บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ของกังหันลมแนวนอน

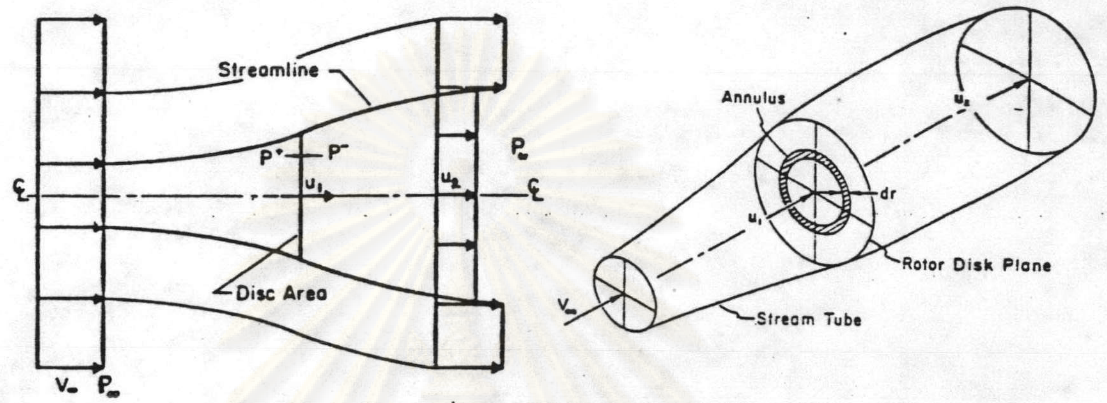
ในการออกแบบหรือวิเคราะห์กังหันลมขึ้นตัวหนึ่ง สิ่งที่จะต้องนำมาพิจารณาโดยหลักใหญ่ ๆ คือ 1. ความเร็วลมเฉลี่ยในบริเวณที่ติดตั้ง (เลือกสถานที่ติดตั้ง) 2. กำลังงาน (Power) ที่ต้องการ 3. การออกแบบ rotor 4. โครงสร้างของ rotor และโครงสร้างตัวหอกังหันลม (tower) จะเห็นได้ว่าสิ่งที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมดนี้ ต่างเกี่ยวข้องกับอากาศพลศาสตร์ของกังหันลมอยู่ทั้งนั้น เพราะจากทฤษฎีทางอากาศพลศาสตร์ เราจะสามารถคำนวณหาค่าคิเนเมติกส์ แรง โมเมนต์ และกำลังที่เกิดขึ้นบนตัวกังหันอันเนื่องมาจากการที่อากาศไหลผ่านตัดกับใบกังหันที่หมุนอยู่ได้ จากข้อมูลเหล่านี้ก็จะนำมาคำนวณหา และเลือกชนิดของวัสดุที่มาทำใบกังหัน เลือกแบบของใบกังหัน เลือกมุมบิด เลือกขนาดกว้างของใบกังหัน เพื่อให้ได้สมรรถนะสูงสุด และมีโครงสร้างแข็งแรงพอเพียง เมื่อทราบค่าของแรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนโรเตอร์ ก็สามารถนำมาเป็นข้อมูลในการคำนวณโครงสร้างของหอกังหันได้ ดังนั้นการศึกษาอากาศพลศาสตร์ของกังหันลมจึงนับว่าเป็นปัจจัยสำคัญยิ่งอย่างหนึ่งในการออกแบบหรือวิเคราะห์กังหันลม

2.1.1 พลังงานที่สามารถดึงออกจากลม

ในเชิงคณิตศาสตร์แล้ว พลังงานที่มีอยู่ในลมจะสามารถเขียนออกมาอยู่ในรูปของพลังงานจลน์, $(1/2)\rho V_{\infty}^2$ ได้ เมื่อ V_{∞} เป็นอัตราเร็วของลม และ ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ และอัตราของพลังงานที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการไหลของลม จะมีค่าเท่ากับ $(1/2)\dot{m}V_{\infty}^2$ หรือ $(1/2)\rho AV_{\infty}^3$ ซึ่งในทางอุดมคติแล้วเราจะสามารถดึงเอากำลัง (power) ออกจากกระแสลมได้มากที่สุดเพียง 16/27 ของอัตราพลังงานลมที่มีอยู่ $(1/2\rho AV_{\infty}^3)$ แต่ในเชิงปฏิบัติแล้ว เราจะสามารถดึงเอากำลังออกไปใช้งานได้มากที่สุด ประมาณ $(5/27)\ \rho AV_{\infty}^3$ เท่านั้น ส่วนที่สูญเสียไปนั้นเกิดจากการสูญเสียทางอากาศพลศาสตร์ และการสูญเสียในเชิงประสิทธิภาพทางไฟฟ้า และประสิทธิภาพทางกลของระบบ จากตัวเลขของกำลังสูงสุดนี้ จะเห็นได้ว่าการเลือกสถานที่ติดตั้งที่มีลมแรง (อัตราเร็วของลมมีค่ามาก) นั้นนับเป็นปัจจัยที่สำคัญที่สุดในการนำเอาพลังงานจากลมมาใช้ให้มากที่สุด เพราะไม่ว่าจะประดิษฐ์กังหันลมให้มีประสิทธิภาพสมบูรณ์แบบแค่ไหน แต่ถ้าลมมีความเร็วต่ำ พลังงานจากลมก็จะมีค่าต่ำลงอย่างมาก เนื่องจากกำลังที่ดึงออกจากลมนั้นเป็นสัดส่วนกำลังสามของอัตราความเร็วลม (V_{∞}^3)

2.1.2 ทฤษฎีโมเมนตัมตามแนวแกน (Axial momentum theory)

ทฤษฎีโมเมนตัมตามแนวแกน เป็นทฤษฎีเบื้องต้นที่สุด ที่ใช้ในการคำนวณค่าแรงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมในแนวของการไหลของลำอากาศที่พัดผ่านตัวกังหัน ทฤษฎีนี้ได้ถูกพัฒนามาจากทฤษฎี แผ่นแอ็คชูเอเตอร์ Actuator disk ของเฮลิคอปเตอร์ ซึ่งถูกคิดค้นขึ้นโดย Rankine และ Froude และต่อมาได้ถูกพัฒนาเพิ่มเติมโดย Betz และ Glauert ในช่วง ค.ศ. 1920



รูปที่ 2.1 ลำอากาศของกันหันลม

รูปที่ 2.1 แสดงถึงการไหลของลำอากาศผ่านตัวกังหันลม ลมที่พัดเข้าหา rotor ของกังหันลมจะถูกชลอให้ช้าลงจากความเร็วต้นทาง V_∞ ลงเป็นความเร็ว U_1 ที่ rotor และ U_2 ที่ปลายทาง ความดันด้านหน้า rotor เท่ากับ P^+ และด้านหลัง rotor เท่ากับ P^- ทฤษฎีโมเมนตัมตามแนวแกนที่ใช้กับลำอากาศจะอยู่ภายใต้สมมติฐานต่อไปนี้ คือใบกังหันหมุนโดยไม่มีการสูญเสียจากแรงเสียดทาน (drag force) ความดันในลำอากาศที่ตำแหน่งที่มีความเร็ว U_2 มีค่าเท่ากับความดันอากาศที่ตำแหน่งต้นทาง P_∞ และไม่มีการหมุนของอากาศด้านหลัง rotor

เราสามารถแสดงค่าแรง thrust จากสมการโมเมนตัม ได้ดังนี้ คือ

$$T = \rho A U_1 (V_\infty - U_2) \qquad (2.1)$$

ค่าแรง thrust จากผลต่างของความดันมีค่าเท่ากับ

$$T = A(P^+ - P^-) \qquad (2.2)$$

จากสมการเบอร์นูลี่

$$1/2\, \rho V_\infty^2 + P_\infty = 1/2\, \rho U_1^{\,2} + P^+ \qquad (2.3)$$

$$1/2\, \rho U_2^{\,2} + P_\infty = 1/2\, \rho U_1^{\,2} + P^- \qquad (2.4)$$

จากสมการ (2.1), (2.2), (2.3) และ (2.4)

$$u_1 = \frac{V_\infty + U_2}{2} \qquad (2.5)$$

ถ้ากำหนดให้ $U_1 = V_\infty (1-a)$ โดย a = แฟคเตอร์เหนี่ยวนำตามแนวแกนนอน (axial induction factor) แล้ว ความเร็วของลำอากาศด้านหลัง (wake) จะมีค่าเท่ากับ

$$U_2 = V_\infty (1-2a) \qquad (2.6)$$

เมื่อแทนค่า U_1 และ U_2 กลับไปในสมการ (2.1) แรง thrust ที่เกิดขึ้นบนลำอากาศซึ่งอยู่ในลักษณะวงแหวนกว้าง dr ที่ rotor จะมีค่าเท่ากับ

$$dT = \rho\, (2\pi r dr)\, V_\infty (1-a)(2aV_\infty) \qquad (2.7)$$

$2\pi r dr$ = พื้นที่วงแหวนของลำอากาศที่ rotor ของกังหันลม

เราสามารถคำนวณหาค่ากำลัง(power) ได้จากผลคูณของแรง(thrust) กับความเร็วลมที่ rotor, U_1 หรือ อาจคำนวณได้จากอัตราของพลังงานจลน์ $\rho AU_1 \cdot (V_\infty^2/2 - U_2^2/2)$ จากค่าของ U_1 และ U_2 ในสมการ (2.5) และ (2.6) ค่าของกำลังสามารถแสดงเป็น

$$\text{Power} = 1/2\, \rho A V_\infty^3 \; 4a(1-a)^2 \tag{2.8}$$

กำลังในรูปของสัมประสิทธิ์ของกำลังจะมีค่า

$$C_p = \frac{\text{Power}}{1/2\, \rho A V_\infty^3} = 4a(1-a)^2 \tag{2.9}$$

จากสมการ (2.9) จะสามารถหาค่า C_p ที่มีค่าสูงสุดได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 16/27 หรือ 0.593 เมื่อ a = 1/3 ซึ่งค่า $C_{p\ max}$ นี้ก็คือ ขอบเขตของ Betz นั่นเอง

2.1.3 ผลสืบเนื่องจากลำอากาศหมุนหลังโรเตอร์ (Effect of wake rotation)

ในความเป็นจริงแล้วเมื่อลมพัดผ่าน rotor ของกังหันลมซึ่งกำลังหมุนอยู่ ลำอากาศด้านหลังก็จะหมุนสวนทิศกับการหมุนของใบกังหันด้วย เนื่องจากมีการถ่ายเทโมเมนตัมเชิงมุม จากกังหันลมสู่ลำอากาศด้านหลัง การหมุนของลำอากาศนี้จะทำให้กำลังที่ได้จากกังหันลมลดน้อยลง เพราะต้องสูญเสียกำลังส่วนหนึ่งไปในรูปของกำลังงานที่ใช้ในการหมุนลำอากาศ (wake rotational energy)

Glauert เป็นผู้ที่ริเริ่มวิเคราะห์ทฤษฎี แผ่นเอ็คชูเตอร์ ของเฮลิคอปเตอร์ โดยพิจารณาลำอากาศหมุนทางด้านหลังเข้าไปด้วย ซึ่งผลของการวิเคราะห์นี้ถูกนำมาดัดแปลงพัฒนาให้ใช้กับกังหันลม ดังที่แสดงในเอกสารอ้างอิง [1,3,4,5] จากผลวิเคราะห์พอสรุปได้ว่า ค่า axial induction factor ของกังหันลม สามารถแสดงในรูปของ

$$a = b/2 \ [1 - (1-a)b^2 / 4X^2 \ (b-a)] \qquad (2.10)$$

เมื่อ b คือ แฟคเตอร์เหนี่ยวนำตามแนวแกนของลำอากาศด้านหลัง (wake axial induction factor),

$b = 1 - U_2 / V_\infty$ หรือ $U_2 = V_\infty \ (1-b)$

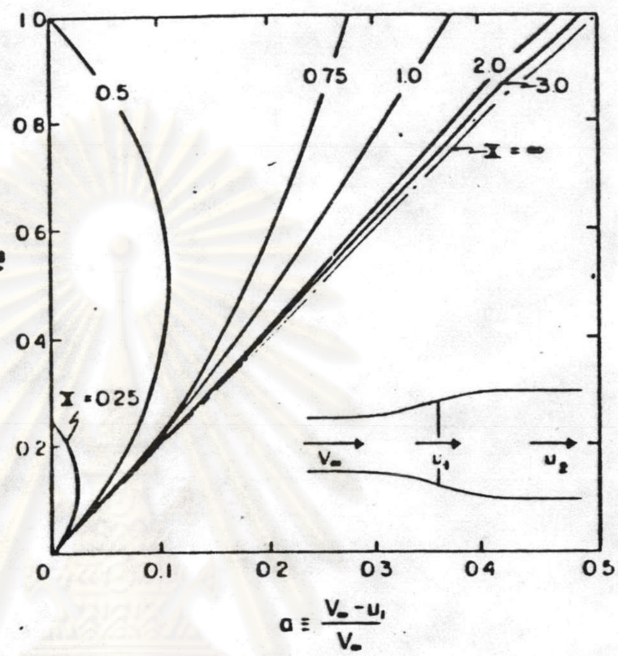
คือ ความเร็วเชิงมุม rotor กังหันลม

R คือ รัศมีของ rotor

X คือ อัตราส่วนความเร็วที่ปลายใบ (tip speed ratio)

$$X = R \, \Omega / V_\infty$$

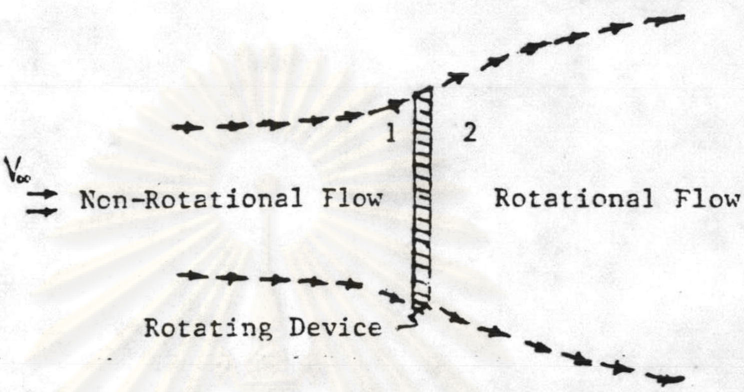
ค่า a ในสมการ (2.10) นี้ ถูกเขียนขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่ว่า โมเมนตัมเชิงมุมของลำอากาศด้านหลัง rotor มีค่าคงที่ (irrotational vortex, $r^2 \omega$ = คงที่) และความดันของลำอากาศที่ตำแหน่งที่มีความเร็วเท่ากับ U_2 จะมีค่าเท่ากับความดันที่ตำแหน่งต้นทาง, P_∞ จากการหาความสัมพันธ์ a กับ b ในรูปที่ 2.2 จะเห็นได้ว่า เมื่อ $X = \infty$, $b = 2a$ พอดี ซึ่งค่า $X = \infty$ หมายความถึงกังหันลมจะหมุนเร็วมากจน rotor ของกังหันลมจะมีลักษณะคล้ายกับแผ่นแอ็คชูเอเตอร์ ซึ่งผลที่ได้จะมีค่าเท่ากับผลที่ได้จากการใช้ทฤษฎีโมเมนตัมตามแนวแกน และเมื่อค่า $X > 2$ ค่า b จะมีค่าแตกต่างไปจาก 2a เพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่เมื่อ $X < 1$ ค่า b จะแตกต่างจากค่า 2a มาก ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่า ในกรณีที่กังหันลมหมุนด้วยอัตราส่วนความเร็วปลายใบมากกว่า 2 ขึ้นไป เราสามารถใช้ค่าแฟคเตอร์เหนี่ยวนำของลำอากาศด้านหลัง (wake induction factor), b เท่ากับ 2a ได้ดังรูปที่ (2.2)



รูปที่ 2.2 ผลของอัตราส่วนความเร็วปลายใบที่มีต่อแฟคเตอร์เหนี่ยวนำ

2.1.4 ทฤษฎีโมเมนตัมสำหรับลำอากาศหมุน (Momentum theory for a rotating wake)

เราสามารถดัดแปลงทฤษฎีโมเมนตัมตามแนวแกน เพื่อให้สามารถวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกังหันลม ที่มีลำอากาศหมุนได้ ดังรูปที่ 2.3 โดยการตั้งสมมติฐานให้ลำอากาศด้านหลัง rotor นั้น หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ซึ่งค่า ω นี้จะมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับค่าความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์, Ω



รูปที่ 2.3 ไดอะแกรมการไหลของกังหันลมที่มีอากาศหมุนด้านหลัง

กำหนดให้ค่า angular induction factor, a' มีค่าเท่ากับ

$$a' = \frac{\text{ความเร็วเชิงมุมของอากาศที่ rotor}}{\text{สองเท่าของความเร็วเชิงมุมของ rotor}} = \omega / 2\Omega$$

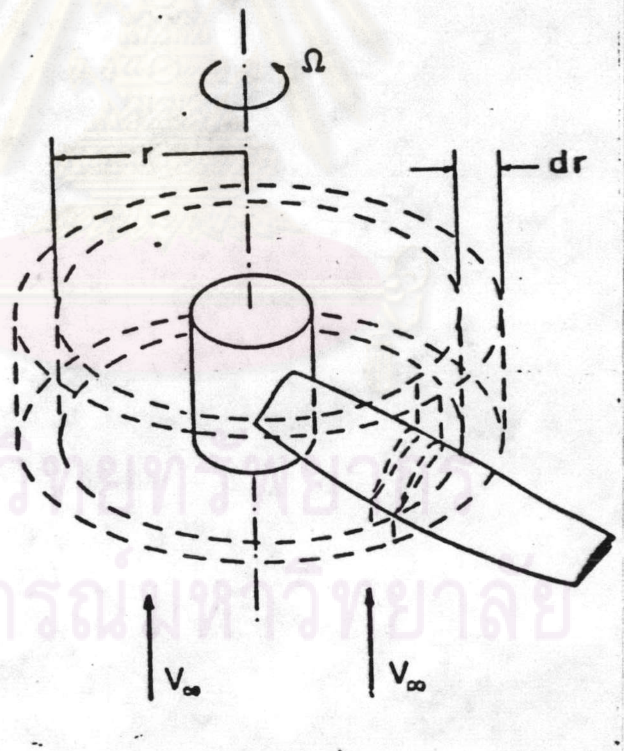
จากปริมาตรควบคุม (control volume) ของลำอากาศรูปวงแหวน รูปที่ 2.4 เราจะสามารถเขียนสมการโมเมนต์ของโมเมนตัมของลำอากาศเป็น

$$dQ = d\dot{m}\,(V_t r) = \rho\, U_1\, (2\pi r dr)\, (\omega r^2)$$

$$= 4\pi r^3\, \rho\, V_\infty\, (1-a)\, a'\, dr \tag{2.11}$$

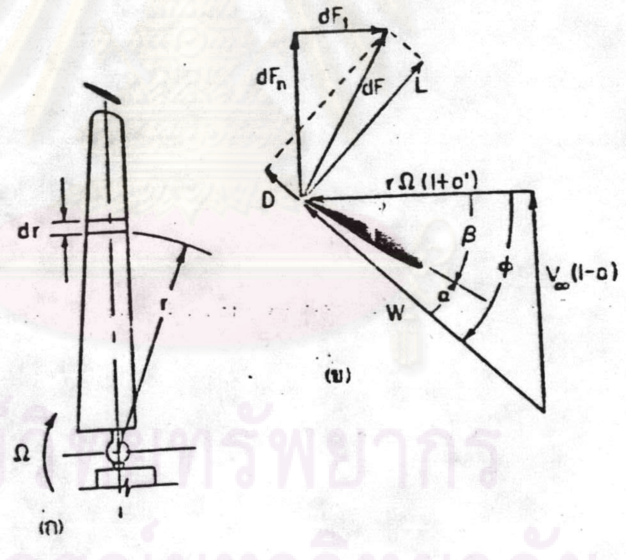
2.1.5 ทฤษฎีอีลีเมนท์ของใบ (Blade element theory)

ทฤษฎีอีลีเมนท์ของใบ ก็คือ ทฤษฎีทางอากาศพลศาสตร์ ที่ใช้คำนวณหาค่าแรงที่เกิดขึ้นบนส่วนเล็ก ๆ ของใบแต่ละส่วน (blade element section) โดยมีสมมุติฐานที่ตั้งไว้ว่า แรงที่เกิดขึ้นบนแต่ละส่วนของใบจะมีแค่แรงยก และแรงหน่วงเท่านั้น และสิ่งที่เกิดขึ้นบนส่วนของใบแต่ละส่วน (หรือวงแหวนของลำอากาศบนส่วนของใบ) จะไม่ส่งผลกระทบต่อสิ่งที่เกิดขึ้นบนส่วนของใบส่วนถัดไป ดังนั้นถ้าเราสามารถหาแรง และ โมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนส่วนของใบเล็ก ๆ (differential element of the blade) ทั้งหมดได้ ก็จะหาแรง และโมเมนต์ทั้งหมดได้โดยการอินทิเกรตตลอดความยาวของใบกังหัน



รูปที่ 2.4 อีลีเมนต์ของใบกังหัน

รูปที่ 2.5 แสดงถึงลักษณะของใบกังหันลมที่มองจากด้านหน้า และจากภาพตัดขวาง จากความเร็วที่เกี่ยวข้องบนภาพหน้าตัดขวางของใบกังหันจะเห็นได้ว่า ความเร็วลมที่ใบจะถูกชะลอให้ช้าลงจากความเร็ว V_∞ ด้วยปริมาณ aV_∞ อันสืบเนื่องจากการดึงเอาพลังงานออกจากอากาศ และความเร็วของอากาศเมื่อมองจากใบพัดที่หมุนอยู่ จะมีค่าเท่ากับ $r\Omega(1+a')$ โดยมีมุม β เป็นมุมบิดของใบกังหันจากระนาบของ rotor มุม α เป็นมุมปะทะของความเร็วรวมของอากาศกับเส้น zero lift ของใบกังหัน และ $\phi = \beta + \alpha$



รูปที่ 2.5 ใบพัดกังหันพร้อมทั้งความเร็วและแรงที่เกี่ยวข้อง

ก) ภาพด้านหน้า ข) ภาคตัดขวาง

แรงที่เกิดขึ้นบนกังหันสามารถเขียนเป็นแรงย่อยในแนวตั้งฉาก และขนานกับระนาบของ rotor ได้ดังต่อไปนี้ คือ

$$dF_n = L\cos\phi + D\sin\phi \qquad (2.12)$$

$$dF_t = L\sin\phi - D\cos\phi \qquad (2.13)$$

L คือแรงยก และ D คือแรงหน่วง

ดังนั้นสำหรับกังหันลมที่มีจำนวนใบกังหันเท่ากับ B ใบ ค่าแรง thrust และ torque ที่ rotor ของใบกังหันมีค่าเท่ากับ

$$dT = Bc(1/2)\ \rho W^2 C_n\, dr \qquad (2.14)$$

$$dQ = Bc(1/2)\ \rho W^2 C_t\, r\,dr \qquad (2.15)$$

c = ความกว้างของใบกังหัน (Chord)

C_n = สัมประสิทธิ์ของแรงในแนวตั้งฉากกับระนาบของ rotor

C_t = สัมประสิทธิ์ของแรงในแนวขนานกับระนาบของ rotor

W = ความเร็วรวมของอากาศที่ใบกังหัน

2.1.6 ทฤษฎีสตริป (Strip theory)

เราสามารถสร้างสมการต่าง ๆ ที่จำเป็นในการคำนวณหาค่าสมรรถนะของกังหันลม โดยการนำค่าแรง และโมเมนต์ที่คำนวณได้จากทฤษฎีโมเมนตัม มาเทียบเท่ากับค่าแรง และโมเมนต์ที่คำนวณได้จากทฤษฎีอีลีเม้นท์ของใบ นำสมการ (2.7) และ (2.11) มาเท่ากับสมการ (2.14) และ (2.15) โดยให้ค่าแรงหน่วง (D) ในสมการ (2.14) และ (2.15) เท่ากับศูนย์ เพื่อให้สอดคล้องกับสมมติฐานที่ใช้ในการหาแรงและโมเมนต์จากทฤษฎีโมเมนตัม และแทนค่า $W\sin\phi = V_\infty(1-a)$ จะได้สมการ ต่อไปนี้คือ

$$a/(1 - a) = \sigma C_L \cos\phi / (4 \sin^2\phi) \quad (2.16)$$

$$a'/(1 + a') = \sigma C_L/(4 \cos\phi) \quad (2.17)$$

$$\sigma = Bc/(2\pi r) = \text{Solidity}$$

ค่า a และ a' บนแต่ละตำแหน่งของใบ สามารถหาได้โดยกระบวนการดึง ต่อไปนี้ คือ

1. สมมติค่า a และ a'
2. คำนวณค่า ϕ : $\phi = \tan^{-1} [(1-a)V_\infty / (1+a')r\Omega]$
3. คำนวณค่า α : $\alpha = \phi - \beta$
4. คำนวณค่า C_L, C_D, C_t, C_n
5. คำนวณค่า a และ a' จากสมการ (2.16) และ (2.17)
6. เปรียบเทียบค่า a และ a' ที่คำนวณได้ใหม่กับค่าเก่าถ้าเท่ากัน หรืออยู่ในขอบเขตที่กำหนดก็หยุด ถ้าไม่เท่าก็เริ่มต้นที่ข้อ 2 ใหม่ จนกระทั่งได้ค่าที่ต้องการ

2.1.7 ค่าสมรรถนะของกังหันลม

เมื่อได้ค่า a และ a' ตลอดความยาวของใบกังหันแล้ว จึงนำข้อมูลนี้ย้อนกลับไปคำนวณค่า C_n, C_t และ W ที่ตำแหน่งต่างๆ ตามต้องการได้จากข้อมูลเหล่านี้ ค่าสมรรถนะ ซึ่งประกอบด้วย ธรัสท์ (Thurst), แรงบิด (Torque) และกำลังงาน (Power) ของกังหันลม สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้ คือ

$$Q = 1/2\, \rho\, V_\infty^2\, \pi R^3 / X^2 \int_0^X (Bc/\pi R)\,(W^2/V_\infty^2)\, C_t x\,dx \qquad (2.18)$$

$$T = 1/2\, \rho\, V_\infty^2\, \pi R^2 / X^2 \int_0^X Bc/\pi R\,(W^2/V_\infty^2)\, C_n\,dx \qquad (2.19)$$

$$C_p = 8/X^2 \int_0^X x^3 a'\,(1 - a)\,dx \qquad (2.20)$$

$X = R\,\Omega/V_\infty$, $x = r\,\Omega/V_\infty$, Q = Torque, T = Thrust,

C_p = สัมประสิทธิ์กำลังงาน

2.2 การหารูปร่างใบกังหันของกังหันลมแนวนอนที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในเชิงอากาศพลศาสตร์

2.2.1 ทฤษฎีวิเคราะห์

หลักในการหารูปร่างของใบกังหัน ที่ให้มีประสิทธิภาพสูงสุดนั้น คือ การพิจารณาส่วนเล็ก ๆ (element section) ของใบกังหันลมที่จะมีรูปร่างซึ่งสามารถให้ค่ากำลังงาน (Power) สูงสุดในส่วนนั้น ๆ ที่ความเร็วที่กำหนด (ออกแบบไว้) การพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ ของกังหันลมแนวนอนจะกระทำที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของใบกังหันเรื่อยไปจนครบตลอดความยาวของใบกังหัน ก็จะได้รูปร่างของใบกังหันที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุด ในทางทฤษฎีตามต้องการ

การวิเคราะห์เริ่มต้นโดยการศึกษาลำอากาศ ซึ่งไหลผ่านส่วนของใบกังหันที่พิจารณาในความเร็วตามเงื่อนไขที่ออกแบบไว้ โดยใช้ทฤษฎีโมเมนตัมที่พิจารณาลำอากาศหมุนด้านหลัง rotor ด้วย wake rotation อัตราโมเมนตัมเชิงเส้น และอัตราโมเมนตัมเชิงมุมของลำอากาศที่ไหลผ่าน rotor ตรงส่วนของใบที่พิจารณา ในลักษณะวงแหวนซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $2\pi rdr$ จะมีค่าเท่ากับ

$dT = 4 \pi r \rho V_{\infty}^{2} (1-a) a \, dr$ (2.7)

$dQ = 4 \pi r^{3} \rho V_{\infty} \Omega (1-a) a' \, dr$ (2.11)

ρ = ความหนาแน่นของอากาศ

V_{∞} = ความเร็วของลมที่ต้นทาง

Ω = ความเร็วเชิงมุมของ rotor

a = axial induction factor

a' = angular induction factor

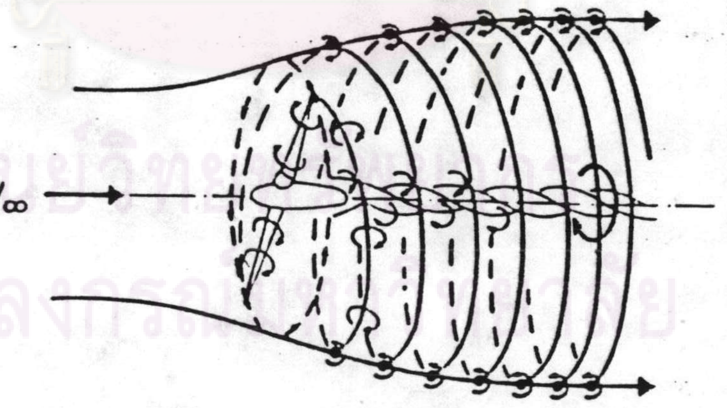
r = ความยาวในแนวรัศมีของใบกังหันวัดจากจุดศูนย์กลางของ rotor ถึงตำแหน่งที่พิจารณา

dr = ความกว้างในแนวรัศมีของส่วนของใบกังหันที่พิจารณา

สมการที่ (2.7) และ (2.11) อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่าความดันของลำอากาศที่ปลายทาง (wake) มีค่าเท่ากับความดันอากาศที่ต้นทาง, P_{∞} และมีการละเลยแรงเสียดทานเนื่องจากแรงหน่วงบนใบ และ rotor ของกังหันลมหมุนด้วยอัตราส่วนความเร็วปลายใบ (tip speed ratio) สูงพอที่สามารถจะสมมติให้ค่าปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลง (induced velocity) ตามแนวแกนของลำอากาศด้านหลัง rotor ที่ปลายทางมีค่าเท่ากับ $2aV_{\infty}$

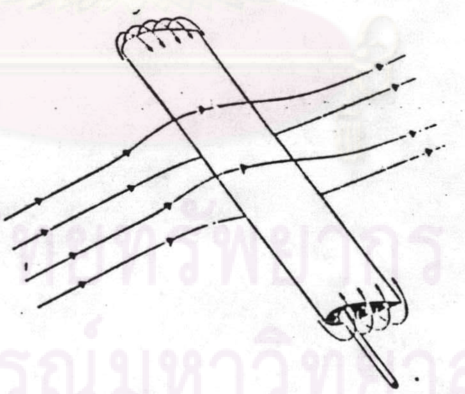
ค่าอัตราโมเมนตัมเชิงเส้น และอัตราโมเมนตัมเชิงมุม ในสมการ (2.7) และ (2.11) ซึ่งคำนวณโดยทฤษฎีโมเมนตัมนั้น เป็นค่าทางอุดมคติและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตัว rotor กังหันลมที่ใช้ในทฤษฎีโมเมนตัมนั้นมีลักษณะเป็นแผ่นแอ็คชูเอเตอร์ (actuator disk) ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว rotor ของกังหันลมเวลาหมุนจะไม่เป็นแผ่นแอ็คชูเอเตอร์ตามที่สมมติ เนื่องจากจะมีช่องว่างใน rotor จากใบกังหันใบหนึ่งไปยังอีกใบหนึ่ง ดังนั้น ค่าอัตราโมเมนตัมเชิงเส้น และอัตราโมเมนตัมเชิงมุมที่คำนวณโดยทฤษฎีโมเมนตัมจึงสูงกว่าค่าที่เป็นจริงในทางปฏิบัติแล้วจะต้องมีการแก้ไขสมการ (2.7) และ (2.11)

เพื่อให้ค่าสอดคล้องใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น การแก้ไขนี้อาจจะพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีวอร์เท็คส์ (vortex theory) วิเคราะห์ลำอากาศที่ไหลผ่านกังหันลม ลำอากาศหมุนด้านหลัง rotor จะถูกจำลองเป็นแผ่นวอร์เท็คส์ (vortex sheet) ที่ขดเป็นเกลียว โดยจะเริ่มคลื่ออกจากใบกังหันแต่ละใบ ดังรูปที่ 2.6 และจะสามารถจำลองใบกังหันโดยใช้ทฤษฎีเส้นยก (lifting line theory) เป็นเส้นตามแกนใบกังหันที่มีกลุ่มของ bound vortex เกาะอยู่อันเป็นตัวก่อให้เกิดแรงยกขึ้นในขณะที่ปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลงในลำอากาศจะเกิดจาก free vortex ซึ่งเกาะอยู่ตามแผ่นวอร์เท็คส์ทางด้านหลัง rotor ดังนั้น ค่าปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลง ($2aV_\infty$, $2a'\Omega$) ที่คำนวณโดยทฤษฎีโมเมนตัมจะเป็นค่าที่เกิดขึ้นบนแผ่นวอร์เท็คส์เท่านั้น ในขณะที่ค่าปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลงของลำอากาศที่อยู่ระหว่างแผ่นวอร์เท็คส์ จะมีอยู่น้อยกว่าที่อยู่บนแผ่นวอร์เท็คส์



รูปที่ 2.6 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลำอากาศด้านหลัง rotor

ดังนั้น เมื่อพิจารณาค่าปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอของลำอากาศทั้งหมดตามแบบทฤษฎีโมเมนตัมจึงจำเป็นต้องใช้ค่าเฉลี่ย ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้สามารถคำนวณได้หลายวิธี แต่ในการวิจัยนี้จะใช้ค่าเฉลี่ยของปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลง ซึ่ง L. Prandtl [4] เป็นผู้พัฒนาขึ้น Prandtl คำนวณหาค่าเฉลี่ยโดยใช้แฟคเตอร์ที่เขาพัฒนาขึ้น คูณกับค่าปริมาณความเร็วที่ถูกชะลอลง ที่เกิดขึ้นบนแผ่นวอร์เท็คส์ แฟคเตอร์นี้เรียกว่า แฟคเตอร์การสูญเสียที่ปลายใบ (tip loss factor), F ซึ่งความหมายทางกายภาพอีกความหมายหนึ่ง อาจสามารถมองเป็นการสูญเสียที่เกิดจากการไหลวนของอากาศตามแนวแกนใบ ดังรูปที่ 2.7 ได้



รูปที่ 2.7 การไหลวนของอากาศที่ปลายและโคนใบ

ค่าแฟคเตอร์การสูญเสียปลายใบของ Prandtl มีค่าเท่ากับ

$$F = (2/\pi) \text{ arc cos } e^{-f} \qquad (2.21)$$

เมื่อ $f = (B/2)(R-r)/ r \sin\phi$

B = จำนวนใบของกังหันลม

R = รัศมีของ rotor

ϕ = มุมรวมของอากาศที่ส่วนของใบกังหัน

ดังนั้น สมการ (2.7) และ (2.11) เมื่อพิจารณาถึงค่าสูญเสียที่ปลายใบเข้าไปด้วยแล้ว จะมีค่าเท่ากับ

$$dT/dr = 4\pi r\rho V_\infty^2 (1-a)a F \qquad (2.22)$$

$$dQ/dr = 4\pi r^3 \rho V_\infty \Omega (1-a)a' F \qquad (2.23)$$

ค่ากำลัง (Power) นั้น สามารถคำนวณได้จากผลคูณของความเร็วเชิงมุมกับอัตราโมเมนตัมเชิงมุม และค่าสัมประสิทธิ์ของกำลัง (C_p) นั้นคำนวณได้จากการนำเอาค่ากำลังหารด้วย $1/2 \rho V_\infty^3 \pi R^2$ ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ของกำลังจะมีค่าเท่ากับ

$$dC_p/dx = 8a'(1 - a) F x^3/X^2 \qquad (2.24)$$

เมื่อกลับมาพิจารณาที่ส่วนเล็ก ๆ ของใบกังหันอีกครั้ง ทฤษฎีอีลีเม้นต์ของใบ (blade element theory) จะให้ค่าแรงในแนวตั้งฉากกับระนาบ rotor และแรงบิด (torque) ของส่วนของใบกังหัน จำนวน B ส่วน จาก

สมการ (2.14) และ (2.15) คือ

$$dT = Bc\ (1/2)\ \rho W^2\ C_n\ dr$$

$$dQ = Bcr\ (1/2)\ \rho W^2\ C_t\ dr$$

และจากรูป 2.5 (ข) จะได้

$$\tan\phi = V_\infty\ (1 - a)/[r\Omega\ (1 + a)] \qquad (2.25)$$

เมื่อ

C_n = $C_L \cos\phi + C_D \sin\phi$

C_t = $C_L \sin\phi - C_D \cos\phi$

Q = แรงบิด (torque)

W = ความเร็วรวมของอากาศที่ส่วนของใบกังหัน

c = ความกว้างของใบกังหัน (chord)

B = จำนวนใบของกังหัน

C_L = สัมประสิทธิ์แรงยก

C_D = สัมประสิทธิ์แรงหน่วง

β = มุมบิดของใบกังหัน

α = มุมปะทะ

ϕ = $\beta + \alpha$

เมื่อนำค่าอัตราโมเมนตัมเชิงมุมของลำอากาศ จากสมการ (2.23) มาเท่ากับค่าแรงบิดของใบกังหัน จากสมการ (2.15) โดยละเลยแรงหน่วงตามทฤษฎีสตริป (strip theory) แล้วจะได้ค่าสัมพันธ์ ดังนี้ คือ

$$\sigma_L\ C_L/\ (8\cos\phi) = a'\ F/(1 + a') \qquad (2.26)$$

และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (2.22) และ (2.14) จะได้ ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราโมเมนตัมเชิงเส้นและแรงธรัสท์ (thrust) เป็น

$$\sigma_L C_L \cos / [8 (\sin^2\phi)] \quad = \quad aF/(1 - a) \qquad (2.27)$$

เมื่อ $\sigma_L = Bc/\pi r$

และเมื่อรวมสมการ (2.26) เข้ากับสมการ (2.27) จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$a(1 - a) \quad = \quad a'x^2(1 + a') \qquad (2.28)$$

2.2.2 ขบวนการหารูปร่างของใบกังหันที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุด

การหารูปร่างของใบกังหันนี้ [2] สามารถกระทำโดยพิจารณาจากสมการหลัก 2 สมการ คือ สมการ (2.24) และ (2.28)

$$dC_P / dx \quad = \quad 8 a'(1 - a) F (x^3/X^2) \qquad (2.24)$$

$$a(1 - a) \quad = \quad a'x^2 (1 + a') \qquad (2.28)$$

จากอัตราส่วนของความเร็วปลายใบที่กำหนด (ออกแบบไว้) ขบวนการจะเริ่มต้นที่สมการ (2.24) ที่ตำแหน่ง r ใด ๆ บนใบกังหัน ค่า dC_P/dx จะถูกคำนวณ โดยเปลี่ยนค่า a, a' และ F จนกระทั่งได้ค่า dC_P/dx สูงสุดที่ตำแหน่ง r นั้น ๆ โดยที่ค่า a, a' และ F จะต้องสอดคล้องกับสมการ (2.21) และ (2.28) ด้วย เมื่อได้ค่า a, a' และ F ที่ให้ค่า dC_P/dx สูงสุดตามต้องการแล้ว ก็จะนำค่าเหล่านี้ไปแทนค่าในสมการที่ (2.25) และ (2.26) หรือ (2.27) เพื่อที่จะหาค่า cC_L และ ϕ ที่ตำแหน่ง r นั้น ๆ

จากนั้นขบวนการคำนวณนี้ก็จะตั้งต้นใหม่อีกครั้งที่ตำแหน่งถัดไปบนใบกังหัน ขบวนการเหล่านี้จะถูกกระทำซ้ำจนกระทั่งครบตลอดความยาวของใบกังหัน โดยมีเงื่อนไขว่า ความกว้างของใบกังหันและมุมบิดของใบกังหันจะต้องมีค่าต่อเนื่องกันตลอดความยาวของใบกังหัน

สำหรับรูปร่างของใบกังหัน (รูปภาคตัดขวางของใบกังหัน และความกว้างและมุมบิดของใบกังหันที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนใบกังหัน) นั้น จะสามารถกำหนดได้โดยพิจารณาจากค่าของ cC_L และ ϕ ที่คำนวณไว้ โดยที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง เมื่อกำหนดค่าความกว้างของใบกังหัน (c) จากค่า cC_L ก็จะได้ค่า C_L ที่ต้องการ หรืออาจจะเลือกค่า C_L จากค่า cC_L ก่อนก็จะได้ค่า c ตามมา แล้วจึงนำ C_L ไปเลือกรูปภาคตัดขวางของใบกังหัน (เลือกชนิดของแพนอากาศได้) และจากค่า C_L ในตารางของข้อมูลแพนอากาศก็จะสามารถหาค่ามุมปะทะ (α) ที่ให้ค่า C_L ที่กำหนดไว้ จากนั้นจึงนำมุม α ไปลบกับมุม ϕ ที่ตำแหน่งบนใบกังหันที่พิจารณาก็จะได้ค่ามุมบิดของใบกังหัน (β) หลังจากที่ได้ค่าต่าง ๆ ครบที่ตำแหน่งหนึ่งแล้วก็เริ่มคำนวณที่ตำแหน่งถัดไปจนครบตลอดความยาวของใบกังหัน ก็จะได้รูปภาคตัดขวางของใบกังหัน ความกว้างของใบกังหัน และมุมบิดของใบกังหัน ที่มีค่าต่อเนื่องตลอดความยาวของใบกังหัน ซึ่งนั่นก็คือ รูปร่างของใบกังหัน ที่ให้ประสิทธิภาพเชิงอากาศพลศาสตร์สูงสุด