้องย้อนกลับไปพิจารณาตั้งแต่ขั้นตอนแรก คือ การระบุโมเดล (specified model) การกำหนดความเป็นไปได้ค่าเดียวของโมเดล (identification) รวมทั้งการกำหนดวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม เพื่อให้คำเตือนหรือข้อความแสดงความผิดพลาดหายไป การวิเคราะห์สมการโครงสร้างจะมีความสมบูรณ์เพื่อที่ผู้วิจัยจะได้ทำการปรับปรุงโมเดลต่อไปได้

เพิ่มเติม

1. ผู้ที่สนใจเรื่องนี้ ผู้เขียนขอแนะนำงานเขียนของ Worthke (1993, 256-293) ซึ่งอธิบายเรื่องนี้ได้อย่างครอบคลุมที่สุด

2. หากผู้อ่านมีปัญหาเกี่ยวกับการวิเคราะห์โมเดลสมการโครงสร้าง สามารถเขียน e-mail ไปขอคำแนะนำได้ที่ techsupport@ssicentral.com ซึ่งเป็นบริษัทที่ผลิตโปรแกรมสำเร็จรูป LISREL หรืออาจเขียนมาและเปลี่ยนความเห็นกับผู้เขียนได้ที่ teradech@alpha.tu.ac.th

เอกสารอ้างอิง

Bollen, K.A. (1989). ***Structural equations with latent variables.*** New York : John Wiley & Sons.

Joreskog, K.G. and Sorbom, D. (1989). ***LISREL 7.0 User's reference guide.*** Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.

Joreskog, K.G. and Sorbom, D. (1993). ***LISREL 8. Structural equation modeling with the SIMPLIS command language,*** Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.

Rigdon, E. Positive definite matrix. Site: ***http://www.ssicentral.com/lisrel/posdef.htm.***

Worthke, W. (1993). Nonpositive definite matrix in structrual modeling. In K.A.Bollen and J.S.Long (Eds.), ***Testing Structural equation models.*** California : Sage publication.

ธีรเดช ฉายอรุณ. (2540). ข้อตกลงใน MANOVA และ Discriminant analysis : สาระสำคัญ การทดสอบ และแนวทางแก้ไข. ***วารสารวิธีวิทยาการวิจัย. 10(2)***, 46-63.