บทที่ 2

โมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ (Age - adjusted effective modulus)

2.1 ความนำ

โมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ(4) เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพสูง และมีความถูกต้องมาก(2) ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่เวลาใดๆ ภายใต้ผลของการคืบ(Creep) ในคอนกรีต

2.2 วิธีโมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ

โมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ สามารถหาได้ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้ เมื่อหน่วยแรงกระทำอยู่ในช่วงใช้งาน และ ไม่มีการผันกลับของความเครียด (Strain reversals) ความเครียดจะแปรผันโดยตรงกับความเค้น ดังนั้นโดยหลักการรวมกันเชิงเส้น (Linear principle of superposition) ความเครียดที่เวลาใด ๆ สามารถเขียนเป็นสมการในรูปของเวลาได้ดังนี้

$$\epsilon(t) - \epsilon^{\circ}(t) = \int_{0}^{t} J(t,t')\,d\sigma(t') \qquad (2.1)$$

เมื่อ $\epsilon^{\circ}(t)$ = ความเครียดที่ไม่ขึ้นกับหน่วยแรงกระทำ (Stress - independent strain) ซึ่งในงานวิจัยนี้หมายถึงการหดตัว

$\epsilon(t)$ = ความเครียดทั้งหมดที่เวลา t

t = เวลานับตั้งแต่วันที่หล่อคอนกรีต

t' = เวลาที่มีแรงมากระทำ

$$J(t,t') = \left[\frac{1 + \phi(t,t')}{E(t')} \right]$$

= ฟังก์ชันการคืบ(Creep function) = ความเครียดที่เวลา t เนื่องจากความเค้น 1 หน่วยกระทำที่เวลา t'

$\phi(t,t')$ = สัมประสิทธิ์การคืบ (Creep coefficient)

= อัตราส่วนระหว่างความเครียดคืบ ต่อความเครียดทันทีทันใด

$\sigma(t')$ = ความเค้นที่เวลา t'

จากสมการที่ 2.1 เมื่อมีความเค้นแรกเริ่ม ,$\sigma(t_o)$, กระทำที่เวลา t_o และมีความเค้นที่แปรตามเวลากระทำต่อเนื่องแล้ว ความเครียดที่เกิดขึ้นจะเป็น

$$\epsilon(t) - \epsilon^o(t) = \frac{\sigma(t_o)}{E(t_o)}[\,1 + \phi(t,t_o)\,] + \int_{t_o}^{t} \frac{[1 + \phi(t,t')]}{E(t')}\,d\sigma(t') \qquad (2.2)$$

Trost(2) เขียนสมการที่ (2.2) ในรูปที่ง่ายขึ้นโดยอยู่ในเทอมของสัมประสิทธิ์อายุ

$$\epsilon(t) - \epsilon^o(t) = \frac{\sigma(t_o)}{E(t_o)}[\,1 + \phi(t,t_o)\,] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_o)}{E(t_o)} * [\,1 + \chi(t,t_o)\phi(t,t_o)\,] \qquad (2.3ก)$$

โดยที่ $\chi(t,t_o)$ = สัมประสิทธิ์อายุ (Aging - coefficient) (ซึ่งมีค่า < 1) หาได้จากการเทียบเทอมสุดท้ายในสมการ (2.2) และ (2.3ก) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\chi(t,t_o) = \frac{E(t_o)}{\phi(t,t_o)[\sigma(t) - \sigma(t_o)]} \int_{t_o}^{t} \frac{[1 + \phi(t,t')]}{E(t')}\,d\sigma(t') - \frac{1}{\phi(t,t_o)} \qquad (2.3ข)$$

เขียนสมการที่ (2.3ก) ใหม่ในลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดที่เพิ่มขึ้นจะได้

$$\epsilon(t) - \epsilon^{\circ}(t) = \frac{\sigma(t_{o})}{E(t_{o})}[\ 1 + \phi(t,t_{o})\ ] + \frac{\Delta\sigma(t)}{E''(t,t_{o})} \tag{2.4}$$

เมื่อ $$E''(t,t_{o}) = \frac{E(t_{o})}{1+ \chi(t,t_{o})\phi(t,t_{o})} \tag{2.5}$$

= โมดูลัสเทียบเท่าปรับแก้อายุ (Age - adjusted effective modulus)

จัดสมการที่ (2.4) ใหม่ได้

$$\Delta\sigma(t) = E''(t,t_{o})[\ \Delta\epsilon(t) - \Delta\epsilon''(t)] \tag{2.6}$$

เมื่อ $$\Delta\sigma(t) = \sigma(t) - \sigma(t_{o}) \tag{2.7}$$

$$\Delta\epsilon(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t_{o}) \tag{2.8}$$

$$\Delta\epsilon''(t) = \frac{\sigma(t_{o})}{E(t_{o})}\ \phi(t,t_{o}) + \epsilon^{\circ}(t) - \epsilon^{\circ}(t_{o}) \tag{2.9}$$

= ความเครียดไม่ยืดหยุ่นสมมติ(Ficticious inelastic strains)

สมมุติว่ากำหนดความเครียด 1 หน่วย กระทำคงที่ ตั้งแต่เวลา t_{o} จนถึง t นั่นคือ $\epsilon(t) = \epsilon(t_{o}) = 1$, โดยคำจำกัดความ ความเค้นที่เกิดขึ้นจะเป็นฟังก์ชันการคลายตัว (Relaxation function) ในกรณีนี้เราจะหาค่า $E''(t,t_{o})$ ในเทอมของฟังก์ชันการคลายตัว ได้จากสมการที่ (2.6) และ (2.9) ได้ผลซึ่งเสนอโดย Bazant(4) คือ

$$E''(t,t_{o}) = \left[\ \frac{E(t_{o}) - ER(t,t_{o})}{\phi(t,t_{o})}\ \right] \tag{2.10}$$

โดยที่ $ER(t,t_o)$ = ความเค้นที่เวลา t เมื่อ ความเครียด 1 หน่วย กระทำที่

เวลา t_o = ฟังก์ชันการคลายตัว

เพราะฉะนั้นจาก สมการ (2.5) และ (2.10) สัมประสิทธิ์อายุ χ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\chi(t,t_o) = \left[1 - \frac{ER(t,t_o)}{E(t_o)} \right]^{-1} - \frac{1}{\phi(t,t_o)} \qquad (2.11)$$

= สัมประสิทธิ์อายุ (Ageing - coefficient)

สมมุติว่า ความเครียดที่เวลาใด ๆ แสดงไว้ด้วยสมการเส้นตรงดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \epsilon(t) - \epsilon^{o}(t) &= \epsilon_o + \epsilon_1 \phi(t,t_o) && \text{เมื่อ } t>t_o \\ \sigma(t) &= 0 && \text{เมื่อ } 0<t<t_o \end{aligned} \qquad (2.12)$$

เมื่อ ϵ_o, ϵ_1 = ค่าคงที่(constants)

แทนค่าสมการ (2.7),(2.8),(2.9),(2.10) และ (2.12) ใน (2.6) และให้ $\sigma(t_o)/E(t_o) = \epsilon_o$ จะได้

$$\sigma(t) = \sigma(t_o) + [E(t_o) - ER(t,t_o)](\epsilon_1 - \epsilon_o) \qquad (2.13)$$

แทนค่าสมการ (2.12) และ (2.13) ลงในสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\epsilon_o + \epsilon_1[E(t_o)J(t,t_o) - 1] = J(t,t_o)\sigma(t_o) - (\epsilon_1 - \epsilon_o) \int_{t_o}^{t} J(t,t') \frac{\partial ER(t,t')}{\partial t'} dt' \qquad (2.14)$$

จัดเทอมใหม่จะได้ว่า

$$J(t,t_o)E(t_o) + \int_{t_o}^{t} J(t,t')\frac{\partial ER(t,t')}{\partial t'}dt' = 1 \qquad (2.15)$$

โดยวิธีการเชิงเลข (Numerical method) ค่า $ER(t,t_o)$ สามารถหาจากสมการ (2.15) ได้โดยใช้กฎแทรปิซอยล์เดิล (Trapezoidal rule)

$$\Delta ER_r = \frac{-2}{[J_{r,r} + J_{r,r-1}]} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2}\Delta ER_s (J_{r,s} + J_{r,s-1} - J_{r-1,s} - J_{r-1,s-1}) \qquad (2.16)$$

โดยที่ $\Delta ER_r = ER(t_r,t_o) - ER(t_{r-1},t_o)$ (2.17)

$J_{r,s} = J(t_r,t_s)$

และค่าเริ่มต้น $ER_1 = E(t_o)$

$r = 2,3,4...$

เมื่อได้ค่า $ER(t,t_o)$ ก็สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์อายุ ,χ, ซึ่งค่า χ จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0.5-1(4) ดังนั้นความหมายทางกายภาพของค่า χ สามารถอธิบายได้ 2 ลักษณะ(2) คือ การคืบเนื่องจากหน่วยแรงที่ค่อยๆ เปลี่ยนแปลงจาก 0 มาเป็น $\sigma(t)$,รูปที่ 2.1, จะมีค่าเป็นเพียงแฟคเตอร์ χ ของการคืบเนื่องจาก $\sigma(t)$ กระทำคงที่ตั้งแต่ต้น , รูปที่ 2.2 หรือกล่าวอีกลักษณะหนึ่งซึ่งมีผลเหมือนกันคือการคืบเนื่องจากหน่วยแรงที่ค่อยๆเปลี่ยนแปลง จะมีค่าเท่ากับการคืบเนื่องจากหน่วยแรงขนาดคงที่ $\chi\,\sigma(t)$ กระทำที่เวลา t จนถึง t_o (ดูรูปที่ 2.3)