เวกเตอร์สเปซเชิงโทโปโลยีบนควอเทอเนียน

นาย อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ.2530

ISBN 974 - 567 - 403 - 6

TOPOLOGICAL VECTOR SPACES OVER THE QUATERNIONS

Mr.Anusorn Chonweerayoot

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1987

Thesis Title	Topological Vector Spaces over the quaternions
By	Mr.Anusorn Chonweerayoot
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr.Sidney S. Mitchell

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the requirements for the Master's Degree.

.... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committe

.... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit,. Ph.D.)

.... Member

(Dr.Patanee Udomkavanich, Ph.D.)

.... Member

(Dr.Sidney S. Mitchell,Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เวกเตอร์สเปซเชิงโทโปโลยีบนควอเทอเนียน
ชื่อนิสิต	นาย อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ซิดนีย์ เอส. มิทเชลล์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2529

บทคัดย่อ

ให้ X เป็นเวกเตอร์สเปซบนควอเทอเนียน เราเรียกการส่ง $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ว่า <u>พารานอร์ม</u> บน X ก็ต่อเมื่อ

(1) $\|0\| = 0$

(2) สำหรับทุกสมาชิก $x \in X$, $\|-x\| = \|x\|$

(3) สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(4) ถ้า $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับในควอเทอเนียน ซึ่ง $t_n \to t$ และ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับใน X ซึ่ง $\|x_n - x\| \to 0$ แล้วจะได้ว่า $\|t_n x_n - tx\| \to 0$

และเรียก $(X, \|\cdot\|)$ ว่า <u>พารานอร์มสเปซบนควอเทอเนียน</u>

ให้ X เป็นเวกเตอร์สเปซบนควอเทอเนียน เราเรียกการส่ง $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ ว่า <u>เซมินอร์ม</u> บน X ก็ต่อเมื่อ

(1) สำหรับทุกสมาชิก $x \in X$ และ $t \in \mathbb{H}$, $\|tx\| = |t|\,\|x\|$

(2) สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in X$, $x+y \leq \|x\| + \|y\|$

และเรียก $(X, \|.\|)$ ว่า<u>เซมินอร์มสเปซ</u> บนควอเทอเนียน

<u>เวกเตอร์สเปซเชิงโทโปโลยี</u> X บนควอเทอเนียน (TVS($\mathbb{H}$)) คือสเปซเชิงโทโปโลยี และเวกเตอร์สเปซบนควอเทอเนียนซึ่งปฏิการเชิงเวกเตอร์ต่อเนื่อง

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ (X, p) เป็นเซมินอร์มสเปซบนควอเทอเนียนและ f เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นซึ่งนิยามบนเวกเตอร์สเปซ S ของ X โดยที่ $|f(x)| \leq p(x)$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in S$ ดังนั้น f สามารถขยายไปสู่ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น F บน X ซึ่ง $|F(x)| \leq p(x)$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in X$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $(X, \|\cdot\|_1)$ และ $(Y, \|\cdot\|_2)$ เป็นเซมินอร์มสเปซบนควอเทอเนียน และให้ $T : X \rightarrow Y$ เป็นการส่งเชิงเส้น ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) T เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $a \in X$

(2) T เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X

(3) T เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนยูนิดิสก์ นั่นคือ $\|T\| < \infty$

(4) จะมีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้ $\|T(x)\|_2 \leq M \|x\|_1$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in X$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ (X, T) เป็น TVS($\mathbb{H}$) ซึ่งสามารถนับได้แบบที่หนึ่ง ดังนั้นจะมีพารานอร์ม $\|\cdot\|$ บน X ซึ่ง $T = T_{\|\cdot\|}$ เมื่อ $T_{\|\cdot\|}$ คือ โทโปโลยีซึ่งกำหนดโดยพารานอร์ม $\|\cdot\|$

<u>ทฤษฎีบท</u> ทุกๆ TVS($\mathbb{H}$) เป็นสเปซเชิงโทโปโลยีแบบเรกูลาร์อย่างบริบูรณ์

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ X เป็น TVS($\mathbb{H}$), $f \in X^{\#}$ และสมมติว่า $\ker f$ เป็นเซตปิด ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นเซมินอร์มสเปซควอเทอเนียน ดังนั้นสเปซผลหารของ X เป็นเซมินอร์มสเปซบนควอเทอเนียน

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ X เป็น TVS($\mathbb{H}$) ซึ่งสามารถแยกได้และมีมิติเท่ากับ n โดยที่ $n < \infty$ ดังนั้น X โฮมิโอมอร์ฟิกอย่างเชิงเส้นกับ $\mathbb{H}^n$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ X เป็น TVS($\mathbb{H}$) ซึ่งสามารถแยกได้และมีย่านใกล้เคียง U ของศูนย์แบบมีขอบเขตโดยสิ้นเชิง ดังนั้น X มีมิติจำกัด

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ X เป็น TVS($\mathbb{H}$) ดังนั้น $K \subseteq X$ เป็นเซตคอมแพกต์ ก็ต่อเมื่อ K เป็นเซตบริบูรณ์และมีขอบเขตโดยสิ้นเชิง

<u>ทฤษฎีบท</u> (ทฤษฎีบทการส่งเปิด)

ให้ X, Y เป็น FS($\mathbb{H}$) และให้ $f : X \to Y$ เป็นการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องจาก X ไปทั่วถึง Y ดังนั้น f เป็นการส่งเปิด

<u>ทฤษฎีบท</u> (ทฤษฎีบทกราฟปิด)

ให้ X, Y เป็น FS($\mathbb{H}$) และให้ $f : X \to Y$ เป็นการส่งเชิงเส้น พร้อมด้วยกราฟปิด G ดังนั้น f เป็นการส่งต่อเนื่องบน X

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ X, Y เป็น FS($\mathbb{H}$) และให้ f เป็นการส่งจาก X ไปทั่วถึง Y แบบเชิงเส้นพร้อมด้วยกราฟปิด ดังนั้น f เป็น การส่งเปิด และต่อเนื่อง

<u>ทฤษฎีบท</u> ทุกๆ ฐานของ FS($\mathbb{H}$) เป็นฐานชอเดอร์

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ (X, P) เป็นสเปซแบบโลคัลลี่คอนเวกซ์บนควอเทอเนียน และ $f \in S'$ เมื่อ S เป็นเวกเตอร์สับสเปซของ X ดังนั้น จะมี $F \in X'$ ซึ่ง $F = f$ บน S.

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ Φ เป็นกลุ่มของโทโปโลยีบนโลคัลลี่คอนเวกซ์บนเวกเตอร์สเปซ X บนควอเทอเนียน ดังนั้น $f \in (X, v\Phi)'$ ก็ต่อเมื่อ มี $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \Phi$ และ $g_1, g_2, \ldots, g_n \in X^{\#}$ ซึ่งทุกๆ $g_i \in (X, T_i)'$ และ $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$

Thesis Title Topological Vector Spaces over the Quaternions.

Name Mr. Anusorn Chonweerayoot

Thesis Advisor Sidney S. Mitchell, Ph.D.

Department Mathematics

Academic Year 1986

ABSTRACT

Let X be a vector space over $\mathbb{H}$. A map $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ is said to be a <u>paranorm</u> on X if and only if

(1) $\|0\| = 0$

(2) For all $x \in X$, $\|-x\| = \|x\|$

(3) For all $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(4) If $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of elements in $\mathbb{H}$ such that $t_n \to t$ and $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of elements in X such that $\|x_n - x\| \to 0$ then $\|t_n x_n - tx\| \to 0$

We call $(X, \|.\|)$ a paranorm space over $\mathbb{H}$

Let X be a vector space over $\mathbb{H}$. A map $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ is said to be a <u>seminorm</u> on X if and only if

(1) For all $x \in X$ and $t \in \mathbb{H}$, $\|tx\| = |t| \|x\|$

(2) For all $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

We call $(X, \|.\|)$ a seminorm space over $\mathbb{H}$. A topological vector space X over $\mathbb{H}$ (TVS($\mathbb{H}$)) is a topological space and a vector space over $\mathbb{H}$ such that the vector operations are continuous.

Theorem Let (X, p) be a seminormed space over $\mathbb{H}$. Let f be a linear functional defined only on a vector subspace S of X and such that $|f(x)| \leq p(x)$ for all $x \in S$. Then f can be extended to $F \in X^{\#}$ with $|F(x)| \leq p(x)$ for all $x \in X$.

Theorem Let $(X, \|\cdot\|_1)$ and $(Y, \|\cdot\|_2)$ be seminormed space over $\mathbb{H}$ and let $T : X \to Y$ be a linear map. Then the following are equivalent :

(1) T is continuous at some $a \in X$.

(2) T is continuous on X .

(3) T is bounded on the unitdisc, i.e. $\|T\| < \infty$.

(4) There exists an $M \in \mathbb{R}$ such that $\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$ for all $x \in X$.

Theorem Let (X, T) be a first countable $TVS(\mathbb{H})$. Then there exists a paranorm $\|\cdot\|$ on X such that $T = T_{\|\cdot\|}$ where $T_{\|\cdot\|}$ is the topology induced by $\|\cdot\|$.

Theorem Every $TVS(\mathbb{H})$ is a completely regular topological space.

Theorem Let X be a $TVS(\mathbb{H})$, $f \in X^{\#}$ and assume that $\ker f$ is closed. Then f is continuous on X.

Theorem Let $(X, \|\cdot\|)$ be a seminormed space over $\mathbb{H}$.

Then the quotient space of X is also a seminormed space over $\mathbb{H}$.

Theorem Let X be an n-dimensional separated $TVS(\mathbb{H})$, $n < \infty$. Then X is linearly homeomorphic with $\mathbb{H}^n$.

<u>Theorem</u> Let X be a separated TV S($\mathbb{H}$) which has a totally bounded neighberhood U of 0. Then X is finite dimensional.

<u>Theorem</u> Let X be a TV S($\mathbb{H}$). Then $K \subseteq X$ is compact if and only if K is complete and totally bounded.

<u>Theorem</u> (Open mapping theorem)

Let X, Y be F S($\mathbb{H}$)'s and let $f : X \to Y$ be linear, continuous and onto. Then f is open.

<u>Theorem</u> (Closed graph theorem)

Let X, Y be FS($\mathbb{H}$)'s. Let $f : X \to Y$ be a linear map with a closed graph G. Then f is continuous.

<u>Theorem</u> Every basis of a F S($\mathbb{H}$) is a Schauder basis.

<u>Theorem</u> Let (X, P) be a locally convex space over $\mathbb{H}$. and $f \in S'$ where S is a vector subspace of X. Then there exists an $F \in X'$ such that $F = f$ on S.

<u>Theorem</u> Let Φ be a collection of locally convex topologies on a vactor space X over $\mathbb{H}$. Then $f \in (X, v\Phi)'$ if and only if there exists $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \Phi$; $g_1, g_2, \ldots, g_n \in X^{\#}$ such that each $g_i \in (X, T_i)'$ and $f = \sum_{i=1}^{n} g_i$.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my sincere gratitude to Dr.Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for his helpful supervision during the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of lecturers for their previous valuable lectures while studying.

CONTENTS